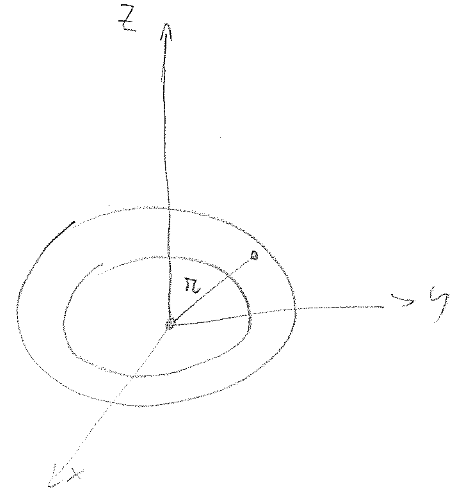
PROBLEMA A

7/1/2010

1) Il campo generato da un disco carico è stato ricavato a lezione. Qui basta cambiare gli estremi di integrazione:



$$E = \int_a^b \frac{z\,\sigma\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2+r^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{r\,dr}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(z^2+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big]_a^b =$$

$$= -\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\Big]_a^b = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}\right)$$

ed è diretto lungo l'asse z

Allo stesso risultato si arriva pensando alla corona come la sovrapposizione di due dischi, uno carico con $+\sigma$ e l'altro con $-\sigma$.

2) La minima velocità si ottiene quando l'energia cinetica iniziale viene spesa come lavoro contro il campo.

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = q\int E\,dl = -q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_h^0 z\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{1}{z^2+b^2}\right)dz =$$

$$= -q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\int 2z\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} \cdots\right)dz = q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\left[\left(z^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(z^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_h^0$$

$$= -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(a-b) - \left(\sqrt{h^2+a^2} - \sqrt{h^2+b^2}\right)\right]$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\varepsilon_0}\left[b-a+\sqrt{h^2+a^2}-\sqrt{h^2+b^2}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1.6\times10^{-19}\,C \times 2\times10^{-12}\,\frac{C}{m^2}}{1.67\times10^{-27}\,Kg \times 8.85\times10^{-12}\,F/m}\left[0.05-0.02+\sqrt{0.2^2+0.02^2}-\sqrt{0.2^2+0.05^2}\right]} \cong 8\times10^2\ m/s$$

3) $\sigma_{p1} = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 = -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \dfrac{E(z_1)}{\varepsilon_r}$

$\sigma_{p2} = \vec{P} \cdot \vec{n}_2 = +\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \dfrac{E(z_2)}{\varepsilon_r}$

$z_1 = h$
$z_2 = h + 2\,mm$

$Q_{p_1} = \sigma_{p1} \cdot A$

$Q_{p2} = \sigma_{p2} \cdot A$

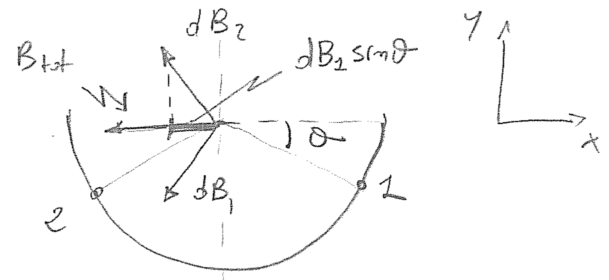
Le due cariche di polarizzazione superficiali non si compensano, rimane una carica volumica che può essere calcolata da $\rho = -\operatorname{div} \vec{P}$ o per differenza

$Q_{vol} = Q_{p_1} - Q_{p_2} =$

PROBLEMA B

1) La densità lineare di corrente è

$$\lambda = \frac{I}{L} = \frac{I}{\pi r}$$



Ogni filo infinitesimo porterà una corrente

$$di = \frac{I}{\pi r} r\, d\theta = \frac{I}{\pi} d\theta$$

(infatti l'arco infinitesimo di circonferenza è lungo $r\,d\theta$)

Considerando le simmetrie del problema, il campo risultante avrà solo componenti lungo x (quelle lungo y si annullano a due a due). La componente x del campo infinitesimo generato da uno dei fili infinitesimi è

$$dB_x = \frac{\mu_0\, di}{2\pi r} \sin\theta$$

Il campo totale è antiparallelo all'asse x e vale

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{2\pi r} \sin\theta \, \frac{I}{\pi} d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 r} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 r} \left[-\cos\theta \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 r} (1+1) = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m} \times 70\ A}{\pi^2 \times 0.25\ m} = 356 \times 10^{-7} T$$

$$= 35.6\ \mu T$$

2) Dato che il solenoide è piccolo rispetto al tubo, possiamo pensare che il campo è uniforme sulla sua superficie.
Il momento magnetico tenderà ad allinearsi con il campo: nella condizione finale l'asse del solenoide e l'asse del cilindro sono a 90°. Il momento magnetico vale

$m = N i_s \pi r_s^2$

$E = \Delta U = \Delta(-\vec{m} \cdot \vec{B}) = -mB\cos\theta_1 + mB\cos\theta_2 = mB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) =$

$N i_s \pi r_s^2 \frac{\mu_0 I}{\ldots} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$

3) $f_{em} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B\,\pi r_s^2 \cos\theta\right) =$

$$= -\pi r_s^2 \cos\theta \frac{d}{dt} \frac{\mu_0}{\pi^2 r} i_0 e^{-t/\tau} =$$

$$= i_0 \cancel{\pi} r_s^2 \cos\theta \frac{\mu_0}{\pi^{\cancel{2}} r} \frac{+1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$I_i = \frac{f_{em}}{R}$