UN BREVE VIAGGIO NELLA TURBOLENZA

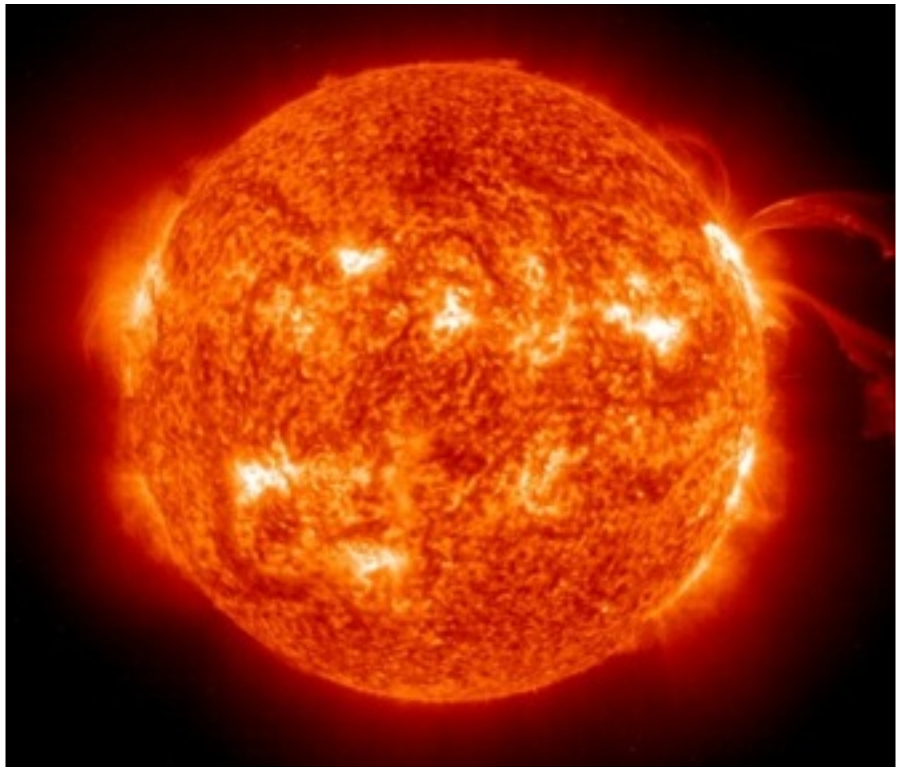
Filippo De Lillo

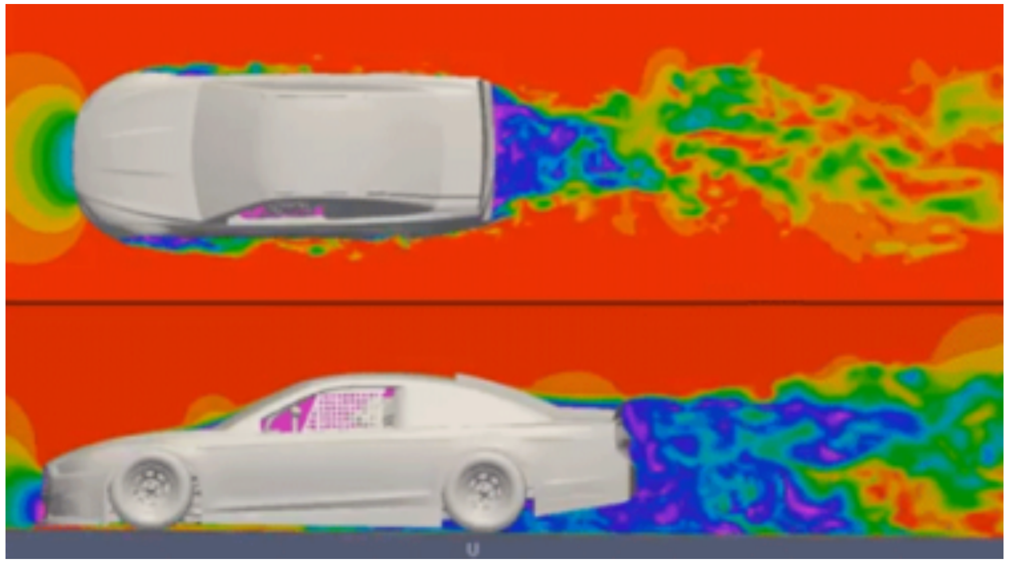
- Che cos’è la turbolenza e come si manifesta?
- Come la possiamo comprendere?
- Un esempio di ricerca attuale: il trasporto del fitoplancton in oceano

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

INFN Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

LA TURBOLENZA È OVUNQUE





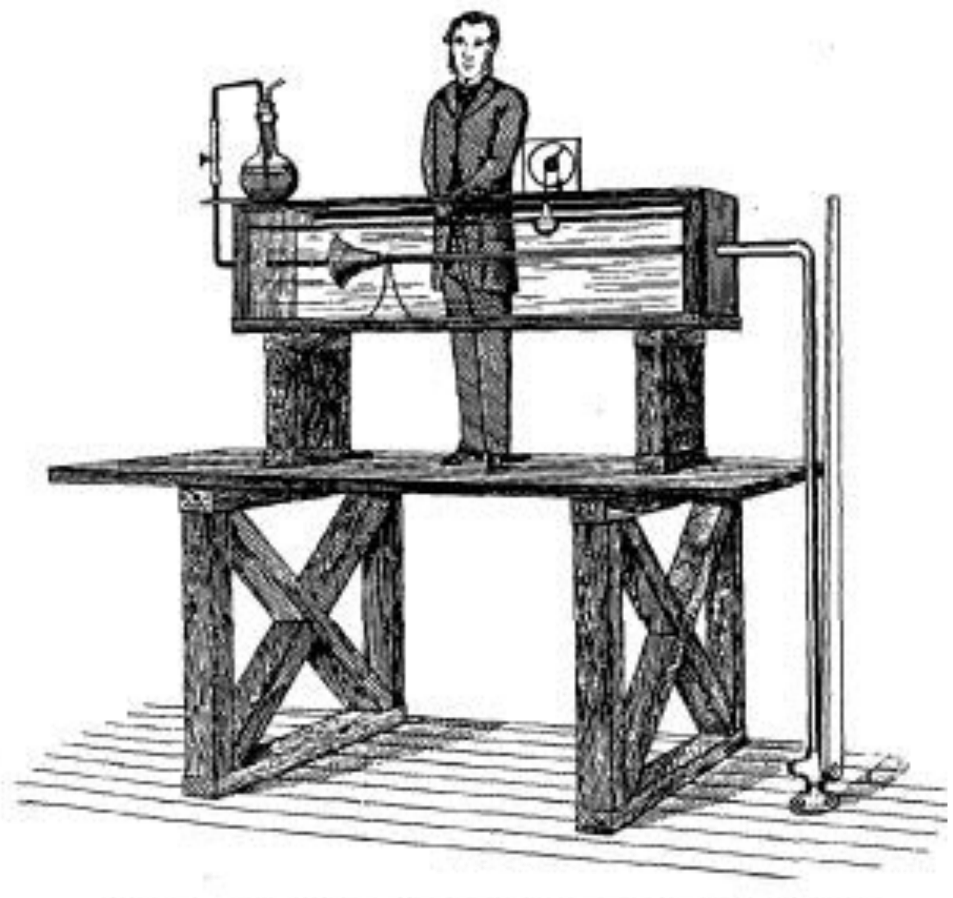
CHE COSA INTENDIAMO PER TURBOLENZA?

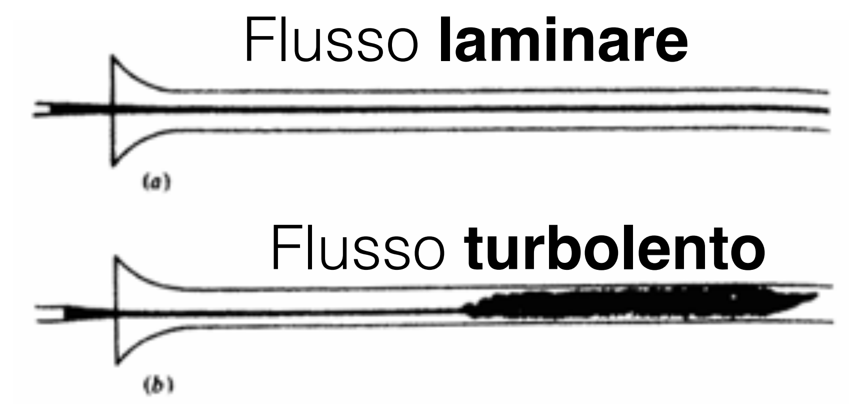
Getto turbolento in acqua
(P. Roberts and O. Abessi,
Georgia Institute of Technology)

Per semplicità pensiamo al
caso più famigliare:
la **turbolenza nei fluidi**
(incompressibili)

- moto **disordinato**: nello **spazio** e nel **tempo**
- il moto coinvolge **molte scale**

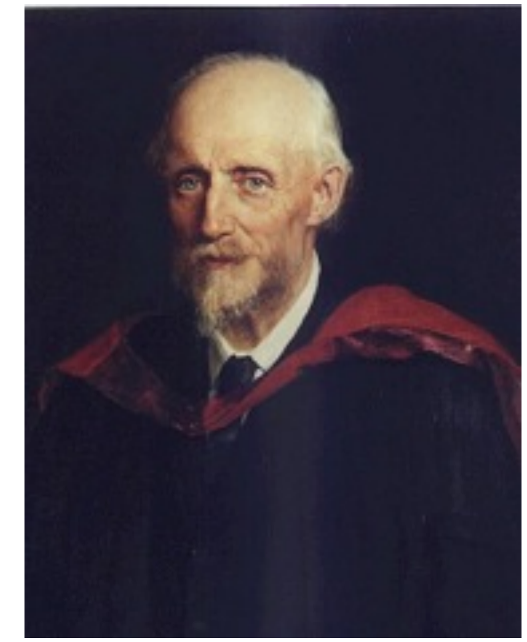
Gli studi di Reynolds: la transizione alla turbolenza.





Disegni di Reynolds del flusso ossevato

Reynolds (1883)



Osborne Reynolds (1842-1912)

Reynolds colora il flusso con dell'inchiostro.
- a bassa velocità il flusso è "regolare"
- a velocità più alta diventa "sinuoso"

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}}$$

Numero di Reynolds

V velocità del flusso

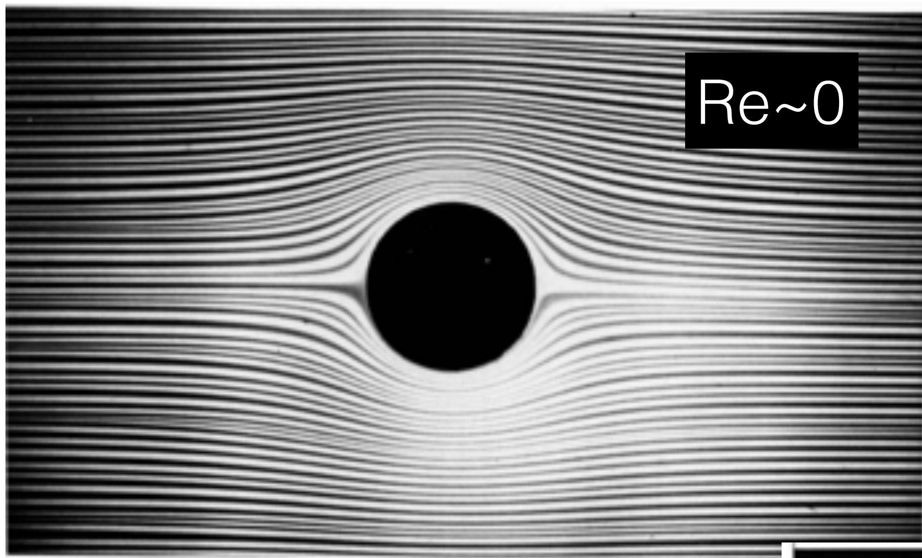
L dimensione tipica (es. diametro del tubo)

ν viscosità (cinematica) → 10^{-5} m^2/s aria, 10^{-6} m^2/s acqua

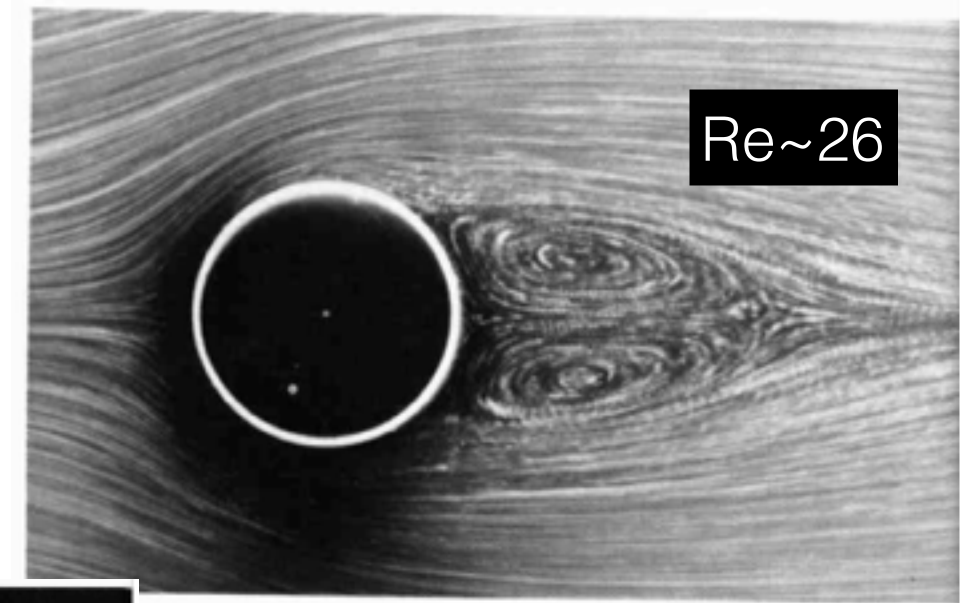
Reynolds osserva che il fluido diventa turbolento attorno a Re=2000

Nel suo caso, purtroppo, la faccenda è un po' più complicata….

Transizione alla turbolenza: "rottura" di simmetria...



Flusso attorno
a un cilindro.



