

Università degli Studi di Torino
Facoltà di Scienze M.F.N.

Appunti di Relatività Speciale

Fisica III

Corso di Laurea in Matematica

A.A. 2007 / 2008

W.M. Alberico, M. Nardi

Università degli Studi di Torino - Dipartimento di Fisica Teorica
e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

Capitolo 1

Relatività in Fisica Classica

Contenuto

1.1	Richiami di Relatività Galileiana	4
1.1.1	Esempi di moti relativi	5
1.1.2	Esempio: Urto di due particelle	6
1.2	La Fisica alla fine del XIX secolo	9
1.2.1	Digressione: la luce	10
1.2.2	Aberrazione stellare	12
1.2.3	L'esperimento di Fizeau	14
1.2.4	L'esperimento di Michelson-Morley	16

La richiesta, più che ragionevole, che la descrizione dei fenomeni naturali non dipenda dalla particolare scelta del sistema di riferimento impone che le leggi fisiche siano invarianti sia per rotazioni e traslazioni degli assi cartesiani, sia per il moto relativo con velocità costante (moto rettilineo uniforme) tra sistemi di riferimento.

L'idea di Relatività, in Fisica, risale a Galileo che osservò che non è possibile stabilire se una nave è ferma o si sta muovendo di moto rettilineo ed uniforme semplicemente effettuando degli esperimenti a bordo (per esempio osservando la caduta di un grave) perché le leggi fisiche sono esattamente le stesse nei due casi. Se la nave sta virando o beccheggiando invece si osserveranno degli effetti diversi (come un'accelerazione centrifuga o delle oscillazioni di alcuni oggetti), che consentono di individuare il moto della nave. In altre parole, il moto non uniforme è distinguibile per gli effetti che produce, mentre il moto uniforme no.

Fino all'inizio del XX secolo, la Relatività Galileiana era ritenuta una proprietà fondamentale delle leggi fisiche, fino a quando alcuni esperimenti la misero in discussione per i loro risultati sorprendenti. La soluzione di questa crisi fu una nuova formulazione dell'idea di Relatività per opera di Albert Einstein in un lavoro, pubblicato nel 1905, dal titolo "Elettrodinamica dei corpi in movimento" che si limitava a considerare le trasformazioni delle leggi fisiche tra sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. Il riferimento all'elettrodinamica è dovuto al fatto che, come vedremo nei prossimi capitoli, la revisione dell'idea di Relatività Classica (o Galileiana) fu resa necessaria proprio per conciliare con essa i fenomeni elettromagnetici. Alcuni anni dopo, nel 1916, Einstein pubblicò un nuovo lavoro prendendo in considerazione anche sistemi di riferimento in moto accelerato: questa nuova formulazione prese il nome di "Relatività Generale"; di conseguenza, la teoria della relatività limitata a sistemi di riferimento in moto relativo uniforme fu chiamata "Relatività Speciale" o "Ristretta".

In queste lezioni ci limiteremo a considerare la “Relatività Speciale”. Essa è ormai ritenuta valida, a seguito di molteplici conferme sperimentali, per tutti i tipi di fenomeni fisici tranne che per le interazioni gravitazionali su larga scala, dove è necessario ricorrere alla Relatività Generale.

Dopo un breve riepilogo della Relatività Galileiana, discuteremo alcuni delle principali osservazioni sperimentali che misero in crisi la Fisica Classica e quindi introdurremo la nuova impostazione della Relatività Speciale e ne discuteremo le conseguenze.

1.1 Richiami di Relatività Galileiana

La relatività Galileiana si fonda, nella formulazione data da Newton, sui concetti di **tempo assoluto** e di **spazio assoluto**.

Lo spazio è infinito, sempre uguale ed immobile. Non è definito in relazione ad alcun oggetto per cui non è possibile definire la *posizione assoluta* di un punto, ma solo la sua *posizione relativa*, cioè la sua distanza rispetto ad un altro punto, assunto come riferimento. Ciò equivale a dire che si possono definire infiniti sistemi di coordinate perfettamente equivalenti (x, y, z) , scegliendo arbitrariamente l’origine e l’orientamento degli assi stessi. **Non è possibile neanche definire, in modo assoluto, lo stato di moto di un corpo**, non è possibile stabilire cioè se un corpo è fermo o in moto rettilineo uniforme rispetto allo spazio assoluto. È possibile solo determinare il moto relativo tra due oggetti.

Il tempo scorre in modo uniforme ed è uguale in tutti i Sistemi di Riferimento: è assoluto. È infinito, quindi non esiste un *inizio* del tempo; di conseguenza non è possibile conoscere il tempo assoluto di un evento, ma solo l’intervallo di tempo tra due eventi uno dei quali viene assunto, per convenzione, come origine del tempo ($t = 0$).

La scelta di un sistema di coordinate e di un’origine del tempo definisce un **Sistema di Riferimento**.

Come conseguenza delle ipotesi di tempo assoluto e spazio assoluto si ha che la distanza tra due punti è la stessa indipendentemente dal SR ^[a] scelto e dal suo eventuale stato di moto, e che l’intervallo temporale tra due eventi non dipende dall’istante scelto come origine del tempo. Questi fatti sono confermati dall’esperienza comune, e rafforzano la convinzione dell’esattezza delle ipotesi di spazio e tempo assoluto.

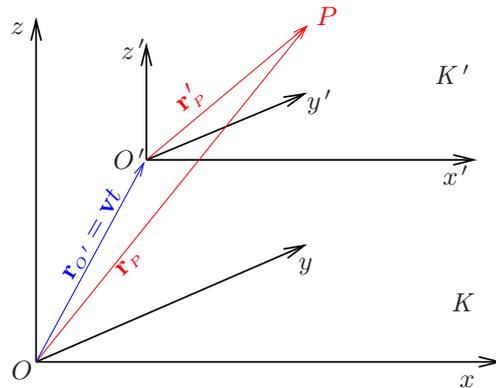
Consideriamo due SR K e K' in moto, l’uno rispetto all’altro, con velocità \mathbf{v} costante. Per studiare le leggi fisiche introdurremo un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z) e (x', y', z') in ognuno dei due SR con origine, rispettivamente, nei punti O ed O' . Supporremo che gli assi coordinati siano paralleli e che le origini coincidano al tempo $t = 0$ (questo è sempre possibile mediante una opportuna rotazione e traslazione degli assi), come illustrato in figura 1.1.

Un punto P viene individuato specificando le sue coordinate rispetto ad un SR: $\mathbf{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$ rispetto ad K oppure $\mathbf{r}'_P = (x'_P, y'_P, z'_P)$ se adottiamo il SR K' . La posizione di O' rispetto a K è data, in ogni istante, dal vettore $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{v}t$, essendo t il tempo misurato in S (che è identico a t' , il tempo misurato in K' : il tempo è identico in tutti i SR, secondo la relatività galileiana). I vettori \mathbf{r}_P ed \mathbf{r}'_P si ottengono l’uno dall’altro mediante una semplice somma vettoriale: $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_P = \mathbf{v}t + \mathbf{r}'_P$. Per un punto generico individuato da un raggio vettore \mathbf{r} si ha la regola di trasformazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t$, cioè

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad t' = t. \quad (1.1)$$

^[a]Da qui in poi si userà l’abbreviazione “SR” per indicare “Sistema di Riferimento”

Figura 1.1 Due Sistemi di Riferimento K ed K' in moto relativo uniforme con velocità \mathbf{v} .



Queste equazioni definiscono le **trasformazioni di Galileo**. È immediato ricavare la legge di trasformazione delle velocità: supponiamo che un punto P si muova con velocità $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, misurata in K : la velocità \mathbf{u}' osservata in K' sarà :

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} , \quad (1.2)$$

che corrisponde alla legge di composizione delle velocità: la velocità misurata in K è la somma vettoriale della velocità osservata in K' più la velocità di K' (cioè della sua origine O') rispetto a K .

Per ottenere la relazione tra le accelerazioni misurate nei due SR si calcola la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a} , \quad (1.3)$$

poiché la velocità relativa di due SR è costante nel tempo. **L'accelerazione è invariante per trasformazioni di Galileo**. Questo garantisce che la legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ è invariante per trasformazioni di Galileo (purché si assuma che la massa è invariante), e in generale **tutte le leggi della meccanica sono invarianti per tali trasformazioni**. Un SR K in cui vale la legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, che lega l'accelerazione a cui è soggetto un corpo alla forza che gli viene applicata, si dice **inerziale**. Ogni altro SR in moto relativo uniforme rispetto a K è, a sua volta, inerziale, per l'invarianza dell'accelerazione. Inoltre, se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$ in ogni altro SR inerziale cioè se un punto P si muove di moto rettilineo e uniforme in un SR, esso si muove di moto rettilineo e uniforme (seppur con velocità diversa) in un qualunque altro SR inerziale. In particolare è sempre possibile trovare un SR solidale con il punto P , in cui cioè il punto P è a riposo.

Un SR in moto accelerato rispetto ad un SR inerziale si dice **non inerziale**: esso si distingue da un SR inerziale perché vi compaiono forze apparenti, come ad esempio la forza di Coriolis dovuta al moto di rotazione terrestre, o come la forza che “schiaccia” sullo schienale del sedile un passeggero su un veicolo in accelerazione.

1.1.1 Esempi di moti relativi

Le trasformazioni di Galileo sono in accordo con la nozione intuitiva di moto relativo che possiamo dedurre dall'esperienza quotidiana.

Consideriamo due navi A e B che viaggiano parallelamente con velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B . La velocità relativa della nave B rispetto ad A è $\mathbf{v}_r \equiv \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$. Questo significa che un osservatore a bordo della nave A vede la nave

B muoversi con velocità \mathbf{v}_r , perchè nel suo SR la nave A è ferma. Se $\mathbf{v}_B > \mathbf{v}_A$, l'osservatore A vede la nave B procedere in avanti; se $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$ allora $\mathbf{v}_r = 0$ e dirà che anche B è ferma, se infine $\mathbf{v}_B < \mathbf{v}_A$ allora A vedrà la nave B muoversi all'indietro. Analoghi ragionamenti possono essere fatti da un osservatore sulla nave B , secondo cui la nave A si muove con velocità $-\mathbf{v}_r$. Entrambe le descrizioni sono perfettamente corrette ed equivalenti: i due osservatori si trovano in due SR inerziali. Tutti i fenomeni fisici da essi osservati ubbidiranno alle stesse leggi. Ad esempio, per entrambi, un grave in caduta libera seguirà una traiettoria soluzione dell'equazione del moto:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} , \quad \text{cioè} \quad m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = 0 \quad m\ddot{z} = -mg , \quad (1.4)$$

la cui soluzione generale è :

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad y = y_0 + v_{0y}t \quad z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Le condizioni iniziali $(x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ potranno essere diverse per i due osservatori, di conseguenza la traiettoria potrà apparire diversa in SR diversi, ma la legge fisica (1.4) è la stessa per entrambi.

Analogo discorso si può fare per un terzo osservatore C , che vede le navi da terra. Egli vedrà la nave A muoversi con velocità \mathbf{v}_A e la nave B con velocità \mathbf{v}_B . Ma per l'osservatore A , è C che si muove con velocità $-\mathbf{v}_A$! Qui il senso comune può trarre in inganno, perché qualcuno potrebbe obiettare che la conclusione di A è strampalata: C è senza dubbio fermo! Ma il principio di relatività è chiaro: entrambi gli osservatori hanno ragione ed hanno lo stesso diritto di descrivere le leggi fisiche secondo il proprio punto di vista. Noi siamo abituati a considerare fermi gli edifici, gli alberi, ecc. Ma essi sono fermi rispetto alla Terra, non sono fermi in senso assoluto. È ben noto che la Terra ruota su se stessa e gira attorno al Sole; il Sistema Solare si muove all'interno della nostra Galassia, la quale è in moto rispetto alle altre galassie dell'Ammasso Locale. L'Universo è in espansione. Insomma, non c'è un granello di polvere in tutto l'Universo che sia fermo ! Da queste considerazioni appare difficile sostenere che il SR di C sia preferibile a quello di A o B .

1.1.2 Esempio: Urto di due particelle

Nella formulazione lagrangiana della meccanica la richiesta, più che ragionevole, che le leggi della fisica siano invarianti per traslazioni e rotazioni delle coordinate (cioè indipendenti dall'origine degli assi e dalla loro orientazione) implica che in un sistema *isolato* la quantità di moto ed il momento angolare (momento della quantità di moto) totali siano quantità conservate ^[b]. Analogamente, l'invarianza per traslazioni temporali (cioè la libertà nella scelta dell'origine del tempo) implica la conservazione dell'energia totale di un sistema isolato.

Vogliamo vedere come la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia totale si conciliano con le trasformazioni di Galileo.

Consideriamo un esempio particolarmente semplice, cioè l'urto tra due particelle (corpi materiali di dimensioni trascurabili) di masse m_1 ed m_2 . Le loro velocità iniziali, in un dato SR inerziale K , sono $\mathbf{u}_{1(i)}$ e $\mathbf{u}_{2(i)}$. A seguito dell'urto, le velocità delle particelle sono rispettivamente $\mathbf{u}_{1(f)}$ e $\mathbf{u}_{2(f)}$ ma le loro masse sono invariate (se l'urto è elastico). Le quantità di moto delle due particelle sono date dalla definizione classica:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}. \quad (1.5)$$

La conservazione della quantità di moto totale del sistema impone che:

$$\mathbf{p}_{1(i)} + \mathbf{p}_{2(i)} = \mathbf{p}_{1(f)} + \mathbf{p}_{2(f)} \quad \text{cioè} \quad m_1\mathbf{u}_{1(i)} + m_2\mathbf{u}_{2(i)} = m_1\mathbf{u}_{1(f)} + m_2\mathbf{u}_{2(f)}.$$

Consideriamo ora lo stesso urto in un altro SR inerziale K' , in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a K . Ogni velocità, sia prima che dopo l'urto, si trasforma secondo la legge (1.2): in questo caso usiamo la trasformazione inversa $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$ per ottenere :

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{u}'_{1(i)} + \mathbf{v}) + m_2(\mathbf{u}'_{2(i)} + \mathbf{v}) &= m_1(\mathbf{u}'_{1(f)} + \mathbf{v}) + m_2(\mathbf{u}'_{2(f)} + \mathbf{v}) \\ \mathbf{p}'_{1(i)} + \mathbf{p}'_{2(i)} + (m_1 + m_2)\mathbf{v} &= \mathbf{p}'_{1(f)} + \mathbf{p}'_{2(f)} + (m_1 + m_2)\mathbf{v}, \end{aligned}$$

^[b]Si noti che "traslazione" non significa "moto traslatorio" e "rotazione" non significa "moto rotatorio": stiamo considerando qui due SR *fermi* l'uno rispetto all'altro ma con le origini non coincidenti e gli assi non paralleli.

(\mathbf{v}' e \mathbf{p}' sono, rispettivamente, velocità e quantità di moto misurate nel nuovo SR K') ossia, semplificando i termini uguali,

$$\mathbf{p}'_{1(i)} + \mathbf{p}'_{2(i)} = \mathbf{p}'_{1(f)} + \mathbf{p}'_{2(f)}. \quad (1.6)$$

Questo risultato significa che la conservazione della quantità di moto in un SR implica la sua conservazione in tutti i SR in moto relativo uniforme.

In modo analogo si dimostra che anche la conservazione del momento della quantità di moto in tutti i SR inerziali è compatibile con le trasformazioni di Galileo, cioè la sua conservazione in un dato SR implica la sua conservazione in tutti i SR in moto relativo rettilineo uniforme. Per vederlo è necessario specificare qualche dettaglio del moto delle particelle prima e dopo l'urto. Supponiamo che l'urto avvenga nel punto individuato dal raggio vettore \mathbf{R} all'istante $t = 0$. Il moto delle due particelle sarà descritto dai raggi vettori \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , definiti come:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{u}_{1(i)}t & \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{u}_{2(i)}t & \text{per } t < 0 \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{u}_{1(f)}t & \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{u}_{2(f)}t & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

quindi il momento angolare totale nello stato iniziale è:

$$\mathbf{L}_{(i)} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_{1(i)} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_{2(i)} = (\mathbf{R} + \mathbf{u}_{1(i)}t) \times m_1 \mathbf{u}_{1(i)} + (\mathbf{R} + \mathbf{u}_{2(i)}t) \times m_1 \mathbf{u}_{2(i)} = \mathbf{R} \times (\mathbf{p}_{1(i)} + \mathbf{p}_{2(i)}).$$

Un'analogia espressione vale per il momento angolare totale finale, quindi la conservazione del momento angolare totale si scrive come :

$$\mathbf{R} \times (\mathbf{p}_{1(i)} + \mathbf{p}_{2(i)}) = \mathbf{R} \times (\mathbf{p}_{1(f)} + \mathbf{p}_{2(f)}) \quad (1.8)$$

Passiamo ora nel SR K' , usando le trasformazioni di Galileo per le coordinate e le velocità: $\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{v}t$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}' + \mathbf{v}t) \times (\mathbf{p}'_{1(i)} + m_1 \mathbf{v} + \mathbf{p}'_{2(i)} + m_2 \mathbf{v}) &= (\mathbf{R}' + \mathbf{v}t) \times (\mathbf{p}'_{1(f)} + m_1 \mathbf{v} + \mathbf{p}'_{2(f)} + m_2 \mathbf{v}) \\ \mathbf{R}' \times (\mathbf{p}'_{1(i)} + \mathbf{p}'_{2(i)}) + \mathbf{v}t \times (\mathbf{p}'_{1(i)} + \mathbf{p}'_{2(i)}) &= \mathbf{R}' \times (\mathbf{p}'_{1(f)} + \mathbf{p}'_{2(f)}) + \mathbf{v}t \times (\mathbf{p}'_{1(f)} + \mathbf{p}'_{2(f)}) \end{aligned}$$

Usando la conservazione della quantità di moto, eq. (1.6), si vede che questa uguaglianza è soddisfatta. I termini con \mathbf{R} in particolare dicono che

$$\mathbf{R}' \times (\mathbf{p}'_{1(i)} + \mathbf{p}'_{2(i)}) = \mathbf{R}' \times (\mathbf{p}'_{1(f)} + \mathbf{p}'_{2(f)}) \quad (1.9)$$

che esprime la conservazione del momento angolare nel SR K' (si confronti con la (1.8)). Quindi anche il momento angolare totale di un sistema isolato si conserva in tutti i SR inerziali.

Studiamo ora la conservazione dell'energia cinetica. Essa vale solo se l'urto è elastico: nel caso di urto anelastico infatti, può capitare che parte dell'energia cinetica iniziale si trasformi in un altro tipo di energia (per esempio termica, dovuta all'attrito): l'energia cinetica dello stato finale sarà quindi minore di quella iniziale. È anche possibile avere processi di tipo "esotermico", in cui l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale. In ogni caso la conservazione dell'energia vale per l'*energia totale* del sistema, cioè la somma dell'energia cinetica e di tutte le altre forme di energia (termica, elastica, ecc.).

Considerando, per semplicità, un urto elastico, per il quale si ha la conservazione dell'energia cinetica $T = \mathbf{p}^2/2m = m\mathbf{v}^2/2$, nel SR K si ha:

$$\frac{\mathbf{p}_{1(i)}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{2(i)}^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}_{1(f)}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{2(f)}^2}{2m_2}, \quad (1.10)$$

Per passare al SR K' , usiamo ancora la trasformazione (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{(m_1 \mathbf{u}'_{1(i)} + m_1 \mathbf{v})^2}{2m_1} + \frac{(m_2 \mathbf{u}'_{1(i)} + m_2 \mathbf{v})^2}{2m_2} &= \frac{(m_1 \mathbf{u}'_{1(f)} + m_1 \mathbf{v})^2}{2m_1} + \frac{(m_2 \mathbf{u}'_{1(f)} + m_2 \mathbf{v})^2}{2m_2} \\ \frac{\mathbf{p}'_{1(i)}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_{2(i)}^2}{2m_2} + (\mathbf{p}'_{1(i)} + \mathbf{p}'_{2(i)}) \cdot \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}'_{1(f)}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_{2(f)}^2}{2m_2} + (\mathbf{p}'_{1(f)} + \mathbf{p}'_{2(f)}) \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

ma abbiamo già dimostrato che la quantità di moto si conserva in tutti i SR inerziali (eq. (1.6)), quindi ricaviamo

$$\frac{\mathbf{p}'_{1(i)}}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_{2(i)}}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}'_{1(f)}}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_{2(f)}}{2m_2} . \quad (1.11)$$

Anche per l'energia cinetica vale dunque la stessa conclusione che per la quantità di moto ed il momento angolare: se essa si conserva in un SR, essa si conserva in tutti i SR in moto relativo rettilineo uniforme.

Tutte le dimostrazioni qui presentate si generalizzano facilmente ad un sistema con un numero qualsiasi di particelle sia nello stato iniziale che finale.

