

# Instabilità di una colonna di plasma

November 28, 2016

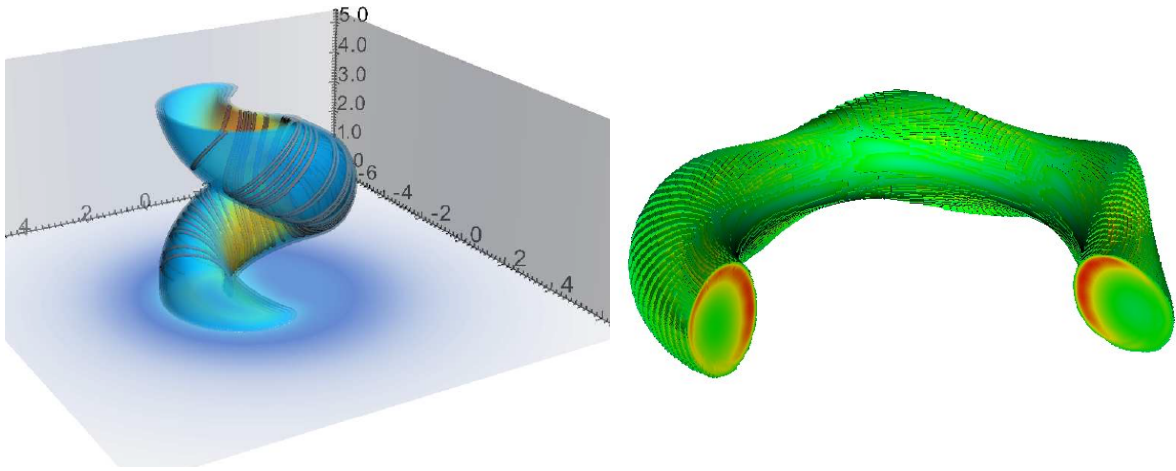


Figure 1: Sviluppo di instabilità di tipo current-driven in una colonna di plasma (sinistra) e dispositivo torodiale (destra).

## 1 Equilibrio MHD

Una caratteristica molto importante delle configurazioni di tipo Z-pinch è la loro tendenza a diventare dinamicamente instabili portando così il sistema a deformarsi e a piegarsi sotto l'azione delle forze magnetiche. Tuttavia, più in generale, gli equilibri prevedono anche una componente *poloidale* (ovvero longitudinale) del campo magnetico e viene pertanto naturale chiedersi quale siano le condizioni per la stabilità di un tale sistema. Lo studio di queste configurazioni è di particolare rilevanza nel campo del confinamento magnetico di plasmi (in laboratorio) e nello studio della stabilità dei getti astrofisici.

L'equilibrio iniziale è quindi descritto dal bilancio tra gradiente di pressione e forza di Lorentz in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$ . Considerando un'equilibrio che dipenda solo dalla coordinata radiale  $r$  avremo

$$\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{B_\phi^2}{4\pi r} = 0 \quad (1)$$

dove  $B^2 = B_z^2 + B_\phi^2$  (la condizione solenoidale del campo magnetico impone che sia  $B_r = 0$ ) e  $\mathbf{J} = c\nabla \times \mathbf{B}/(4\pi)$ .

L'analisi lineare dipende, in generale, dalla scelta dei profili di  $p(r)$ ,  $B_z(r)$  e  $B_\phi(r)$  che soddisfano la condizione di equilibrio (1) e può diventare considerevolmente complessa. Per