"strada di vortici"
di von Karman

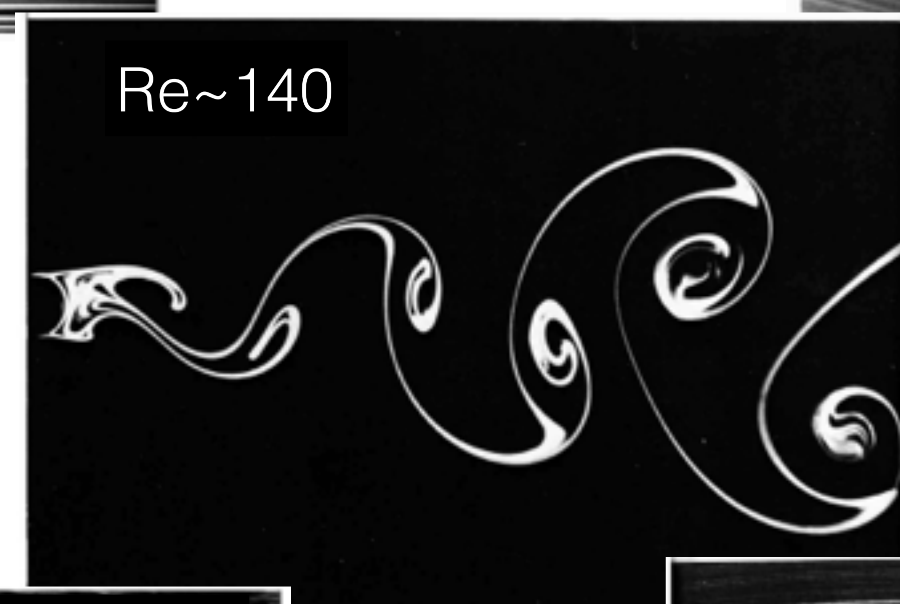
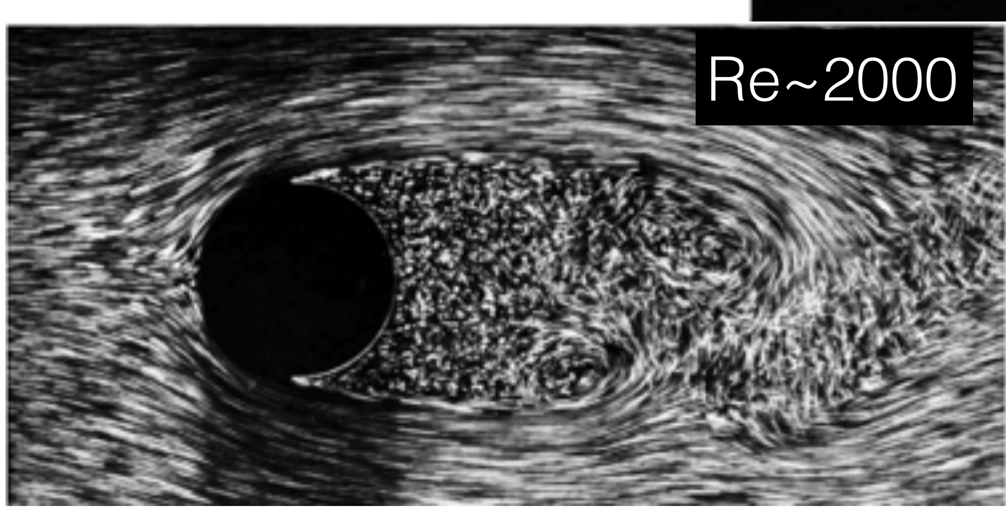
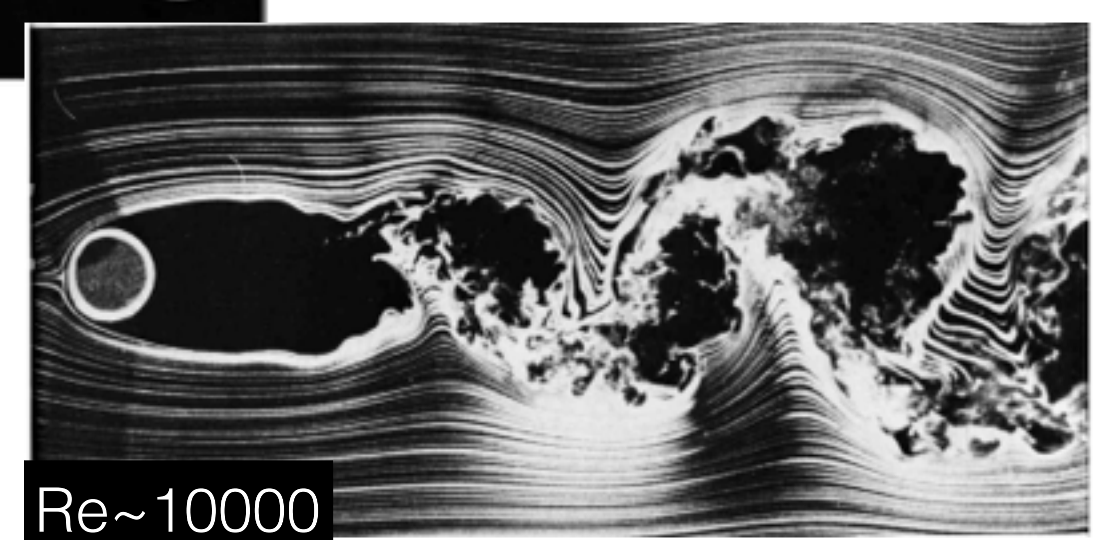
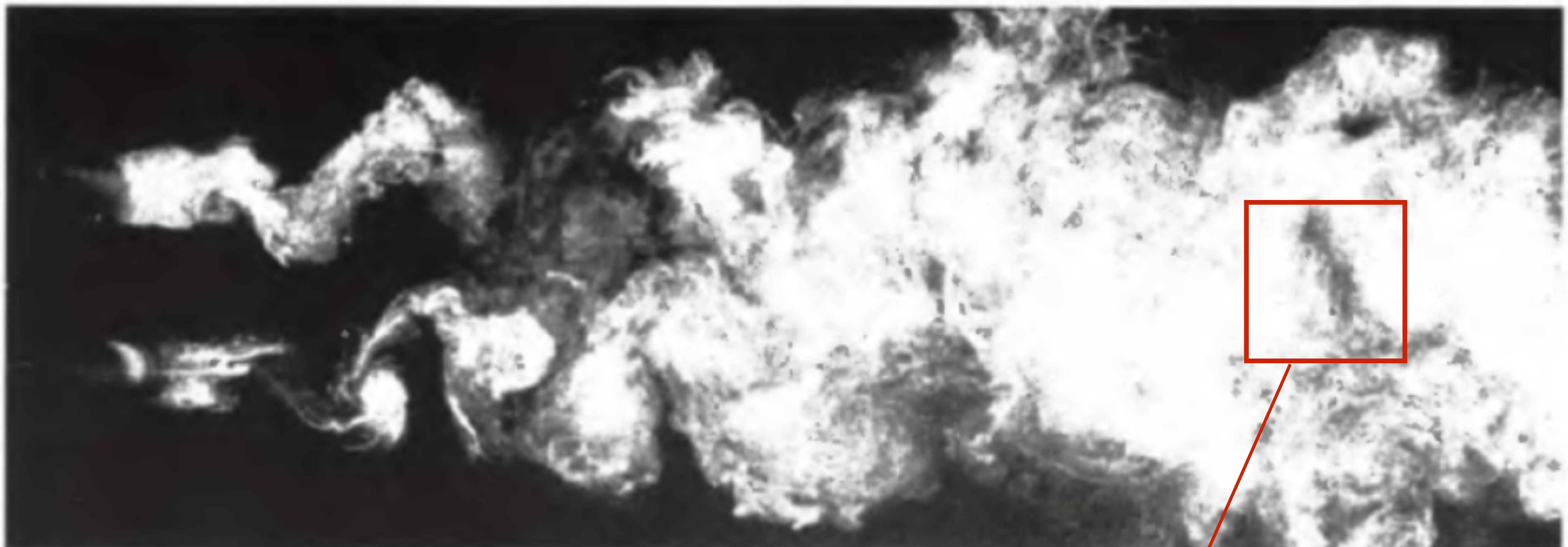


foto da:
van Dyke
"An Album of Fluid Motion" (1982)





...e recupero "statistico" della simmetria.



Scia dietro due cilindri identici
(da Frisch 1995)

Se la turbolenza è molto intensa
le proprietà "**lontano dai bordi**"
dovrebbero essere **universali**

LA TURBOLENZA E IL "MIXING"

Una delle proprietà **utili** della turbolenza è quella di mescolare efficientemente

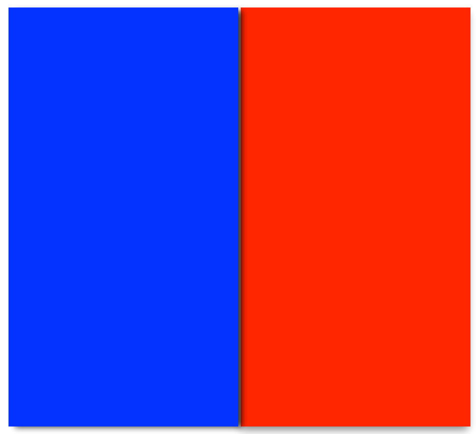
ce ne serviamo ogni volta che mescoliamo lo zucchero nel caffè…

…o gli ingredienti di un cocktail

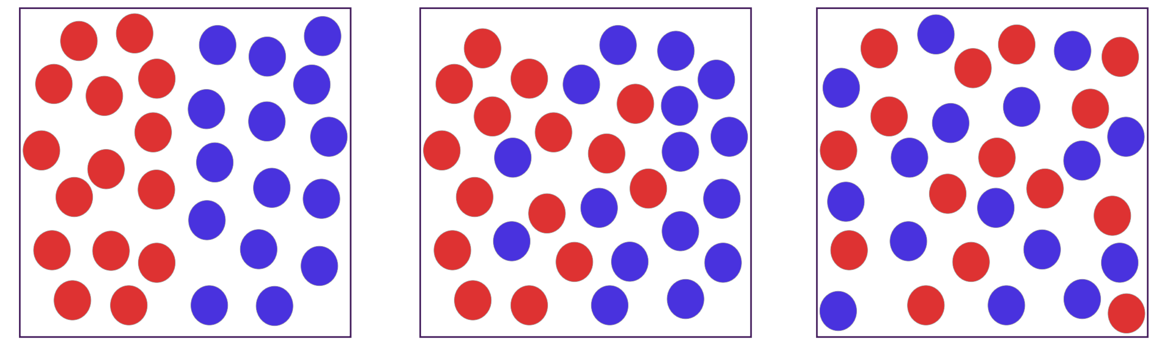
Ma come funziona il mescolamento?

Mescolamento senza turbolenza

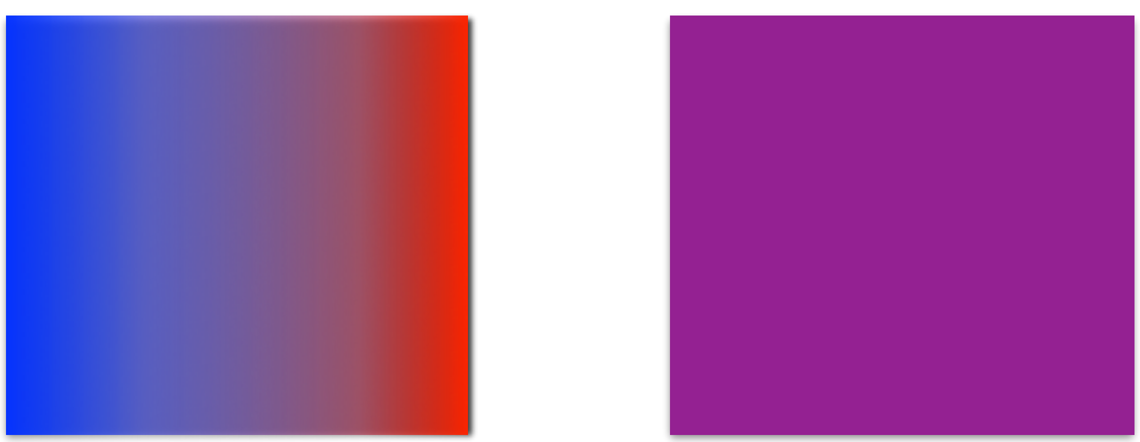
In un contenitore due liquidi sono inizialmente separati



diffusione molecolare



Il moto di ciascuna molecola è casuale: i due liquidi si distribuiscono uniformemente



Il profumo di una persona arriverebbe ad 1m di distanza in
1

circa **50 ore**

Per fare un cocktail ci vorrebbe

circa **4 giorni**

Anche senza "agitare", i liquidi **si mescolano ugualmente**, ma **quanto bisogna aspettare?**

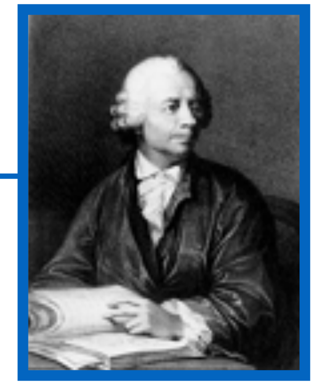
Perchè la turbolenza mescola?

Il colore viene stirato e ripiegato
Porzioni di fluido colorato e non colorato finiscono vicine le une alle altre
La diffusione diventa così più efficiente
[*simulazione numerica*]

L'equazione di Navier-Stokes

L'equazione che governa un fluido "ordinario"
è l'equazione di Navier-Stokes: determina la velocità del fluido in ogni punto.

Leonhard Euler
(1707-1783)



1757

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p} + \boxed{\nu \nabla^2 \vec{v}}$$

Claude-Louis Navier
(1785 - 1836)

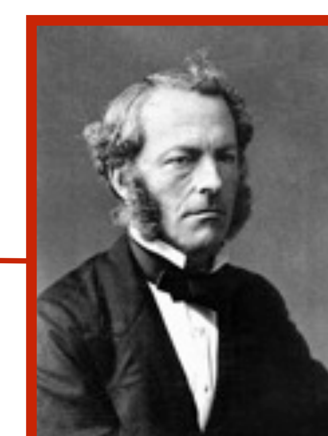
1821

Adhémar Jean Claude
Barré de Saint-Venant
(1797-1886)

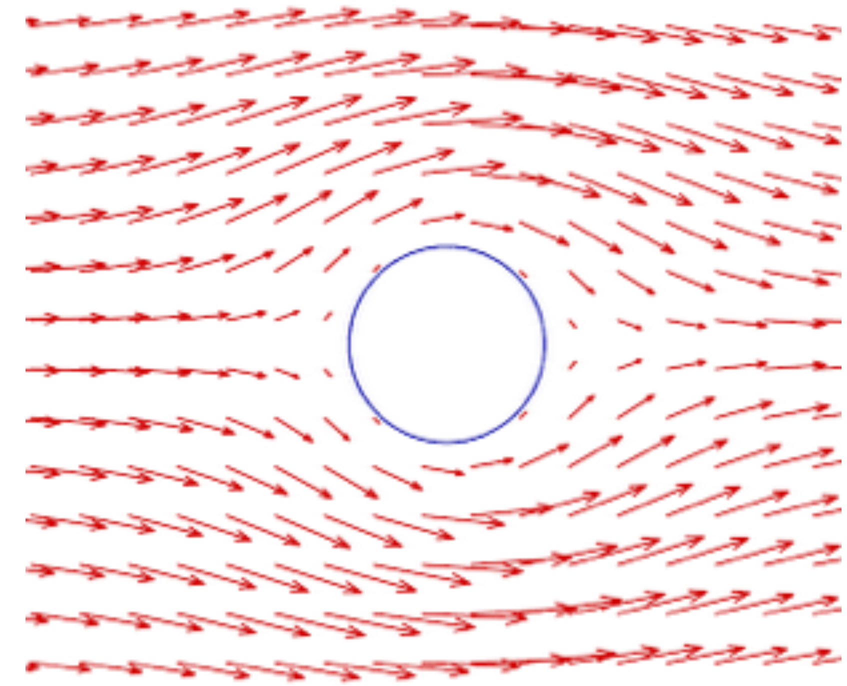
1843

George Gabriel Stokes
(1819 - 1903)

1845



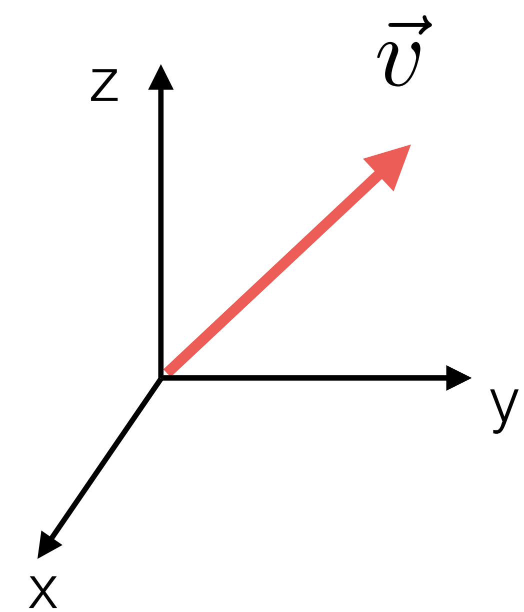
L' EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES



L'equazione che governa un fluido "ordinario"
è l'equazione di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Ha un aspetto orribile ed è piena di strani simboli,
eppure a saperla leggere
racconta una storia molto semplice.



