Problema A

Un condensatore cilindrico di lunghezza L=20cm è costituito da un filo conduttore interno di raggio a=1 mm e da un guscio sottile cilindrico, anche esso conduttore, di raggio b=10 cm. Lo spazio tra i due conduttori è occupato da materiale isolante di costante dielettrica relativa k=5.

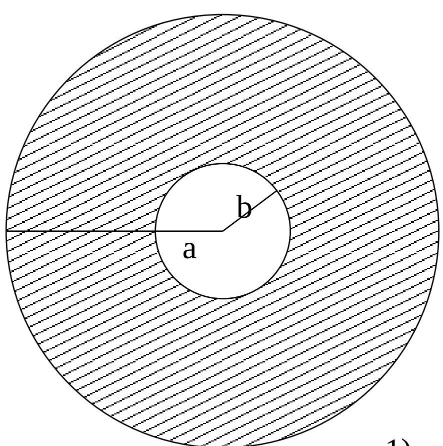
a) Si determini il campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro, quando il condensatore è caricato con Q=50 nC (filo negativo e guscio positivo). Si calcoli il valore del campo a r1=5 cm dall'asse. Trascurare gli effetti di bordo.
b) Trovare la capacità del condensatore
c) Il dielettrico viene estratto parzialmente mentre il condensatore è connesso ad un generatore di tensione con V=150 V. Trovare la forza elettrostatica che viene esercitata sul dielettrico. Trascurare gli effetti di bordo.
d) Con riferimento al punto precedente, calcolare il lavoro che le forze esterne hanno compiuto per estrarre il dielettrico di x=5 cm. Commentare il segno del lavoro delle forze esterne.

Problema B

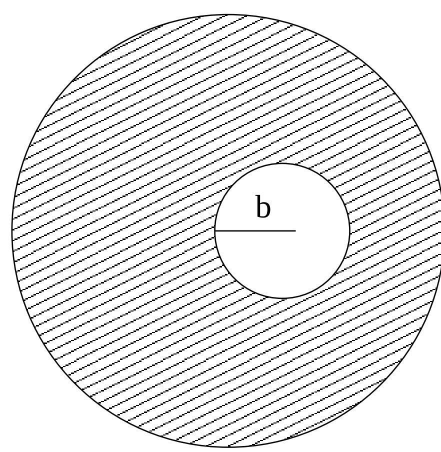
Un conduttore è costituito da un cilindro di lunghezza infinita, di raggio a=30 cm, nel quale è praticato un foro cilindrico infinito, coassiale, di raggio b=10 cm (vedi figura B1). Nel conduttore scorre una corrente I = 5 mA, uniformente distributa sulla sezione del conduttore.

a) Scrivere l'espressione analitica del campo B in un punto P, nel caso che si trovi a distanza r<b, b<r<a, r>a. Supporre che il conduttore abbia la permeabilità magnetica del vuoto.
b) Supporre ora che il foro, invece che coassiale, sia praticato ad una distanza b=10 cm dall'asse del cilindro (vedi figura B2). Calcolare il campo B sul piano che contiene gli assi dei due cilindri e nella regione entro la cavità. Calcolare il valore numerico di B al centro della cavità.
c) Nella situazione precedente, scrivere l'espressione analitica del campo B in un punto sul piano che contiene gli assi dei due cilindri, nella regione del conduttore (ossia fuori della cavità ma per r<a).

B)



1)



2)

Soluzione dell'esercizio A

a) Dal teorema di Gauss, trascurando gli effetti di bordo, all'interno del condensatore:

$$2\pi rLE = \frac{Q}{\epsilon} \rightarrow E = \frac{-Q}{2\pi\epsilon rL} = 18 \times 10^3 N/C$$

b) La d.d.p. è :

$$V = \int_a^b Edr = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} ln\frac{b}{a}$$

La capacità:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{lnb/a} = 12pF$$

c) Il dielettrico è estratto di una quantità *x*, quindi *(L-x)* rimane dentro il condensatore. Il sistema può essere visto come due condensatori in parallelo (uno vuoto ed uno con dielettrico):

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{lnb/a}[x + k(L - x)]$$

Quando si estrae il dielettrico, l'energia del sistema varia. La variazione è data da un termine *1/2* V^2 *dC* spettante al condensatore meno un termine *VdQ* che spetta al generatore. Infatti attraverso il generatore passa una carica $dQ = VdC$ in modo che V rimanga costante.

$$dU = \frac{1}{2}V^2dC - VdQ = \frac{1}{2}V^2dC - V^2dC = -\frac{1}{2}CV^2$$

da cui la forza :

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{lnb/a}(1 - k) = -543 \times 10^{-9}N$$

che attrae il dielettrico dentro al condensatore.

d) Il lavoro per spostare di *x* il dielettrico è dato dalla differenza delle energie potenziali elettrostatiche iniziali e finali, oppure da $L = F\Delta x = 27.17 \times 10^{-9}J$. Si è tenuto conto del fatto che le forze esterne sono uguali ed opposte alle forze elettrostatiche, e quindi hanno segno positivo. Quindi le forze esterne compiono un lavoro positivo, il che è confortato dalla considerazione che il sistema (condensatore + generatore) passa ad una configurazione di energia maggiore (dielettrico parzialmente estratto).

Soluzione dell'esercizio B

a) Si risolve applicando il teorema di Ampère:
per r<b, B=0;
per b<r<a $rightarrow\ 2\pi rB = \mu_0 I_c$ e la corrente concatenata I_c vale $I\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}$ in quanto la densità di corrente è uniforme e vale $j = \frac{I}{\pi(a^2-b^2)}$. Quindi $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} I \frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}$;
per r>a, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

b) Usiamo il principio di sovrapposizione, immaginando di avere un cilindro (pieno) di raggio a percorso da densità di corrente j e corrente I_2 (per esempio uscente dal foglio) ed uno di raggio b percorso da densità di corrente $-j$ e corrente I_1. Si ha:

$$I = I_2 - I_1 = \pi a^2 j - \pi b^2 j = \pi j(a^2 - b^2)$$

$$j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$$

$$I_1 = -j\pi b^2 = -\frac{Ib^2}{a^2 - b^2}$$

$$I_2 = j\pi a^2 = \frac{Ia^2}{a^2 - b^2}$$

Usando il teorema di Ampère:

$$2\pi r B_2 = \mu_0 I_{2c} = \mu_0 I_2 \frac{r^2}{a^2} = \mu_0 \frac{Ia^2}{a^2 - b^2}\frac{r^2}{a^2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a^2 - b^2} r$$

$$B_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a^2 - b^2}(r - b)$$

dove per B_1 si è effettuata la opportuna traslazione $r \to (r - b)$. Sull'asse che congiunge i due cilindri, il campo B è tutto diretto lungo l'asse y, e vale :

$$B = B_2 + B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{b}{a^2 - b^2} = 1.25 \times 10^{-9} T$$

c) fuori dalla cavità B_2 rimane lo stesso mentre per B_1 diventa

$$B_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ib^2}{a^2 - b^2}\frac{1}{r - b}$$

E quindi il campo totale:

$$B = B_2 + B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a^2 - b^2}[r - \frac{b^2}{r - b}]$$

Il verso del campo però cambia a seconda che ci troviamo a sinistra o a destra della cavità.