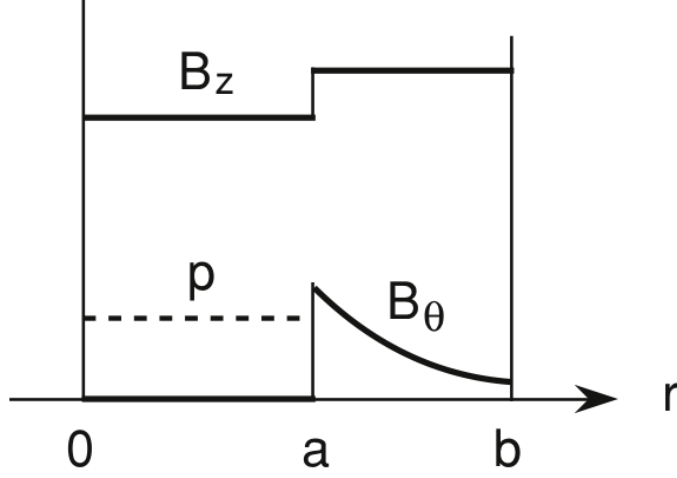


Figure 2: Skin-current model.

semplicità, considereremo una regione interna in cui pressione e campo magnetico siano costanti e una regione esterna in cui ci sia il vuoto e la corrente sia nulla. In questo caso, i profili di pressione e campo magnetico all'equilibrio sono espressi da

$$p_0(r) = \begin{cases} p_0 & \text{per } r < a \\ 0 & \text{per } r > a \end{cases} \quad \mathbf{B}_0(r) = \begin{cases} (0, 0, B_{0z}) & \text{per } r < a \\ (0, \tilde{B}_{0\phi}(r), \tilde{B}_{0z}) & \text{per } r > a \end{cases} \quad (2)$$

dove  $\tilde{B}_{0\phi}(r) = \tilde{B}_{0\phi}(a)a/r$  corrisponde ad assenza di corrente e  $a$  è il raggio della colonna di plasma confinato. L'equilibrio è statico dal momento che le velocità sono inizialmente nulle,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ .

I profili di pressione e campo magnetico espressi dalle (2) rappresentano in prima approssimazione il comportamento di un *screw-pinch*: una colonna di plasma contenuta all'interno di una parete cilindrica perfettamente conduttrice e rigida. Il plasma non entra in contatto direttamente con la parete conduttrice ma è separato da questa da una zona in cui vi è il vuoto. La presenza della regione senza plasma è necessaria per evitare che quest'ultimo, venendo a contatto con la parete conduttrice, ricombini, cessando dunque di essere un plasma.

La presenza di discontinuità nei campi magnetici implica la presenza di uno strato di corrente concentrato ad  $r = a$  (*skin current model*, Fig. 2). Infatti, prendendo  $J_\phi = \mathcal{J}_\phi(r)\delta(r - a)$  e  $J_z = \mathcal{J}_z(r)\delta(r - a)$  abbiamo che

$$J_\phi = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad J_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial(rB_\phi)}{\partial r} \quad (3)$$

(per semplicità  $c/4\pi = 1$ ). Integrando tra  $a - \epsilon$  e  $a + \epsilon$  si ottiene:

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \mathcal{J}_\phi(r)\delta(r - a)dr = \mathcal{J}_\phi(a) = -\frac{c}{4\pi} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{\partial B_z}{\partial r} dr = \frac{c}{4\pi} [B_z(a - \epsilon) - B_z(a + \epsilon)] \rightarrow \frac{c}{4\pi} [B_{0z} - \tilde{B}_{0z}] \quad (4)$$

e analogamente,

$$\mathcal{J}_z(a) = \frac{c}{4\pi} \tilde{B}_{0\phi} \quad (5)$$

## 2 Analisi Lineare

Perturbando l'equilibrio con piccole deviazioni nella forma  $q_1 \propto f(r)e^{i(kz+m\phi+\omega t)}$  andiamo a considerare dunque le equazioni MHD linearizzate:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1}{4\pi} + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \end{array} \right. \quad (6)$$

cosicchè  $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ . Introducendo il vettore spostamento (o *displacement*):

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}_1 \quad \Longrightarrow \quad i\omega \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}_1 \quad (7)$$

riscriviamo le precedenti equazioni come

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \\ -\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = -\nabla p_1 + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1}{4\pi} + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} \\ \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \\ p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \end{array} \right. \quad (8)$$

La procedura per ottenere la relazione di dispersione è piuttosto lunga e laboriosa, per cui ci limiteremo a darne le linee guida (cfr. Boyd, Goedloebe).