$\vec{v}$ la velocità non è un numero ma
un vettore, ha una direzione e un verso
per ricordarmelo, la indico con una freccia

$\frac{\partial}{\partial t}$ variazione nel tempo

∇ variazione nello spazio

$\frac{\partial}{\partial t}$	derivata rispetto al tempo[2]
∇	gradiente[3]

L' EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

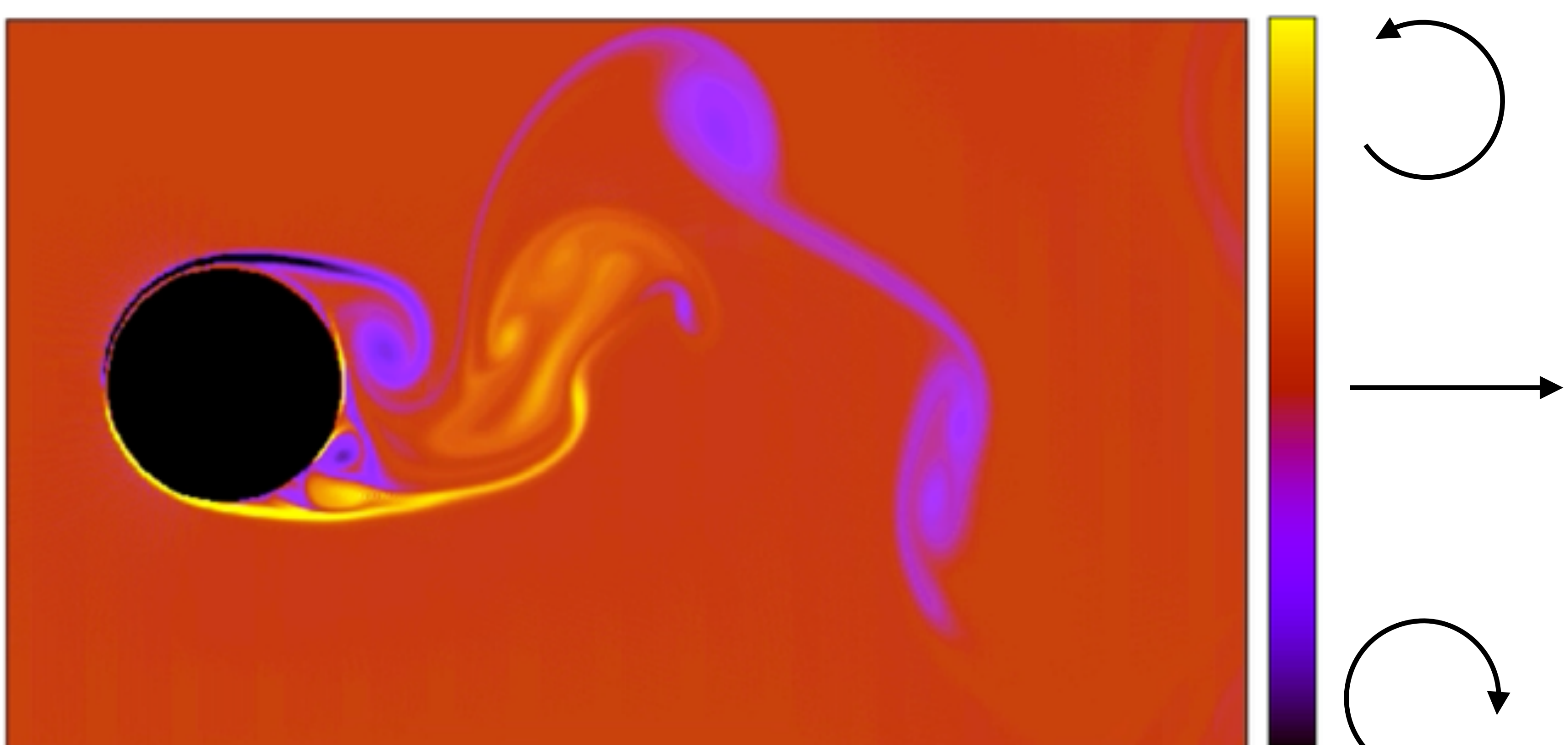
L'equazione che governa un fluido "ordinario"
è l'equazione di Navier-Stokes

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \boxed{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \nabla p} + \boxed{\nu \nabla^2 \vec{v}}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$	variazione nel tempo
∇	variazione nello spazio

Se sto fermo in un posto,
vedo la velocità cambiare

La velocità **trasporta**
e **modifica** se stessa



simulazione numerica
dell'equazione di N-S

L' EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

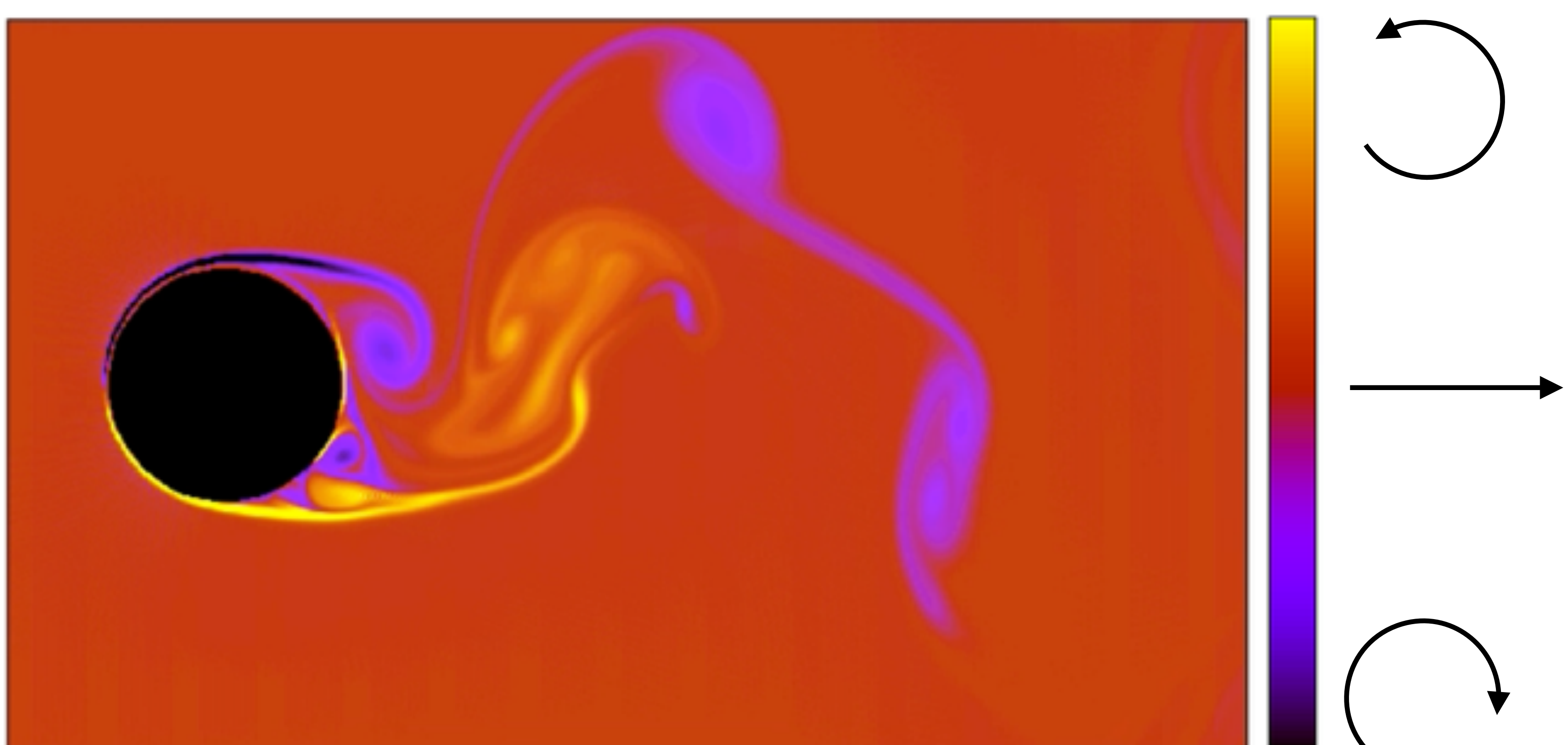
L'equazione che governa un fluido "ordinario"
è l'equazione di Navier-Stokes

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \boxed{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \nabla p} + \boxed{\nu \nabla^2 \vec{v}}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$	variazione nel tempo
∇	variazione nello spazio

Il fluido "sente" le **differenze** di **pressione**

Le forze d'attrito **viscoso**[4] sopprimono le **variazioni di velocità**



$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

simulazione numerica dell'equazione di N-S

L'equazione da un milione di dollari

L'equazione di Navier-Stokes è nota da quasi due secoli
ma molto di essa ci sfugge

- non esiste un metodo generale per risolverla in modo **analitico** (cioè "con carta e penna")
- non siamo nemmeno sicuri che **esistano soluzioni "buone"** in senso matematico

È uno dei Millennium Prize Problems definiti dal Clay Mathematics Institute:

Dimostrare o fornire un contro-esempio della seguente affermazione:
In tre dimensioni spaziali più il tempo, dato un campo di velocità iniziale, esistono una velocità vettoriale e un campo scalare di pressione, entrambi lisci e globalmente definiti, che soddisfano l'equazione di Navier-Stokes.

Chi ci riesce vince un milione di dollari!

Le equazioni non bastano: il caos deterministico

Basta conoscere le equazioni per prevedere il futuro (del moto del fluido)?

Data per un istante una intelligenza che possa comprendere tutte le forze da cui la natura è animata e la rispettiva posizione di tutti gli esseri che la compongono […] per essa nulla sarebbe incerto e il futuro, così come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.

Pierre Simon, Marquis de Laplace
"Essai philosophique sur les probabilités" (1819)

…ma, continua Laplace, noi non possediamo questa intelligenza perfetta.

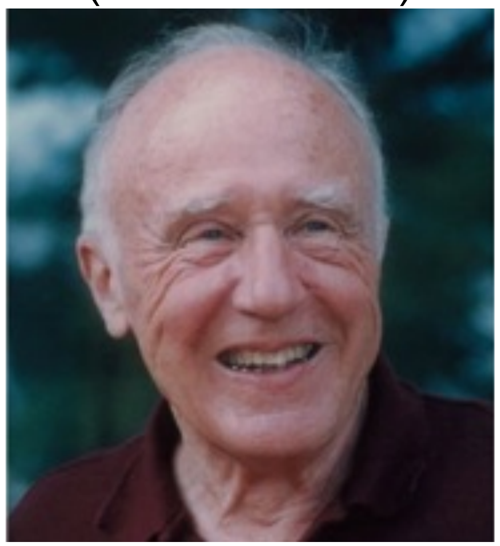
Molti sistemi fisici **anche molto semplici** sono **caotici**

caos = dipendenza **sensibile** dalle **condizioni iniziali**

→ un "**piccolo**" errore di misura della condizione iniziale porta a un "**grande**" errore sulla previsione

Un esempio: il modello di Lorenz

Edward Lorenz
(1917-2008)



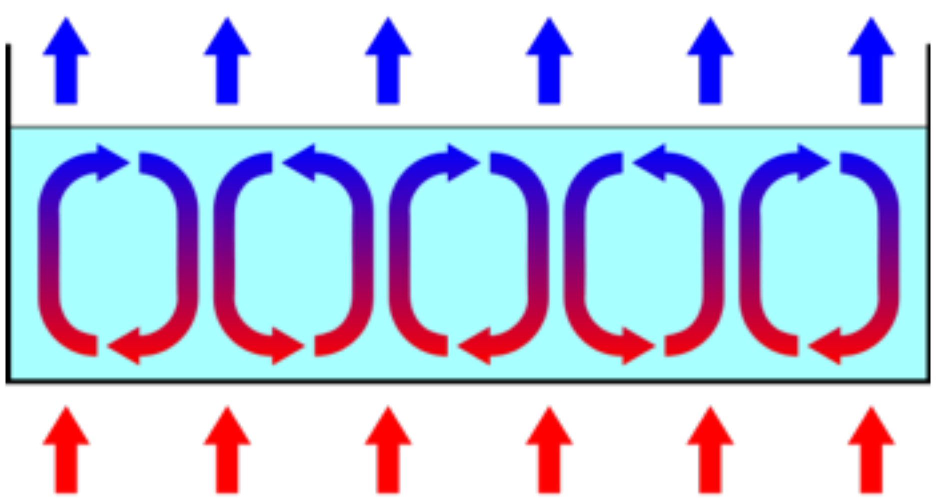
Meteorologo

fine degli anni ’50: semplici modelli dell’atmosfera mostrano dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

1963: *“Deterministic Nonperiodic Flow”* (sul Journal of Atmospheric Sciences)

1972: *“Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?”* (seminario al meeting dell’American Association for the Advancement of Sciences)

Lorenz usa uno dei primi computer “personal” per studiare le soluzioni di un modello della convezione



(18), and trigonometric terms other than those occurring in (23) and (24) are omitted, we obtain the equations

$$X^{\cdot}= \qquad -\sigma X+\sigma Y, \tag{25}$$

$$Y^{\cdot}=-XZ+rX-Y, \tag{26}$$

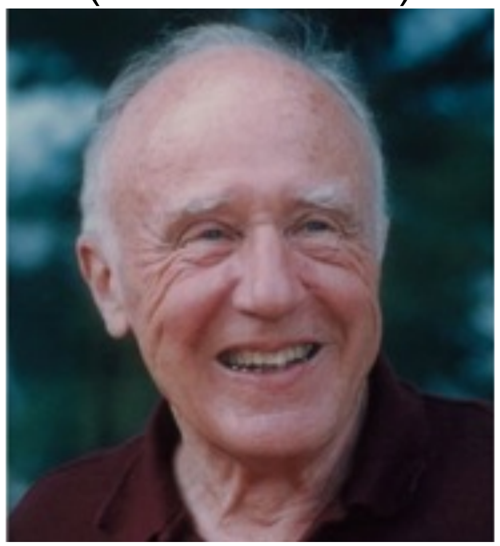
$$Z^{\cdot}= \quad XY \qquad -bZ. \tag{27}$$

Here a dot denotes a derivative with respect to the dimensionless time $\tau=\pi^2H^{-2}(1+a^2)\kappa t$, while $\sigma=\kappa^{-1}\nu$ is the *Prandtl number*, $r=R_c^{-1}R_a$, and $b=4(1+a^2)^{-1}$. Except for multiplicative constants, our variables X, Y

Dimostra in modo ingegnoso, **basandosi su lavori matematici precedenti** che il modello è caotico.

Un esempio: il modello di Lorenz

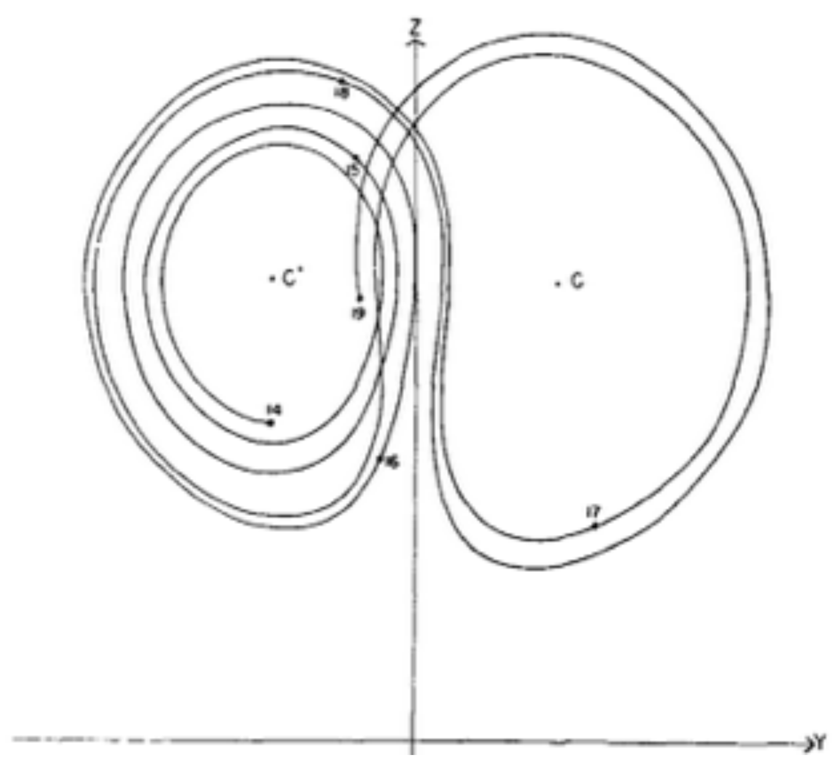
Edward Lorenz
(1917-2008)

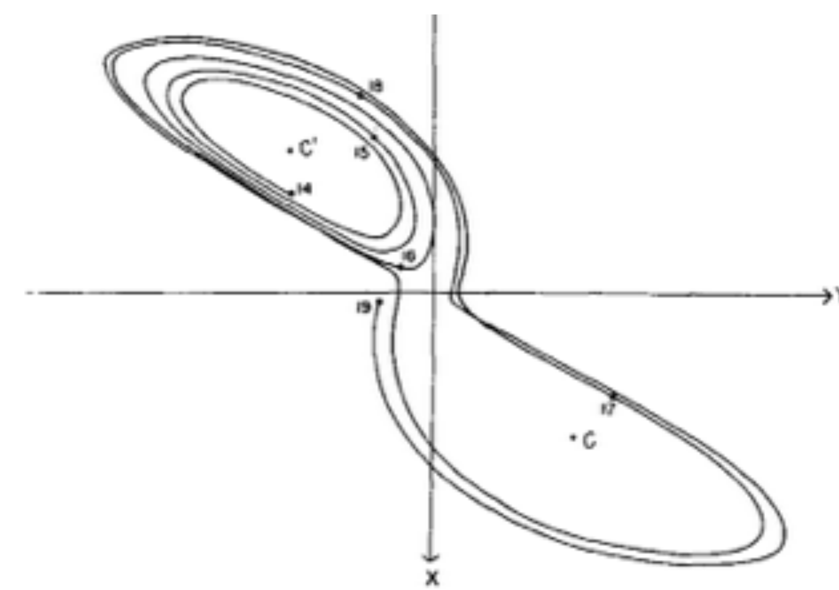


Royal McBee LGP-30
Computermuseum der Fakultät Informatik
Università di Stoccarda