Dalle considerazioni precedenti risulta che le trasformazioni di Galileo sono perfettamente compatibili con la conservazione della quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e dell'energia cinetica $T = \mathbf{p}^2/2m$ totali di un sistema isolato.

Per concludere questo paragrafo, è interessante considerare il caso in cui le particelle dello stato finale sono diverse da quelle iniziali (si tratta chiaramente di un processo anelastico). Supponiamo che nello stato finale ci siano N particelle, con masse $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ e velocità $\mathbf{u}_{1(f)}, \mathbf{u}_{2(f)}, \dots, \mathbf{u}_{N(f)}$. La conservazione della quantità di moto nel SR K richiede che:

$$m_1 \mathbf{u}_{1(i)} + m_2 \mathbf{u}_{2(i)} = \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{u}_{k(f)} .$$

Nel SR K' si ha:

$$m_1 \mathbf{u}'_{1(i)} + m_2 \mathbf{u}'_{2(i)} + (m_1 + m_2) \mathbf{v} = \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{u}'_{k(f)} + \mathbf{v} \sum_{k=1}^N \mu_k$$

La conservazione della quantità di moto nel nuovo SR si esprime come

$$m_1 \mathbf{u}'_{1(i)} + m_2 \mathbf{u}'_{2(i)} = \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{u}'_{k(f)}$$

e vale *se e solo se*

$$m_1 + m_2 = \sum_{k=1}^N \mu_k , \quad (1.12)$$

cioè se si ha anche la conservazione della massa. Nella maggior parte dei processi studiati nella fisica classica, le masse iniziali e finali sono uguali, e non c'è bisogno di preoccuparsi di imporre la conservazione della massa. Ma se in una collisione si ha la rottura di una delle particelle in più frammenti, allora è ovvio che deve valere la condizione (1.12). In meccanica classica quindi, c'è una legge di conservazione specifica per la massa, oltre che per la quantità di moto, il momento angolare e l'energia.

1.2 La Fisica alla fine del XIX secolo

La seconda metà dell' '800 vide sviluppi molto importanti della Scienza in tutti i suoi campi. In particolare in Fisica si era giunti alla riunificazione dell'elettricità e del magnetismo grazie al lavoro di James Clerk Maxwell. La teoria ondulatoria basata sulle equazioni di Maxwell permise di interpretare anche la luce come una radiazione elettromagnetica, e quindi si ebbe la riunificazione anche dell'ottica nell'ambito dell'elettromagnetismo. Tutti i fenomeni ondulatori noti fino a quel momento avevano sempre fatto uso di un mezzo per la propagazione delle onde: era naturale, per i fisici dell'epoca, supporre che anche la luce avesse bisogno di un mezzo entro il quale propagarsi. Questo mezzo veniva chiamato *etere*.

Un'altra osservazione cruciale fu che le equazioni di Maxwell non erano compatibili con le trasformazioni di Galileo (1.1). Abbiamo visto ad esempio che dalle equazioni di Maxwell si ricava che la propagazione del campo elettromagnetico in assenza di sorgenti obbedisce all'equazione delle onde di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

dove ψ rappresenta una qualsiasi componente del campo elettrico o magnetico e $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ è una costante con le dimensioni di una velocità. Vediamo che forma assume questa equazione in un altro SR K' , che supponiamo in moto relativo rispetto a K lungo la direzione x . Le trasformazioni di Galileo (1.1) assumono la forma:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t .$$

Per ricavare l'equazione delle onde nel SR K' teniamo presente che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} , \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} , \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} , \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} . \end{aligned}$$

Nel SR K' l'equazione (1.13) diventa perciò:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} = 0 . \quad (1.14)$$

Questo dimostra che l'equazione delle onde (1.13) non è invariante per trasformazioni di Galileo. Alla stessa conclusione si arriva considerando direttamente le equazioni di Maxwell: le derivate spaziali e temporali in esse presenti introdurranno dei termini estranei nel passaggio da un SR all'altro.

Queste considerazioni però non preoccupavano particolarmente i fisici dell' '800, che avendo introdotto un mezzo entro il quale la luce (e le onde elettromagnetiche in generale) si propaga avevano di fatto introdotto un SR privilegiato : quello in cui l'etere è a riposo. Le equazioni di Maxwell, pensavano, valgono in questo SR, nel passaggio ad un altro SR inerziale è normale che la loro forma cambi. Lo straordinario successo delle equazioni di Maxwell nel confronto

con i risultati degli esperimenti svolti in quegli anni (soprattutto da Hertz) si poteva spiegare ammettendo che la velocità della Terra rispetto all'etere fosse molto piccola in confronto alla velocità della luce per cui nell'equazione (1.14) (e nelle equazioni di Maxwell stesse) i termini contenenti v erano trascurabili. Solo un esperimento con misure molto più precise di quelli effettuati fino a quel momento sarebbe stato in grado di evidenziare la presenza di questi termini aggiuntivi.

L'ipotesi dell'esistenza dell'etere dunque poneva i fenomeni elettromagnetici in una situazione del tutto particolare rispetto al resto della fisica. Nel sistema di riferimento dell'etere (in cui esso è a riposo) la luce ha una velocità c ben precisa, determinata dalle proprietà dell'etere stesso. In ogni altro SR in moto relativo uniforme con velocità \mathbf{v} la velocità della luce è determinata dalla legge di trasformazione (1.2) e quindi il suo modulo varia da $c + v$ se osservata nella stessa direzione del moto relativo \mathbf{v} e con verso concorde (cioè con il "vento d'etere" a favore) a $c - v$ nel verso opposto. Una misura molto precisa della velocità della luce in direzioni diverse doveva, secondo i fisici della seconda metà del XIX secolo, permettere di determinare il moto della Terra rispetto all'etere.

Questa violazione del principio di relatività galileiana però doveva valere solo per i fenomeni elettromagnetici: in tutti gli altri fenomeni naturali era così ben verificato che non poteva essere messo in dubbio. Dunque l'etere non doveva avere alcun effetto sulla materia, doveva riempire tutto lo spazio ed essere di densità trascurabile: esso aveva esistenza unicamente come veicolo di propagazione delle onde elettromagnetiche. In questo modo tutti i fenomeni che non coinvolgevano la luce e i campi elettromagnetici non erano in alcun modo influenzati dall'etere: le leggi della dinamica erano quindi invarianti per trasformazioni di Galileo. Il principio di relatività di Galileo, violato per i fenomeni elettromagnetici, era salvo per tutti gli altri fenomeni fisici.

La situazione della fisica della fine del XIX secolo era perciò la seguente:

La relatività di Galileo si applica alla meccanica classica. I fenomeni elettromagnetici possiedono un sistema di riferimento privilegiato, quello in cui l'etere è a riposo, e non obbediscono al principio di relatività.

Questo quadro fu messo in crisi da una serie di osservazioni sperimentali sorprendenti. Nel seguito esamineremo alcuni di questi esperimenti e le loro interpretazioni nell'ambito della Fisica Classica.

1.2.1 Digressione: la luce

Natura della luce

L'idea della luce come fascio di "corpuscoli" emessi da una sorgente risale agli antichi greci. La teoria corpuscolare poteva spiegare la propagazione della luce in linea retta ed i fenomeni di riflessione e rifrazione. Pure la propagazione nel vuoto non presentava alcun problema concettuale.

Si cominciò a parlare di teoria ondulatoria della luce nella seconda metà del '600. Huygens, nel 1690, diede una sistemazione coerente della teoria ondulatoria e mostrò, in modo qualitativo, che si potevano spiegare sia la propagazione rettilinea, la riflessione e la rifrazione, sia alcuni nuovi fenomeni da poco scoperti: la diffrazione e la polarizzazione. La disputa tra i sostenitori delle due teorie durò fino alla fine del '700. I due modelli erano ritenuti mutuamente esclusivi. La fisica del XIX secolo vide il trionfo della teoria ondulatoria con lo studio quantitativo dei fenomeni di interferenza, diffrazione e polarizzazione, grazie ai lavori di Young e Fresnel. Con

le equazioni di Maxwell e gli esperimenti sulle onde elettromagnetiche di Hertz, il quadro era completo: la luce non è altro che un' onda elettromagnetica.

Fu però lo stesso Einstein a rimettere in gioco la teoria corpuscolare per spiegare l'effetto fotoelettrico, in un lavoro del 1905 che gli valse il Premio Nobel per la Fisica.

I progressi più recenti della Fisica Moderna ci fanno ritenere che la natura corpuscolare e ondulatoria nella luce (e nella materia in generale) coesistono.

Nello studio della Relatività siamo interessati principalmente all'aspetto ondulatorio. L'aspetto corpuscolare (fotoni) diventa evidente solo nelle interazioni con particelle elementari (subatomiche e subnucleari).

Velocità della luce

Per secoli si era pensato che la propagazione della luce fosse istantanea. Galileo fu il primo a tentare di misurare la velocità della luce, ma senza riuscirci poiché non disponeva di strumenti adatti. La prova definitiva che la velocità della luce non è infinita venne nel 1675 dall'astronomo Roemer, attraverso lo studio del periodo di rotazione di Io, una delle lune di Giove. La velocità della luce calcolata da Roemer era di 214300 km/s, circa il 70% del valore reale ma tutt'altro che disprezzabile, considerati gli strumenti dell'epoca. Un valore molto più accurato fu fornito da Bradley attorno al 1730, con misure dell'aberrazione stellare (paragrafo 1.2.2).

Per la propagazione però era necessario un mezzo: come le onde del mare si propagano attraverso l'acqua e come le onde sonore si propagano attraverso l'aria, così la luce aveva bisogno di un mezzo attraverso cui propagarsi, l'etere, che doveva riempire lo spazio in tutto l'universo (per permettere alla luce delle stelle di giungere fino a noi) e anche penetrare la materia (per spiegare la propagazione attraverso i corpi trasparenti). La propagazione della luce era visto in termini puramente meccanici: per consentire una velocità così alta, l'etere doveva essere molto rigido. Contemporaneamente doveva essere estremamente tenue, per non rallentare i pianeti nei loro moti orbitali.

Nel 1861, Maxwell dimostrò con le sue equazioni che le onde elettromagnetiche si propagano con una velocità che dipende solo dalle *proprietà elettriche e magnetiche* del mezzo e non da quelle meccaniche. Hertz, con i suoi esperimenti diede una conferma sperimentale alle onde elettromagnetiche previste da Maxwell e notò che possedevano le proprietà di riflessione, rifrazione, interferenza e diffrazione esattamente come la luce. La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche misurata da Hertz coincideva con quella prevista dalla teoria di Maxwell e con la velocità, già nota, della luce. La luce dunque era un'onda elettromagnetica e la sua grande velocità non era più un mistero !

Mancava, per completare il quadro, un esperimento che permettesse di osservare direttamente l'etere, per esempio una misura diretta della velocità della Terra rispetto all'etere. Di sicuro tale velocità doveva essere molto piccola rispetto alla velocità della luce c , altrimenti gli effetti del moto relativo Terra-etere sarebbero stati ben evidenti. Gli ultimi decenni del secolo XIX e i primi del secolo XX (anche dopo la pubblicazione della teoria della relatività di Einstein) videro intensi sforzi nel tentativo di misurare la velocità Terra-etere, ma senza successo. L'ipotesi dell'etere venne alla fine abbandonata.

Il valore noto oggi per la velocità della luce è:

$$\boxed{c = 299792458 \text{ m/s}} \quad (1.15)$$

e si tratta di un valore *esatto* (cioè senza errore sperimentale) *per definizione*, e viene usato per definire l'unità di misura della lunghezza. Il *metro* infatti è oggi definito come *la distanza percorsa nel vuoto dalla luce in un intervallo di tempo di 1/299792458 secondi*.

1.2.2 Aberrazione stellare

Tra il 1725 e il 1729 l'astronomo James Bradley effettuò una serie di misurazioni molto precise sulla apparente variazione stagionale della posizione delle stelle. Era noto infatti che le stelle cambiano la loro posizione nel cielo in modo periodico con cicli di un anno: questa regolarità non poteva essere dovuta ad uno spostamento reale delle stelle, ma era evidentemente da attribuirsi al moto della Terra attorno al Sole. Si può vedere facilmente in figura 1.2: la posizione della Stella E è individuata dall'angolo θ_0 rispetto al piano dell'eclittica (cioè del piano che contiene l'orbita della Terra) se osservata dal centro dell'orbita, ma quando la Terra si trova nel punto A , più vicino alla stella, l'angolo di osservazione è $\theta_{max} > \theta_0$. Analogamente, quando la Terra si trova in C sei mesi dopo, l'angolo di osservazione è $\theta_{min} < \theta_0$. È evidente che, vista dalla Terra, la stella E apparirà compiere un movimento ciclico con periodo annuale. L'apparente spostamento di un oggetto dovuto allo spostamento dell'osservatore era un effetto noto già agli antichi Greci ed era chiamato *parallasse*. Lo scopo di Bradley era quello di misurare gli angoli θ_{max} e θ_{min} di alcune stelle per ricavarne la distanza dal Sole tramite un semplice calcolo trigonometrico (il raggio dell'orbita terrestre era già noto con buona precisione). Purtroppo, la distanza delle stelle è talmente grande che la differenza tra gli angoli θ_{max} e θ_{min} è piccolissima: per Bradley era impossibile misurarla con gli strumenti dell'epoca; fu misurata per la prima volta da Bessel nel 1838, cioè più di un secolo dopo.

Nonostante ciò le osservazioni di Bradley non furono infruttuose: invece di osservare lo spostamento apparente delle stelle per effetto di parallasse scoprì l'aberrazione stellare! Con grande sorpresa egli notò che l'altitudine (apparente) di ogni stella era massima *non* quando la Terra si trovava nel punto A , bensì quando era nel punto B , e la posizione più bassa all'orizzonte per la stella si otteneva quando la Terra era nel punto D . Inoltre l'aberrazione α (cioè la deviazione angolare di una stella rispetto alla posizione media) era massima quando la Terra si trovava nei punti A e C , con uno spostamento dell'angolo di osservazione orizzontale. Bradley seppe interpretare correttamente questo risultato, attribuendolo alla *velocità finita della luce* e al *moto di rotazione della Terra attorno al Sole*.

Il motivo è semplice ed è analogo ad un fenomeno che si può osservare abitualmente: la pioggia che cade verticalmente viene vista cadere in direzione obliqua da un osservatore a bordo di un veicolo in moto che guarda attraverso i finestrini laterali. Così è per la luce che proviene dalle stelle: se una stella si trova sulla verticale del punto di osservazione, con un telescopio puntato

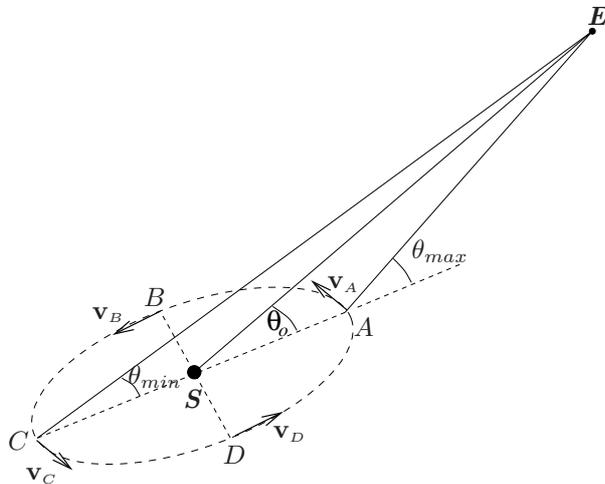


Figura 1.2 Spostamento apparente di una stella nel corso dell'anno per effetto di parallasse.

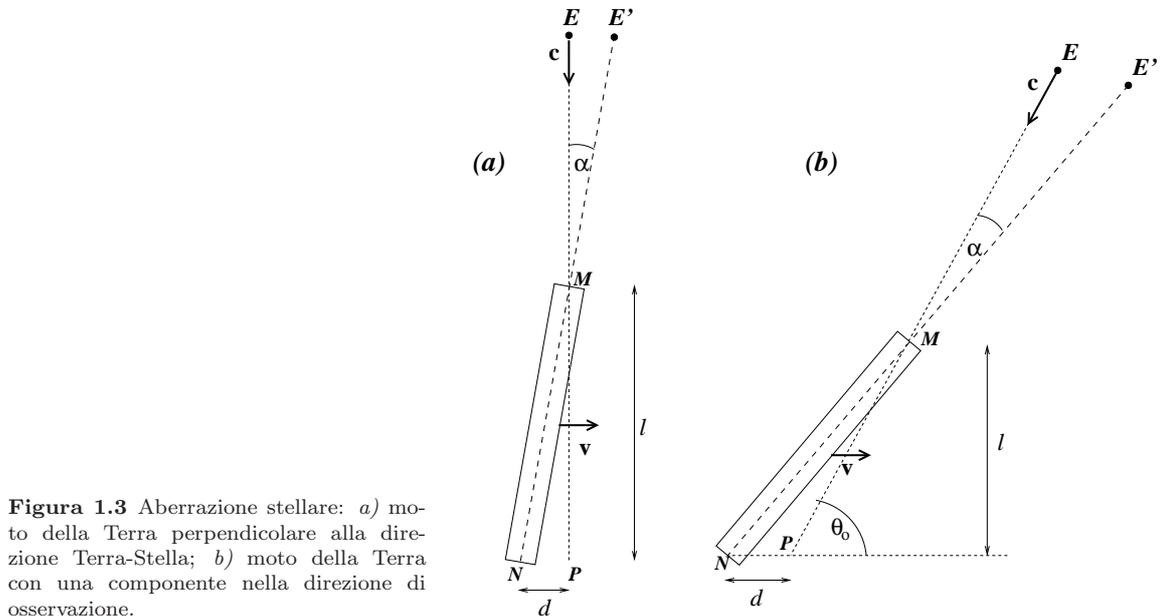


Figura 1.3 Aberrazione stellare: *a)* moto della Terra perpendicolare alla direzione Terra-Stella; *b)* moto della Terra con una componente nella direzione di osservazione.

in direzione esattamente verticale *non si può* vedere la stella, perché nell'intervallo di tempo t che occorre alla luce per percorrere la lunghezza del telescopio, questo si sposta orizzontalmente di una distanza $d = vt$, essendo v la velocità della Terra rispetto alla stella, e la luce della stella finisce sulle pareti laterali del telescopio invece di giungere al punto di osservazione all'estremità inferiore. Analogamente, una stella non allo zenit sarà visibile con un telescopio ad un angolo leggermente diverso dalla sua posizione reale.

Osserviamo la figura 1.3: E è la posizione reale di una stella, la luce percorre il cammino EP . L'inclinazione del telescopio è tale che mentre la luce percorre il tratto MP la base del telescopio si sposta da N a P : la base del telescopio e la luce arrivano contemporaneamente in P . In questo modo con il telescopio si riesce a vedere la stella nella posizione apparente E' . Questo ragionamento vale sia che la velocità del moto della Terra sia perpendicolare alla retta EP (figura 1.3*a*, una stella allo zenit è un caso particolare di questa situazione), sia che formi con essa un angolo θ_0 qualsiasi (figura 1.3*b*). Nel caso della figura 1.3*a* è particolarmente semplice calcolare l'angolo di aberrazione α : se t è il tempo in cui la luce va da M a P , si deve avere $t = l/c$ ma nello stesso tempo il telescopio si sposta da N a P quindi $t = d/v$; inoltre si ha $\tan \alpha = d/l$ per cui:

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}. \quad (1.16)$$

Questa situazione corrisponde ai punti A e C dell'orbita della Terra in fig. 1.2, con velocità rispettivamente \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_C . I corrispondenti angoli di aberrazione α_A e α_C sono rappresentati in fig. 1.4, e le posizioni apparenti della stella sono A' e C' . La velocità della Terra nel suo moto orbitale è di circa 30 km/s, per cui si ricava che $\alpha \simeq \tan \alpha \simeq 10^{-4}$ radianti che corrispondono a 20'' circa (Bradley usava un telescopio lungo 3.5 m : un'aberrazione di 20'' comporta uno spostamento laterale della base del telescopio di 0.35 mm: piccolo, ma visibile perfino ad occhio nudo). Per una stella con declinazione θ_0 come nel caso di fig. 1.3*b*, si ha $\tan \alpha = \frac{v}{c} \sin \theta_0$ e questo è il caso dei punti B e D in figura 1.2 con posizioni apparenti della stella, rispettivamente, B' e D' (fig. 1.4).

