Problema A

Si consideri il circuito in figura A. I valori dei condensatori sono C1=2 nF, C2= 4nF, C3=C4=1 nF e tra le loro armature vi è il vuoto. La resistenza R vale 2 MΩ . Il generatore fornisce una d.d.p. di 10V. Gli interruttori T1 e T2 sono inizialmente aperti.

a) Ad un certo istante l'interruttore T1 viene chiuso. Calcolare il valore finale della carica sul condensatore C3 e la d.d.p ai suoi capi.
b) Successivamente viene aperto T1 e chiuso T2. Calcolare il valore finale della carica su C3 e C4 e la ddp finale ai loro capi.
c) Sempre mantenendo T1 aperto e T2 chiuso, lo spazio tra le armature del condensatore C4 viene totalmente riempito con un isolante di costante dielettrica k=3. Calcolare i nuovi valori finali delle cariche e delle d.d.p. ai capi dei condensatori C3 e C4.
d) Con riferimento alla situazione descritta nel punto b), calcolare la legge con cui varia nel tempo la carica sul condensatore C4, assumendo come t=0 l'istante al quale viene chiuso T2.

Problema B

Un filo rettilineo infinito porta una corrente I=10.0 A nella direzione +*z*, come mostrato in figura B. Un circuito rettangolare di lati *l*=20 cm e *m*=30 cm e resistenza totale R = 100 Ω ha in serie un amperometro e si allontana radialmente dal filo con velocità *v* = 5 m/s. Il circuito e il filo si trovano sullo stesso piano.

a) Calcolare il valore numerico del campo B a 10 cm dal filo.
b) Calcolare quale sia la lettura dell'amperometro quando il lato del circuito più vicino al filo si trova a distanza d=1 m da esso. Specificare quale è il verso della corrente, se orario o antiorario.
c) Quando il circuito si trova nella stessa posizione di cui al punto b), calcolare la risultante delle forze agenti sul circuito, specificandone modulo, direzione e verso.

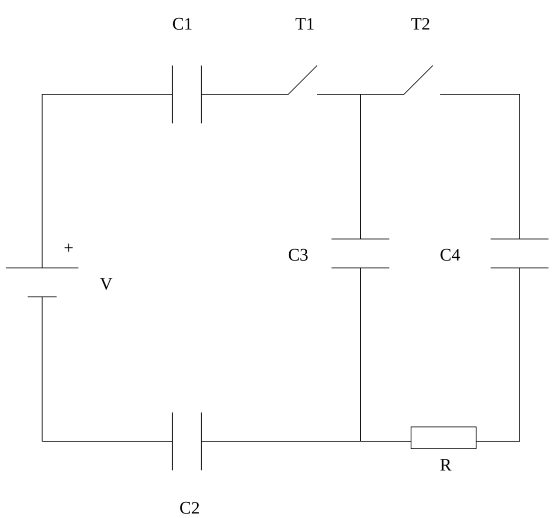

Figura A

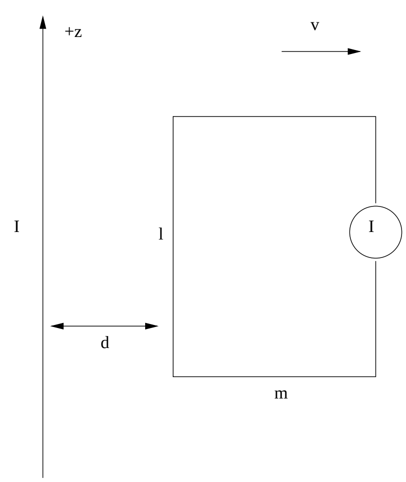

Figura B

Soluzione dell'esercizio A

a) Il circuito è equivalente a quello costituito dal generatore e da una capacità equivalente C_{eq} data dalla serie di C_1, C_2 e C_3:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

La carica su ogni condensatore è quindi $Q = C_{eq} \cdot V = 5.71nC$. La carica è la stessa su tutti i condensatori, in quanto i condensatori sono in serie, e l'induzione è completa. La ddp su C_3 è quindi $V_3 = \frac{Q}{C_3} = 5.71V$

b) La carica Q presente su C_3 si ripartisce sul condensatore equivalente C'_{eq} formato dal parallelo di C_3 e C_4.

$$C'_{eq} = C_3 + C_4$$

La ddp risulta:

$$V'_{3,4} = Q/C'_{eq} = 2.85V; Q_3 = C_3 \cdot V'_3 = Q_4 = C_4 \cdot V'_4 = 2.85nC$$

