

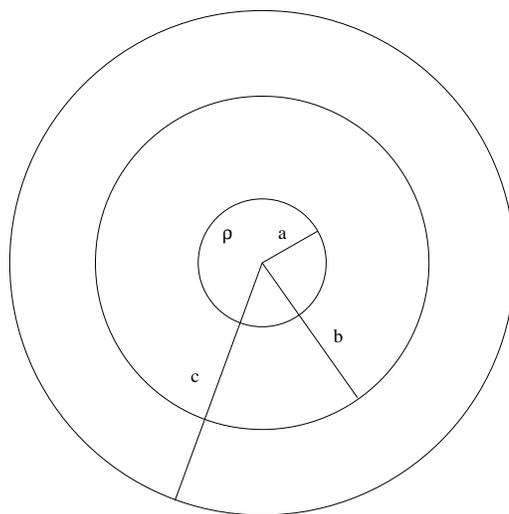
**Problema A**

Un sistema è formato da una sfera uniformemente carica con densità di carica volumica  $\rho = 3.7 \mu\text{C}/\text{m}^3$  concentrica ad un guscio sferico conduttore elettricamente neutro (si veda figura). Il raggio della sfera è  $a = 15 \text{ cm}$  mentre i raggi interno ed esterno del guscio sono  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $c = 25 \text{ cm}$ .

- Dare l'espressione analitica del campo elettrico nelle regioni  $r < a$ ,  $a < r < b$ ,  $b < r < c$ ,  $r > c$ . Si calcoli il valore del campo elettrico in un punto a  $r = 50 \text{ cm}$ .
- Ripetere il punto precedente, immaginando che la sfera interna non sia carica uniformemente, ma con densità di carica dipendente dal raggio secondo la funzione  $\rho(r) = \alpha \cdot r + \beta$ , ( $\alpha = 2\mu\text{C}/\text{m}^4$ ,  $\beta = 3 \mu\text{C}/\text{m}^3$ ).
- Nelle condizioni del punto b), tenendo conto della forza di gravità, determinare, se esiste, la posizione di equilibrio di una sferetta di massa 4 g e carica  $3 \mu\text{C}$  opposta a quella della sfera centrale, inserita nello spazio tra la sfera e il guscio conduttore.

**Problema B**

- Determinare l'espressione del campo B generato da una spira di raggio 10 cm e percorsa da corrente  $I=4.7 \text{ A}$  nei punti del suo asse. Dare l'espressione approssimata nel caso che il punto si trovi sempre sull'asse a distanza molto maggiore rispetto al raggio. Ricavare il valore numerico a distanza  $x=10\text{m}$  dal centro della spira.
- Al polo Nord magnetico il campo B terrestre è 0.8 Gauss. Immaginando che questo campo sia generato da una spira percorsa da corrente posta al centro della Terra, con raggio piccolo rispetto al raggio terrestre ( $R_t=6400 \text{ Km}$ ), calcolare il valore del momento magnetico della spira.
- L'ago di una bussola ha momento magnetico  $1.3\text{Am}^2$ . Se la bussola è tenuta verticalmente al polo Nord magnetico, come si orienta l'ago? Qual è il momento delle forze che agiscono sull'ago, nelle ipotesi di cui al punto b), quando l'ago forma  $45^\circ$  con la verticale?



**Soluzione dell'esercizio A**

Si applica in ogni caso il teorema di Gauss

a) per  $r > a$  si ha che  $4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  da cui

$$E(r) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

per  $a < r < b$ :

$$E(r) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi a^3}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

per  $b < r < c$ ,  $E=0$  in quanto siamo all'interno di un conduttore. Per  $r > c$  siamo nelle stesse condizioni di  $a < r < b$ . Il valore a 50 cm è 1880 N/C.

b) Valgono le considerazioni fatte per il punto a), ma questa volta la carica all'interno della sfera si calcola:

$$Q_{int}(r) = \int \rho(r) dV = \int_{\Omega} \int_0^r \rho(r) r^2 d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^r (\alpha r + \beta) r^2 d\Omega = 4\pi \left( \alpha \frac{r^2}{4} + \beta \frac{r^3}{3} \right)$$

Da cui, per  $r < a$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \alpha \frac{r^2}{4} + \beta \frac{r}{3} \right)$$

per  $a < r < b$  e  $r > c$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left( \alpha \frac{a^4}{4} + \beta \frac{a^3}{3} \right)$$

c) La condizione di equilibrio si ottiene eguagliando la forza di gravità a quella elettrica. Si trova  $r = 17.9 \text{ cm}$

**Soluzione dell'esercizio B**

a) Come si trova su qualsiasi libro di testo, per la spira circolare il campo magnetico vale

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

dove  $R$  è il raggio della spira e  $x$  è la distanza lungo l'asse. A grandi distanze  $x \gg R$ ,  $\sqrt{R^2 + x^2} \simeq x$  e quindi

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{x^3}$$

Il valore a 10m è  $2.9 \times 10^{-11} T$

b) Moltiplicando numeratore e denominatore per  $\pi$  si ha :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{A}{x^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}$$

$$m = \frac{2\pi x^3}{\mu_0} B_z = 1.04 \times 10^{23} Am^2$$

c)  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = mB \sin 45^\circ = 0.735 \times 10^{-4} Nm$