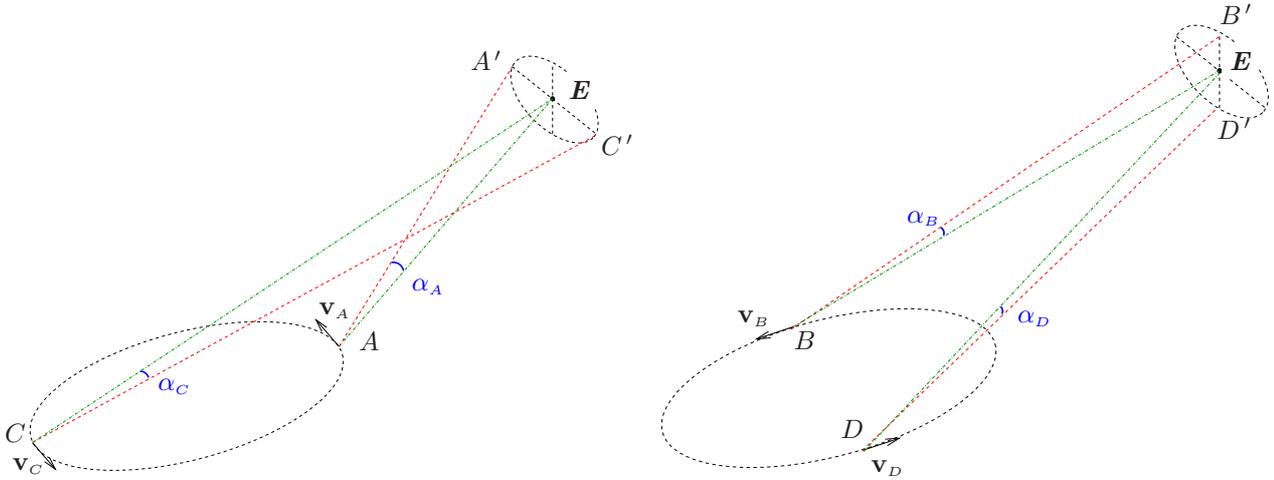


Figura 1.4 Aberrazione stellare dovuta al moto della Terra attorno al Sole e alla velocità finita della luce.

Abbiamo così visto che, a causa della velocità della luce finita e della variazione della (direzione della) velocità della Terra, una stella con declinazione θ_0 appare compiere una traiettoria ellittica $A'B'C'D'$ con cadenza annuale; gli assi dell'ellisse sono $2\frac{v}{c}$ e $2\frac{v}{c}\sin\theta_0$. Una stella allo zenit ($\theta_0 = \pi/2$) compie una traiettoria circolare.

Con le sue osservazioni Bradley trovò esattamente questo: orbite ellittiche delle stelle con asse maggiore di apertura angolare $40''$. Usando questa misura nell'equazione (1.16) poté ricavare un valore di c (la velocità orbitale della Terra era già nota all'epoca) molto più accurato di altri esperimenti del suo tempo.

Nell'ambito della teoria della luce, al tempo di Bradley era ancora molto accesa la disputa tra i sostenitori della teoria corpuscolare e quelli della teoria ondulatoria. Il fenomeno dell'aberrazione della luce si poteva spiegare in modo molto naturale con la teoria corpuscolare, ma anche la teoria ondulatoria funzionava bene a patto di ammettere che il mezzo di propagazione della luce (etere) sia indisturbato dal moto della Terra. In entrambi i casi, l'aberrazione stellare dimostrava che la propagazione della luce avviene con velocità finita.

Accanto alla aberrazione "annuale" qui descritta, vi è anche una aberrazione chiamata "diurna", dovuta al moto di rotazione giornaliero della Terra su se stessa: l'effetto è però molto più piccolo: $0.3''$ al massimo.

È interessante notare che l'effetto di parallasse (fig. 1.2) comporta angoli di deviazione molto più piccoli dell'aberrazione, ad esempio per una stella a 4 anni-luce di distanza (all'incirca la distanza della stella più vicina a noi, α -Centauri) la differenza tra θ_{max} e θ_{min} è al massimo di $0.2''$.

1.2.3 L'esperimento di Fizeau

La misura dell'aberrazione stellare suggeriva che l'etere non è trascinato dalla Terra nel suo moto attorno al Sole. Altri esperimenti compiuti a cavallo tra '700 e '800 invece suggerivano che la luce subisse un effetto di trascinamento da parte di un mezzo in moto. In pratica, se un mezzo ha velocità v rispetto all'etere, la velocità della luce che si propaga in quel mezzo parallelamente a v , rispetto all'etere non è c/n (n è l'indice di rifrazione del mezzo) ma $c/n \pm fv$, essendo f il "coefficiente di trascinamento". Per spiegare alcuni dei fenomeni osservati, Fresnel

aveva ipotizzato che f dipendesse dall'indice di rifrazione del mezzo secondo la formula:

$$f = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (1.17)$$

Per il vuoto si ha $n = 1$ e anche per l'aria (con ottima approssimazione), per cui $f = 0$: per la luce che si propaga nel vuoto o nell'aria non c'è effetto di trascinamento, in accordo con le osservazioni di Bradley. Invece per l'acqua ($n = 1.33$) la formula (1.17) prevede $f = 0.43$. Fizeau nel 1851 eseguì un esperimento per misurare il coefficiente di trascinamento in laboratorio. Il dispositivo usato è illustrato schematicamente in figura 1.5. Un fascio di luce monocromatica (e coerente) emesso dalla sorgente S incide su uno specchio semiriflettente A dove viene diviso in due parti, una trasmessa e l'altra riflessa. Il fascio trasmesso, indicato con 1 in figura, attraversa A e prosegue incontrando gli specchi B , C e D dove subisce riflessione totale. Tornato in A , viene trasmesso e osservato attraverso il telescopio T . Il raggio 2, riflesso dallo specchio A percorre lo stesso cammino del fascio 1 in senso inverso, finendo a sua volta nel telescopio T . L'idea è di osservare le frange di interferenza dovute a differenze di fase dei due fasci di luce. Viene fatta scorrere dell'acqua attraverso la condotta da E a F ; il fascio 1 si propaga in direzione contraria al flusso dell'acqua, mentre il fascio 2 è sempre concorde. Le lastre trasparenti L alle estremità dei tubi MN e PQ consentono il passaggio della luce. Al di fuori dei tubi i percorsi dei due raggi sono identici (in figura sono stati disegnati separati per chiarezza), per cui la differenza del cammino ottico tra i due raggi può essere dovuta solo alla propagazione della luce attraverso l'acqua all'interno dei tubi. Supponendo per semplicità che il laboratorio, cioè la Terra, sia fermo rispetto all'etere, il raggio 1 si propaga con velocità, rispetto all'etere, $u_1 = c/n + fv$, per il raggio 2 si ha invece $u_2 = c/n - fv$, essendo v la velocità dell'acqua nei tratti di tubo MN e PQ . La differenza tra i tempi di percorrenza dei due raggi è data da:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l}{u_2} - \frac{2l}{u_1} = \frac{2l}{\frac{c}{n} - fv} - \frac{2l}{\frac{c}{n} + fv} = \frac{4fvl}{\frac{c^2}{n^2} - f^2v^2} \simeq \frac{4fvl n^2}{c^2},$$

essendo l la lunghezza dei tubi MN e PQ . La differenza di fase per i due raggi quindi è:

$$\delta = \frac{\Delta t}{T} = \frac{c\Delta t}{\lambda} = \frac{4fvl n^2}{\lambda c}, \quad (1.18)$$

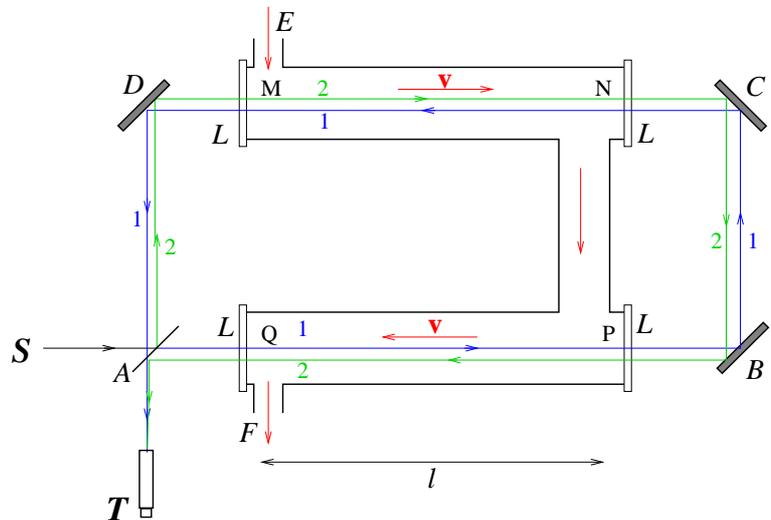


Figura 1.5 L'apparato sperimentale di Fizeau per la misura del coefficiente di trascinamento f .

In pratica, Fizeau eseguì prima l'esperimento con acqua ferma nella condotta, in modo che il cammino ottico dei due raggi fosse assolutamente identico. Poi fece fluire l'acqua nella condotta e misurò lo spostamento δ della figura di interferenza (in questo modo, anche un'eventuale velocità relativa Terra-etere non altera la misura, perché produrrebbe un effetto identico sia con acqua ferma che con acqua in moto: lo spostamento delle frange di interferenza sarebbe comunque dato dalla δ della formula (1.18)).

Nell'apparato originale di Fizeau, i dati erano i seguenti: $l = 1.5$ m, $v = 7$ m/s, $\lambda = 5.3 \times 10^{-7}$ m, $n = 1.33$; lo spostamento osservato fu $\delta = 0.23$. Dall'eq. (1.18) si ricava $f = 0.48$, abbastanza vicino allo 0.43 previsto in base alla (1.17).

Il coefficiente di trascinamento di Fresnel, mentre risolveva alcuni problemi sorti nell'interpretazione di alcuni esperimenti dell'epoca, ne faceva sorgere un altro: per la luce che si propaga in mezzi dispersivi, in cui l'indice di rifrazione n non è uguale per tutte le lunghezze d'onda, si sarebbe dovuto osservare un effetto di trascinamento diverso a seconda del colore della luce usata, cosa che non accadeva.

1.2.4 L'esperimento di Michelson-Morley

Se i fenomeni elettromagnetici hanno un SR privilegiato, quello in cui l'etere è fermo, deve essere possibile, in qualche modo, misurare la velocità relativa di un SR inerziale rispetto all'etere, cioè osservare il "vento d'etere" (fig. 1.6).

Verso il 1880, Albert Michelson cominciò a pensare ad un esperimento per misurare la velocità v_T della Terra rispetto all'etere. Progettò appositamente a questo scopo un interferometro molto preciso e ne costruì un prototipo. Nel 1881 pubblicò i primi risultati sperimentali. Purtroppo la sensibilità dello strumento non era sufficiente per trarre conclusioni certe sulla velocità Terra-etere, ma il prototipo si era dimostrato molto promettente e Michelson si mise all'opera per costruire un interferometro migliore con la collaborazione, questa volta, di Edward Morley.

L'esperimento fu ripetuto con il nuovo interferometro, molto più preciso, pochi anni dopo; i risultati furono pubblicati nel 1887. Il dispositivo usato è schematizzato in figura 1.7.

Una sorgente S emette luce monocromatica coerente che incide su uno specchio semiriflettente

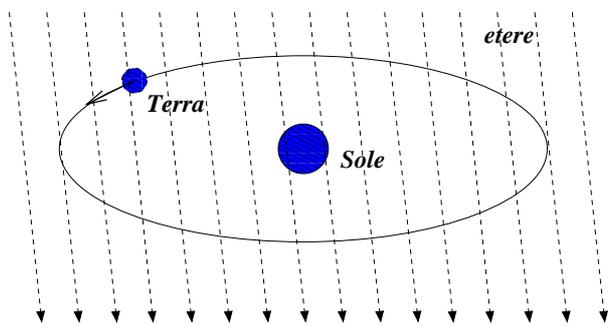


Figura 1.6 In un SR solidale con la Terra, l'etere appare in movimento ("vento d'etere"). La direzione ed il modulo del vento d'etere cambiano in ogni punto dell'orbita terrestre ed in ogni ora della giornata, per effetto del movimento della Terra attorno al Sole e della rotazione su se stessa.

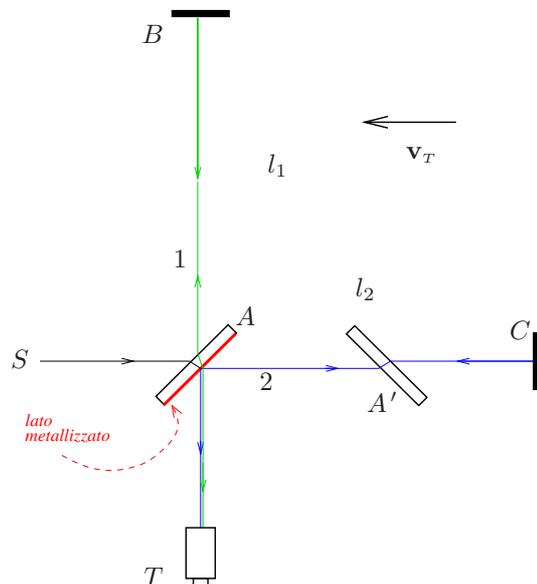


Figura 1.7 (a destra) L'interferometro di Michelson, ideato per misurare la velocità della Terra rispetto all'etere.

A costituito da una lastra di vetro con una faccia metallizzata; il sottile strato di metallo fa sì che una parte del raggio incidente (raggio 1 in figura) venga riflesso verso lo specchio B , l'altra parte invece, chiamata raggio 2 in figura, attraversa la lastra e prosegue verso lo specchio C (se lo strato di metallo fosse troppo spesso si avrebbe riflessione totale). I due raggi vengono riflessi dagli specchi B e C e tornano indietro verso A , per essere infine riflessi verso il telescopio T . Dallo studio delle frange di interferenza si può dedurre la differenza di cammino ottico compiuto dai due raggi. Una lastra di vetro A' , identica a A ma senza faccia metallizzata, viene posta lungo il cammino del raggio 2 per rendere le sue condizioni identiche a quelle del raggio 1: entrambi quindi dovranno attraversare lo spessore della lastra di vetro per tre volte e la differenza di cammino ottico tra i due raggi sarà data solo dello spazio al di fuori delle lastre. Indicheremo quindi con l_1 ed l_2 le lunghezze dei bracci AB e AC , rispettivamente, senza includere nelle misure lo spessore delle lastre di vetro.

L'intero dispositivo era montato su una lastra di marmo che poteva ruotare nel piano orizzontale, alla ricerca della direzione in cui la differenza di fase tra i due raggi è massima.

Supponiamo infatti che la direzione del moto della Terra rispetto all'etere sia orientata lungo la direzione AC , come in figura 1.7. Consideriamo una SR inerziale K solidale con la Terra e con l'interferometro e un altro SR K' solidale con l'etere. Si suppone che il tempo necessario per svolgere l'esperimento sia abbastanza piccolo da poter trascurare la variazione della velocità della Terra dovuta alla rotazione terrestre: in questo breve intervallo di tempo, il SR solidale con la Terra può essere considerato inerziale.

Nel SR K' l'interferometro si muove con velocità \mathbf{v}_T e la luce si propaga con velocità c in tutte le direzioni. Il percorso della luce visto da K' è illustrato in figura 1.8.

Consideriamo il raggio 1 (figura 1.8a): esso apparirà muoversi, nel SR dell'etere, in direzione obliqua; nel tempo t_1 necessario alla luce per andare da A a B , lo specchio B si muove trasversalmente di una distanza $v_T t_1$. La distanza percorsa dalla luce in questo intervallo di tempo è ct_1 , pari a $\sqrt{l_1^2 + v_T^2 t_1^2}$. Il tempo t_1 quindi è $l_1/\sqrt{c^2 - v_T^2}$. Per il ritorno da B ad A la situazione è identica, quindi il tempo complessivo per compiere il tragitto ABA è

$$t_{ABA} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v_T^2}} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}. \quad (1.19)$$

Esaminiamo ora il raggio 2 (figura 1.8b): durante il tempo t'_2 impiegato dalla luce per andare da A a C , lo specchio C si sposta di $v_T t'_2$. La luce perciò deve coprire una distanza ct'_2 pari a $l_2 + v_T t'_2$, da cui si ricava $t'_2 = l_2/(c - v_T)$. Durante il tragitto inverso, A si muove verso il raggio di luce, per cui il percorso effettivamente da percorrere è $ct''_2 = l_2 - v_T t''_2$. Il tempo t''_2 è dato da $l_2/(c + v_T)$. Il tempo totale richiesto alla luce per il tragitto ACA è perciò:

$$t_{ACA} = \frac{l_2}{c - v_T} + \frac{l_2}{c + v_T} = \frac{2l_2 c}{c^2 - v_T^2} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}. \quad (1.20)$$

Secondo il SR K la luce del raggio 2 si muove da A verso C e da C verso A con velocità pari rispettivamente a $c - v_T$ e $c + v_T$. Per il raggio 1 la velocità della luce è $\sqrt{c^2 - v_T^2}$ sia da A a B che viceversa. I tempi di percorrenza calcolati nel SR del laboratorio sono perciò identici a quelli dati nelle formule (1.19) e (1.20).

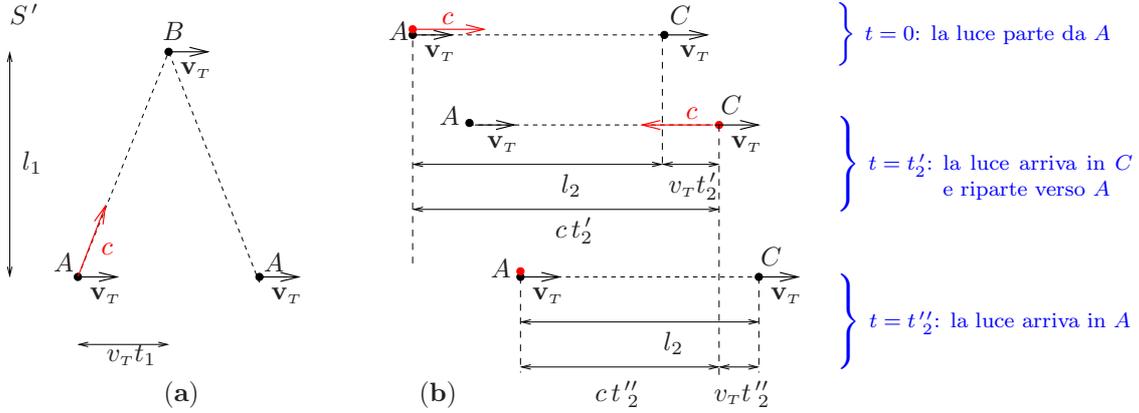


Figura 1.8 Il cammino dei due raggi luminosi dell'esperimento di Michelson e Morley visti dal SR solidale con l'etere. a) raggio ABA di fig. 1.7; b) raggio ACA di fig. 1.7.

La differenza tra i tempi di percorrenza dei due raggi è:

$$\begin{aligned} \delta t = t_{ACA} - t_{ABA} &= \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} - \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} \simeq \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v_T^2}{c^2}\right) - \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v_T^2}{2c^2}\right) = \\ &= \frac{2}{c}(l_2 - l_1) + \frac{v_T^2}{c^3}(2l_2 - l_1), \end{aligned} \quad (1.21)$$

avendo usato un'espressione approssimata valida all'ordine più basso in v_T^2/c^2 .

La differenza di fase, osservabile con le frange di interferenza nel telescopio T è $\delta\phi = \delta t/T = \frac{c}{\lambda}\delta t$.

Per misurare lo spostamento delle frange di interferenza sarebbe necessario conoscere la posizione dei massimi e dei minimi di interferenza quando il cammino ottico dei due raggi è identico, ossia quando la velocità v_T è nulla, in analogia a quanto fatto nell'esperimento di Fizeau, dove la posizione delle frange in presenza del fluido in moto veniva confrontata con quella ottenuta con acqua ferma. Nell'esperimento di Michelson e Morley purtroppo questo non era possibile (non si poteva fermare la Terra!). Invece si pensò di ruotare di 90° nel piano orizzontale l'intero dispositivo, in modo che la direzione di spostamento relativo della Terra rispetto all'etere diventasse parallela al braccio AB ^[c]. Detta $\delta t^{(0)}$ la differenza dei tempi di percorrenza nella posizione originale, eq. (1.21), la differenza dei tempi nella posizione ruotata di 90° è $\delta t^{(90)}$:

$$\begin{aligned} \delta t^{(90)} = t_{ACA}^{(90)} - t_{ABA}^{(90)} &= \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} - \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} \simeq \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v_T^2}{2c^2}\right) - \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v_T^2}{c^2}\right) = \\ &= \frac{2}{c}(l_2 - l_1) + \frac{v_T^2}{c^3}(l_2 - 2l_1) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Era così possibile confrontare le frange di interferenza in una determinata posizione con quelle ottenute dopo una rotazione di 90° : la differenza di fase complessiva prevista era di

$$\Delta\phi = \frac{\delta t^{(0)} - \delta t^{(90)}}{T} \simeq \frac{1}{T} \frac{(l_1 + l_2)v_T^2}{c^3} = \frac{c}{\lambda} \frac{(l_1 + l_2)v_T^2}{c^3} = \frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \frac{v_T^2}{c^2}. \quad (1.23)$$

^[c]L'interferometro era installato su una piattaforma di marmo che galleggiava in una vasca piena di mercurio: questo eliminava le vibrazioni del terreno, che avevano reso molto difficoltose le osservazioni delle frange di interferenza con il primo prototipo di Michelson, e permetteva di ruotare facilmente l'intero apparato senza ulteriori vibrazioni né deformazioni.