La ddp è la stessa ai capi dei due condensatori, perché sono in parallelo. La carica è la stessa, perché i condensatori sono uguali.
Allo stesso risultato si perviene applicando la conservazione della carica ($Q_3 = Q'_3 + Q'_4$) e ricordando appunto che $V'_3 = Q'_3/C_3 = V'_4 = Q'_4/C_4$.
c) La capacità di C_4 diventa C'_4=3nF, quindi la capacità equivalente diventa $C''_{eq} = 4nF$. Procendendo come al punto b) si trova $V''_{3,4} = Q/C''_{eq} = 1.43V; Q''_3 = 1.43nC, Q''_4 = 4.29nC$.

d) Denotiamo con $q_0 - q(t)$ la carica su C_3 in funzione del tempo e con $q(t)$ la carica su C_4. A $t = 0,\ q(t) = q(0) = 0$. Scriviamo l'equazione del circuito:

$$\frac{q_0 - q(t)}{C} - \frac{q(t)}{C} = Ri = R\frac{dq}{dt}$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che le piastre superiori (nel disegno) dei condensatori sono entrambe positive. Svolgendo i conti:

$$q_0 - 2q(t) = RC\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{q_0 - 2q(t)} = \frac{t}{RC}$$

Passando alla variabile $y = q_0 - 2q(t)$ si ha:

$$\frac{dy}{y} = -2\frac{dt}{RC}$$

$$\ln\frac{y}{y_0} = -2\frac{dt}{RC}$$

$$y = y_0 e^{-\frac{2t}{RC}}$$

e tornando alla variabile $q(t)$:

$$q_0 - 2q(t) = q_0 e^{-\frac{2t}{RC}}$$
$$q(t) = \frac{q_0}{2}(1 - e^{-\frac{2t}{RC}})$$

Soluzione dell'esercizio B

a) Il campo si trova da $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 2 \times 10^{-5} T$

b) la fem indotta è data da

$$fem = \oint (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) \cdot d\overrightarrow{l}$$

Per eseguire l'integrale circolare, dobbiamo considerare i quattro lati della spira. Scegliamo di seguire il circuito in senso orario. Il contributo dei due lati perpendicolari al filo è nullo, in quanto il campo elettromotore $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$ è perpendicolare al $d\overrightarrow{l}$. Sui ognuno dei due lati paralleli al filo il campo è costante. Il contributo del lato parallelo al filo e ad esso più vicino è $vlB(d)$, mentre quello del lato più lontano vale $-vlB(d+m)$ (perché il campo elettromotore è discorde al $d\overrightarrow{l}$). Quindi :

$$fem = \frac{\mu_0 I v l}{2\pi}(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+m}) = 0.46\mu V$$

L'integrale è stato eseguito in senso orario: il segno positivo ci dice che la corrente circola in senso orario, e vale $I_s = fem/R = 4.6nA$.

Alternativamente si può applicare la legge di Faraday, fem= - d$\Phi(B)$/dt:

$$\Phi(B) = \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} d\Sigma$$

scegliendo per il versore normale la direzione entrante nel foglio:

$$\Phi(B) = \int B d\Sigma = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^l dz \int_d^{d+m} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{d+m}{d} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln(1 + \frac{m}{d})$$

Ribattezziamo x la variabile d. Derivando rispetto al tempo:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}v = -\frac{\mu_0 i l v}{2\pi}\frac{1}{1+\frac{m}{x}}\frac{-m}{x^2} = \frac{\mu_0 i l v}{2\pi}\frac{m}{x}\frac{1}{x+m} = \frac{\mu_0 i l v}{2\pi}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+m})$$

come si era ricavato nel caso precedente.

c) La forza risultante si ottiene applicando la legge $F = i\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B}$ su ogni lato del rettangolo. Le forze sui lati perpendicolari al filo si annullano. Sul lato più vicino al filo, la forza vale:

$$F_1 = I_s l B = \frac{\mu_0 I_s i l}{2\pi}\frac{1}{d}$$

e analogamente per il lato lontano dal filo:

$$F_2 = I_s l B = \frac{\mu_0 I_s i l}{2\pi}\frac{1}{d+m}$$

La risultante $(F_1 - F_2)$ è perpendicolare al filo ed opposta al moto del circuito, e vale $4.24 \times 10^{-16} N$