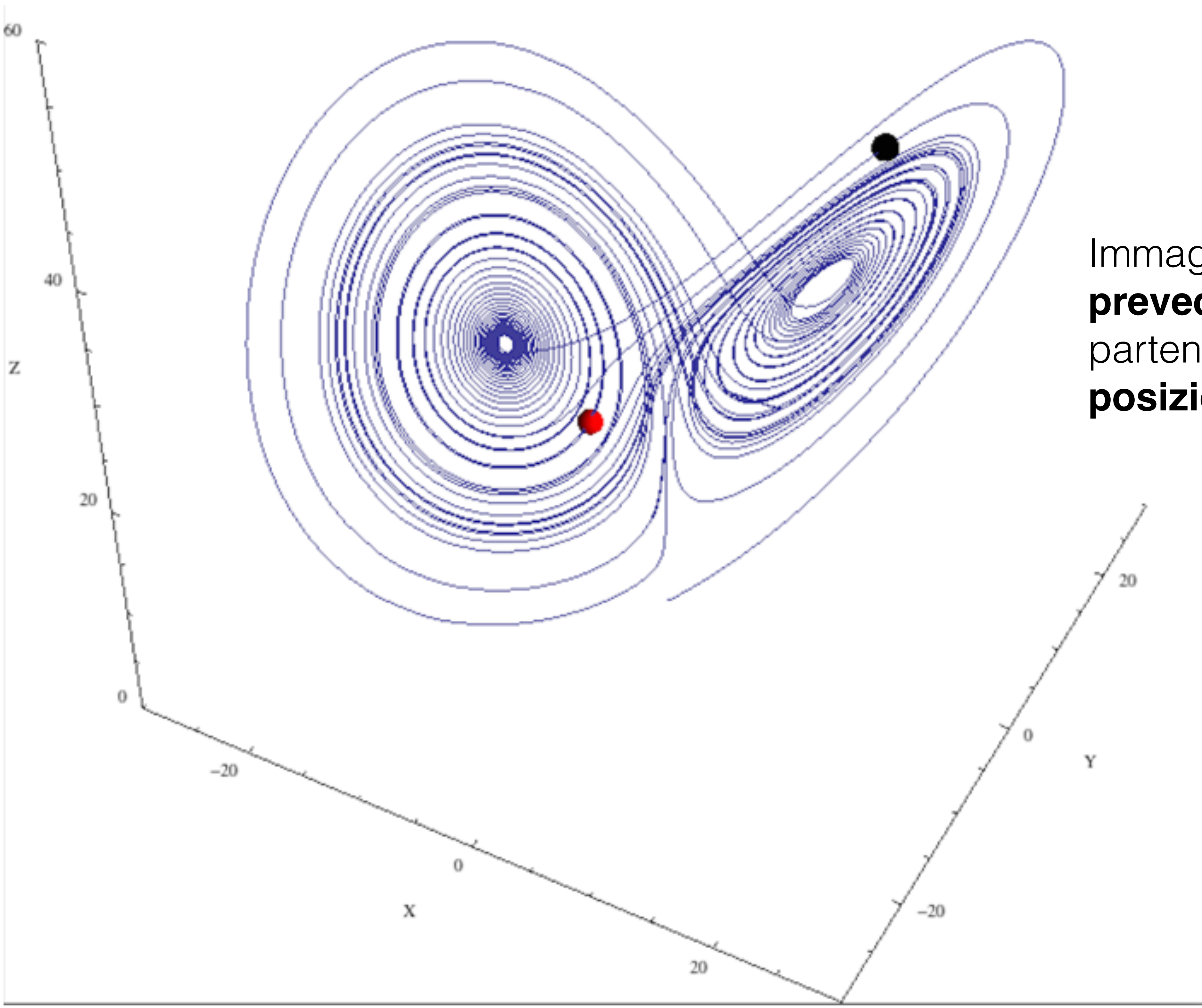
È la prima volta che viene visualizzato l'**attrattore** di un sistema caotico.

È un oggetto **frattale**: sembra giaccia su una superficie in realtà la sua **dimensione** è fra due e tre.





Un esempio: il modello di Lorenz

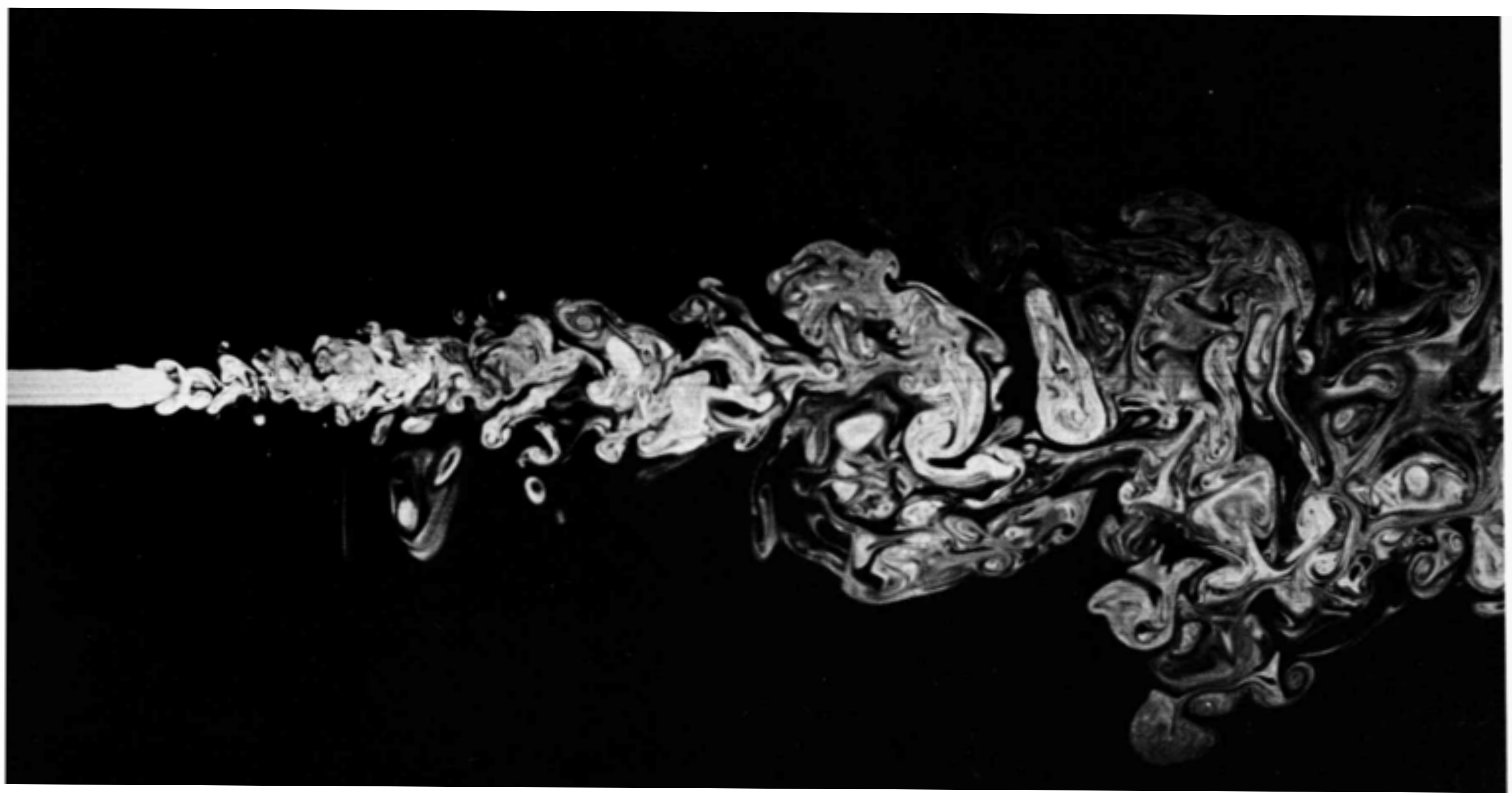


Immaginiamo di voler **prevedere l'evoluzione** del sistema partendo da una misura della **posizione iniziale** della "pallina"

- sistema "vero"
- previsione con errore iniziale

C'È "VITA" A TUTTE LE SCALE

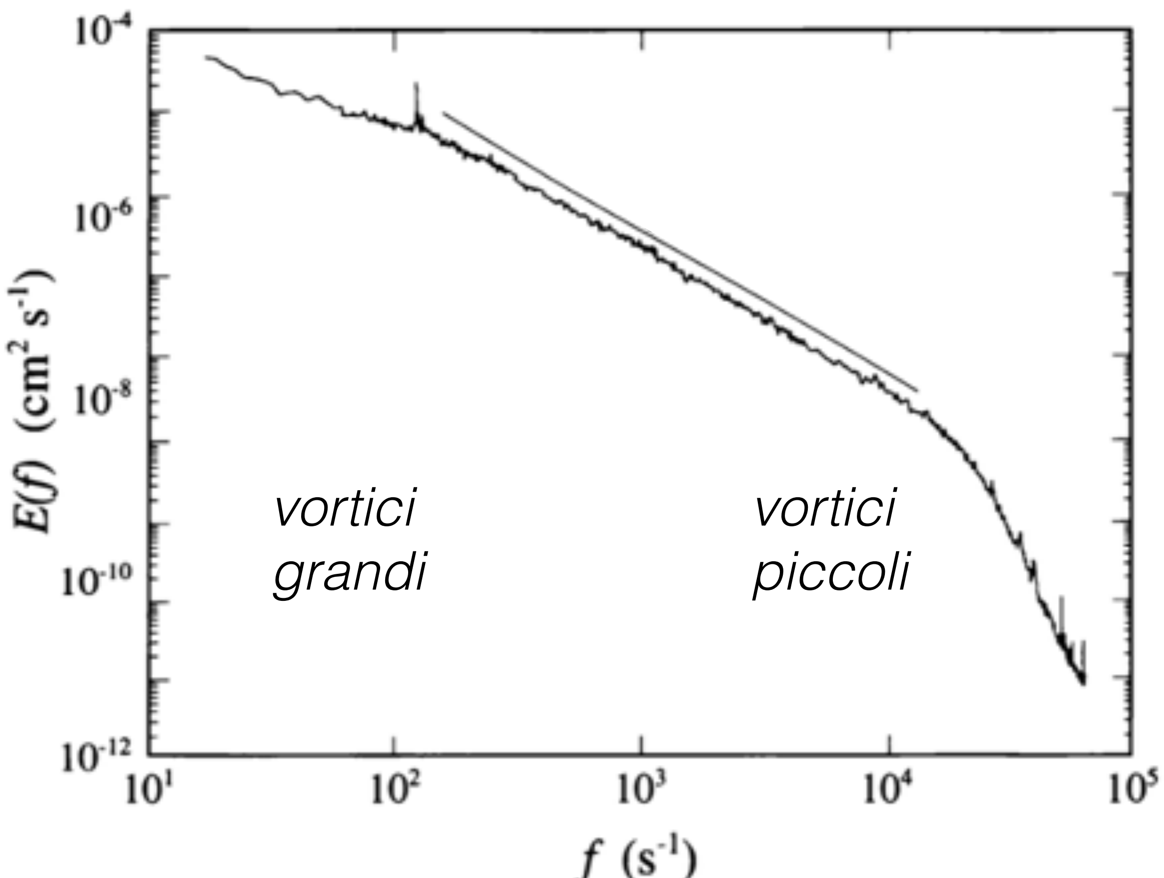
- La turbolenza è (in qualche modo) **più che caotica:**
  in un flusso tubolento sono presenti **vortici di tutte le dimensioni**
- Possiamo sperare di comprenderla in senso statistico: non mi chiedo che **cosa succederà** in un dato istante ma qual'è **la probabilità** che accada un certo evento



Da Van Dyke cit.

C'è "vita" a tutte le scale: lo spettro della turbolenza

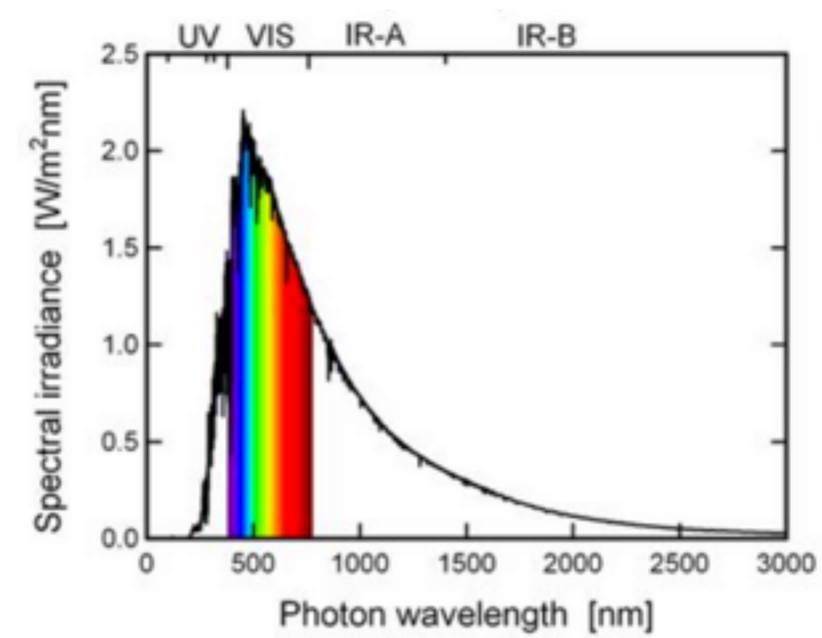
In un flusso tubolento sono presenti vortici di tutte le dimensioni: ma quanto sono intensi **in media** questi vortici?
Immaginiamo di contare l'**energia** contenuta in tutti i vortici che hanno **una certa taglia**[5]

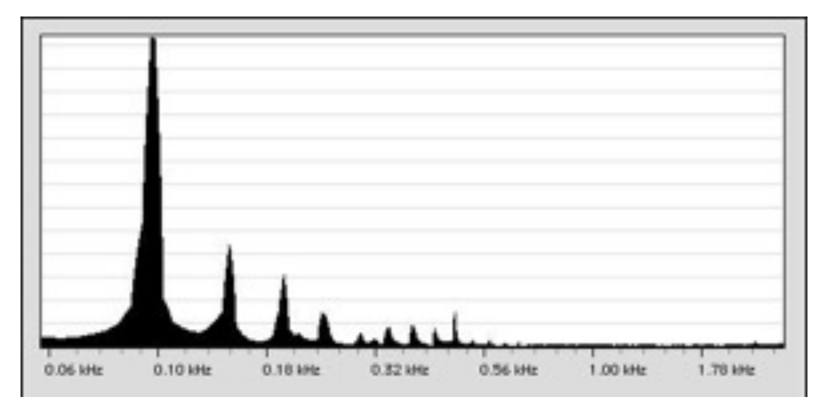


frequenza →
←*taglia dei vortici*

misuro le fluttuazioni che arrivano ad una sonda: frequenze più alte corrispondono a vortici più piccoli

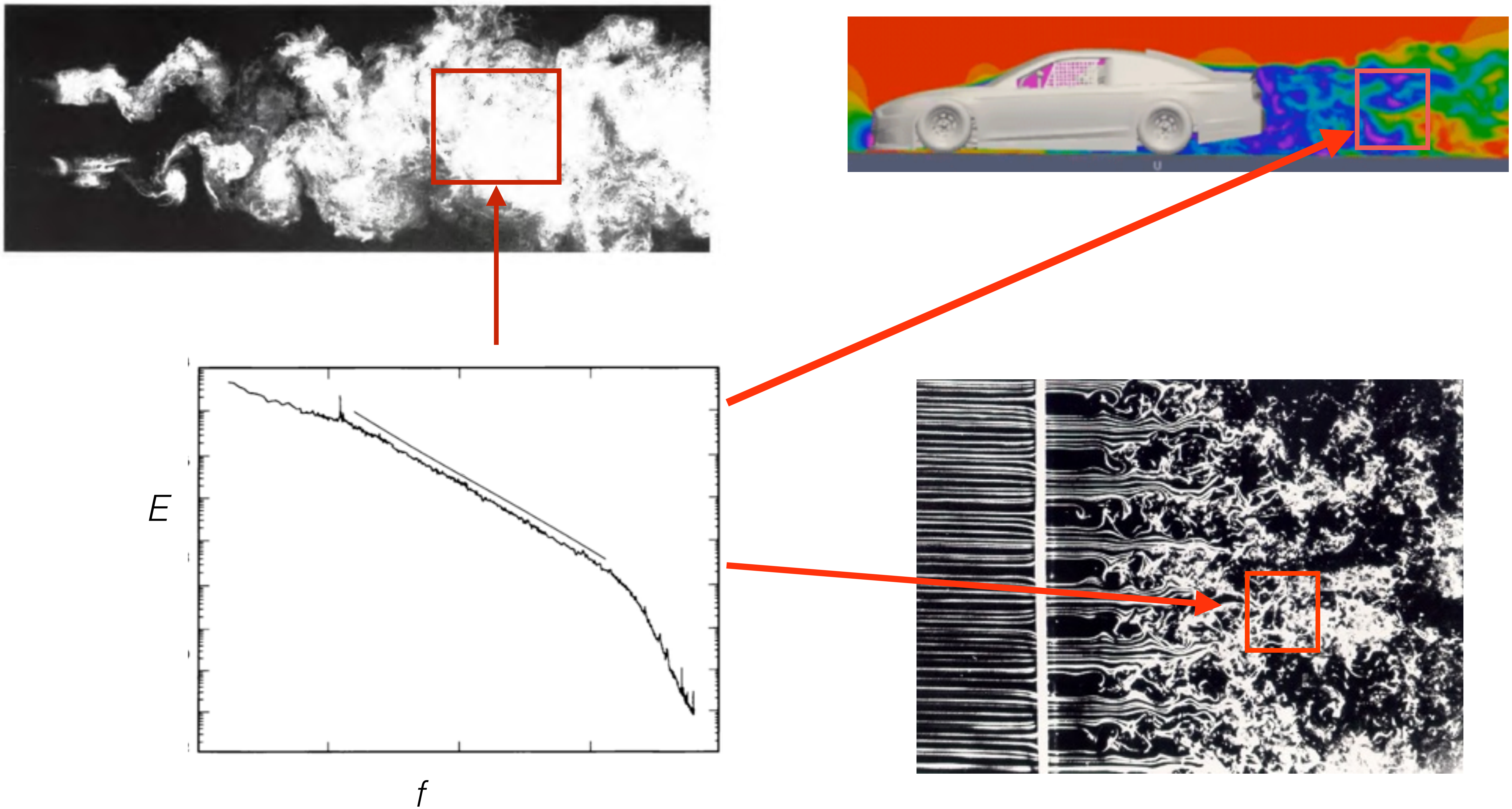
Il grafico ottenuto si chiama **spettro**