In particolare, se i bracci AB e AC hanno la stessa lunghezza $l_1 = l_2 = l$:

$$\Delta\phi = \frac{2l}{\lambda} \frac{v_T^2}{c^2} . \quad (1.24)$$

Nel caso generale in cui la velocità v_T forma un angolo θ con la direzione AC si trova $\Delta\phi = \frac{2lv_T^2}{\lambda c^2} \cos 2\theta$.

Nell'esperimento di Michelson e Morley del 1887, il dispositivo usato aveva $l_1 = l_2 = l = 11$ m (questa lunghezza era ottenuta tramite riflessioni multiple dei raggi ABA e ACA) ^[d] e la luce usata aveva $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m (luce gialla). Supponendo che la velocità v_T fosse dell'ordine della velocità di rotazione della Terra attorno al Sole $v_{Terra} \simeq 30$ km/s, lo spostamento $\Delta\phi$ previsto era di 0.4 frange. In realtà lo scopo dell'esperimento era di determinare v_T , cioè la velocità della Terra rispetto all'etere, dalla misura sperimentale di $\Delta\phi$. Ripetendo l'esperimento varie volte nel corso dell'anno, si sarebbe potuto determinare come varia v_T lungo l'orbita terrestre e quindi la velocità relativa del Sole rispetto all'etere.

I risultati dell'esperimento furono sorprendenti: lo spostamento delle frange di interferenza era nullo, compatibilmente con la precisione dell'apparato sperimentale, di conseguenza anche la velocità relativa Terra-etere era zero entro i limiti sperimentali. L'esperimento fu ripetuto diverse volte nel corso degli anni (e decenni) seguenti, con precisione ogni volta maggiore ma sempre con le stesse conclusioni. Fu ripetuto all'aperto, nell'ipotesi che le pareti della stanza in cui si trovava l'interferometro potessero frenare il vento d'etere. Fu ripetuto anche usando la luce delle stelle invece di una sorgente in laboratorio. Ma lo spostamento delle frange di interferenza era sempre nullo e, di conseguenza, risultava nulla anche la velocità v_T . La conclusione era che l'etere si muoveva trascinato dalla Terra, in modo solidale con essa, ma questo era in contraddizione con l'osservazione dell'aberrazione stellare che indicava invece che l'etere è fermo e la Terra in moto attraverso di esso !

Una possibile soluzione di questo problema fu tentata da Lorentz: egli ipotizzò che un oggetto in moto attraverso l'etere si contraesse nella direzione parallela al moto per un fattore pari a $\sqrt{1 - v_T^2/c^2}$. Questa contrazione compensa esattamente la differenza nei tempi di percorrenza per i due raggi ABA ed ACA . Se infatti nella formula (1.20) la lunghezza l_2 viene moltiplicata per questo fattore, la differenza dei tempi di percorrenza dell'eq. (1.21) si annulla e altrettanto succede per la differenza di fase tra i due raggi luminosi (lo stesso succede quando il dispositivo è ruotato di 90° : la lunghezza che si contrae in questo caso è l_1). Le frange di interferenza osservate in T quindi non si spostano, esattamente come accade nell'esperimento.

Per verificare questa ipotesi, l'esperimento di Michelson e Morley fu ripetuto con bracci l_1 ed l_2 diversi, in modo da non aver più la compensazione tra contrazione della lunghezza e differenza dei tempi di percorrenza ed osservare finalmente lo spostamento delle frange di interferenza. Il risultato fu però lo stesso: le frange di interferenza non si spostano !

^[d]Nel primo esperimento di Michelson, l era circa 1 m, quindi la sensibilità dell'interferometro era molto inferiore.

Capitolo 2

La nuova formulazione della Relatività

Contenuto

2.1	I postulati di Einstein	21
2.1.1	Il problema della simultaneità	22
2.2	Le Trasformazioni di Lorentz	24
2.2.1	Limite non relativistico	27
2.2.2	Significato geometrico delle Trasformazioni di Lorentz	28
2.2.3	Composizione di boost collineari	28
2.3	Proprietà matematiche dello spazio-tempo	30
2.4	Rappresentazione matriciale delle trasformazioni di Lorentz	35
2.4.1	Boost in direzione arbitraria	38
2.4.2	Composizione di boost non paralleli	40

Come abbiamo visto, alla fine del XIX secolo erano state raccolte molte evidenze sperimentali sulle proprietà della luce. Alcune di queste erano spiegabili nell'ambito della fisica classica solo con l'introduzione di ipotesi aggiuntive *ad hoc*, come l'effetto di trascinamento. Sovente però le ipotesi aggiuntive introdotte per spiegare fenomeni diversi erano in contraddizione tra di loro. Altre volte, le ipotesi che sembravano spiegazioni plausibili di certi effetti (come l'ipotesi di Lorentz sulla contrazione delle lunghezze) venivano smentite da successivi esperimenti. Si tentò perfino di riformulare le leggi dell'elettromagnetismo, ma senza successo.

La situazione era piuttosto confusa e molto insoddisfacente. Era necessario un ripensamento radicale delle leggi fondamentali della Fisica.

In questo contesto si inserisce Albert Einstein, che pone le basi per la fondazione della Fisica Moderna a cominciare dal Principio di Relatività, che egli riformula a partire da due Postulati.

2.1 I postulati di Einstein

I. Postulato di relatività

Le leggi di natura e i risultati di tutti gli esperimenti eseguiti in un dato SR sono indipendenti dal moto di traslazione dell'intero sistema.

Questo significa che tutti i SR inerziali sono equivalenti, cioè tutti i fenomeni fisici si svolgono in ciascuno di essi in maniera identica: tutte le leggi fisiche valide in un SR sono automaticamente valide in ogni altro SR in moto relativo rettilineo uniforme. Questo principio era stato applicato alla fisica sin dai tempi di Galileo e Newton limitatamente alla meccanica: viene ora esteso da

Einstein a *tutti i fenomeni fisici, compreso l'elettromagnetismo*. Il fatto che le equazioni di Maxwell non siano invarianti per Trasformazioni di Galileo significa che sono queste trasformazioni ad essere inadeguate. Occorrerà perciò trovare delle nuove leggi di trasformazione tra SR in moto relativo rettilineo uniforme rispetto alle quali tutte le equazioni fisiche saranno invarianti.

Accettando questo postulato, risulta impossibile stabilire il moto assoluto di un SR: tutti gli esperimenti volti allo studio dell'etere, inteso come SR privilegiato per la propagazione della radiazione elettromagnetica, sono vani. L'etere non è osservabile: dal punto di vista delle equazioni della fisica, dunque, non esiste.

II. Postulato della costanza della velocità della luce nel vuoto

La velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i SR inerziali, indipendentemente dal moto della sua sorgente o dell'osservatore.

La velocità della luce c è quindi una *costante universale*. Questo postulato fu il più difficile da accettare da parte dei contemporanei di Einstein. Era la spiegazione più semplice per il risultato degli esperimenti di Michelson e Morley e di molti altri esperimenti di quel periodo. Ma era in stridente contrasto con il senso comune, in cui qualunque velocità cambia passando da un SR ad un altro in moto relativo nel modo descritto dalle (1.2). Inoltre, una ipotesi così rivoluzionaria non era surrogata dalla benché minima evidenza sperimentale diretta (a parte gli esperimenti di Michelson e Morley, che potevano costituire semmai una prova indiretta) e le sue conseguenze erano talmente sconvolgenti e controintuitive da suscitare molte perplessità. Si tratta perciò di un'ipotesi che richiede una grande capacità di astrazione e l'abbandono definitivo della logica derivante dall'esperienza comune. Anche questo postulato, infine, implica che le trasformazioni di Galileo sono da correggere.

Tutta la Teoria della Relatività Speciale si fonda su questi due Postulati. Come per ogni altra teoria fisica, l'ultima parola spetta sempre all'esperimento, e nel caso della teoria di Einstein le conferme sperimentali sono state nel corso degli anni così tante ed eclatanti che ormai essa è universalmente accettata. Tutti gli effetti da essa previsti e in contrasto con l'esperienza comune sono stati verificati sperimentalmente. Perfino la costanza della velocità della luce in tutti i SR è stata, in anni recenti, verificata in laboratorio.

Implicita, nella formulazione della Relatività Speciale, è l'idea che le trasformazioni di Galileo siano valide solo in particolari circostanze, cioè quando non ci siano in gioco velocità confrontabili con quella della luce. Tutta la fisica classica era stata ideata osservando fenomeni che soddisfano questa condizione: per essi quindi le trasformazioni di Galileo sono sufficientemente precise. Le nuove leggi di trasformazione dovranno ammettere le trasformazioni di Galileo come limite per piccole velocità: questo limite viene chiamato "limite non relativistico".

2.1.1 Il problema della simultaneità

Il Postulato dell'invarianza della velocità della luce, pur nella sua semplicità, ha conseguenze clamorose che contrastano con il senso comune.

Consideriamo il seguente esempio, illustrato in figura 2.1a: In un SR K , i punti O , A e B sono fermi; A e B sono disposti a distanza L da O , da parti opposte. All'istante $t = 0$ da O viene emesso un impulso luminoso che viaggia in tutte le direzioni con velocità c e raggiunge i punti A e B contemporaneamente al tempo $t_1 = L/c$.

Esaminiamo ora lo stesso esperimento da un altro SR inerziale, K' , in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a K . Per mettere in maggiore evidenza le conseguenze del II Postulato, ragioniamo

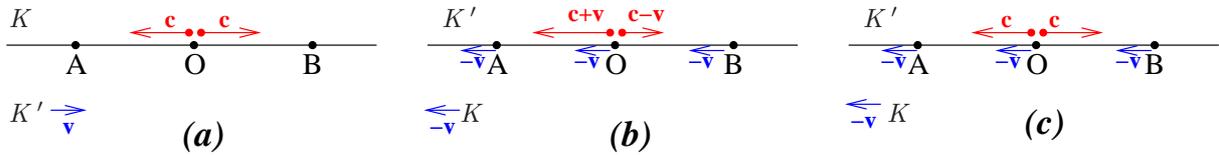


Figura 2.1 Due Sistemi di Riferimento K ed K' in moto relativo uniforme con velocità v . *a*: I punti O , A e B sono fermi rispetto al SR K . All'istante $t = 0$ dal punto O viene emesso un segnale luminoso verso i punti A e B . La luce viaggia con velocità c in entrambe le direzioni. *b*: Lo stesso fenomeno visto dal SR K' : secondo la relatività galileiana, la luce viaggia con velocità diverse nelle due direzioni. *c*: Lo stesso fenomeno visto dal SR K' ma applicando il Postulato di invarianza della velocità della luce: la luce viaggia con velocità c sia verso A che verso B .

prima con le leggi della meccanica classica, usando cioè le trasformazioni di Galileo e trasformando le velocità da un SR all'altro come prescritto dalla (1.2). La situazione è quella descritta in figura 2.1*b*: in K' i punti A , B e O si muovono con velocità $-v$; In particolare il punto B va incontro al segnale luminoso ma la luce viaggia verso di lui con velocità $c - v$; il punto B viene perciò raggiunto dopo un tempo t_B tale che la somma delle distanze percorse dalla luce e da B sia uguale alla distanza L : $(c - v)t_B + vt_B = L$, quindi $t_B = L/c$. Analogamente il punto A che viaggia nella direzione opposta al segnale luminoso viene raggiunto ad un istante t_A tale che $vt_A + L = (c + v)t_A$, dato che la luce viaggia nella direzione di A con velocità $c + v$. Quindi $t_A = L/c$. In fisica classica si ha perciò $t_A = t_B = t_1$: ritroviamo quindi dei risultati ben noti: due eventi simultanei in un certo SR lo sono anche in ogni altro SR inerziale, ed il tempo è uguale in tutti i SR.

Applichiamo ora il II Postulato: nel SR K' la luce viaggia con velocità c in tutte le direzioni, come rappresentato in figura 2.1*c*. Il punto B va incontro al segnale luminoso, A invece si allontana, *ma la luce viaggia verso entrambi con la stessa velocità*. Ne consegue che il punto B viene raggiunto dalla luce *prima* del punto A . Chiamando t'_B e t'_A gli istanti in cui la luce giunge rispettivamente in B e in A , si ha inesorabilmente $t'_B < t'_A$ ^[a]. Non a caso è stato messo un apice al tempo misurato in K' : questo semplice esempio fa vedere come in Relatività ^[b] la simultaneità tra due eventi è un concetto relativo: due eventi simultanei in un certo SR, possono non esserlo in un altro SR. *Il tempo cambia da un SR di riferimento all'altro*: l'idea di tempo come parametro assoluto, uguale in tutti i SR, alla base della fisica classica, è da abbandonare.

^[a]I valori esatti di t'_A e t'_B verranno calcolati nel paragrafo 3.2.2 dove questo esempio verrà trattato in modo quantitativo.

^[b]D'ora in poi con "Relatività" si intenderà la "Relatività Speciale" di Einstein.

2.2 Le Trasformazioni di Lorentz

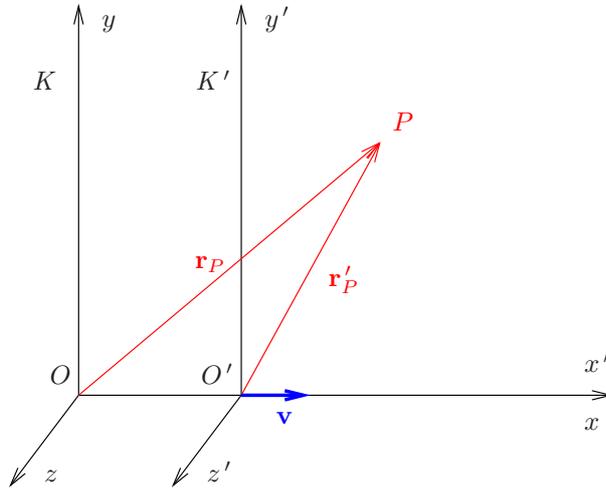
Vogliamo ora trovare la forma “relativistica” delle equazioni (1.1); il ragionamento della sezione precedente ci fa capire che dobbiamo aspettarci di veder modificare, da un SR all’altro, non solo le coordinate spaziali, ma anche il tempo. Vogliamo dunque determinare la legge di trasformazione delle coordinate e del tempo tra due SR inerziali, conoscendone la velocità relativa \mathbf{v} :

$$\{t, x, y, z\} \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{v}} \\ \xleftarrow{-\mathbf{v}} \end{matrix} \{t', x', y', z'\}, \quad \text{oppure} \quad \{x_0, x, y, z\} \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{v}} \\ \xleftarrow{-\mathbf{v}} \end{matrix} \{x'_0, x', y', z'\},$$

avendo introdotto una nuova “coordinata temporale”, definita come $x_0 \equiv ct$ e $x'_0 \equiv ct'$ (si ricordi che c è invariante), che ha le dimensioni di una lunghezza come le tre coordinate spaziali e rende più comoda la scrittura delle formule nel seguito. Lo spazio a quattro dimensioni, costituito dallo spazio ordinario tridimensionale e dalla quarta dimensione temporale si chiama **spazio** o **universo di Minkowski**.

La descrizione dei fenomeni fisici non dipende dalla scelta dell’origine degli assi cartesiani nei due SR né dalla loro orientazione, abbiamo perciò la facoltà di scegliere gli assi cartesiani nel modo più conveniente. Senza perdita di generalità possiamo orientare gli assi x e x' parallelamente alla velocità relativa \mathbf{v} , in modo che il SR K' si muova con velocità \mathbf{v} nel verso positivo delle x rispetto a K , e K con velocità $-\mathbf{v}$ (cioè nel verso negativo delle x) rispetto a K' . Scegliamo inoltre le origini delle coordinate O ed O' in modo che coincidano al tempo $t = 0$. Nel SR K' sceglieremo l’origine del tempo in modo che O ed O' coincidano per $t' = 0$. La disposizione degli assi è illustrata in figura 2.2.

Figura 2.2 Definizione degli assi nei Sistemi di Riferimento K e K' . K' si muove di moto uniforme con velocità \mathbf{v} nel verso positivo dell’asse delle x . Un punto P è individuato dai vettori \mathbf{r}_P ed \mathbf{r}'_P di componenti, rispettivamente, (x_P, y_P, z_P) e (x'_P, y'_P, z'_P) .



Le formule di trasformazione che cerchiamo devono soddisfare alcuni requisiti :

1. Devono essere *invertibili*, cioè deve essere possibile passare indifferentemente dal sistema K a K' o viceversa. Inoltre, essendo i due SR del tutto equivalenti, le leggi di trasformazioni da K' a K devono potersi ricavare da quelle da K a K' cambiando \mathbf{v} in $-\mathbf{v}$.
2. Devono essere *lineari*: se così non fosse, un corpo in moto rettilineo e uniforme in un SR apparirebbe in moto con velocità non costante in un altro SR: i due SR non sarebbero equivalenti e si violerebbe il principio di relatività. Una trasformazione lineare ha anche il pregio di essere invertibile e soddisfa quindi il requisito 1.

3. Dato che il moto relativo dei due SR avviene lungo l'asse x , le coordinate y e z di un punto non sono modificate: $y' = y$ e $z' = z$. Questa richiesta rafforza l'analogia con le trasformazioni di Galileo, a cui le nuove trasformazioni devono ridursi nel caso di piccole velocità, dato che il moto relativo dei due SR, nelle direzioni y e z è nullo. Oltre a ciò si può anche aggiungere che se le coordinate y e z cambiassero da un SR ad un altro in moto lungo l'asse x , sarebbe possibile rivelare il moto assoluto di un SR.
4. Le coordinate x' e t' (x'_0) non possono dipendere da y e z . Infatti, nessun punto del piano yz è fisicamente distinguibile da qualsiasi altro punto dello stesso piano, per cui si può spostare l'origine del SR K in un punto $\tilde{O} = (0, Y, Z)$, senza influenzare i valori trasformati x', t' . Ma le coordinate x' e t' verrebbero influenzate se nella loro legge di trasformazione di comparissero esplicitamente le y e z .

La trasformazione da K a K' dovrà quindi avere la forma

$$\begin{cases} x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x \\ x' = a_{10}x_0 + a_{11}x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.1)$$

dove le a sono coefficienti da determinare.

Bisogna ora definire la proprietà fondamentale di queste trasformazioni: devono essere tali che **la velocità della luce sia c sia in K che in K'** (II Postulato). Consideriamo un segnale luminoso che viene emesso al tempo $t = 0$ da O : esso si propaga con velocità c in tutte le direzioni. Un punto generico (x, y, z) verrà raggiunto ad un istante t tale che $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Per la scelta degli assi coordinati che abbiamo effettuato, quando $t = 0$ l'origine O' coincide con O e nel SR K' il tempo è $t' = 0$. Anche in K' si ha perciò un'onda luminosa che si propaga dall'origine con fronte d'onda sferico (per l'invarianza di c). Il punto (x', y', z') viene raggiunto al tempo t' tale che $c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Definendo la quantità, detta "distanza invariante",

$$s^2 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_0^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

possiamo scrivere l'uguaglianza ^[c]:

$$s^2 = s'^2 \quad (2.2)$$

cioè, in forma esplicita:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Sostituendo le espressioni (2.1) si ha:

$$\begin{aligned} x_0^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= (a_{00}x_0 + a_{01}x)^2 - (a_{10}x_0 + a_{11}x)^2 - y^2 - z^2 \\ x_0^2 - x^2 &= (a_{00}^2 - a_{10}^2)x_0^2 - (a_{01}^2 - a_{11}^2)x^2 + 2(a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11})x_0x \end{aligned}$$

Questa uguaglianza deve essere vera qualunque siano x_0, x, y, z : bisogna perciò imporre che i coefficienti di x_0^2, x^2 e x_0x a primo e secondo membro siano uguali. Si ottengono perciò

^[c]Si potrebbe pensare di inserire un fattore di scala nel passaggio dal SR K a K' : $s^2 = \xi(v)s'^2$, con $\xi(v)$ funzione positiva che può dipendere solo dal modulo della velocità relativa dei due SR (per l'ipotesi di isotropia ed omogeneità dello spazio). Allora nel passaggio inverso da K' a K deve esistere lo stesso fattore di scala (se fosse un fattore diverso, i due SR non sarebbero equivalenti): $s'^2 = \xi(v)s^2$. Segue che $s^2 = \xi(v)^2 s'^2$ cioè $\xi(v) = 1$.

tre condizioni per le 4 incognite a_{00} , a_{01} , a_{10} , a_{11} . La quarta condizione si ottiene inserendo l'informazione che K' si muove rispetto a K con velocità \mathbf{v} (fino ad ora abbiamo solo dato le condizioni perché la velocità della luce sia invariante, ma non abbiamo inserito nelle equazioni alcuna informazione sul moto relativo dei sistemi!).

