Esercizio 21

Pressione di radiazione. Forza su una superficie

Si consideri una superficie piana di area A su cui incide, ad angolo θ, una radiazione e.m. piana. Dimostrare che la forza agente su tale superficie, dovuta alla pressione di radiazione, è:

(a) $F_{\text{ass}} = \frac{I}{c} A \cos\theta$, nel caso di superficie perfettamente assorbente.

(b) $F_{\text{rifl}} = 2\frac{I}{c} A \cos^2\theta$, nel caso di superficie perfettamente riflettente.

Calcolare, in entrambi i casi, anche la pressione di radiazione.

Si consideri ora una superficie sferica di raggio R.

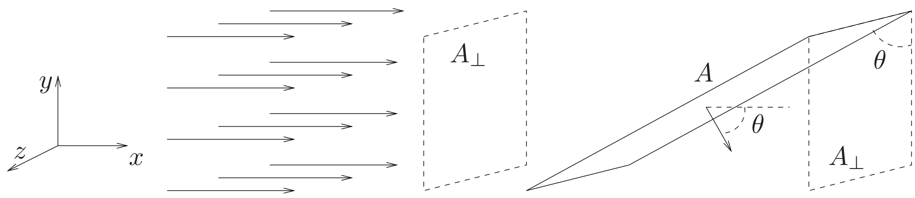
(c) Dimostrare che la forza agente sulla superficie sferica è

$$F_{\text{sfera}} = \pi R^2 \frac{I}{c}$$

sia nel caso di superficie perfettamente assorbente che perfettamente riflettente.

Guida alla soluzione

La figura mostra la radiazione che incide su una superficie di area A (qui disegnata di forma rettangolare, ma ciò è irrilevante) la cui normale forma un angolo θ con la direzione di propagazione dell'onda e.m., scelta lungo l'asse x.



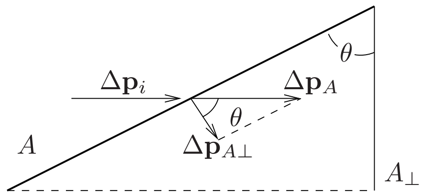
La quantità di moto $\Delta\mathbf{p}_i$ che giunge, nell'intervallo di tempo Δt, sulla superficie A è quella che, nello stesso tempo, attraversa la superficie $A_\perp$, proiezione di A sul fronte d'onda incidente. Ovviamente vale la relazione $A_\perp = A\cos\theta$. Indicheremo con $\Delta\mathbf{p}_A$ la quantità di moto che nello stesso tempo Δt viene trasferita alla superficie A. Nell'unità di tempo si ha, in modulo,

$$\frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \frac{I}{c} A_\perp = \frac{I}{c} A\cos\theta \ .$$

(a) Superficie piana perfettamente assorbente

La quantità di moto che incide sulla superficie nel tempo Δt è $\Delta \mathbf{p}_i$ e viene interamente trasferita alla superficie: $\Delta \mathbf{p}_A = \Delta \mathbf{p}_i$, per cui la forza che agisce sulla superficie è

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}_A}{\Delta t} = \dots$$

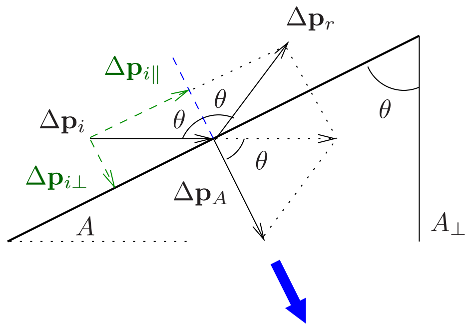


La pressione sulla superficie A è data dal rapporto tra la componente di F normale alla superficie e l'area della superficie stessa:

$$P_{rad}^{(ass)} = \frac{F_\perp}{A} = \frac{\Delta p_{A\perp}}{\Delta t\, A} = \frac{\Delta p_i \cos\theta}{\Delta t} \frac{1}{A} = \dots$$