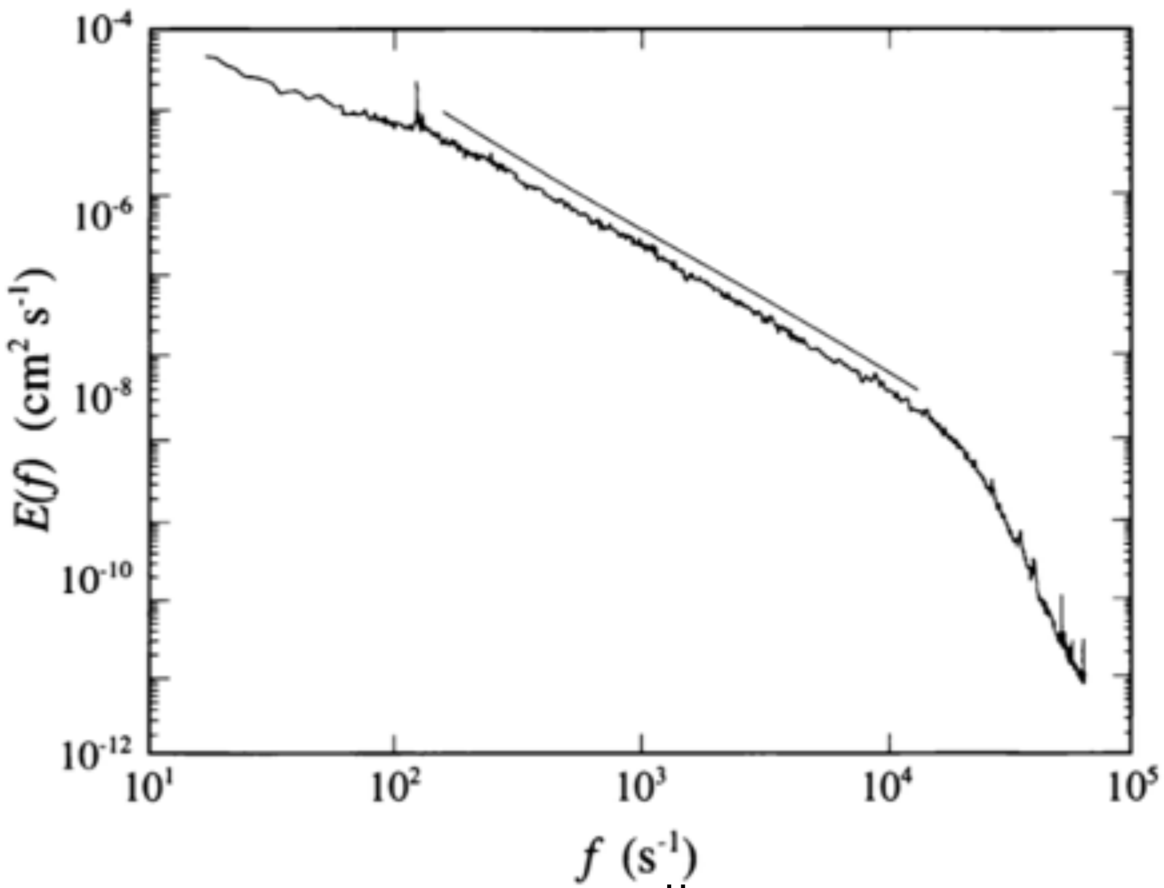


nota emessa da una chitarra

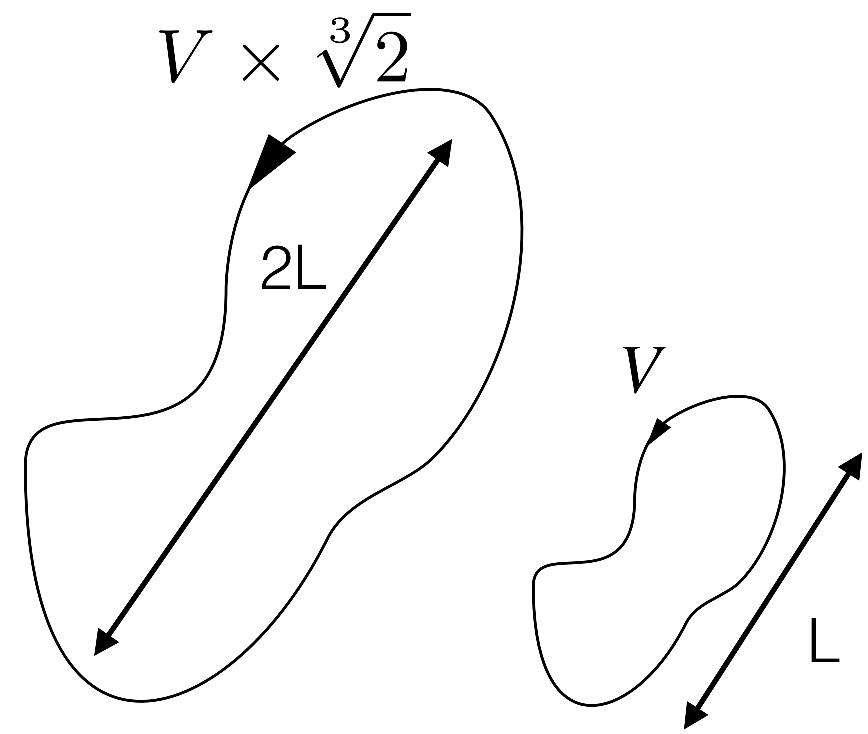
C'è "vita" a tutte le scale: lo spettro della turbolenza



C'è "vita" a tutte le scale



←taglia



A **tutte le scale,** la turbolenza si presenta **nello stesso modo**

tranne quelle molto grandi o molto piccole

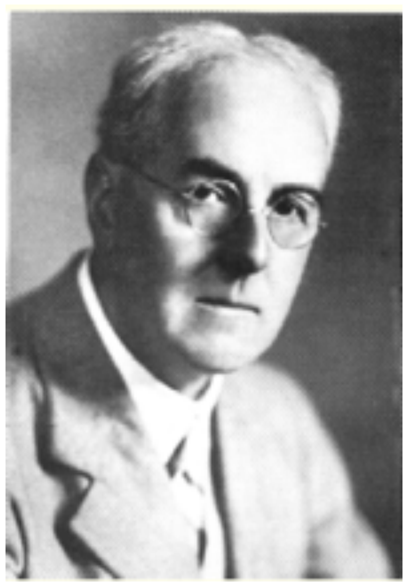
Se **raddoppio la scala** la **velocità** dei vortici cambia di **un fattore costante**.

(il fattore è circa 1,26)

È un fenomeno "**autosimile**"

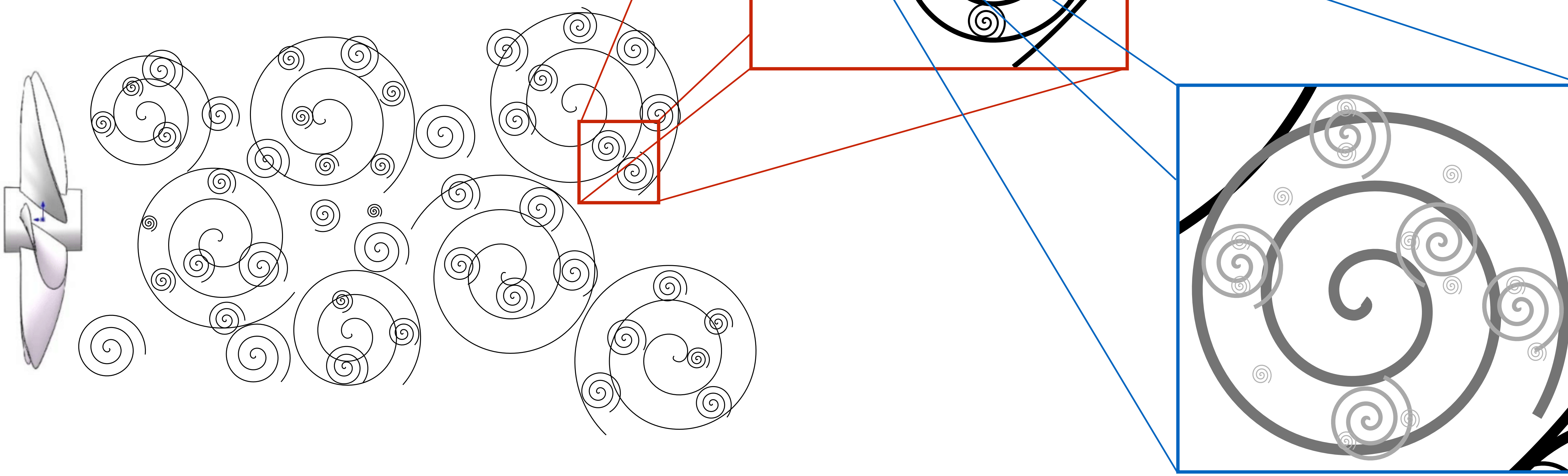
LA "CASCATA" TURBOLENTA

Lewis Fry Richardson (1881-1953)



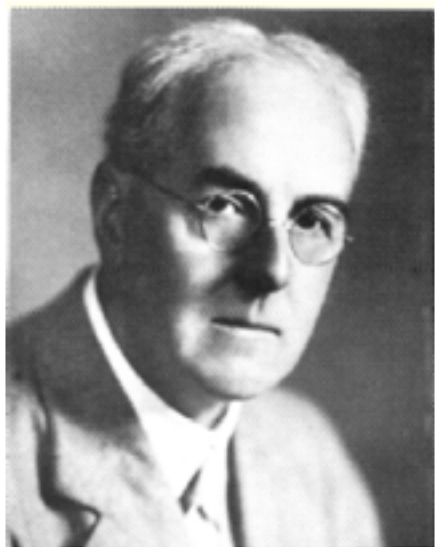
Big whorls have little whorls
that feed on their velocity,
and little whorls have smaller whorls
and so on to viscosity
(in the molecular sense)
Weather prediction by numerical processes (1922)

Grandi vortici hanno piccoli vortici
che si nutron della lor velocità
e i piccoli ne hanno altri più piccoli
e così via fino alla viscosità
(in senso molecolare)



La "cascata" turbolenta

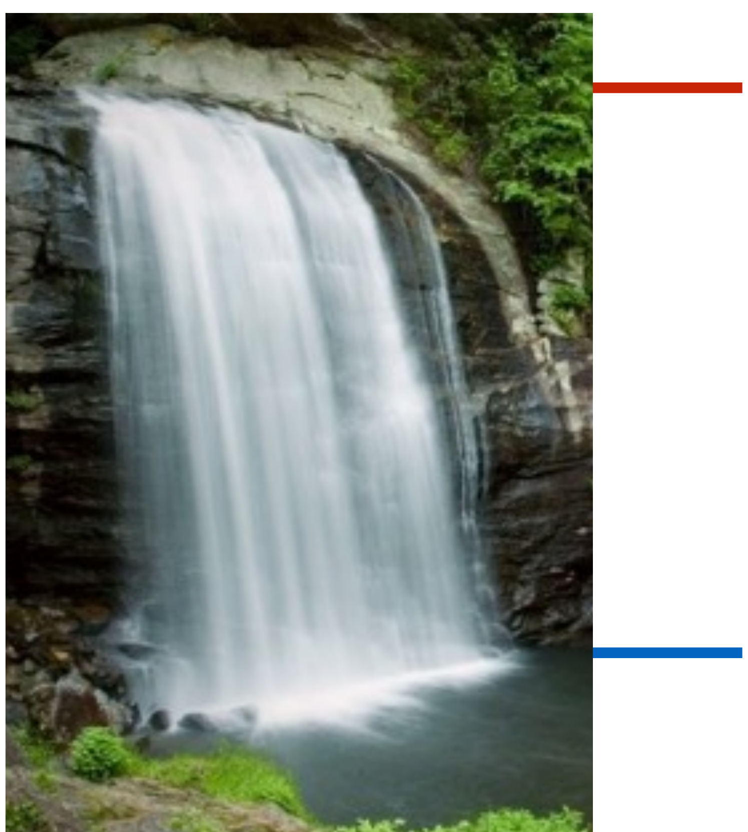
Lewis Fry
Richardson
(1881-1953)

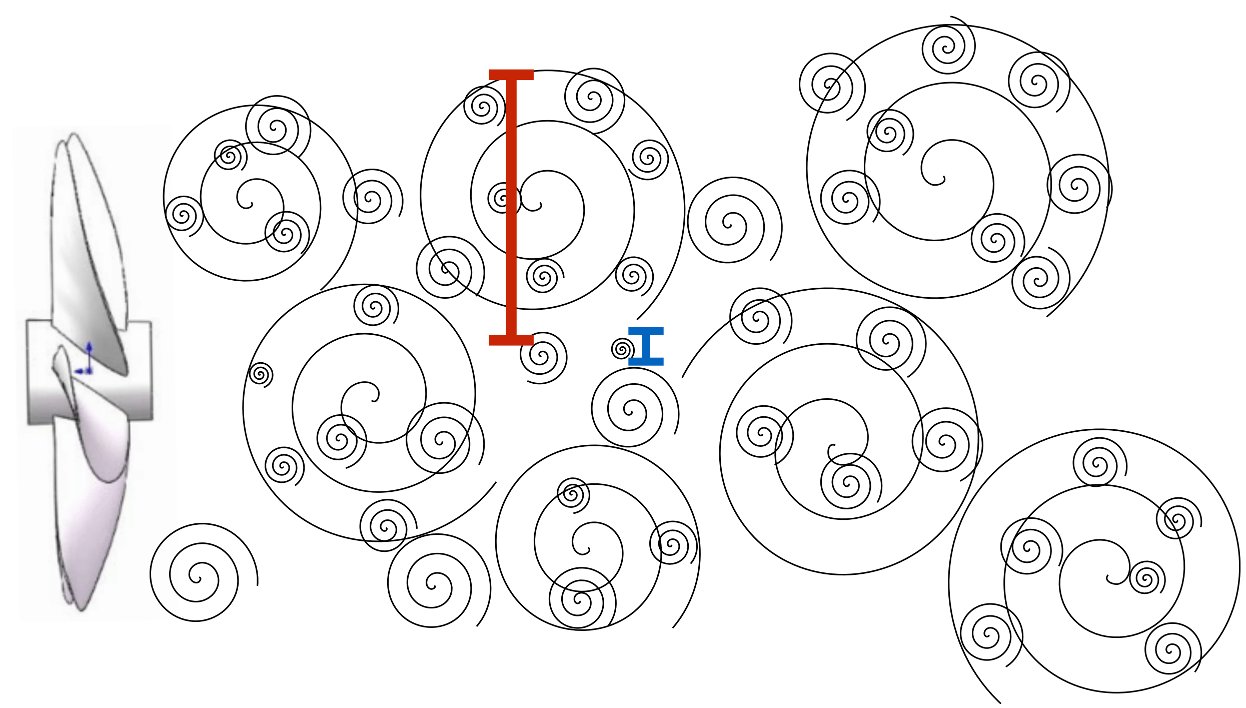


Big whorls have little whorls
that feed on their velocity,
and little whorls have smaller whorls
and so on to viscosity
(in the molecular sense)
Weather prediction by numerical processes (1922)

Grandi vortici hanno piccoli vortici
che si nutrono della loro velocità
e i piccoli ne hanno altri più piccoli
e così via fino alla viscosità
(in senso molecolare)