- Plasma interno ( $r < a$ ): vengono scritte le equazioni per i displacement radiale e azimutale,  $\xi_r$  e  $\xi_z$ . Tipicamente, queste richiede la soluzione dell'equazione di Bessel,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \xi_z(r) = 0 \quad (9)$$

la cui soluzione regolare (senza singolarità) a  $r = 0$  è data da

$$\xi_z(r) = \xi_z(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} \quad (10)$$

dove  $I_m$  è la funzione di Bessel modificata del primo tipo di ordine  $m$ .

- Plasma esterno ( $r > a$ ): nel vuoto, in assenza di correnti il campo magnetico è potenziale,  $\tilde{\mathbf{B}}_1 = \nabla \Phi$  dove  $\Phi$  soddisfa l'equazione di Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ , ottenendo nuovamente le equazioni di Bessel. Assumendo per  $\Phi$  la dipendenza funzionale già assunta per le perturbazioni, avremo che  $\Phi = \Phi(r)e^{i(m\phi+kz)}$  ottenendo nuovamente l'equazione di Bessel per il potenziale  $\Phi$ . Scegliendo questa volta la soluzione che si annulla all'infinito si avrà

$$\Phi(r) = \Phi(a) \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)} \quad (11)$$

dove  $K_m$  è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo di ordine  $m$ .

- Condizioni di raccordo: All'interfaccia plasma-vuoto si impongono le condizioni di raccordo che sono espresse dall'uguaglianza della pressione totale e dall'annullamento della componente normale del campo magnetico:

$$\left[ p + \frac{B^2}{8\pi} \right]_{-}^{+} = 0 \quad \text{and} \quad (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}})_{-} = 0 = (\mathbf{B}_{+} \cdot \hat{\mathbf{n}})_{+} \quad (12)$$

dove i pedici  $-$  e  $+$  indicano i valori delle variabili immediatamente a sinistra e a destra dell'interfaccia. Si noti che le condizioni di raccordo alla superficie di separazione valgono non solo per configurazione iniziale ma anche per la configurazione *istantanea* durante gli istanti successivi dove lo normale  $\hat{\mathbf{n}}$  non coinciderà necessariamente con la direzione data da  $\hat{\mathbf{e}}_r$ .

Il raccordo tra le due soluzioni deve essere fatto quindi all'interfaccia anche durante il moto perturbato dal momento che la colonna di plasma si deforma a causa dell'instabilità. Pertanto un cambiamento delle quantità sarà dovuto, oltre che dalle perturbazioni, anche dal movimento della superficie di separazione stessa.

### 3 Relazione di Dispersione

Il risultato finale per la relazione di dispersione è

$$4\pi\rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = B_{0z}^2 - \left( \tilde{B}_{0z} + m \frac{\tilde{B}_{0\phi}(a)}{ka} \right)^2 \frac{I'_m(ka) K_m(ka)}{I_m(ka) K'_m(ka)} - \tilde{B}_{0\phi}^2(a) \frac{1}{ka} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (13)$$

Seguono alcune riflessioni.

1. Ciasun termine a membro di destra dell'Eq. (13) è una quantità reale, per cui le radici di  $\omega$  possono solo essere puramente reali (se la parte destra dell'equazione è positiva) o puramente immaginarie (se la parte a destra dell'equazione risulta negativa) nel qual caso si avrà un'instabilità.
2. In tal senso, potremo dire che ciascuno dei tre termini a membro di destra ha un effetto stabilizzante o destabilizzante a seconda che sia positivo o negativo, rispettivamente. Tenuto conto che  $I_m, K_m$  e  $I'_m$  sono  $> 0$  mentre  $K'_m < 0$ , si vede facilmente che il primo e il secondo termine hanno un effetto sempre stabilizzante mentre il terzo termine può destabilizzare il sistema. Perchè si abbia un'instabilità ( $\omega^2 < 0$ ), quindi, occorrerà che il terzo termine sia più grande della somma degli altri due in valore assoluto.
3. Siccome  $I_{-m}(x) = (-1)^m I_m(-x) = I_m(x)$  (lo stesso vale per  $K_m(x)$ ) i termini  $I'_m/I_m$  e  $K'_m/K_m$  sono entrambi funzioni dispari e la relazione di dispersione non cambia per  $k \rightarrow -k$  e  $m \rightarrow -m$ .
4. I tre valori del campo  $B_{0z}, \tilde{B}_{0z}$  e  $\tilde{B}_{0\phi}$  non sono indipendenti ma sono legati tra loro dalla condizione di equilibrio di pressione all'interfaccia:

$$p_0 + \frac{B_{0z}^2}{8\pi} = \frac{\tilde{B}_{0\phi}^2(a) + \tilde{B}_{0z}^2}{8\pi} \quad (14)$$

La relazione precedente pone, quindi, anche dei limiti alle possibili variazioni dei parametri dal momento che tutti i termini dell'equazione precedenti devono rimanere positivi.

Distinguiamo ora i casi corrispondenti ai modi  $m = 0$  ed  $m = 1$ .

### 3.1 Sausage Instability, $m = 0$

Per  $m = 0$  si ha una perturbazione a simmetria assiale dove entrambi i campi longitudinali (esterno ed interno) favoriscono la stabilità mentre  $\tilde{B}_{0\phi}$  ha l'effetto opposto. Dal momento che  $\tilde{B}_{0\phi} \sim 1/r$ , la pressione magnetica esterna sulla superficie sarà più alta dove la perturbazione stringe la colonna mentre sarà più debole in prossimità dei rigonfiamenti. Questo effetto fa sì che la forza di Lorentz  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  tenda a ridurre ancor più la sezione della colonna. D'altra parte, la pressione magnetica dovuta alla componente longitudinale del campo all'interno della colonna si oppone all'effetto compressivo del campo azimutale cercando di stabilizzare il sistema. Una perturbazione di questo tipo comporta quindi le deformazioni mostrate in Figura 3 che consistono in una serie di strozzature e rigonfiamenti (da cui il nome *sausage instability*).

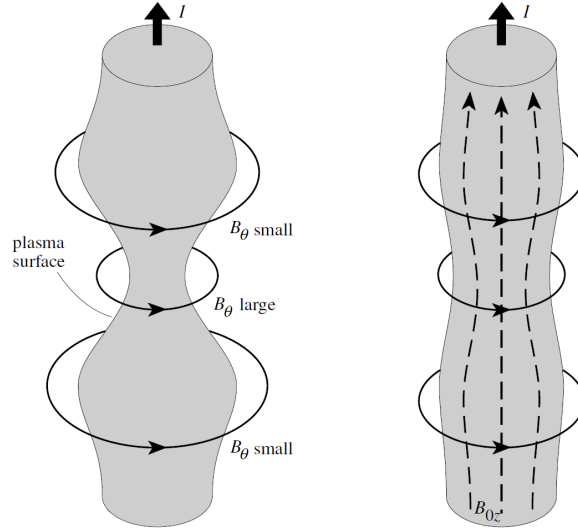


Figure 3: Instabilità di sausage (pinch mode,  $m = 0$ )

Per ottenere dei risultati più quantitativi, poniamo  $\tilde{B}_{0z} = 0$  nella relazione di dispersione (13) che quindi si semplifica come segue:

$$4\pi\rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = B_{0z}^2 - \tilde{B}_{0\phi}^2(a) \frac{1}{ka} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (15)$$

Si avrà quindi un'instabilità quando  $\omega^2 < 0$ , ossia

$$B_{0z}^2 < \tilde{B}_{0\phi}^2(a) \frac{1}{ka} \frac{I'_0(ka)}{I_0(ka)} \quad \implies \quad \tilde{\beta}_\phi = \frac{8\pi\rho_0}{\tilde{B}_{0\phi}^2(a)} > 1 - \frac{1}{ka} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (16)$$

dove si è tenuto conto della condizione di equilibrio di pressione iniziale, Eq. (14), riscritta come  $B_{0z}^2/(8\pi\rho_0) = 1/\tilde{\beta}_\phi - 1$ . L'instabilità procede quindi tanto più velocemente quanto l'effetto del campo longitudinale non è più in grado di controbilanciare l'azione destabilizzante dovuta al campo azimutale.