(b) Superficie piana perfettamente riflettente

Sia $\Delta \mathbf{p}_i$ la quantità di moto incidente nel tempo Δt sulla superficie e sia $\Delta \mathbf{p}_r$ la quantità di moto riflessa dalla superficie sempre nello stesso intervallo di tempo. Scriviamo $\Delta \mathbf{p}_i$ come somma di due componenti, rispettivamente parallela e perpendicolare alla superficie A: $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}_{i\parallel} + \Delta \mathbf{p}_{i\perp}$. I moduli delle due componenti sono, ovviamente, $\Delta p_{i\parallel} = \Delta p_i \sin\theta$ e $\Delta p_{i\perp} = \Delta p_i \cos\theta$. Siccome la superficie è, per ipotesi, perfettamente riflettente, la componente della quantità di moto riflessa parallela alla superficie è uguale a quella incidente $\Delta \mathbf{p}_{r\parallel} = \Delta \mathbf{p}_{i\parallel}$, mentre la componente normale è opposta $\Delta \mathbf{p}_{r\perp} = -\Delta \mathbf{p}_{i\perp}$. Quindi la quantità di moto riflessa risulta



$$\Delta \mathbf{p}_r = \Delta \mathbf{p}_{r\parallel} + \Delta \mathbf{p}_{r\perp} = \Delta \mathbf{p}_{i\parallel} - \Delta \mathbf{p}_{i\perp} \ .$$

Per la conservazione della quantità di moto, alla superficie A viene comunicata una quantità di moto $\Delta \mathbf{p}_A$ tale che $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}_r + \Delta \mathbf{p}_A$, cioè

$$\Delta \mathbf{p}_A = \Delta \mathbf{p}_i - \Delta \mathbf{p}_r = 2\Delta \mathbf{p}_{i\perp},$$

quindi la quantità di moto acquistata dalla superficie è perpendicolare alla superficie stessa, e il suo modulo è

$$\Delta p_A = 2\Delta p_i \cos\theta = \dots$$

La forza sulla superficie e la pressione di radiazione si ottengono immediatamente.

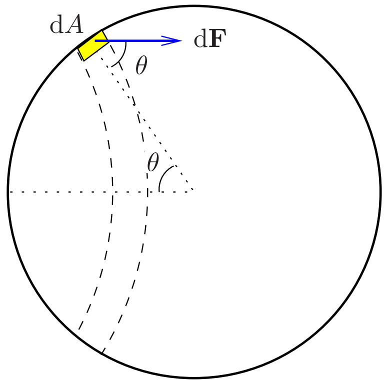
(c) Superficie sferica

Un elemento di superficie infinitesimo, individuato dagli angoli θ e φ, è

$$\mathrm{d}A = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi.$$

Esaminiamo separatamente i casi della superficie perfettamente assorbente o riflettente.

(c.1) Superficie sferica perfettamente assorbente

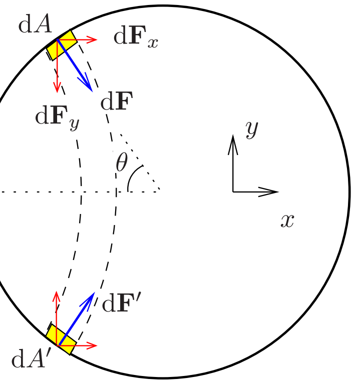


La forza che agisce sullelemento infinitesimo di superficie è dato dalla formula ricavata al punto (a):

$$\mathrm{d}F = \frac{I}{c}\mathrm{d}A\cos\theta = \dots$$

La somma dei contributi di tutti gli elementi infinitesimi di superficie (solo quelli “illuminati”!) si ottiene integrando sulle variabili angolari: $F = \frac{I}{c}\pi R^2$.

(c.2) Superficie sferica perfettamente riflettente



La forza che agisce sullelemento infinitesimo di superficie è dato dalla formula ricavata al punto (b), ma occorre osservare che solo la componente x contribuisce alla forza risultante sull'intera superficie.
Per lelemento infinitesimo si ha

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta = 2\frac{I}{c}\mathrm{d}A\cos^3\theta = 2\frac{I}{c}R^3\sin\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Integrando sugli angoli si ottiene $F = \frac{I}{c}\pi R^2$, esattamente come per la superficie totalmente assorbente.
In pratica la simmetria della sfera, selezionando solo la componente x della forza che agisce sulla superficie, compensa esattamente il fattore 2 tipico della superficieriflettente.