Da questa idea nasce la similitudine della **cascata turbolenta**





cima della cascata -> **iniezione**
lago -> **dissipazione**

La teoria di Kolmogorov del 1941

Andrey Nikolaevich Kolmogorov
(1903-1987)

Padre della moderna teoria della probabilità ha dato contributi fondamentali a molti campi della matematica e della fisica matematica fra cui le teorie del caos e della complessità

In alcuni lavori del 1941 formula una **teoria statisica della turbolenza.**

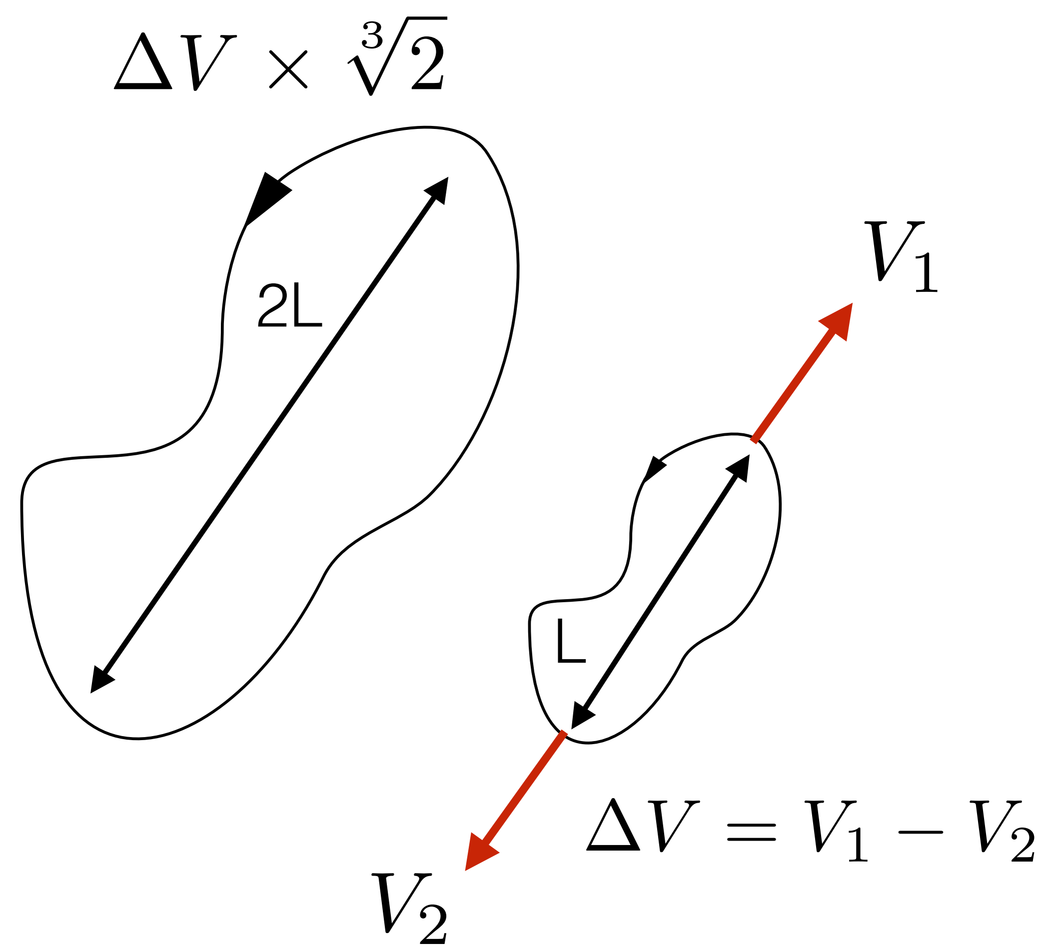
Partendo da Navier-Stokes, dimostra un risultato **esatto**[6]

$(\Delta V)^3$ in **media** è proporzionale a L

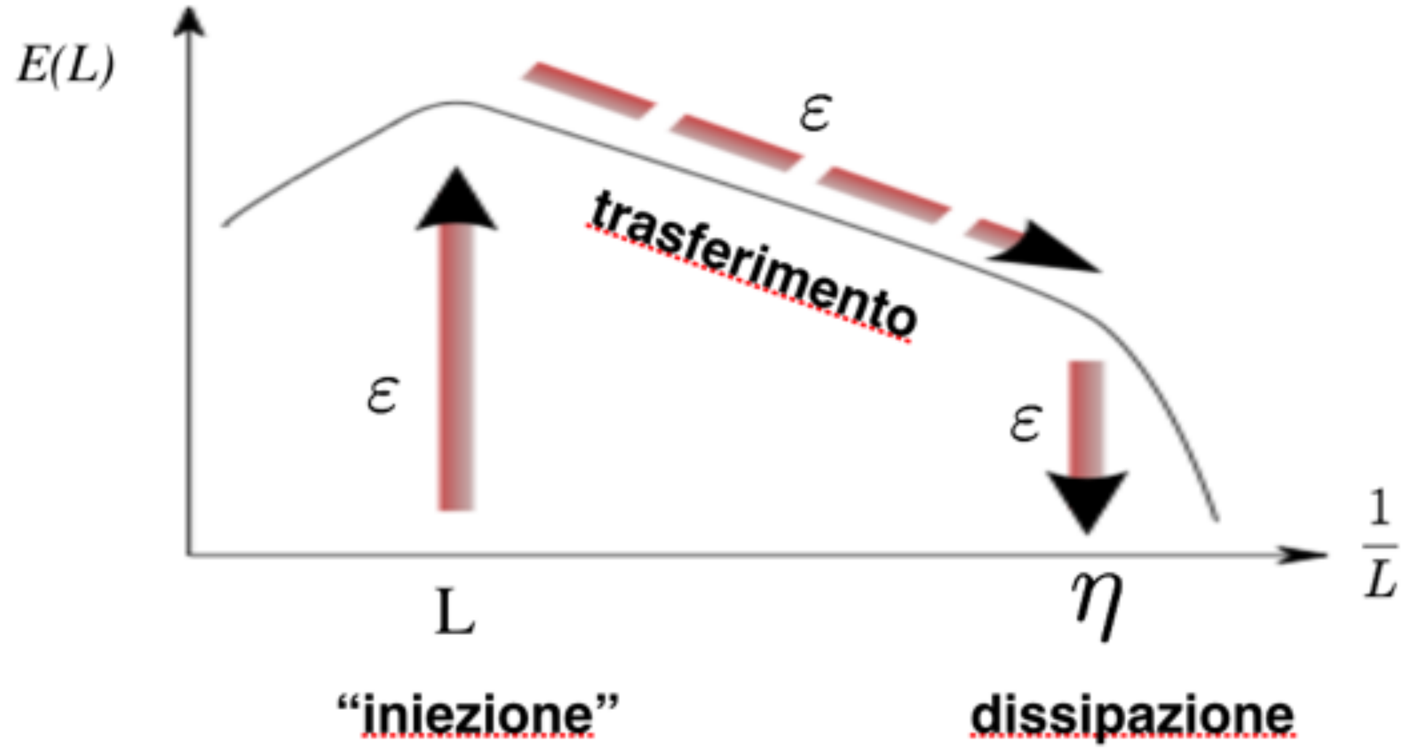
(e trova anche il coefficiente di proporzionalità)

quindi

che ΔV è propozinale a $\sqrt[3]{L}$



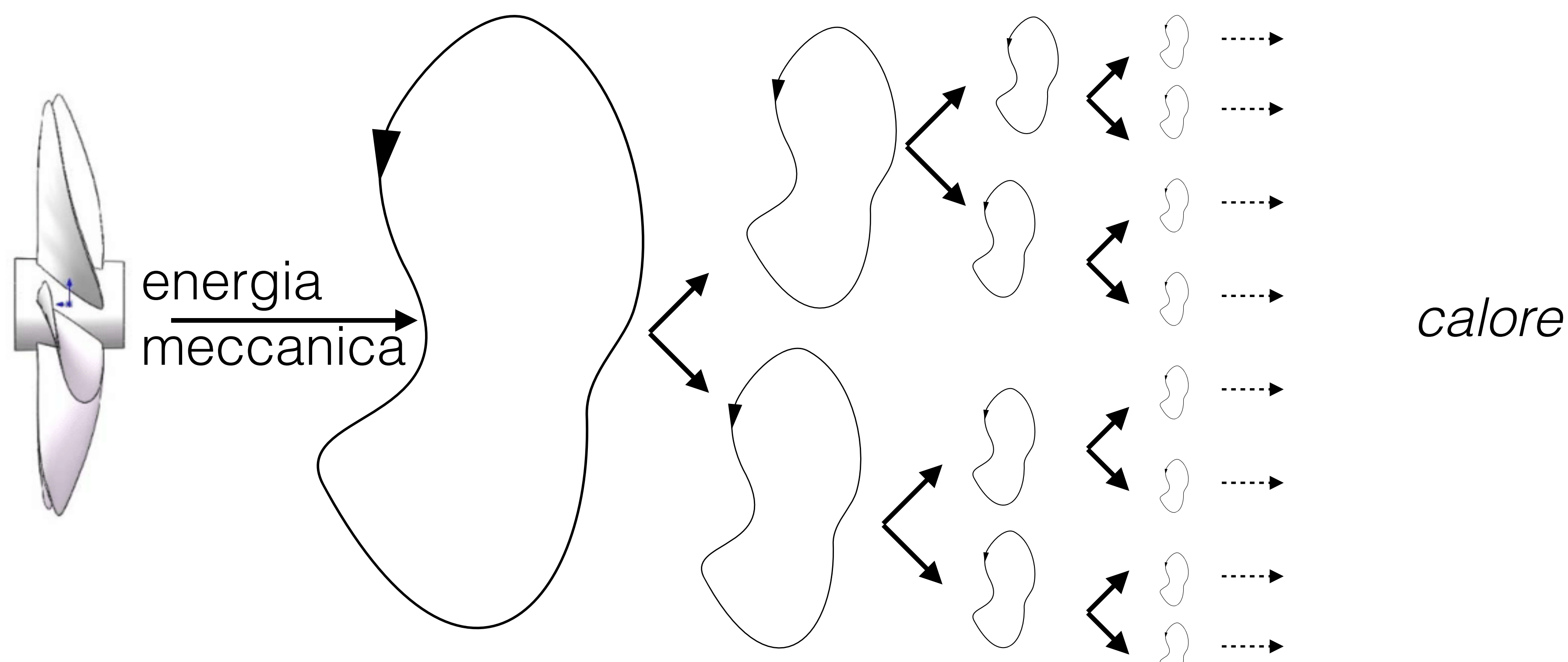
La teoria di Kolmogorov del 1941



ε flusso di energia cinetica

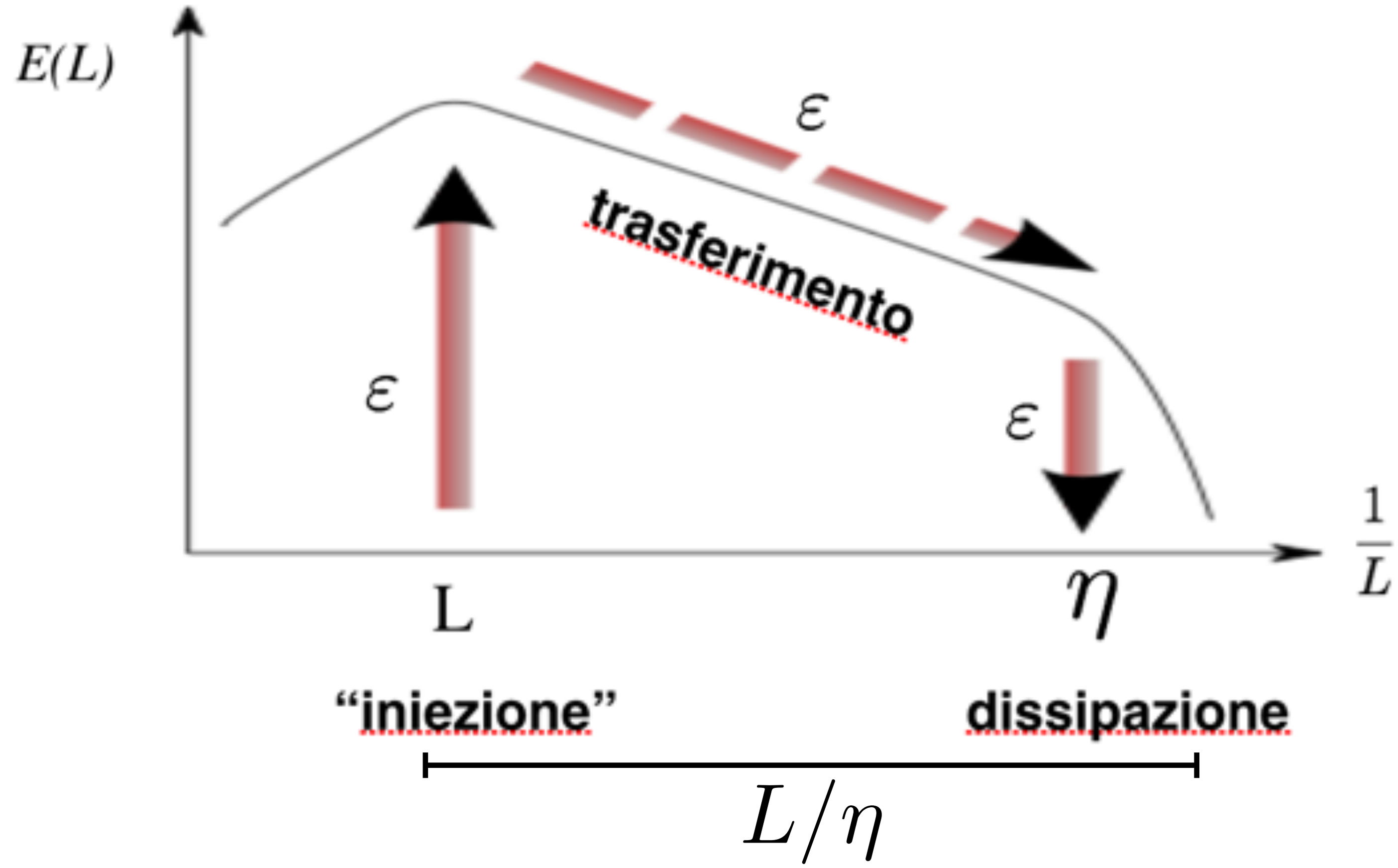
η scala di Kolmogorov

$$V_\ell \simeq \sqrt[3]{\ell}$$



E il numero di Reynolds?

LA TEORIA DI KOLMOGOROV DEL 1941



ε flusso di energia cinetica

η scala di Kolmogorov

$$V_\ell \simeq \sqrt[3]{\ell}$$

Dalla teoria di Kolmogorov si ricava che

$$\frac{L}{\eta} \simeq \mathrm{Re}^{3/4}$$

Quindi: se Re è **piccolo**, l'energia viene subito dissipata, **non c'è turbolenza**
se Re è **grande**, la turbolenza coinvolge **tantissime scale**

Tutto risolto?

In realtà non esiste un modo esatto per calcolare le **proprietà statistiche complete** della turbolenza

tuttavia sappiamo che ogni risultato **deve rispettare** la legge trovata da Kolmogorov

Oggi sappiamo che la turbolenza è solo **approssimativamente** autosimile

Le fluttuazioni di velocità diventano in realtà **sempre più intense** man mano che andiamo a piccole scale

Molti sistemi reali hanno **numeri di Reynolds altissimi** ⟶ Non bastano i computer più potenti che abbiamo per **risolvere tutte le scale**

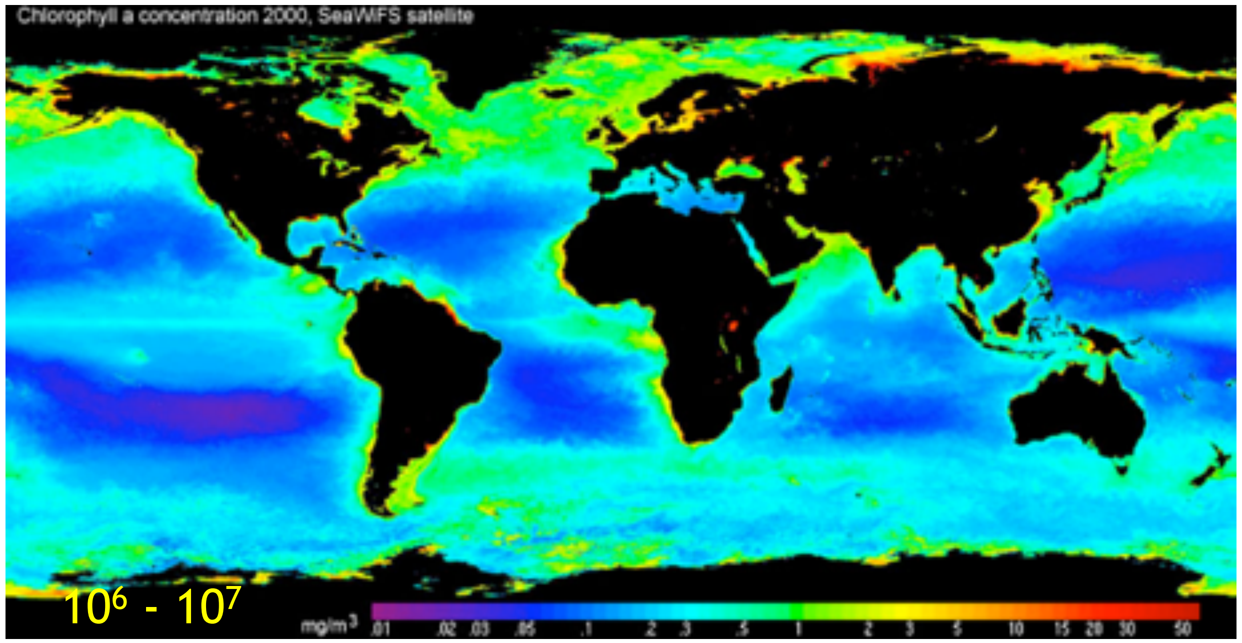
L'**ubiquità** della turbolenza significa che ci sono **molti sistemi turbolenti** che pongono **problemi specifici**

es.: flussi atmosferici e oceanici, trasporto di inquinanti, processi industriali processi biologici, etc.