Consideriamo il moto del punto O (origine di K) visto dal SR K' : O si muove con velocità v lungo la direzione delle x negative. Significa che al tempo t' (misurato in K') O si trova in $-vt'$. Possiamo perciò scrivere l'equazione:

$$x'(O) = -vt' \quad (2.3)$$

ma in base alle relazioni (2.1), applicate al punto O ($x(O) = 0$) si ha:

$$\begin{aligned} x'_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x(O) = a_{00}x_0 \\ x'(O) &= a_{10}x_0 + a_{11}x(O) = a_{10}x_0 \end{aligned}$$

da cui, dividendo la seconda equazione per la prima e usando la (2.3) (ricordare la definizione $x'_0 = ct'$) si ottiene:

$$\frac{a_{10}}{a_{00}} = \frac{x'(O)}{x'_0} = \frac{-vt'}{ct'} = -\frac{v}{c}.$$

Abbiamo ottenuto quindi la quarta equazione tra le incognite di (2.1). Il sistema completo ora è:

$$\begin{cases} a_{10} = -\frac{v}{c} a_{00} \\ a_{11}^2 - a_{01}^2 = 1 \\ a_{00}^2 - a_{10}^2 = 1 \\ a_{10}a_{11} - a_{00}a_{01} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla terza equazione si ha immediatamente: $a_{00}^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ per cui

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad a_{10} = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

avendo scelto il segno positivo per a_{00} (scegliere a_{00} negativo significherebbe che il tempo scorre in direzioni diverse nei due SR: in uno va avanti, nell'altro va indietro: non è una situazione accettabile dal punto di vista fisico, perlomeno a livello macroscopico ed in presenza di fenomeni irreversibili). Sostituendo nelle altre due equazioni si trova:

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad a_{01} = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Anche a_{11} viene scelto positivo: è conseguenza della scelta degli assi delle coordinate fatta in figura 2.2. È consuetudine usare le abbreviazioni:

$$\boxed{\beta \equiv \frac{v}{c}} \quad \boxed{\gamma = \gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}, \quad (2.4)$$

in particolare la costante γ viene chiamata *fattore di Lorentz*.

Abbiamo così ottenuto le **Trasformazioni di Lorentz**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta x_0) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{ossia} \quad \left\{ \begin{array}{l} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Se ora si invertono queste equazioni per ricavare x, y, z, t in funzione di x', y', z', t' si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right. \quad (2.6)$$

cioè delle equazioni identiche in forma alle (2.5) ma con il segno della velocità relativa dei due SR cambiato, come richiesto dal requisito 1.

Osservazione 1: le TL ^[d] sono reali solo per $|\mathbf{v}| = v < c$ cioè $-1 < \beta < 1$ (si veda (2.4)). La velocità della luce è la velocità massima consentita per SR inerziali in moto relativo. Dimosteremo nel seguito che è anche la velocità massima a cui può muoversi un corpo materiale.

Osservazione 2: È curioso sottolineare che queste leggi di trasformazione furono scritte da Lorentz in uno dei tentativi di conciliare l'esperimento di Michelson e Morley con l'ipotesi dell'etere: egli ipotizzò che un corpo in moto attraverso l'etere si contraesse e tale contrazione era, secondo Lorentz, un effetto reale. Il primo a comprendere il vero significato fisico delle TL fu A. Einstein che giustamente è ormai considerato il padre della Relatività.

2.2.1 Limite non relativistico

Verifichiamo che le Trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo nel limite di velocità v molto più piccole di c .

Il fattore di Lorentz γ tende a 1 per $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, quindi la legge di trasformazione per la coordinata parallela al moto diventa $x' = x - vt$, esattamente come nella trasformazione di Galileo. Per la trasformazione del tempo notiamo che per riottenere $t' = t$ è necessario avere oltre a $v \ll c$ anche $x \ll ct$, così il termine vx/c^2 diventa trascurabile rispetto a t . In altre parole, le trasformazioni di Galileo sono adeguate per velocità relative dei SR molto più piccole di c e per tempi di osservazione non troppo lunghi. In realtà la condizione $x \ll ct$ non dà alcuna limitazione pratica: dice semplicemente che se un esperimento dura 1 secondo, lo spazio di osservazione deve essere minore di 300000 km, non si misurano distanze simili in esperimenti di fisica classica! In definitiva, il limite non relativistico delle (2.5) è

$$x' = x - vt \quad z' = z \quad y' = y \quad t' = t ,$$

esattamente come nelle (1.1)

Un modo molto comune di ottenere le leggi della fisica classica come limite di quelle esatte della teoria relativistica è di calcolare il limite $c \rightarrow \infty$. È solo un procedimento formale che porta a risultati corretti (e per questo viene molto usato nella pratica), ma che non ha senso dal punto di vista logico: c è una costante universale, è fissa: sono le altre grandezze che vengono confrontate con c a tendere a zero.

^[d]D'ora in poi useremo l'abbreviazione "TL" per "Trasformazioni di Lorentz".

2.2.2 Significato geometrico delle Trasformazioni di Lorentz

Se invece della coordinata $x_0 = ct$ introduciamo una coordinata “immaginaria” $x_4 = ict$, la trasformazione di Lorentz si può interpretare come una trasformazione tra sistemi di coordinate

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \longleftrightarrow \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\}$$

(la notazione $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ è molto comune) con la condizione (2.2) che, nella nuova notazione, si scrive come:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 .$$

Una TL è perciò una rotazione in uno spazio quadridimensionale costituito dallo spazio ordinario e da una quarta dimensione immaginaria proporzionale al tempo. Le TL sono quindi semplicemente le trasformazioni ortogonali in questo spazio a quattro dimensioni. È noto che le trasformazioni ortogonali in uno spazio di dimensione N costituiscono un *gruppo*: le TL costituiscono il **gruppo di Lorentz**.

Le trasformazioni puramente spaziali, che legano SR in *quiete* l'uno rispetto all'altro ma con gli assi orientati in direzioni diverse, costituiscono un sottogruppo del gruppo di Lorentz. Si chiama “**trasformazione di Lorentz pura**” o “**boost**” una trasformazione *senza* rotazione spaziale, che lega due SR in moto relativo rettilineo e uniforme con assi paralleli; la (2.5) è un esempio di boost.

Come per una rotazione spaziale nel piano x_1x_2 di un angolo φ si ha la legge di trasformazione:

$$\begin{cases} x'_1 = \cos \varphi x_1 + \sin \varphi x_2 & x'_3 = x_3 \\ x'_2 = -\sin \varphi x_1 + \cos \varphi x_2 & x'_4 = x_4 \end{cases} , \quad (2.7)$$

così una rotazione nel piano x_1x_4 ha la forma

$$\begin{cases} x'_1 = \cos \varphi x_1 + \sin \varphi x_4 & x'_2 = x_2 \\ x'_4 = -\sin \varphi x_1 + \cos \varphi x_4 & x'_3 = x_3 \end{cases} , \quad (2.8)$$

ma con un angolo di rotazione immaginario: $\varphi = i\zeta$, per cui $\cos \varphi = \cosh \zeta$, $\sin \varphi = i \sinh \zeta$. Identificando il fattore di Lorentz γ con $\cosh \zeta$ è facile verificare che le trasformazioni (2.8) coincidono con le (2.5). Infatti si ha

$$\sinh \zeta = \sqrt{\cosh^2 \zeta - 1} = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}} = \beta\gamma \quad \text{e} \quad \beta = \tanh \zeta .$$

Il parametro ζ si chiama **rapidità**.

2.2.3 Composizione di boost collineari

In generale, *la sovrapposizione di due TL pure non è una TL pura*, ma corrisponde ad una trasformazione generica del gruppo di Lorentz, cioè ad una *TL pura più una rotazione spaziale* (ne vedremo un esempio nel paragrafo 2.4.2). Se però le due TL pure sono collineari, la loro sovrapposizione è ancora una TL pura.

Consideriamo tre SR inerziali in moto relativo lungo l'asse x . Sia v_1 la velocità di K' rispetto a K e sia v_2 la velocità di K'' rispetto a K' . Vogliamo determinare la legge di trasformazione delle coordinate da K a K'' . Definiamo

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c} \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c} \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} .$$

Le TL tra i SR K' e K , K'' e K' sono (le coordinate y e z , invariate nelle trasformazioni, vengono omesse):

$$\begin{cases} x' = \gamma_1 (x - v_1 t) = \gamma_1 (x - \beta_1 c t) \\ t' = \gamma_1 \left(t - \frac{v_1}{c^2} x \right) = \gamma_1 \left(t - \frac{\beta_1}{c} x \right) \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = \gamma_2 (x' - \beta_2 c t') \\ t'' = \gamma_2 \left(t' - \frac{\beta_2}{c} x' \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

sostituendo x' e t' nelle espressioni per x'' e t'' si ha:

$$x'' = \gamma_2 \gamma_1 (x - \beta_1 c t) - \gamma_2 \beta_2 c \gamma_1 \left(t - \frac{\beta_1}{c} x \right) = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \left(x - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} c t \right), \quad (2.10a)$$

$$t'' = \gamma_2 \gamma_1 \left(t - \frac{\beta_1}{c} x \right) - \gamma_2 \frac{\beta_2}{c} \gamma_1 (x - \beta_1 c t) = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \left(t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \frac{x}{c} \right). \quad (2.10b)$$

Le precedenti espressioni possono essere riscritte osservando che:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}} = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 + 2\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1 \beta_2}} = \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_3^2}} = \gamma_3, \end{aligned}$$

avendo definito

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (2.11)$$

Le equazioni (2.10) diventano:

$$\begin{cases} x'' = \gamma_3 (x - v_3 t) \\ t'' = \gamma_3 \left(t - \frac{v_3}{c^2} x \right) \end{cases} \quad \text{con} \quad v_3 = c \beta_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad (2.12)$$

e corrispondono ad una TL pura, ma la velocità relativa v_3 non è data dalla somma $v_1 + v_2$.

Abbiamo osservato alla fine del paragrafo 2.2 che la velocità relativa tra due SR non può essere maggiore di c , quindi nel nostro esempio deve essere $-1 < \beta_1 < 1$ e $-1 < \beta_2 < 1$. È facile dimostrare che anche la velocità tra K ed K'' è, in modulo, sicuramente minore di c , infatti:

$$1 - \left(\frac{v_3}{c} \right)^2 = 1 - \beta_3^2 = 1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2}{(1 + \beta_1 \beta_2)^2} = \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{1 + \beta_1 \beta_2} > 0. \quad (2.13)$$

Quindi la velocità limite c non può essere superata neanche con trasformazioni multiple successive.

Per ogni corpo materiale in moto con velocità costante può essere trovato un SR inerziale solidale con il corpo: siccome questo SR non può avere velocità relativa maggiore di c rispetto ad ogni altro SR inerziale, segue che il corpo stesso non può muoversi con velocità maggiore di c in nessun SR inerziale. La velocità della luce nel vuoto è la *velocità limite* per ogni fenomeno fisico, ed è un parametro assoluto, come richiesto dal II Postulato. La formula (2.11) ricorda molto la formula per la somma di due tangenti iperboliche, non a caso, introducendo le *rapidità* (definite alla fine del paragrafo 2.2.2) ζ_1 ed ζ_2 in modo che $\beta_1 = \tanh \zeta_1$ e $\beta_2 = \tanh \zeta_2$, si trova, per la rapidità della trasformazione da K a K'' :

$$\beta_3 = \tanh \zeta_3 = \frac{\tanh \zeta_1 + \tanh \zeta_2}{1 + \tanh \zeta_1 \tanh \zeta_2} = \tanh(\zeta_1 + \zeta_2),$$

cioè $\zeta_3 = \zeta_1 + \zeta_2$ e si conclude che la rapidità è additiva per boost collineari.

2.3 Proprietà matematiche dello spazio-tempo

Nella teoria della relatività ristretta, le TL delle coordinate (x_0, x, y, z) lasciano invariante la quantità

$$s^2 = x_0^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (2.14)$$

(avendo definito $x = x^1, y = x^2, z = x^3$) o, in forma differenziale,

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (2.15)$$

Matematicamente, le TL formano un gruppo, chiamato **Gruppo di Lorentz omogeneo** che comprende, oltre alle trasformazioni tra SR in moto relativo rettilineo e uniforme, anche trasformazioni tra SR con assi ruotati (ma fermi). Includendo anche le traslazioni si ottiene il **Gruppo di Lorentz non omogeneo** o **Gruppo di Poincaré**. Nel seguito ci limiteremo a considerare solo il Gruppo di Lorentz omogeneo chiamandolo, per brevità, “Gruppo di Lorentz”. Le equazioni matematiche che esprimono le leggi di natura devono essere di forma invariante per le trasformazioni del Gruppo di Lorentz. Esse devono essere perciò relazioni tra scalari, vettori o tensori, definiti in base alle loro proprietà di trasformazione sotto il Gruppo di Lorentz in maniera analoga alle definizioni usuali di vettori e tensori rispetto alle rotazioni tridimensionali. Consideriamo perciò uno spazio a 4 dimensioni con coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 . Noi facciamo l’ipotesi che esista una trasformazione che fornisce le nuove coordinate, rispetto ad un nuovo SR, x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 in base ad una regola nota :

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (2.16)$$

che per ora non ci interessa specificare. Scalari e tensori di rango k sono definiti in base alle loro proprietà di trasformazione sotto la (2.16). Uno **scalare** è una grandezza singola il cui valore non viene modificato dalla trasformazione. La quantità s^2 definita in (2.14) è un esempio di grandezza scalare per TL.

I **tensori di rango 1**, detti anche **vettori** o **quadrivettori** (per il caso particolare di spazio a 4 dimensioni che stiamo considerando) sono di due tipi: controvarianti e covarianti. Un **vettore controvariante** A^α ha quattro componenti (A^0, A^1, A^2, A^3) , che si trasformano sotto le (2.16) secondo la regola:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^3} A^3 = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta. \quad (2.17)$$

Nell’ultima uguaglianza è stata introdotta una notazione che usa una convenzione molto diffusa: *indici ripetuti nello stesso termine si intendono sommati*. Si usano inoltre indici greci per le coordinate dello spazio a 4 dimensioni, che variano da 0 a 3 (come ad esempio l’indice β dell’equazione (2.17)). Si usano invece indici latini per le 3 coordinate spaziali, variandole da 1 a 3.

Un vettore che si trasforma secondo la regola :

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta, \quad (2.18)$$

si chiama **vettore covariante**. La derivata parziale deve essere calcolata dalla relazione inversa della (2.16), con x^β espresso in funzione di x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 . I vettori controvarianti si scrivono con gli indici in alto, quelli covarianti con gli indici in basso, in corrispondenza dei fattori $\partial x'^\alpha / \partial x^\beta$ o dei loro inversi nelle formule di trasformazione.

Notiamo che le coordinate stesse x^0, x^1, x^2, x^3 formano le componenti di un vettore controvariante.

Un **tensore controvariante di rango 2** è costituito da 16 grandezze che si trasformano secondo :

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta} . \quad (2.19)$$

Analogamente un **tensore covariante di rango 2** ha 16 componenti che si trasformano come:

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} G_{\gamma\delta} . \quad (2.20)$$

Si può anche definire un **tensore misto di rango 2**, con un indice covariante ed uno controvariante che si trasforma come:

$$H'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} H^{\gamma}_{\delta} . \quad (2.21)$$

In modo analogo si definiscono tensori controvarianti, covarianti o misti di rango qualunque. È immediato verificare che moltiplicando tutte le componenti di un vettore (o tensore) per una quantità scalare si ottiene un nuovo vettore (o tensore) dello stesso tipo. Inoltre la somma di due vettori covarianti (o controvarianti), definita sommando le componenti corrispondenti, è ancora un vettore covariante (o controvariante). Lo stesso dicasi per i tensori.

Il **(quadri)prodotto interno** o **scalare** viene definito come la somma dei prodotti delle componenti di un vettore covariante e di uno controvariante:

$$B \cdot A = B_{\alpha} A^{\alpha} ; \quad (2.22)$$

in base a questa definizione il prodotto scalare è un invariante (cioè uno scalare) rispetto alla trasformazione (2.16):

$$B' \cdot A' = B'_{\alpha} A'^{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} B_{\beta} A^{\gamma} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} B_{\beta} A^{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} B_{\beta} A^{\gamma} = B_{\beta} A^{\beta} = B \cdot A , \quad (2.23)$$

avendo introdotto il tensore di Kronecker :

$$\delta^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta . \end{cases} \quad (2.24)$$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa e distributiva rispetto alla somma di vettori.

Due tensori $A^{\alpha\beta}$ e $B_{\beta\gamma}$ si dicono inversi l'uno dell'altro se

$$A^{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} . \quad (2.25)$$

Dato un tensore misto, si definisce **contrazione** la somma delle sue componenti con due indici (uno covariante ed uno controvariante) uguali; il risultato è un nuovo tensore di rango ridotto, ad esempio:

$$M^{\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{\alpha\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m} = M^{0\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{0\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m} + M^{1\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{1\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m} + M^{2\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{2\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m} + M^{3\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{3\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m} = N^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m} , \quad (2.26)$$

cioè da un tensore misto di rango $n + m + 2$ si ottiene, per contrazione, un tensore di rango $n + m$. In particolare da un tensore misto di rango due si ottiene uno scalare: $P^{\alpha}_{\alpha} = S$.

La metrica dello spazio è definita da :

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta , \quad (2.27)$$

(la (2.15) ne è un caso particolare) dove $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ è chiamato **tensore metrico**. Si noti che il tensore metrico si può sempre assumere simmetrico, perché nell'espressione (2.27) una eventuale parte antisimmetrica dà contributo nullo; esso ha quindi *10 componenti indipendenti*. Il tensore metrico controvariante $g^{\alpha\beta}$ è l'inverso di $g_{\alpha\beta}$, secondo la definizione (2.25): $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$.

Dalla proprietà di invarianza per TL si ha $(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\gamma\delta} dx'^\gamma dx'^\delta$ e si ricava l'identità:

$$g_{\gamma\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} g_{\alpha\beta} . \quad (2.28)$$

Da questa relazione, moltiplicando ambo i membri per $\partial x'^\gamma / \partial x^\tau$ e sommando su γ si ottiene:

$$\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} g_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} g_{\alpha\beta} = \delta_\tau^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} g_{\tau\beta}$$

quindi, moltiplicando ancora per $g^{\tau\mu}$ e sommando su τ

$$\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} g_{\gamma\delta} g^{\tau\mu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} g_{\tau\beta} g^{\tau\mu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} \delta_\beta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\delta} . \quad (2.29)$$

Queste identità saranno utili nel seguito.

Tramite il tensore metrico è possibile ottenere un vettore covariante da uno controvariante o viceversa. Considerando infatti le quattro quantità definite da $g_{\alpha\gamma}A^\gamma$ è facile dimostrare che esse sono le componenti di un vettore covariante (si usi la (2.28)):

$$(g_{\alpha\gamma}A^\gamma)' = g_{\alpha\gamma}A'^\gamma = g_{\alpha\gamma} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} A^\rho = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma} g_{\sigma\epsilon} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} A^\rho = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \delta_\rho^\epsilon g_{\sigma\epsilon} A^\rho = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} g_{\sigma\rho} A^\rho$$

che è esattamente la legge di trasformazione delle componenti di un vettore covariante (2.18). Possiamo perciò scrivere

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta}A^\beta . \quad (2.30)$$

Questo ci permette di definire un vettore covariante delle coordinate:

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta}x^\beta . \quad (2.31)$$

Consideriamo ora le proprietà di trasformazione delle quantità $g^{\alpha\beta}B_\beta$:

$$(g^{\alpha\beta}B_\beta)' = g^{\alpha\beta}B'_\beta = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} B_\mu , \quad (2.32)$$

da cui, usando la (2.29) si ottiene:

$$(g^{\alpha\beta}B_\beta)' = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} g_{\gamma\beta} g^{\tau\mu} B_\mu = \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} g^{\tau\mu} B_\mu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\tau} g^{\tau\mu} B_\mu ,$$

che è la stessa legge di trasformazione di un vettore controvariante (2.17) e si può perciò scrivere

$$B^\alpha = g^{\alpha\beta}B_\beta . \quad (2.33)$$

Il prodotto scalare di due quadrivettori si può anche riscrivere come :

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta \quad (2.34)$$

In particolare la **norma** di un vettore è il prodotto scalare di un vettore con se stesso: $A_\alpha A^\alpha = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A_\alpha A^\alpha$.