Inoltre, dovendo essere  $0 < \tilde{\beta}_\phi < 1$  e considerando l'andamento per piccoli e grandi  $k$  delle  $I_0$  e  $I'_0$ , avremo che

$$\lim_{ka \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{ka} \frac{I'_0(ka)}{I_0(ka)} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{ka \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{ka} \frac{I'_0(ka)}{I_0(ka)} = 1. \quad (17)$$

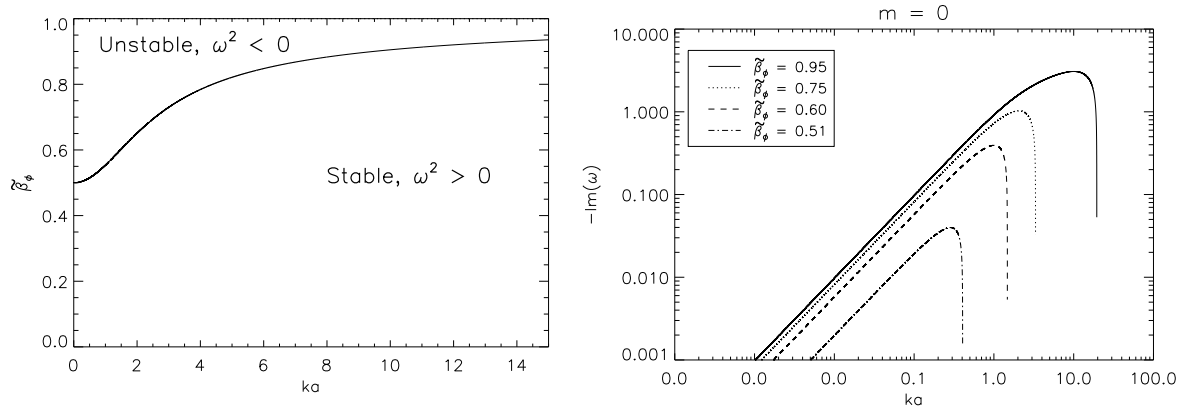


Figure 4: **Sinistra:** curva di stabilit  marginale ottenuta per  $\omega^2(k) = 0$  (in assenza di campo longitudinale esterno,  $\tilde{B}_{0z} = 0$ ): valori di  $\tilde{\beta}_\phi$  al di sopra (sotto) della curva tenderanno a destabilizzare (stabilizzare) il sistema. Per semplicit  si   posto  $4\pi\rho_0 = 1$ . **Destra:** andamento della parte immaginaria di  $\omega$  (tasso di instabilit ) per  $m = 0$  e diversi valori del parametro  $\tilde{\beta}_\phi$  (e quindi del campo azimutale). In questo caso  $\tilde{\beta}_\phi < 1$  e all'aumentare del campo magnetico azimutale esterno, anche il campo poloidale all'interno deve aumentare dal momento che  $1 + B_{0z}^2/(8\pi) = 1/\tilde{\beta}_\phi$ .

I possibili valori di  $\tilde{\beta}_\phi$  per cui il sistema   instabile saranno quindi quelli mostrati nel pannello di sinistra in Fig 4. La curva a tratto continuo corrisponde a  $\omega^2(k) = 0$  e prende il nome di curva di stabilit  marginale.

L'andamento del tasso di crescita (o *growth rate* definito da  $-\text{Im}(\omega)$ )   rappresentato in Figura 4 (pannello di destra) per diversi valori di  $\tilde{\beta}_\phi$  e in assenza di campo longitudinale esterno ( $\tilde{B}_{0z} = 0$ ). La presenza di un campo longitudinale contribuisce a stabilizzare il sistema.