Distribuzione del plankton

Il fitoplancton "produce" il 50% dell'ossigeno che respiriamo

Il plancton è inomogeneo a tutte le scale



Phytoplankton (chlorophyll) distribution on a global scale

Grande scala

↕

cause ecologiche
(il plankton cresce dove ci sono più nutrienti)

Algal blooms
(*N. scintillans* in NZ)

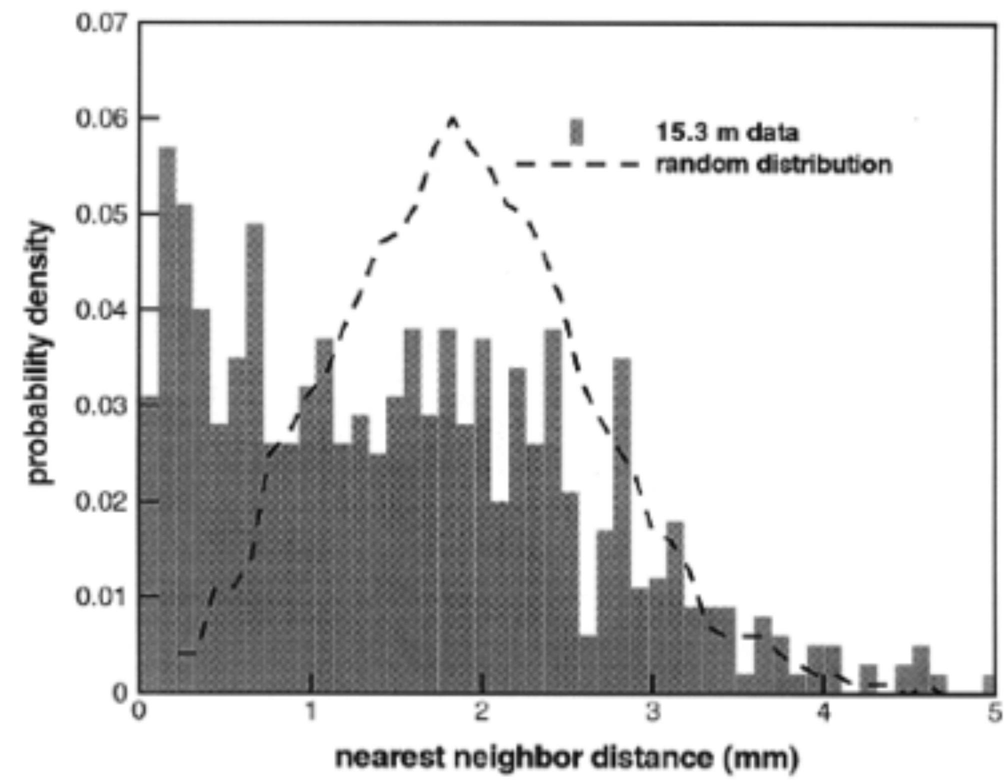


Figure 10. Measured nearest-neighbour distances and expected values from a random distribution.

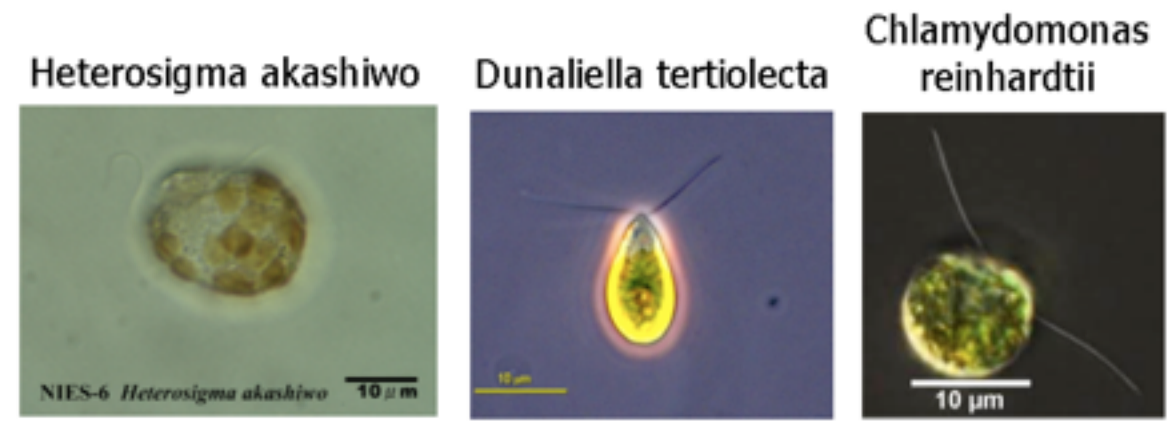
E.Malkiel, O.Alquaddoomi, J.Katz
Meas. Sci. Technol. **10** (1999)

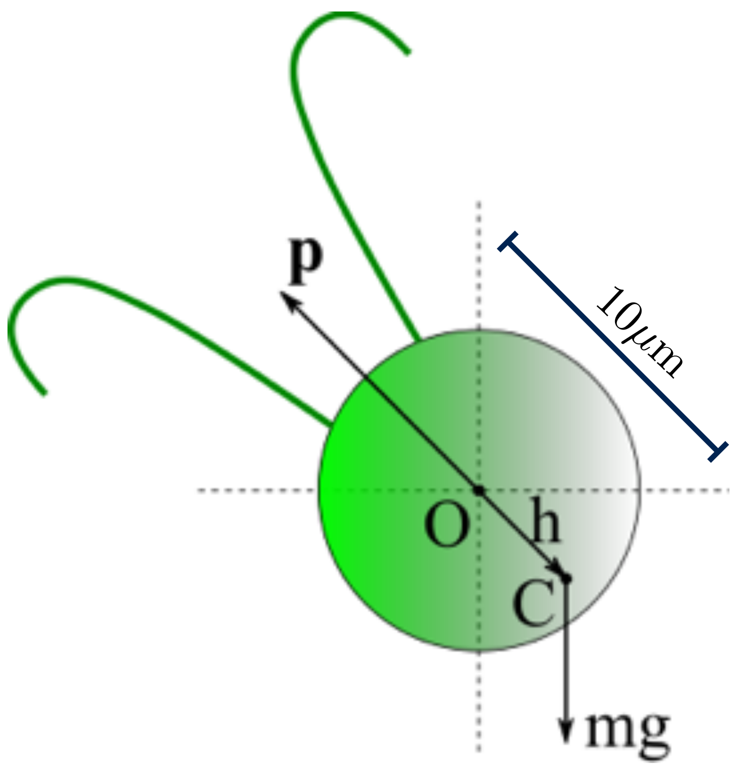
Alla scala del mm/cm

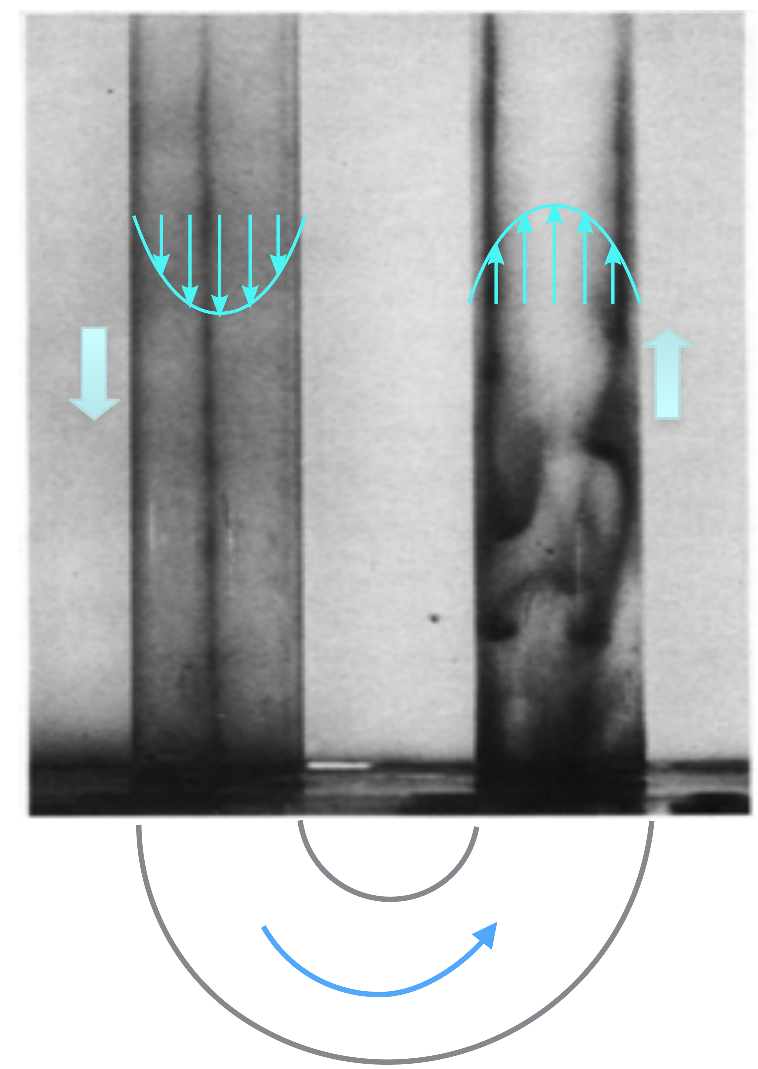
Il fitoplankton in grado di nuotare è più disomogeneo di quello che non nuota
C'è una spiegazione fluidodinamica?

ALGHE "GIROTATTICHE"

Vivono grazie alla fotosintesi
Nuotano grazie ai due flagelli anteriori
Hanno il "sedere pesante" -> nuotano veso l'alto
Il flusso può farle ruotare







$v_s \simeq 100\mu\mathrm{m/s}$ velocità di nuoto

$$B = \frac{3\nu}{hg} \simeq 1 \div 6\,\mathrm{s}$$ tempo di riorientazione

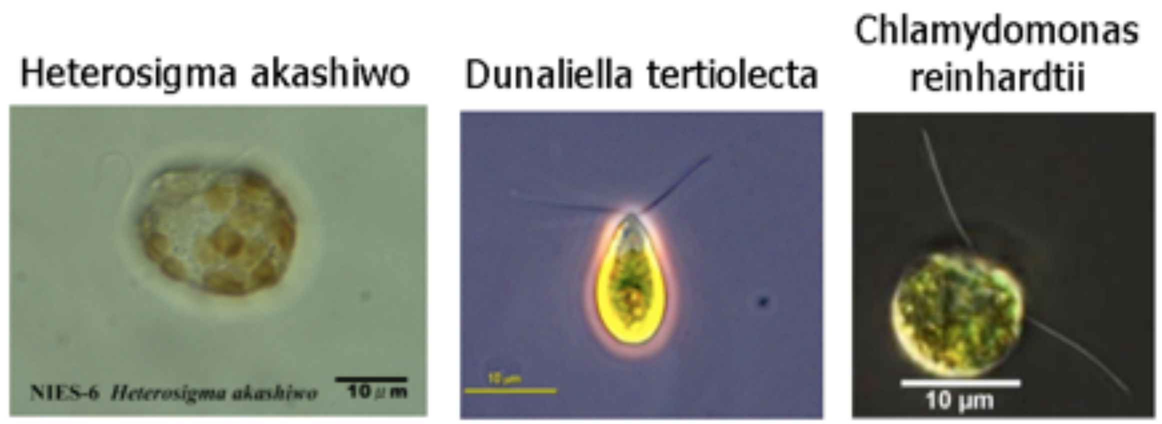
ν viscosità cinematica

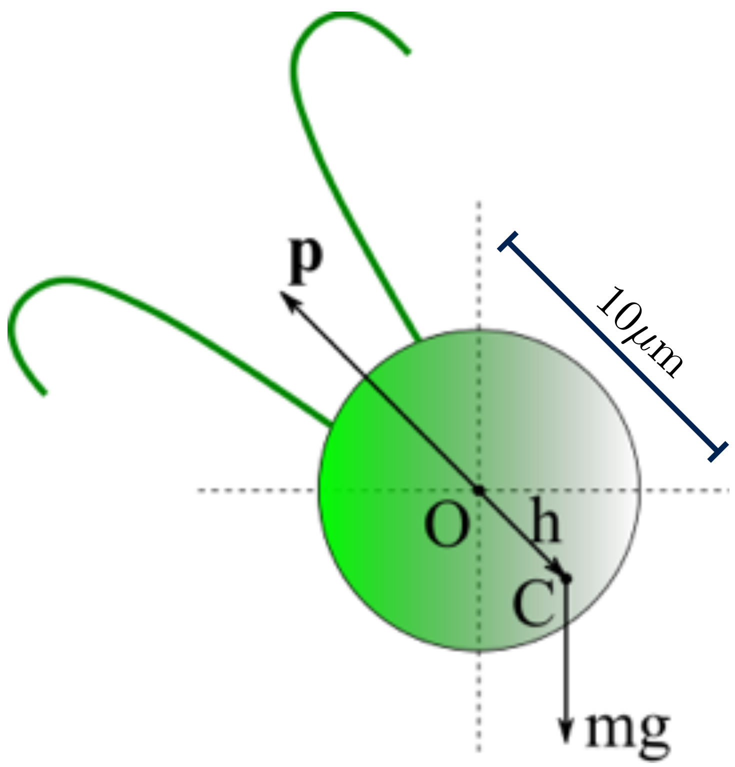
g acc. di gravità

JO Kessler (Nature 1985)
T Pedley and JO Kessler (Annu. Rev. Fluid. Mech. 1992)

ALGHE "GIROTATTICHE"

Vivono grazie alla fotosintesi
Nuotano grazie ai due flagelli anteriori
Hanno il "sedere pesante" -> nuotano veso l'alto
Il flusso può farle ruotare