Consideriamo ora gli operatori di derivazione parziale rispetto a x^α . Le proprietà di trasformazione si ricavano direttamente dalle regole della derivazione composta:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} . \quad (2.35)$$

Confrontando questo con la (2.18) si nota che *la derivazione rispetto ad una componente controvariante del vettore delle coordinate si trasforma come la componente di un operatore vettoriale covariante*.

Usiamo l'equazione (2.29) e le identità $x_\rho = g_{\rho\mu} x^\mu$ e $x'^\delta = g^{\delta\alpha} x'_\alpha$ (quest'ultima si può ricavare dalla (2.31), scritta per il vettore x' , moltiplicando per $g^{\delta\alpha}$ e sommando su α) per ricavare le proprietà dell'operatore di derivazione rispetto a una coordinata covariante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial x'^\delta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\delta} = g^{\delta\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\delta} = g^{\delta\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\delta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = g^{\delta\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\delta} g_{\gamma\delta} g^{\tau\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \\ &= \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial x_\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\tau} g^{\tau\mu} g_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\tau} \delta_\rho^\tau \frac{\partial}{\partial x_\rho} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\tau} \frac{\partial}{\partial x_\tau} , \end{aligned}$$

che è proprio la regola di trasformazione (2.17), quindi *la derivazione rispetto ad una componente covariante fornisce un operatore vettoriale controvariante*. Si usa la notazione:

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad \partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (2.36)$$

per rendere più esplicite le proprietà di covarianza e controvarianza degli operatori di derivazione.

Le definizioni precedenti hanno validità generale: vediamo ora le applicazioni al caso della relatività ristretta.

La particolare geometria dello spazio-tempo della relatività ristretta è definita dall'espressione della **distanza invariante** s^2 (2.14). Il tensore metrico è diagonale, con elementi costanti ^[e]:

$$g_{00} = 1, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 . \quad (2.37)$$

Il tensore metrico, sempre in questo caso particolare, coincide con il suo inverso : $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

Se un vettore controvariante A^α ha componenti A^0, A^1, A^2, A^3 , il corrispondente covariante $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$ ha componenti $A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3$. Si usa la notazione compatta:

$$A^\alpha = (A^0, \mathbf{A}) \qquad A_\alpha = (A^0, -\mathbf{A}) ,$$

dove \mathbf{A} è un vettore tridimensionale formato da A^1, A^2, A^3 , le componenti spaziali di A^α . Note che in questa notazione le componenti spaziali di un quadrivettore scritte in grassetto si intendono sempre di tipo controvariante (con un'unica eccezione: il simbolo ∇).

^[e]In molti libri di testo si usa un tensore metrico con gli elementi diagonali $(-1, 1, 1, 1)$, cioè l'opposto di quello usato qui: è semplicemente una convenzione diversa che porta agli stessi risultati fisici. Sottolineiamo inoltre che la Relatività Generale invece considera un tensore metrico generico, ammettendo pure uno spazio-tempo curvo; in questo senso quindi la relatività ristretta è un caso "speciale".

Gli operatori differenziali si scrivono come :

$$\partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right), \quad \text{con } \nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.38)$$

Si noti che il simbolo ∇ rappresenta l'eccezione alla regola dei vettori tridimensionali che si intendono di tipo controvariante: ∇ infatti denota la derivazione rispetto alle componenti spaziali controvarianti del vettore delle coordinate, quindi esso è di tipo covariante, come dimostrato dalla relazione (2.35).

Il prodotto scalare di due quadrivettori è dato da :

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = A^0 B^0 - A^i B^i = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.39)$$

La norma di un vettore è data da:

$$A^2 \equiv A \cdot A = (A^0)^2 - (\mathbf{A})^2$$

e ovviamente non è una quantità definita positiva. I quadrivettori dello spazio-tempo perciò si classificano a seconda del segno della loro norma in: **vettori di tipo tempo** (a norma positiva), **di tipo luce** (a norma nulla) e **di tipo spazio** (a norma negativa).

La **quadridivergenza** di un vettore è l'invariante relativistico

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.40)$$

L'operatore di Laplace, definito in 3 dimensioni come $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial (x^i)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ si generalizza in 4 dimensioni come:

$$\square \equiv \partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta. \quad (2.41)$$

e viene chiamato "operatore di D'Alembert". Come l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni nello spazio a 3 dimensioni, così l'operatore di D'Alembert è invariante per TL. Questo implica che l'equazione delle onde (1.13), che si può riscrivere come $\square \psi = 0$, è invariante per TL (mentre non lo era per trasformazioni di Galileo). Questo esempio fa intuire come emerga l'invarianza (o covarianza) di una legge fisica : tutte le grandezze che compaiono in un'equazione (compresi gli operatori differenziali) devono avere le stesse proprietà di trasformazione per TL.

2.4 Rappresentazione matriciale delle trasformazioni di Lorentz

Ripetiamo ora la derivazione di una TL in una forma più generale che mette in evidenza alcune proprietà che non sono visibili nella forma semplificata (2.5).

È conveniente usare una rappresentazione matriciale, in cui le componenti di un quadrivettore controvariante A^α formano una matrice ad 1 colonna a :

$$a = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} .$$

Il tensore metrico è una matrice 4×4 , che per lo spazio di Minkowski, ha la forma particolare :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

La relazione $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ in forma matriciale è semplicemente $g^2 = \mathbb{1}$, essendo $\mathbb{1}$ la matrice identità. Un vettore covariante si può rappresentare tramite le (2.30) come :

$$ga = ag = \begin{pmatrix} A^0 \\ -A^1 \\ -A^2 \\ -A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} .$$

Il prodotto scalare (2.39) tra due vettori A^α e B_α si può scrivere come:

$$a^T gb = \begin{pmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} ,$$

essendo a^T la matrice trasposta di a .

Cerchiamo ora di ricavare la forma più generale di una trasformazione di Lorentz. Come ogni trasformazione lineare, una TL si può rappresentare tramite una matrice 4×4 :

$$x' = \Lambda x \quad \text{o, in componenti,} \quad x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu ,$$

con la condizione particolare che la quantità (2.14) resti invariata. Questa condizione si può riscrivere sotto forma di prodotto scalare:

$$x^T g x = x'^T g x' = x^T \Lambda^T g \Lambda x , \quad (2.42)$$

che deve valere per qualunque vettore x , quindi Λ deve soddisfare l'equazione matriciale

$$\Lambda^T g \Lambda = g . \quad (2.43)$$

Questa equazione impone l'invarianza del prodotto scalare (2.42) ed ha lo stesso significato fisico della (2.2), che aveva permesso di ricavare la TL per due SR in moto relativo lungo l'asse x (con gli assi paralleli e le origini coincidenti al tempo $t = 0$). Ora non abbiamo specificato alcuna condizione particolare né per l'orientazione degli assi dei due SR, né per il loro moto relativo: troveremo quindi la forma più generale di una TL ^[f].

Dalla relazione precedente si può immediatamente ricavare che $\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det g (\det \Lambda)^2 = \det g$, quindi (poiché $\det g = -1 \neq 0$)

$$\det \Lambda = \pm 1 . \quad (2.44)$$

^[f]Non è neanche necessario imporre i requisiti del paragrafo 2.2: essi sono automaticamente soddisfatti perché nel passare dall'equazione (2.42) alla (2.43) si sono implicitamente imposte le condizioni di isotropia ed omogeneità dello spazio-tempo.

Le TL che possono essere ottenute in modo continuo da una trasformazione identica si dicono **proprie**: esse hanno necessariamente il determinante uguale a 1 e formano un sottogruppo del gruppo di Lorentz. Le TL che non si possono ottenere dall'identità sono dette **improprie**: comprendono riflessioni degli assi coordinati e possono avere il determinante uguale a -1. Osserviamo che per ogni matrice Λ che definisce una TL propria ne esiste una impropria rappresentata da $-\Lambda$, infatti se Λ soddisfa la condizione (2.43) anche $-\Lambda$ la soddisfa. D'ora in poi ci occuperemo solo delle TL proprie.

Per la costruzione esplicita della matrice Λ poniamo

$$\Lambda = e^L \quad (2.45)$$

dove L è una matrice reale 4×4 . Il determinante di Λ è:

$$\det \Lambda = \det (e^L) = e^{\text{Tr}L} .$$

Osserviamo che una matrice Λ così definita non può avere determinante negativo (L è reale), quindi è propria e $\det \Lambda = 1$ implica $\text{Tr}L = 0$. L'equazione (2.43) può essere riscritta come:

$$g\Lambda^T g\Lambda = g^2 = \mathbf{1}, \quad \text{o anche} \quad g\Lambda^T g = \Lambda^{-1} . \quad (2.46)$$

Dalla definizione (2.45) si ottiene (usando la definizione di esponenziale di matrice $\exp\{L\} = \sum_0^\infty L^n/n!$):

$$\Lambda^T = e^{(L^T)}, \quad g\Lambda^T g = e^{gL^T g}, \quad \Lambda^{-1} = e^{-L}, \quad (2.47)$$

quindi la (2.46) è equivalente a

$$gL^T g = -L \quad \text{o anche} \quad gL^T = -Lg \quad \Rightarrow \quad (Lg)^T = -Lg, \quad (2.48)$$

cioè la matrice Lg è antisimmetrica.

Vediamo quali conseguenze comporta questa relazione per la forma possibile della matrice L . Partendo da una L generica, con elementi $L_{\alpha\beta}$, la matrice Lg è data da (gli indici qui servono solo ad identificare l'elemento di matrice, non sono né covarianti né controvarianti):

$$Lg = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{00} & -L_{01} & -L_{02} & -L_{03} \\ L_{10} & -L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ L_{20} & -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} \\ L_{30} & -L_{31} & -L_{32} & -L_{33} \end{pmatrix}$$

La condizione $(Lg)^T = -Lg$ si scrive come:

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{10} & L_{20} & L_{30} \\ -L_{01} & -L_{11} & -L_{21} & -L_{31} \\ -L_{02} & -L_{12} & -L_{22} & -L_{32} \\ -L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & -L_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{00} & -L_{01} & -L_{02} & -L_{03} \\ L_{10} & -L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ L_{20} & -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} \\ L_{30} & -L_{31} & -L_{32} & -L_{33} \end{pmatrix}$$

da cui si vede che i termini sulla diagonale principale della matrice L devono essere nulli (ognuno è uguale all'opposto di se stesso), mentre per gli altri termini valgono relazioni come $L_{10} = L_{01}$, $-L_{21} = L_{12}$, eccetera. In conclusione la forma più generale di una matrice L che soddisfa la condizione (2.48) è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

La più generale TL si ottiene esponenziando questa matrice, secondo la definizione (2.45). Da questa costruzione esplicita è evidente che il gruppo di Lorentz ha 6 parametri liberi, dato che la matrice L ha sei elementi indipendenti. Tre di questi parametri servono a definire l'orientazione relativa degli assi cartesiani, sono quindi 3 angoli. I restanti 3 parametri definiscono le tre componenti della velocità del moto relativo dei due SR.

La matrice L può essere espressa come combinazione lineare di 6 matrici linearmente indipendenti opportunamente scelte. La definizione più comune è :

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & S_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & S_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Queste sei matrici costituiscono una rappresentazione dei *generatori infinitesimali* del gruppo di Lorentz. Esse soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[S_i, S_j] = -\epsilon_{ijk} S_k \quad (2.51a)$$

$$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k \quad (2.51b)$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k . \quad (2.51c)$$

Le (2.51a) sono le relazioni di commutazione delle componenti del momento della quantità di moto (generatori delle rotazioni spaziali); le (2.51b) dimostrano che \mathbf{K} si trasforma come un (tri)vettore rispetto alle rotazioni spaziali. Le (2.51c) infine dimostrano che le TL pure, in generale, non commutano; esse sono inoltre responsabili del fatto che in generale due TL pure consecutive equivalgono ad una TL pura più una rotazione spaziale.

Le forme più generali di una matrice L e di una TL Λ si scrivono come :

$$L = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K} , \quad \Lambda = e^{-\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K}} , \quad (2.52)$$

dove $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ sono 3 coefficienti arbitrari che definiscono le orientazioni relative degli assi nei due SR^[g]. Analogamente le componenti del trivettore $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$ sono gli altri 3 parametri liberi della TL, che definiscono le componenti della velocità del moto relativo. Il segno negativo è puramente convenzionale. Il vettore $\boldsymbol{\zeta}$ viene chiamato *rapidità*.

Consideriamo ora alcuni esempi. Cominciamo con il caso semplice: $\boldsymbol{\zeta} = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$. La matrice L è $-\omega S_1$. Notiamo innanzi tutto che:

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_1^{2n} = (-1)^{n-1} S_1^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

(notare che la precedente relazione non vale per $n = 0$) e :

$$S_1^3 = -S_1 \quad S_1^{2n+1} = (-1)^n S_1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Calcoliamo la matrice Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda &= e^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n S_1^n}{n!} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\omega)^{2n} S_1^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^{2n+1} S_1^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \mathbb{1} - S_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} - S_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbb{1} - S_1^2 (\cos \omega - 1) - S_1 \sin \omega . \end{aligned}$$

In forma esplicita:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} ,$$

^[g]Si usa scrivere gli indici x , y e z sempre in basso, anche se denotano le componenti di un vettore controvariante. Non c'è rischio di equivoco: si ricordi che le componenti di un vettore tridimensionale scritto in grassetto si intendono sempre di tipo controvariante.

questa TL consiste in una rotazione di un angolo ω nel piano yz .

Consideriamo ora un altro caso semplice: $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0)$. La matrice L ora è $-\zeta K_1$. Anche in questo caso calcoliamo le potenze di K_1 :

$$K_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_1^{2n} = K_1^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

(anche qui bisogna escludere $n = 0$) e :

$$K_1^3 = K_1 \quad K_1^{2n+1} = K_1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \Lambda &= e^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^n K_1^n}{n!} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\zeta)^{2n} K_1^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^{2n+1} K_1^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \mathbb{1} + K_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} - K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbb{1} + K_1^2 (\cosh \zeta - 1) - K_1 \sinh \zeta. \end{aligned}$$

cioè :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

questa TL è un boost (cioè una TL pura) in direzione x esattamente come la (2.5), avendo identificato $\gamma = \cosh \zeta$, $\beta\gamma = \sinh \zeta$, come fatto nel paragrafo 2.2.2.

Notiamo che se consideriamo due boost consecutivi collineari, con $L_{(1)} = -\boldsymbol{\zeta}_{(1)} \cdot \mathbf{K}$ ed $L_{(2)} = -\boldsymbol{\zeta}_{(2)} \cdot \mathbf{K}$, dove $\boldsymbol{\zeta}_{(2)} = a\boldsymbol{\zeta}_{(1)}$, la TL risultante è data da

$$\Lambda = \Lambda_{(2)}\Lambda_{(1)} = e^{L_{(1)}}e^{L_{(2)}} = e^{-\boldsymbol{\zeta}_{(1)} \cdot \mathbf{K}}e^{-\boldsymbol{\zeta}_{(2)} \cdot \mathbf{K}} = e^{-\boldsymbol{\zeta}_{(1)} \cdot \mathbf{K}}e^{-a\boldsymbol{\zeta}_{(1)} \cdot \mathbf{K}} = e^{-(1+a)\boldsymbol{\zeta}_{(1)} \cdot \mathbf{K}} = e^{-(\boldsymbol{\zeta}_{(1)} + \boldsymbol{\zeta}_{(2)}) \cdot \mathbf{K}},$$

l'ultima uguaglianza vale solo perché le matrici $L_{(1)}$ ed $L_{(2)}$ in questo caso particolare commutano ^[h]. Ritroviamo così il risultato del paragrafo 2.2.3, studiato nel caso particolare di boost paralleli all'asse x : la composizione di due TL pure parallele è ancora una TL pura lungo la stessa direzione delle prime due e la rapidità è additiva. Notiamo infine, che se una TL è determinata dai parametri $\boldsymbol{\zeta}$ e $\boldsymbol{\omega}$, la TL inversa, in base all'equazione (2.47), avrà come parametri $-\boldsymbol{\zeta}$ (che implica $\boldsymbol{\beta} \rightarrow -\boldsymbol{\beta}$) e $-\boldsymbol{\omega}$. Questo è in accordo con il requisito 1 del paragrafo 2.2.

2.4.1 Boost in direzione arbitraria

Calcoliamo la forma esplicita di una TL pura in una direzione arbitraria, con rapidità $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$. Per sottolineare il fatto che si tratta di una TL pura adotteremo la notazione : $\Lambda_B(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \Lambda(\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\zeta})$. Si ha:

$$L = -\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta_x & -\zeta_y & -\zeta_z \\ -\zeta_x & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_y & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^2 = (-\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K})^2 = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_x^2 & \zeta_x\zeta_y & \zeta_x\zeta_z \\ 0 & \zeta_x\zeta_y & \zeta_y^2 & \zeta_y\zeta_z \\ 0 & \zeta_x\zeta_z & \zeta_y\zeta_z & \zeta_z^2 \end{pmatrix}$$

avendo definito $\zeta^2 = \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 = |\boldsymbol{\zeta}|^2$. Inoltre:

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta_x|\boldsymbol{\zeta}|^2 & -\zeta_y|\boldsymbol{\zeta}|^2 & -\zeta_z|\boldsymbol{\zeta}|^2 \\ -\zeta_x|\boldsymbol{\zeta}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_y|\boldsymbol{\zeta}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_z|\boldsymbol{\zeta}|^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |\boldsymbol{\zeta}|^2 L, \quad L^4 = |\boldsymbol{\zeta}|^2 L^2,$$

^[h]Questo non è vero in generale per due vettori $\boldsymbol{\zeta}_{(1)}$ e $\boldsymbol{\zeta}_{(2)}$ qualsiasi, perché le relazioni (2.51c) introducono delle matrici \mathbf{S} , generatori di rotazioni spaziali.

e in generale:

$$L^{2n} = \zeta^{2n-2} L^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad L^{2n+1} = \zeta^{2n} L, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La matrice della TL è:

$$\begin{aligned} \Lambda_B = e^L &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbb{1} + L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n-2}}{(2n)!} + L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{(2n+1)!} = \\ &= \mathbb{1} + \frac{L^2}{\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} + \frac{L}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbb{1} + \frac{L^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) + \frac{L}{\zeta} \sinh \zeta \end{aligned}$$

Questo risultato in forma esplicita è:

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\frac{\zeta_x}{\zeta} \sinh \zeta & -\frac{\zeta_y}{\zeta} \sinh \zeta & -\frac{\zeta_z}{\zeta} \sinh \zeta \\ -\frac{\zeta_x}{\zeta} \sinh \zeta & 1 + \frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_x \zeta_y}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_x \zeta_z}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) \\ -\frac{\zeta_y}{\zeta} \sinh \zeta & \frac{\zeta_x \zeta_y}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & 1 + \frac{\zeta_y^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_y \zeta_z}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) \\ -\frac{\zeta_z}{\zeta} \sinh \zeta & \frac{\zeta_x \zeta_z}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_y \zeta_z}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & 1 + \frac{\zeta_z^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) \end{pmatrix}.$$

Definiamo il trivettore $\boldsymbol{\beta}$ di componenti

$$\beta_i = \frac{\zeta_i}{|\boldsymbol{\zeta}|} \tanh |\zeta| = \frac{\zeta_i}{\zeta} \tanh \zeta \quad i = x, y, z$$

e di modulo

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2} = \tanh \zeta.$$

(La relazione inversa è $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\beta}(\operatorname{arctanh} \beta)/\beta$.)

Notiamo che β è sempre compreso tra -1 e 1. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \cosh \zeta = \cosh |\zeta| &= \sqrt{\frac{1}{1 - (\tanh \zeta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2)}} \\ \sinh \zeta &= \frac{\tanh \zeta}{\sqrt{1 - (\tanh \zeta)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

in $\cosh \zeta$ si riconosce il fattore di Lorentz, poniamo perciò $\cosh \zeta = \gamma$ e $\sinh \zeta = \beta\gamma$. La matrice Λ_B si scrive come :

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

in componenti :

$$\Lambda_B^{00} = \gamma \quad \Lambda_B^{i0} = \Lambda_B^{0i} = -\gamma\beta_i \quad \Lambda_B^{ij} = \delta^{ij} + (\gamma-1) \frac{\beta_i\beta_j}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \quad i, j = x, y, z. \quad (2.54)$$

La TL per le coordinate si trova tramite la matrice Λ_B con la formula $x' = \Lambda_B x$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \quad x'_0 = \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.55)$$

La prima delle due equazioni precedenti può essere messa in una forma più simile alla (2.5) scrivendo esplicitamente le equazioni per la componente parallela e quella perpendicolare alla velocità :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{\parallel} + \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_{\parallel} \beta - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0 = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} + (\gamma-1)\mathbf{x}_{\parallel} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0$$

cioè:

$$\boxed{\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta}x_0) \quad \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \quad x'_0 = \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})} . \quad (2.56)$$

Questa è l'espressione generale per una TL pura (cioè senza rotazione degli assi) per una velocità relativa dei SR arbitraria $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ con $|\boldsymbol{\beta}| < 1$. La TL data dalla (2.5) è un caso particolare.