### 3.2 Instabilità di Kink, $|m| = 1$

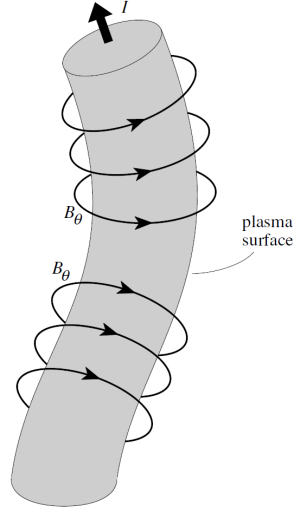


Figure 5: Instabilità di kink ( $m = \pm 1$ )

Il modo  $|m| = 1$  è noto come *kink* e da origine alle deformazioni mostrate in Fig. 5. La perturbazione cresce perchè le linee di campo magnetico sul lato concavo risultano essere più vicine tra loro mentre quelle sul lato convesso sono più distanti. Come conseguenza, la pressione sul lato concavo risulta maggiore di quella sul lato convesso e la distorsione tende a crescere ulteriormente. La presenza di un campo longitudinale, sia esso interno o esterno, favorisce invece la stabilità grazie alla forza di tensione magnetica (generata in seguito alla distorsione) che cerca di ripristinare il sistema verso la configurazione di equilibrio iniziale. La flessione delle linee di campo risulta tanto più grande quanto più piccola è la lunghezza d'onda della perturbazione. L'andamento del tasso di crescita è mostrato in Figura 6 per diversi valori di  $\tilde{\beta}_\phi$  nel caso in cui sia assente il campo longitudinale interno ( $B_{0z} = 0$ ).

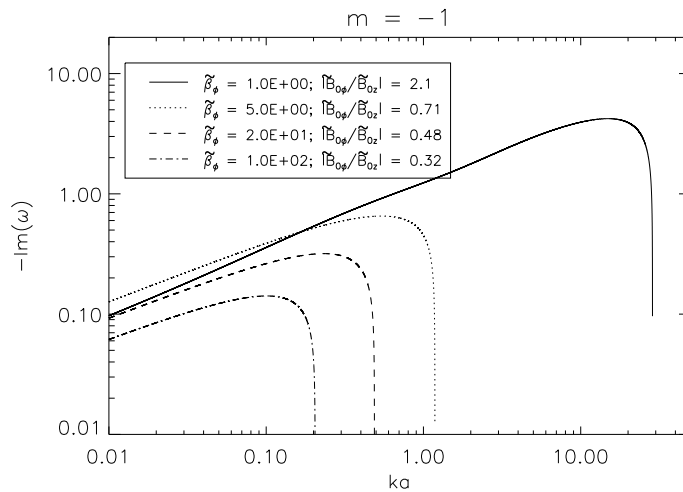


Figure 6: Andamento della parte immaginaria di  $\omega$  (tasso di instabilità) per  $m = 1$  e diversi valori del parametro di plasma  $\tilde{\beta}_\phi$  (e quindi del campo azimutale). Per semplicità si è posto  $4\pi\rho_0 = 1$ .

Trascurando il campo longitudinale interno ( $B_{0z} = 0$ ) e nel limite  $ka \ll 1$ , possiamo utilizzare

le seguenti approssimazioni (valide per  $m > 0$ ):

$$I_m(ka) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \quad K_m(ka) \approx \frac{(m-1)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \quad (18)$$

cosicché la relazione di dispersione (13) diventa

$$4\pi\rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = \left( \tilde{B}_{0z} + m \frac{\tilde{B}_{0\phi}(a)}{ka} \right)^2 - \frac{m}{k^2 a^2} \tilde{B}_{0\phi}^2(a). \quad (19)$$