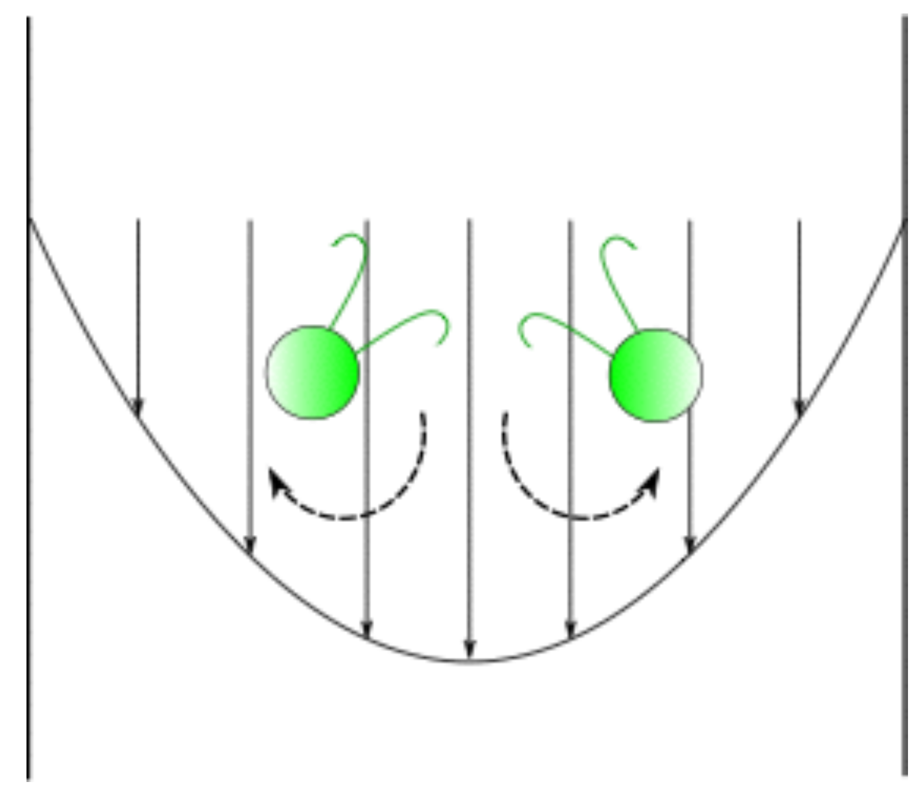


$v_s \simeq 100\mu\mathrm{m/s}$ velocità di nuoto

$B = \dfrac{3\nu}{hg} \simeq 1 \div 6\,\mathrm{s}$ tempo di riorientazione

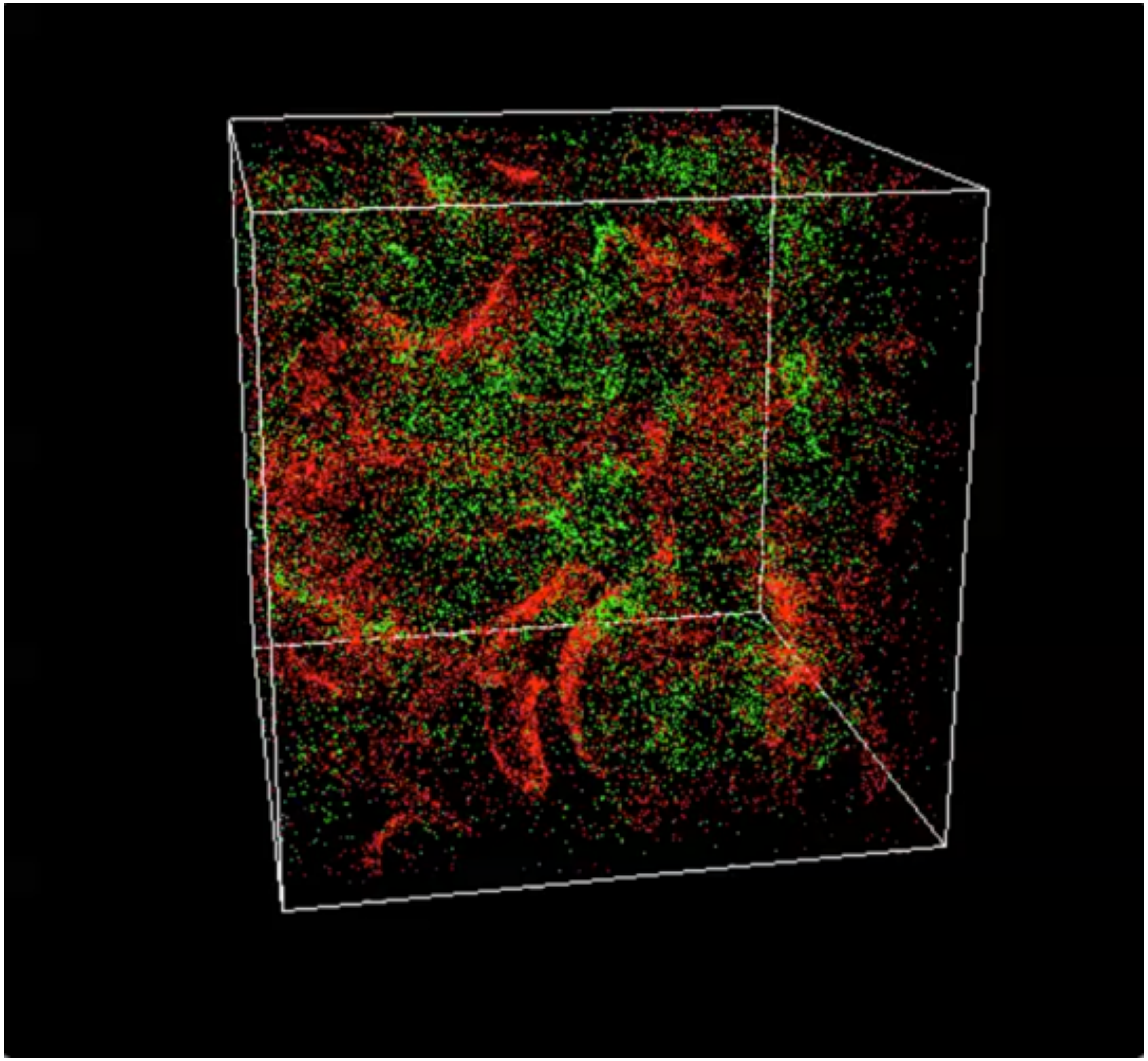
ν viscosità cinematica

g acc. di gravità



E in turbolenza che cosa succede?

ALGHETTE IN UN MARE TURBLENTO



Simulazioni numeriche

equazione di Navier-Stokes
-griglia 512 x 512 x 512

simuliamo 50 cm di oceano

semplice modello meccanico
per il moto delle alghette
fino a $\sim 10^6$ alghe

le alghe indicate in **rosso** sono molto vicine le une alle altre

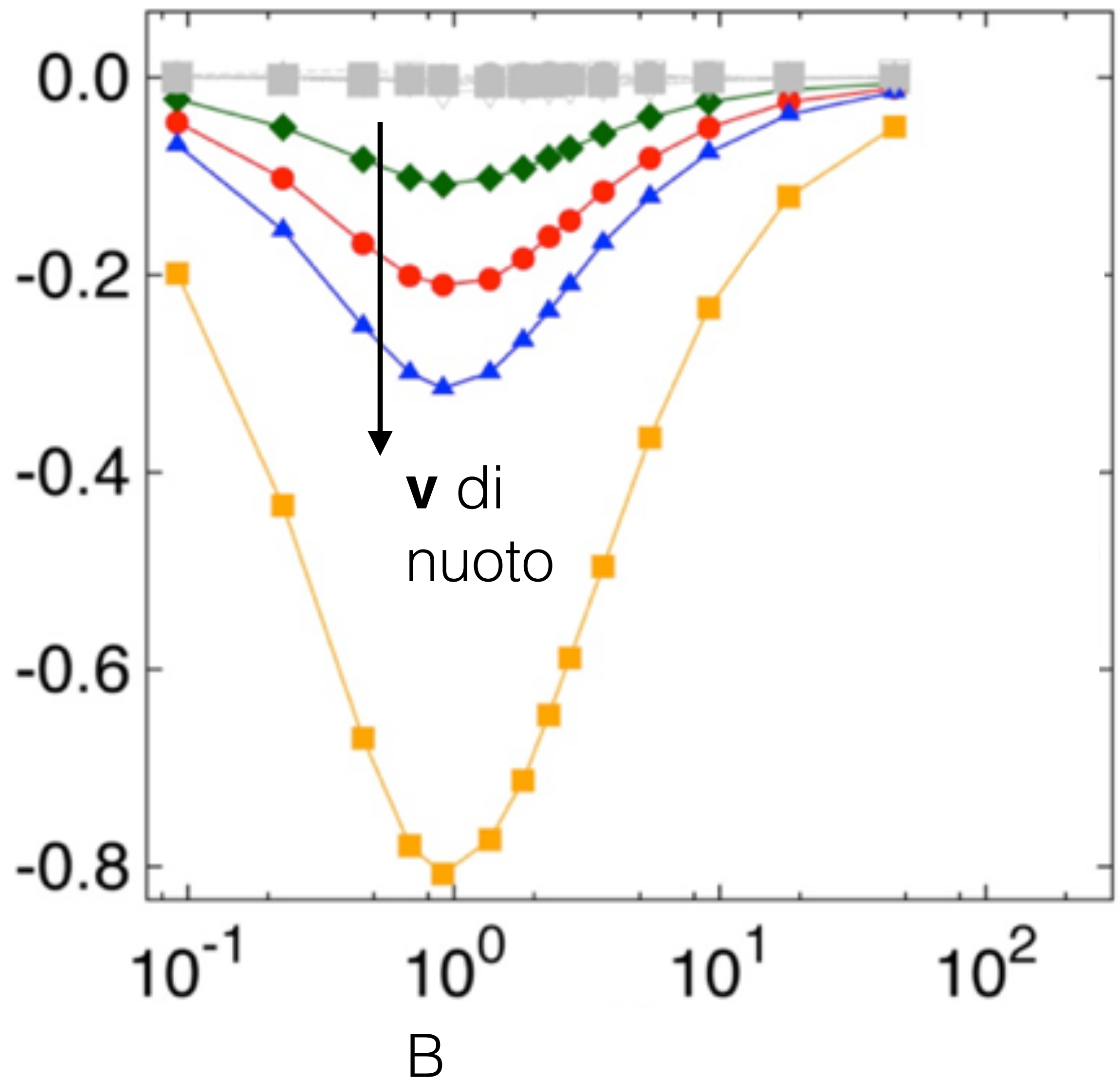
Turbulence drives microscale patches of motile phytoplankton
William M. Durham, Eric Climent, Michael Barry, Filippo De Lillo,
Guido Boffetta, Massimo Cencini & Roman Stocker
Nature Communications (2013)

ALGHETTE IN UN MARE TURBLENTO

Simulazioni numeriche: possiamo chiederci quale velocità
del fluido “misura” ciascuna alga.

Se rimanessero omogenee
vedrebbero una velocità nulla

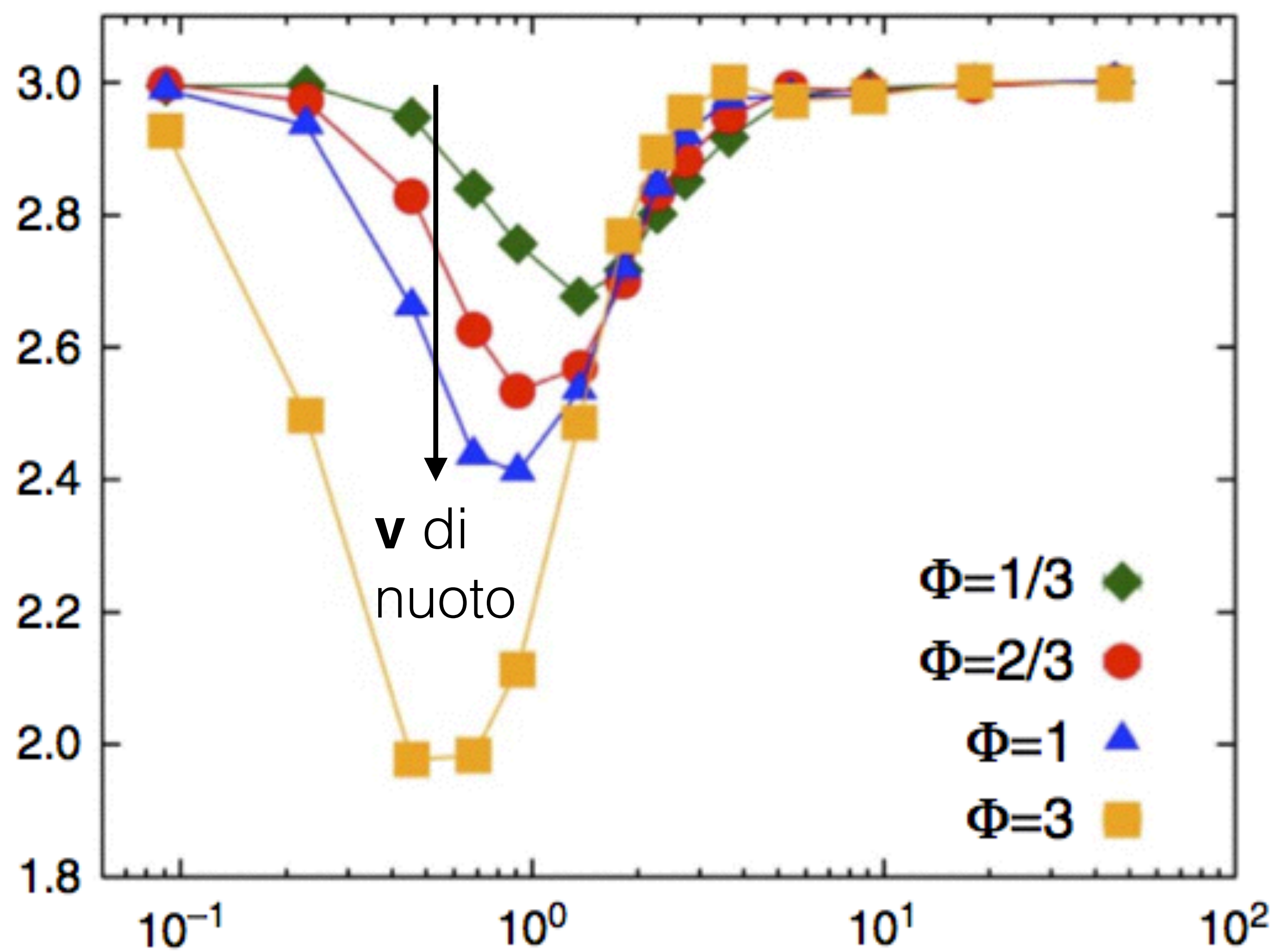
velocità verticale
“vista” dall’alga



Anche in turbolenza, le alghe accumulano nelle zone
in cui l’acqua va verso il basso!

Alghette in un mare turblento

Dimensione
frattale dei
“cluster”



tempo di orientazione

come l’attrattore di Lorenz
i “nugoli” di alghette sono **frattali**!

NOTE

1) Queste sono stime molto grossolane. In particolare il nostro olfatto è in grado di percepire le molecole odorose in concentrazioni molto basse. Ciononostante, stime migliori porterebbero comunque a valori di qualche ora per percepire il profumo
2) Ha le dimensioni dell'inverso di un tempo (T^{-1})
3) Ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza (L^{-1})
4) Si può vedere che Re è una stima *dimensionale* del rapporto fra il termine non-lineare (quello rosso) e il termine viscoso (quello giallo).
5) Notate che i valori di ascisse e ordinate compaiono in modo diverso da quanto siete abituati a vedere. Si tratta di una *scala logaritmica*. È utilizzata per mettere in evidenza leggi come quella che lega la velocità dei vortici alla loro taglia. In scala logaritmica tutte le leggi di questo tipo (dette *leggi a potenza*) appaiono come rette. Notate infatti che chi ha fatto il grafico ha posto accanto allo spettro una retta per sottolineare questo comportamento.

Continua ->

6) C'è un modo *euristico* di ricavare l'andamento della velocità dei vortici con la loro dimensione. L'argomento è il seguente: assumiamo che i vortici di taglia non troppo grande e non troppo piccola trasferiscano la loro energia senza che questa venga dissipata. Assumiamo anche che lo spettro sia stazionario, cioè l'energia contenuta a ciascuna scala non cambi nel tempo. Questo significa che tutta l'energia che "entra" nei vortici di una certa scala in un certo intervallo di tempo deve essere passata interamente alla scala successiva quando questi si rompono. Questa quantità di energia viene detta *flusso di energia* (lo indicheremo con la lettera greca ϵ). Quanto vale questo flusso? Sapete che l'energia cinetica di un corpo è proporzionale alla sua velocità al quadrato. Quindi l'energia di un vortice di taglia ℓ sarà proporzionale a V_ℓ^2(chiamando V_ℓ la velocità del fluido che lo costituisce). Ogni volta che un vortice di questa taglia si rompe la sua energia passa ai vortici più piccoli, quindi la quantità di energia che fluisce attraverso le scale nell'unità di tempo è $\epsilon \simeq V_\ell^2/T_\ell$, dove T_ℓ è il tempo di vita del nostro vortice. Possiamo stimare questo tempo pensando che il vortice viene "rotto" dalla sua stessa velocità, quindi $T_\ell \simeq \ell/V_\ell$ (cioè è il tempo che ci impiega ad essere deformato di una quantità simile alla sua stessa taglia). Se sostituiamo questa stima nella stima del flusso otteniamo $\epsilon \simeq V_\ell^3/\ell$. Il flusso deve essere indipendente dalla scala, altrimenti alcune scale riceverebbero più energia di quella che rilasciano. Ma questo equivale a dire che $V_\ell^3 \simeq \epsilon\ell$. Questa è in sostanza la legge trovata da Kolmogorov, con la differenza che lui adoperò una procedura matematica che gli consentì di ricavarla in modo rigoroso e di trovare anche il coefficiente numerico davanti al secondo membro. Tale coefficiente, per la cronaca, è -4/5, da cui il nome che normalmente si dà alla legge di Kolmogorov, ovvero "legge dei 4/5". Notate anche che in questa legge è presente il flusso di energia: più è grande l'energia che fluisce nel sistema, più sono intensi i vortici, come è ragionevole aspettarsi.