2.4.2 Composizione di boost non paralleli

Nel paragrafo 2.2.3 abbiamo visto che la composizione di due TL pure parallele è una TL pura, parallela alle prime due. Questa è una situazione molto particolare: in generale la composizione di due TL pure *non* è una TL pura, cioè l'insieme delle TL pure non è un sottogruppo del gruppo di Lorentz. Per dimostrarlo, è sufficiente mostrare un esempio di due boost non paralleli. Consideriamo un trivettore $\boldsymbol{\beta}$ arbitrario (di modulo minore di 1), ed un altro trivettore $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$, che differisce dal primo per una quantità infinitesima in modulo ma di direzione arbitraria (ovviamente tale che $|\boldsymbol{\beta}'| < 1$). I due vettori $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\beta}'$ definiscono un piano: scegliamo gli assi cartesiani in modo che questo piano sia xy e che il vettore $\boldsymbol{\beta}$ sia diretto lungo la direzione positiva dell'asse x . I due vettori, in questo sistema di coordinate, hanno componenti :

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0) \quad \boldsymbol{\beta}' = (\beta'_x, \beta'_y, 0) = (\beta + \delta\beta_x, \delta\beta_y, 0)$$

Consideriamo due boost: il primo con velocità $-c\boldsymbol{\beta}$ e il secondo con velocità $c\boldsymbol{\beta}'$. Per semplificare le notazioni indicheremo, come argomento delle Λ_B , la velocità (in unità di c) $\boldsymbol{\beta}$, anziché la rapidità $\boldsymbol{\zeta} = \frac{\text{arctanh}\boldsymbol{\beta}}{\beta} \boldsymbol{\beta}$:

$$\Lambda_B^{(1)} = \Lambda_B(-\boldsymbol{\beta}) \quad \Lambda_B^{(2)} = \Lambda_B(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) \quad (2.57)$$

Vogliamo calcolare la trasformazione risultante: $\Lambda^{(3)} = \Lambda_B^{(2)} \Lambda_B^{(1)} = \Lambda_B(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) \Lambda_B(-\boldsymbol{\beta})$.

In forma esplicita, usando la (2.53), le (2.57) sono ($\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ e $\gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$) :

$$\Lambda_B(-\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_B(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta'_x & -\gamma'\beta'_y & 0 \\ -\gamma'\beta'_x & 1 + \frac{(\gamma'-1)\beta_x'^2}{\beta'^2} & \frac{(\gamma'-1)\beta'_x\beta'_y}{\beta'^2} & 0 \\ -\gamma'\beta'_y & \frac{(\gamma'-1)\beta'_x\beta'_y}{\beta'^2} & 1 + \frac{(\gamma'-1)\beta_y'^2}{\beta'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sviluppando β' e γ' al primo ordine in $\delta\beta$, si ha

$$\begin{aligned} \beta' &= |\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{(\beta + \delta\beta_x)^2 + (\delta\beta_y)^2} = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\delta\beta_x + \mathcal{O}(\delta\beta^2)} \simeq \beta + \delta\beta_x \\ \gamma' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta^2 + 2\beta\delta\beta_x + \mathcal{O}(\delta\beta^2))}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\beta\delta\beta_x}{1-\beta^2} + \mathcal{O}(\delta\beta^2)}} = \gamma \left[1 + \frac{\beta\delta\beta_x}{1-\beta^2} + \mathcal{O}(\delta\beta^2) \right] \simeq \gamma + \gamma^3\beta\delta\beta_x, \end{aligned}$$

per cui la matrice $\Lambda_B^{(2)}$, all'ordine più basso in $\delta\beta$ si scrive come :

$$\Lambda_B(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) \simeq \begin{pmatrix} \gamma + \gamma^3\beta\delta\beta_x & -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_x) & -\gamma\delta\beta_y & 0 \\ -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_x) & \gamma + \gamma^3\beta\delta\beta_x & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\delta\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\Lambda^{(3)}$ risulta, sempre al primo ordine negli infinitesimi:

$$\Lambda^{(3)} = \Lambda_B(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) \Lambda_B(-\boldsymbol{\beta}) \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2\delta\beta_x & -\gamma\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_x & 1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\delta\beta_y & -\frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^2\delta\beta_x & -\gamma\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_x & 0 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\delta\beta_y & -\frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che, ricordando le definizioni (2.50), si può scrivere come :

$$\Lambda^{(3)} = \Lambda_B(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) \Lambda_B(-\boldsymbol{\beta}) \simeq \mathbb{1} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{S} - (\gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel} + \gamma \delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}) \cdot \mathbf{K} ,$$

dove $\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}$ e $\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}$ sono le componenti di $\delta\boldsymbol{\beta}$ rispettivamente parallela e perpendicolare a $\boldsymbol{\beta}$.

Al primo ordine in $\delta\boldsymbol{\beta}$ questo risultato coincide con il prodotto di una rotazione spaziale $R(\Delta\boldsymbol{\omega})$ con una TL pura $\Lambda_B(\Delta\boldsymbol{\zeta})$, infatti definendo :

$$R(\Delta\boldsymbol{\omega}) = e^{-\Delta\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}} \simeq \mathbb{1} - \Delta\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} \quad \Lambda_B(\Delta\boldsymbol{\zeta}) = e^{-\Delta\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K}} \simeq \mathbb{1} - \Delta\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K} ,$$

con

$$\Delta\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{\gamma-1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta} , \quad \Delta\boldsymbol{\zeta} \equiv \gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel} + \gamma \delta\boldsymbol{\beta}_{\perp} ,$$

si ottiene, al primo ordine negli infinitesimi, $\Lambda^{(3)} = R(\Delta\boldsymbol{\omega}) \Lambda_B(\Delta\boldsymbol{\zeta})$.

Da questo risultato appare evidente che la risultante delle due TL pure non parallele qui considerate è data dalla composizione di una TL pura ($\Lambda_B(\Delta\boldsymbol{\zeta})$) con una rotazione spaziale ($R(\Delta\boldsymbol{\omega})$). Nell'esempio considerato la rotazione avviene approssimativamente, cioè al primo ordine in $\delta\boldsymbol{\beta}$, attorno all'asse definito dalla direzione di $\Delta\boldsymbol{\omega}$, parallelo all'asse z , e l'angolo di rotazione è $\delta\phi = |\Delta\boldsymbol{\omega}|$. Il boost avviene nella direzione indicata dal vettore $\Delta\boldsymbol{\zeta}$, con velocità (espressa in unità di c) data dal modulo dello stesso vettore. Questo esempio è illustrato in figura 2.3. Si noti che la velocità del boost risultante in questo esempio ha modulo infinitesimo $\delta\beta = \sqrt{\gamma^4 \delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}^2 + \gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}^2}$, ma la sua direzione non coincide con nessuna delle direzioni delle due TL. Notiamo infine che se i due boost sono paralleli ($\delta\beta_y = 0$) si ha $\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta} = 0$, e la trasformazione risultante è una TL pura, come abbiamo visto nel paragrafo 2.2.3.

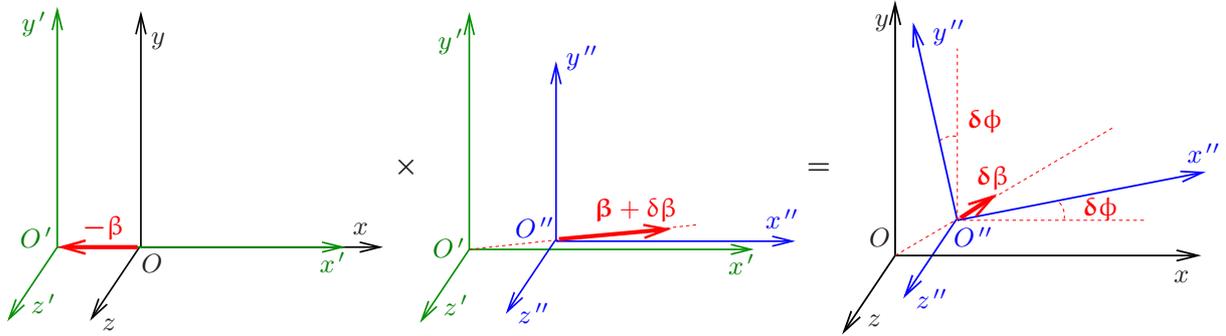


Figura 2.3 Composizione di due boost non paralleli, il primo con velocità $-c\boldsymbol{\beta}$ e il secondo con velocità $c(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})$. La trasformazione risultante corrisponde ad un boost più una rotazione degli assi coordinati.

Capitolo 3

Conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz

Contenuto

3.1	Misura del tempo e della lunghezza	43
3.1.1	Dilatazione dei tempi	44
3.1.2	ContraZIONE delle lunghezze	45
3.1.3	Simultaneità	46
3.2	Esempi	48
3.2.1	Decadimento dei muoni prodotti da raggi cosmici	48
3.2.2	Relatività della simultaneità e dell'ordinamento cronologico	48
3.2.3	Sincronizzazione di orologi	49
3.2.4	Orologi in moto	50
3.2.5	Treno e galleria	50
3.2.6	È possibile la contraZIONE/dilataZIONE delle dimensioni trasversali?	51
3.2.7	I gemelli	52
3.2.8	I corpi rigidi	52
3.3	Lo spazio-tempo	54
3.4	Diagrammi di Minkowski	57
3.5	Trasformazione della velocità	60
3.5.1	Invarianza della velocità della luce	61
3.5.2	Velocità limite	62
3.5.3	Quadri-velocità	63
3.5.4	Aberrazione stellare ed esperimento di Fizeau secondo la relatività speciale	64
3.6	Trasformazione dell'accelerazione	65
3.6.1	Quadri-accellerazione	66
3.6.2	Moto lineare uniformemente accelerato	66
3.7	Effetto Doppler	67
3.7.1	Caso non relativistico: effetto Doppler acustico	67
3.7.2	Effetto Doppler relativistico	69

3.1 Misura del tempo e della lunghezza

Esaminiamo ora le principali conseguenze delle trasformazioni di Lorentz, cioè i loro effetti sulla misura della lunghezza e del tempo e sul concetto di simultaneità. Per le considerazioni che intendiamo fare la forma (2.5) è perfettamente adeguata.

3.1.1 Dilatazione dei tempi

Un intervallo di tempo può essere definito come il tempo che intercorre tra due eventi. Consideriamo due eventi A e B che si verificano nello stesso luogo di un SR K' a tempi diversi, cioè :

$$x'_A = x'_B \quad y'_A = y'_B \quad z'_A = z'_B \quad \Delta t' \equiv t'_B - t'_A \neq 0 .$$

Per un altro SR K , rispetto al quale K' si muove con velocità uniforme v , l'intervallo tra i due eventi è:

$$\Delta t \equiv t_B - t_A .$$

Per vedere come Δt dipende da $\Delta t'$ dobbiamo fare uso delle TL (2.6):

$$t_A = \gamma \left(t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A \right) \quad t_B = \gamma \left(t'_B + \frac{v}{c^2} x'_B \right)$$

da cui (ricordando che $x'_A = x'_B$):

$$\Delta t \equiv t_B - t_A = \gamma (t'_B - t'_A) = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t'$$

Si noti che nel SR K i due eventi non avvengono nello stesso luogo, infatti

$$x_A = \gamma(x'_A + vt'_A) \quad x_B = \gamma(x'_B + vt'_B) \quad \implies \quad x_A \neq x_B \quad \text{poiché} \quad t'_A \neq t'_B .$$

Si conclude che:

Il tempo misurato da un osservatore rispetto al quale un certo punto (in cui hanno luogo determinati eventi) si muove è sempre maggiore del corrispondente intervallo di tempo τ (detto “tempo proprio” o “a riposo”) misurato da un osservatore in quiete rispetto al punto:

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta \tau} \quad (3.1)$$

Nel nostro esempio, il SR K' è solidale con il punto in cui avvengono i due eventi A e B , per cui il tempo t' coincide con il tempo proprio τ e $\Delta t' = \Delta \tau$. Nel SR K l'intervallo di tempo misurato tra i due eventi è maggiore : il tempo scorre più velocemente in un SR in moto rispetto che nel SR solidale con il punto osservato. Si usa dire anche che “orologi solidali con SR in moto avanzano più lentamente di orologi fermi”. Questo fenomeno è noto come **dilatazione dei tempi**.

Se ora consideriamo due eventi che accadono nello stesso punto del SR K , separati da un intervallo di tempo $\Delta t \equiv \Delta \tau$, facendo lo stesso ragionamento troviamo che l'intervallo di tempo misurato nel SR K' è $\gamma \Delta t$. La situazione quindi è perfettamente simmetrica per i due SR, ed è giusto che sia così, altrimenti i due SR non sarebbero equivalenti e sarebbe possibile riconoscere il moto assoluto di un SR.

Osservazione : Si può capire l'origine della dilatazione del tempo in modo intuitivo con il seguente ragionamento. Un segnale luminoso viene emesso da un punto A verso un punto B a distanza l , da cui viene riflesso tornando in A . Consideriamo il SR K' in cui A e B sono

a riposo : il tempo impiegato dalla luce per percorrere l'intero tragitto ABA , in questo SR, è $\Delta t' = 2l/c$. Consideriamo ora un altro SR K in moto con velocità $-\mathbf{v}$, diretta trasversalmente rispetto alla direzione AB : in questo nuovo SR i punti A e B si muovono con velocità \mathbf{v} . Nel tempo t_1 in cui la luce va da A a B , il punto B si sposta trasversalmente di un tratto $d = vt_1$ (si veda la figura 1.8a), la distanza effettiva percorsa dalla luce in questo intervallo di tempo è perciò $\sqrt{d^2 + l^2}$ e, dato che la velocità della luce è c anche in K , si ha l'uguaglianza $ct_1 = \sqrt{d^2 + l^2}$ da cui si ricava $t_1 = \gamma l/c$. Per il percorso inverso il ragionamento è analogo, il tempo complessivo per il tragitto ABA nel SR K è quindi $\Delta t = 2\gamma l/c = \gamma \Delta t'$. Da questo esempio è evidente come la dilatazione del tempo sia una diretta ed inevitabile conseguenza del postulato di invarianza della velocità della luce.

3.1.2 Contrazione delle lunghezze

La lunghezza di un oggetto fermo è facile da definire: è la distanza tra i suoi punti estremi. Se invece l'oggetto è in movimento, la definizione di lunghezza deve essere definita con attenzione: è la distanza tra i suoi punti estremi la cui posizione è stata registrata nello stesso istante. Consideriamo una sbarra ferma nel SR K' , disposta parallelamente all'asse x' , con gli estremi situati nei punti x'_A e x'_B ; la lunghezza della sbarra misurata nel SR K' è

$$L' \equiv x'_B - x'_A .$$

Non è necessario specificare in quale istante vengono misurate le posizioni x'_A e x'_B perché, per ipotesi, non cambiano nel tempo.

Esaminiamo la stessa sbarra da un altro SR K rispetto al quale K' (e quindi anche la sbarra) si muove con velocità v lungo x ; la lunghezza sarà determinata osservando la posizione degli estremi x_A e x_B nello stesso istante :

$$L \equiv x_B - x_A \quad \text{con} \quad t_A = t_B$$

Per vedere la relazione tra L ed L' usiamo le TL (2.5):

$$L' \equiv x'_B - x'_A = \gamma(x_B - vt_B) - \gamma(x_A - vt_A) = \gamma(x_B - x_A) = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

o anche

$$L = \frac{L'}{\gamma} = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L' \quad (3.2)$$

Quindi

La lunghezza di un oggetto in moto è sempre minore alla lunghezza dello stesso oggetto misurata da un osservatore solidale con esso (“lunghezza a riposo” o “propria”) :

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}} \quad (3.3)$$

avendo usato il simbolo con suffisso “0” per indicare la lunghezza a riposo. Questo fenomeno è noto come **contrazione delle lunghezze di Fitzgerald**.

Una sbarra solidale con il SR K apparirà contratta nel SR K' , il fattore di contrazione è sempre γ . La situazione è perfettamente simmetrica nei due SR.

Se la sbarra è disposta perpendicolarmente alla direzione del moto relativo dei due SR, non c'è contrazione, infatti le trasformazioni di Lorentz non alterano le coordinate trasversali. Se, per esempio, gli estremi della sbarra in K' sono in y'_A e y'_B si ha: $L' = y'_B - y'_A = y_B - y_A = L$.

A differenza della contrazione introdotta da Lorentz e Fitzgerald per spiegare il mancato spostamento delle frange di interferenza dell'esperimento di Michelson e Morley, la contrazione delle lunghezze nella teoria della relatività è un effetto dovuto all'operazione di misura.

Osservazione : La dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze sono due aspetti dello stesso fenomeno. Per mettere in maggiore risalto la loro interconnessione consideriamo questa dimostrazione alternativa della formula della contrazione delle lunghezze, ottenuta utilizzando la formula, già dimostrata, della dilatazione del tempo. Sia K' il SR solidale con la sbarra in movimento. Un osservatore in K' può determinare la lunghezza a riposo L' misurando l'intervallo di tempo $\Delta t'$ in cui un certo punto del SR K (ad esempio l'origine), in moto rispetto a lui con velocità $-\mathbf{v}$, percorre la lunghezza della sbarra stessa. Ricava così $L' = v\Delta t'$. Analogamente un osservatore solidale con il SR K , vede passare la sbarra con velocità v e ne misura la lunghezza cronometrando il tempo Δt che essa impiega a passare davanti a lui, troverà così: $L = v\Delta t$. Ma sappiamo, per averlo dimostrato in precedenza, che $\Delta t' = \gamma\Delta t$ (notare che nel SR K l'osservazione delle due estremità della sbarra avviene nello stesso punto spaziale: questo definisce il tempo proprio), quindi $L' = \gamma v\Delta t = \gamma L$ come nella (3.2).

3.1.3 Simultaneità

Riprendiamo la discussione del concetto di simultaneità di due eventi, introdotta nel paragrafo 2.1.1, ma in modo quantitativo, applicando le TL.

Un evento è definito assegnando le sue coordinate spaziali e la sua coordinata temporale, diremo cioè che un certo evento accade nel punto \mathbf{x} all'istante t . Consideriamo due eventi A e B contemporanei in un SR inerziale K : si ha, per definizione, $t_A = t_B$. Se le loro coordinate spaziali in K sono x_A e x_B (supponendo, per ora, che i due eventi siano situati sull'asse delle x) la separazione spaziale è $x_B - x_A$.

Consideriamo ora gli stessi due eventi visti da un altro SR inerziale K' , in moto rettilineo uniforme con velocità v , diretta lungo l'asse x , rispetto a K . In base alle TL (2.5), i due eventi hanno luogo, in K' , a tempi e luoghi dati da:

$$\begin{cases} t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) \\ x'_A = \gamma (x_A - vt_A) \end{cases} \quad \begin{cases} t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right) \\ x'_B = \gamma (x_B - vt_B) \end{cases} \quad (3.4)$$

La separazione temporale tra i due eventi nel SR K' è:

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = -\gamma \frac{v}{c^2} (x_B - x_A) .$$

Quindi i due eventi nel nuovo SR sono simultanei se e solo se $x_A = x_B$. Se questo è il caso, anche le coordinate x'_A e x'_B nel SR K' coincidono, altrimenti sono diverse. Abbiamo considerato due eventi localizzati sull'asse x ma le precedenti considerazioni non dipendono dalle coordinate trasverse rispetto alla direzione del moto relativo dei due SR. Supponiamo che i due eventi siano situati, nel SR K , in due punti (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) con $x_A = x_B$ e, per esempio, $y_A \neq y_B$: se i due eventi sono simultanei in K sono simultanei anche nel SR K' in moto con velocità

\mathbf{v} parallela all'asse x , visto che la trasformazione da K a K' per la coordinata temporale non coinvolge la coordinata y . Se però consideriamo una TL con velocità relativa parallela all'asse y , i due eventi non saranno più simultanei nel nuovo SR. Lo stesso ragionamento si può ripetere anche nel caso si abbia $z_A \neq z_B$. Perché i due eventi siano simultanei in *tutti i SR inerziali*, qualunque sia la direzione del moto relativo, è necessario che anche le coordinate y e z dei due eventi coincidano.

Possiamo perciò concludere che

Due eventi simultanei e spazialmente coincidenti in un SR inerziale, sono simultanei e spazialmente coincidenti in ogni altro SR in moto relativo uniforme.

Due eventi simultanei ma non spazialmente coincidenti in un SR, non sono necessariamente simultanei in un altro SR in moto relativo uniforme. Sono simultanei solo se il moto relativo dei due SR è in direzione perpendicolare al vettore di posizione relativa tra i due eventi.