Moltiplicando per  $k^2$  si vede che la relazione precedente è un'equazione quadratica in  $k$  con un punto di minimo in

$$k_{\min} = -\frac{m\tilde{B}_{0\phi}}{a\tilde{B}_{0z}} \quad \Longrightarrow \quad \omega_{\min}^2 = -m \frac{\tilde{B}_{0\phi}^2(a)}{4\pi\rho_0 a^2}, \quad (20)$$

ottenuto risolvendo  $d\omega^2/dk = 0$ . Ponendo  $m = 1$  nelle due espressioni precedenti vediamo quindi che sia  $k_{\min}$  che  $\omega_{\min}^2$  sono negativi e quindi esiste sempre una lunghezza d'onda a cui il sistema è instabile indipendentemente dal valore di  $\beta_z$ .

La stabilizzazione avviene per quei valori  $k$  tali per cui  $|k| > |k_0|$  dove  $k_0 \neq 0$  soddisfa  $\omega^2(k_0) = 0$ . Riscrivendo la (19) per  $m = 1$ , e ponendo  $\omega^2 = 0$  otteniamo

$$k_0 a \tilde{B}_{0z}^2 = -2\tilde{B}_{0z} \tilde{B}_{0\phi} \quad \Longrightarrow \quad k_0 a = -2\tilde{B}_{0\phi}(a)/\tilde{B}_{0z}, \quad (21)$$

Perturbazioni con numero d'onda più grande (in valore assoluto) di  $|k_0|$  saranno pertanto stabili mentre valori di  $|k| < |k_0|$  tenderanno a destabilizzare il sistema. Le conclusioni precedenti rimangono invariate per  $m = -1$  e  $k$  positivo.

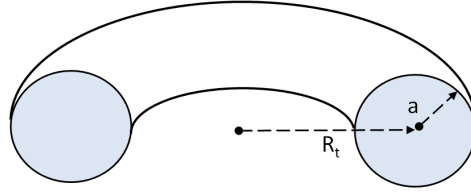


Figure 7: Sezione di un toroide con raggio maggiore  $R_t$  e raggio minore  $a$ .

Per un sistema di confinamento magnetico toroidale come quelli realizzati per i *tokamak*), detto  $R_t$  il raggio maggiore del toroide (si veda la figura Figura 7) ci si accorge subito che non potranno esistere perturbazioni con lunghezza d'onda  $|\lambda|$  superiore a  $2\pi R_t$  e quindi si avrà necessariamente che  $|k| = 2\pi/|\lambda| > 1/R_t$ , . Per avere stabilità sarà sufficiente quindi che tutte le perturbazioni permesse abbiano  $|k| > |k_0| > 1/R_t$  cosicché, in virtù dell'Eq. (21), si avrà:

$$\boxed{\frac{1}{R_t} > \left| \frac{2\tilde{B}_{0\phi}(a)}{a\tilde{B}_{0z}} \right| \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{2\tilde{B}_{0\phi}}{\tilde{B}_{0z}} \right| < \frac{a}{R_t} \quad (\text{Stabilità})} \quad (22)$$



Questo risultato è noto come criterio di stabilità di *Kruskal-Shafranov* e implica che la componente azimutale del campo ( $B_\phi$ ) debba essere più piccola di quella longitudinale affinché il sistema non si destabilizzi. Il fattore  $q = \tilde{B}_{0\phi}(a)/\tilde{B}_{0z}$  prende il nome di *safety factor* e impone un limite sulla corrente longitudinale (o toroidale) che può essere fatta passare lungo il toroide senza correre rischi.

In campo astrofisico, le instabilità di tipo *current-driven* potrebbero avere delle importanti ripercussioni sulla propagazione dei getti stellari ed extragalattici alterandone la morfologia su grande scala. I modelli di lancio e accelerazione dei getti prevedono, infatti, che a grandi distanze dalla regione di lancio i getti debbano avere  $B_\phi \gg B_z$  condizione che porterebbe quindi, secondo la (22), ad avere forti instabilità. In che modo i getti possano sopravvivere a questa (ed altre) instabilità rappresenta tutt'ora oggetto di indagine.