Viceversa, se due eventi in un determinato SR sono spazialmente coincidenti ma non simultanei, cioè accadono nello stesso punto $\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_B$ ma in tempi diversi, in un altro SR essi accadono in punti diversi. La dimostrazione si ricava partendo ancora dalle (3.4):

$$\Delta x' = x'_A - x'_B = \gamma v(t_B - t_A) ,$$

che è diverso da zero se i due eventi A e B non sono contemporanei in K .

3.2 Esempi

3.2.1 Decadimento dei muoni prodotti da raggi cosmici

Il muone, indicato con μ , è una particella elementare, con una massa circa 200 volte maggiore di quella dell'elettrone; decade, con una vita media τ di $2,2 \times 10^{-6}$ secondi, in un elettrone ed in una coppia di neutrini ^[a].

I μ vengono prodotti in interazione dei raggi cosmici (particelle di vario tipo, con energia altissima) con particelle degli strati alti dell'atmosfera, ad un'altezza media di circa 10 km rispetto al suolo.

Se non ci fosse la dilatazione del tempo, viaggiando alla velocità della luce i muoni potrebbero percorrere al massimo una distanza $d = c\tau \simeq 660$ m. I μ creati a 10 km di altezza non potrebbero quindi arrivare al suolo, invece si verifica sperimentalmente che i muoni arrivano in abbondanza! La spiegazione è dovuta al fenomeno della dilatazione del tempo: nel SR solidale con il muone, la vita media è τ , ma nel SR solidale con la Terra, la vita media è dilatata per un fattore γ molto grande, perché la velocità dei muoni prodotti da interazioni con raggi cosmici molto energetici è molto prossima a c . Si stima che la velocità dei muoni sia circa $v = 0.999c$, quindi $\gamma \simeq 22$. La vita media nel SR della Terra quindi è $\tau' = \gamma\tau$, durante la quale il muone può percorrere una distanza $d' = v\tau' \simeq 15$ km arrivando così fino al suolo.

Consideriamo ora il SR solidale con il muone: in tale SR l'atmosfera si muove con velocità $0.999c$, ed il suo spessore appare contratto per un fattore $\gamma \simeq 22$ risultando quindi di 450 m. Il muone, vivendo in media un tempo τ , può misurare una distanza massima pari a $c\tau = 660$ m, maggiore dello spessore dell'atmosfera. Il muone quindi è raggiunto dal suolo prima che decada. Questo esempio è particolarmente istruttivo: in un SR è all'opera il fenomeno della dilatazione del tempo, in un altro invece la contrazione delle lunghezze, ma la conclusione per entrambi è la stessa: il muone arriva sulla superficie della Terra.

3.2.2 Relatività della simultaneità e dell'ordinamento cronologico

Riprendiamo l'esempio discusso nel paragrafo 2.1.1 a pagina 22. Al tempo $t = 0$, misurato nel SR K , viene emesso un segnale luminoso che si propaga verso i punti A e B , situati rispettivamente in $x_A = -L$ e $x_B = L$. La luce arriva in A e B contemporaneamente, al tempo $t_A = t_B = L/c$. I tempi di arrivo della luce in A e B misurati nel SR K' , in moto verso la direzione delle x crescenti con velocità v , e B si ottengono tramite le TL:

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) = \gamma \left(\frac{L}{c} + \frac{v}{c^2} L \right) = \gamma \frac{L}{c} (1 + \beta) = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right) = \gamma \left(\frac{L}{c} - \frac{v}{c^2} L \right) = \gamma \frac{L}{c} (1 - \beta) = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < t'_A$$

quindi il punto B è raggiunto dalla luce *prima* di A . Se considerassimo un altro SR K'' in moto con velocità v nella direzione opposta, troveremmo $t''_A = \gamma L(1 - \beta)/c$ e $t''_B = \gamma L(1 + \beta)/c$ quindi $t''_A < t''_B$, cioè l'ordine cronologico secondo K'' è opposto di quello in K' .

La conclusione che se ne trae è che la simultaneità di eventi è un concetto relativo: due eventi simultanei, verificatisi in due punti distinti di un certo SR, non sono tali in un SR in moto

^[a]Più precisamente, la reazione di decadimento è: $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu}$, dove e^+ è un positrone (l'antiparticella dell'elettrone) e $\bar{\nu}$ un antineutrino.

rispetto al primo. È possibile trovare addirittura dei SR in cui l'ordine cronologico dei due eventi risulti invertito.

3.2.3 Sincronizzazione di orologi

Dato che il tempo non è, in relatività, un parametro assoluto e invariante per trasformazioni da un SR ad un altro, sorge il problema di sincronizzare gli orologi, ovvero: come fanno due osservatori A e B fermi l'uno rispetto all'altro ma ad una distanza d a sincronizzare i loro orologi in modo da avere la stessa misura del tempo? I SR di A e B , essendo fermi l'uno rispetto all'altro, differiscono tra di loro solo per una traslazione dell'origine delle coordinate, ma per il resto sono nello stesso SR inerziale, hanno perciò lo stesso tempo.

L'ipotesi più semplice è: si avvicinano, sincronizzano i loro orologi e poi tornano ognuno al proprio posto. Ma così è sbagliato: durante il movimento che ognuno compie per tornare al proprio posto, non sono più nello stesso SR inerziale ed il tempo cambia ^[b].

La soluzione è: in un punto prestabilito C , per esempio nel punto medio tra A e B , è posto un dispositivo che emette un segnale luminoso al tempo $t = 0$. Ognuno dei due osservatori A e B conosce la propria distanza dal punto C (supponiamo che l'abbia misurata in precedenza) e quindi è in grado di calcolare il tempo che la luce impiega a raggiungerlo. Per esempio A sa di trovarsi ad una distanza d_A da C e quindi quando vede la luce sa che il tempo è d_A/c e fa partire il proprio orologio da questo tempo. Lo stesso fa B . Gli orologi da A e B sono così sincronizzati e tali resteranno perché nessuno dei due si sposterà più dal proprio posto *dopo* aver regolato gli orologi.

Esaminiamo come appare la sincronizzazione in sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. Consideriamo due treni che viaggiano in direzioni opposte con velocità v . Quando i punti medi C_1 e C_2 dei due treni vengono a trovarsi l'uno di fronte all'altro viene emesso, in tale punto, un segnale luminoso (fig. 3.1). Gli osservatori A_1 e B_1 sul primo treno useranno tale segnale per sincronizzare i propri orologi secondo il procedimento appena descritto e altrettanto faranno A_2 e B_2 sul secondo treno. In questo modo, ogni osservatore ha il proprio orologio perfettamente sincronizzato con quello dell'altro osservatore sul proprio treno: se però osserva gli orologi degli osservatori dell'altro treno, troverà che non sono affatto sincronizzati tra loro.

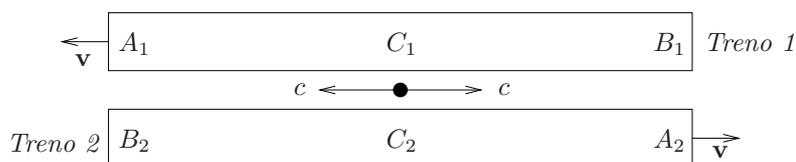


Figura 3.1 Gli orologi degli osservatori su ognuno dei due treni sono sincronizzati nel loro SR, ma non sono sincronizzati nel SR dell'altro treno.

Infatti è facile rendersi conto che l'ora segnata da B_2 non coincide con quella di A_1 perché, mentre il segnale luminoso viaggia da C_1 ($\equiv C_2$) verso le estremità dei treni, i punti A_1 e B_1 si muovono verso sinistra, mentre A_2 e B_2 si muovono verso destra. B_1 e B_2 si muovono andando incontro al segnale luminoso, A_1 e A_2 nel verso opposto.

Esaminiamo la sincronizzazione dal punto di vista del SR del primo treno: quando A_1 riceve il segnale luminoso, contemporaneamente lo riceve anche B_1 ; il punto B_2 è alla destra di A_1 : il

^[b]A voler essere pignoli, si dovrebbe osservare che già solo il fatto di partire e fermarsi implica un'accelerazione: i SR di A e B non sono più inerziali e i loro tempi non sono più ottenibili con le trasformazioni di Lorentz.

segnale quindi gli è arrivato prima ed il suo orologio è avanti rispetto a quello di A_1 e B_1 ; A_2 invece riceve il segnale dopo B_1 , ed il suo orologio sarà in ritardo. Gli orologi del secondo treno non appaiono sincronizzati se visti dal SR del primo treno.

Lo stesso ragionamento si può ripetere considerando il SR del secondo treno: qui A_2 e B_2 sono sincronizzati, perché entrambi fanno partire i loro orologi quando ricevono l'impulso luminoso. Ma non sono sincronizzati gli orologi del primo treno: A_1 è in ritardo, B_1 è in anticipo.

Su ciascun treno è stata adottata una corretta procedura per la sincronizzazione, eppure gli orologi che in un SR sono perfettamente sincronizzati non sono tali se visti dall'altro SR.

3.2.4 Orologi in moto

Supponiamo di avere un insieme di orologi, sincronizzati tra di loro con il procedimento discusso in precedenza, situati a distanze regolari d lungo l'asse x di un SR K e solidali con esso. Supponiamo che nel SR K' , in moto con velocità v rispetto a K , esista un analogo insieme di orologi posizionati lungo l'asse x' , in modo che la distanza tra di loro, vista nel SR K , sia d (ciò significa che la loro distanza, misurata in K' , deve essere γd). In un determinato istante la situazione è rappresentata in figura 3.2. Gli orologi del SR K sono sincronizzati tra di loro e

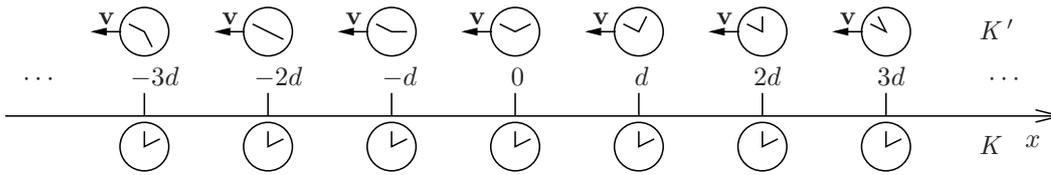


Figura 3.2 Orologi in moto: il tempo scorre in modo diverso in SR in moto relativo.

segnano tutti lo stesso tempo. Gli orologi del SR K' sono anch'essi sincronizzati tra di loro, ma *nel loro SR*, per cui visti da K non sono sincronizzati. La legge di trasformazione del tempo implica che il tempo t'_n segnato dall'orologio di K' visto nel punto $x_n = nd$ di K è

$$t'_n = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_n \right) = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} nd \right) \quad (3.5)$$

per cui maggiore è il valore della coordinata x_n e maggiore è il ritardo segnato dall'orologio corrispondente nel SR K' .

3.2.5 Treno e galleria

Consideriamo un treno di lunghezza a riposo L_0 che viaggia a velocità v e percorre una galleria anch'essa di lunghezza a riposo L_0 . Per effetto della contrazione relativistica della lunghezza, secondo un osservatore fermo a terra il treno è lungo L_0/γ , quindi è più corto della galleria ed esiste un intervallo di tempo in cui tutto il treno è dentro la galleria. Secondo un osservatore a bordo del treno invece è la galleria ad essere contratta ad una lunghezza L_0/γ quindi il treno è più lungo: prima che la coda del treno entri in galleria, la testa esce dall'altra parte. Non c'è contraddizione tra le descrizioni, entrambi gli osservatori vedono il treno passare attraverso la galleria ma misurano il tempo in modo diverso.

In modo più quantitativo, poniamo che la galleria sia situata, nel SR K , tra i punti $x = 0$ e $x = L_0$, e che la testa del treno si trovi in $x = 0$ al tempo $t = 0$ (fig. 3.3(a)). La posizione della testa sarà data, in ogni istante, da $x_T(t) = vt$; la coda del treno, in ogni istante t , si trova in

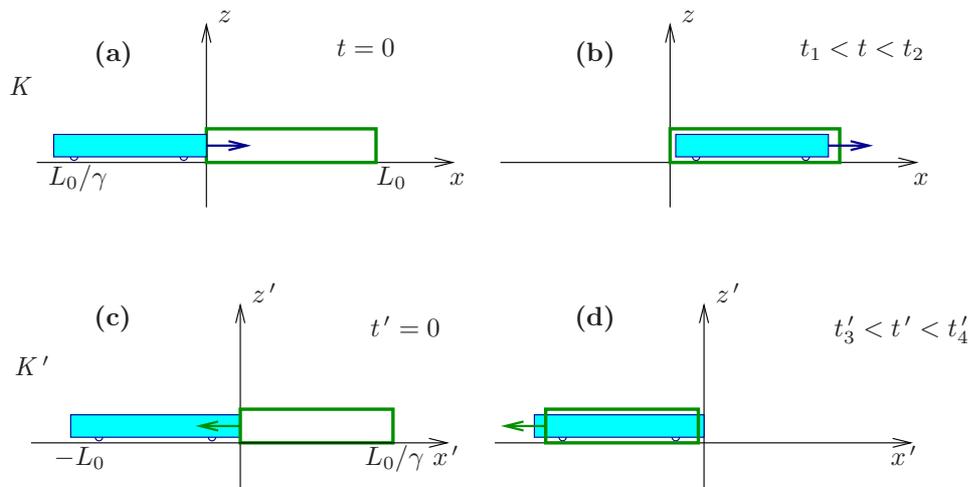


Figura 3.3 Esempio del treno in galleria.

$x_C(t) = vt - L_0/\gamma$. La coda del treno entra in galleria all'istante t_1 tale che $x_C(t_1) = 0$, cioè $t_1 = L_0/\gamma v$; La testa del treno esce dalla galleria quando $x_T = L_0$, cioè a $t_2 = L_0/v > t_1$ ed in questo istante la coda si trova in $x_C(t_2) = L_0(1 - 1/\gamma) > 0$. In ogni istante di tempo compreso tra t_1 e t_2 il treno è tutto dentro la galleria (fig. 3.3(b)).

Secondo il SR K' , il treno è fermo tra le posizioni $x' = 0$ (testa) e $x' = -L_0$ (coda) e la galleria si muove con velocità $-\mathbf{v}$. L'entrata della galleria si muove secondo la legge oraria $x'_E(t') = -vt'$, mentre l'uscita si muove secondo $x'_U(t') = -vt' + L_0/\gamma$. La testa del treno è raggiunta dall'entrata della galleria all'istante $t' = 0$ (fig. 3.3(c)), mentre è raggiunta dall'uscita della galleria al tempo $t'_3 = L_0/\gamma v$. L'entrata della galleria invece raggiunge la coda del treno all'istante $t'_4 = L_0/v > t'_3$, quando l'uscita si trova in $x'_U(t'_4) = -L_0(1 - 1/\gamma) < 0$. Quindi in ogni istante di tempo compreso tra t'_3 e t'_4 la testa del treno è già fuori dalla galleria mentre la coda deve ancora entrarvi (fig. 3.3(d)). La seguente tabella riassume i risultati. Ogni evento indicato nella prima colonna corrisponde ad una coppia di valori x e t misurati nel SR K solidale con la galleria; applicando le TL si calcolano i valori corrispondenti $x' = \gamma(x - vt)$ e $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ della posizione spaziale e del tempo nel SR K' solidale con il treno.

evento	x	t	x'	t'
la testa del treno entra in galleria	0	0	0	0
la coda del treno entra in galleria	0	$L_0/\gamma v$	$-L_0$	L_0/v
la testa del treno esce dalla galleria	L_0	L_0/v	0	$L_0/\gamma v$

3.2.6 È possibile la contrazione/dilatazione delle dimensioni trasversali?

Le TL mostrano chiaramente che la contrazione delle lunghezze vale solo per le lunghezze parallele alla direzione del moto relativo dei due SR inerziali. Nelle direzioni trasverse al moto non c'è alcuna alterazione delle dimensioni spaziali. È possibile, con un semplice ragionamento, capire da un punto di vista concettuale perché *non può esserci una contrazione o dilatazione delle lunghezze trasversali*. Consideriamo ancora l'esempio del treno e della galleria. Supponiamo che l'apertura della galleria (nel suo SR di riposo) sia di forma e dimensione uguale alla sezione trasversale del treno, anch'essa misurata nel suo SR di riposo, in modo che il treno fermo possa stare nella galleria. Consideriamo ora il treno in moto dal punto di vista del SR della galleria,

supponiamo che, oltre alla contrazione della lunghezza, si abbia anche una contrazione della *larghezza* del treno: il treno entra comodamente nella galleria. Consideriamo ora invece il SR di riferimento del treno: la galleria è in moto verso il treno e, oltre ad essere più corta sarà anche più stretta quindi il treno *non può passare* ! Se si avesse, invece della contrazione, una dilatazione della larghezza la situazione sarebbe invertita, cioè secondo l'osservatore a bordo il treno passa, secondo l'osservatore a terra no. Le conclusioni dei due osservatori sono, in ogni caso, in contraddizione tra loro (si osservi che, data l'equivalenza dei due SR, non è possibile ipotizzare che per uno dei due si abbia una dilatazione mentre per l'altro una contrazione). Quindi una modifica delle dimensioni trasversali dei corpi in moto non è concettualmente ammissibile.

3.2.7 I gemelli

Questo è un celebre esempio, proposto da Einstein nel lavoro del 1905. *A* e *B* sono due fratelli gemelli. Un giorno *A* parte per un lungo viaggio con un'astronave che viaggia a velocità relativistica, mentre *B* resta a casa. Per fissare le idee supponiamo che l'astronave viaggi a $\beta = 0.6$. Dopo alcuni anni *A* torna a casa e ritrova suo fratello. Supponiamo che il tempo *T* trascorso sulla Terra sia 10 anni, quindi *B* è invecchiato di 10 anni, ma egli conosce la formula della dilatazione dei tempi e sa che sull'astronave di suo fratello il tempo trascorso è $T' = T/\gamma = 8$ anni quindi si aspetta di trovare suo fratello invecchiato di soli 8 anni.

Potremmo a questo punto provare ad esaminare il punto di vista di *A*: secondo il suo SR è *la Terra che ha viaggiato con velocità β* ed è poi tornata indietro e quindi la formula della dilatazione del tempo si dovrebbe applicare ad *A*, che dovrebbe quindi essere più giovane di lui alla fine del viaggio. Insomma, in base a questo ragionamento ognuno dei due gemelli si aspetta di trovare il fratello meno invecchiato di lui : ovviamente questo è assurdo (*paradosso dei gemelli*).

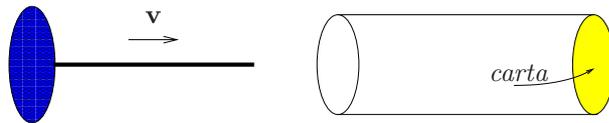
La soluzione del paradosso è in realtà semplice: durante il suo viaggio *A* si è fermato ed ha invertito la rotta per tornare indietro, in questo modo il suo *ha cessato di essere un SR inerziale*. Durante l'inversione di rotta certamente *A* ha fatto esperienza di una forte decelerazione e accelerazione che ha fatto sì che gli oggetti nell'abitacolo della sua astronave si muovessero in modo anomalo, ha notato lo spostamento della posizione delle stelle (aberrazione)... tutti segnali che gli fanno capire di non essere in un SR inerziale e di non avere quindi il diritto di applicare la formula della dilatazione dei tempi per calcolare l'età del fratello.

Non c'è contraddizione tra i due fratelli, il calcolo di *B* è esatto e *A* è realmente più giovane di *B* alla fine del viaggio.

3.2.8 I corpi rigidi

Consideriamo un cilindro cavo ed un chiodo la cui testa sia più larga della sezione del cilindro. La lunghezza a riposo di entrambi sia L_0 . Supponiamo inoltre che un'estremità del cilindro sia chiusa da una membrana di carta. Vogliamo capire cosa succede quando il chiodo è in moto con velocità v nel modo illustrato in figura 3.4.

Figura 3.4 Problema del chiodo e del cilindro: la lunghezza a riposo è L_0 per entrambi, l'estremità destra del cilindro è sigillata da una membrana di carta. Cosa succede quando il chiodo è in moto con velocità v ?



Esaminiamo la situazione dal SR solidale con il chiodo: il cilindro è più corto del chiodo quindi la punta del chiodo buca la carta.

Consideriamo ora il SR solidale con il cilindro: è il chiodo ad essere contratto e quindi più corto; quando la testa del chiodo si ferma sul bordo del cilindro, la punta non è ancora arrivata all'altra estremità quindi non rompe la carta.

Le conclusioni dei due SR sono in contraddizione tra di loro ma ciò è assurdo : non è possibile che in un SR la carta si rompe e nell'altro no. Una delle due descrizioni, evidentemente, è sbagliata.

Dal punto di vista del SR del chiodo non sembra ci possano essere dubbi: la punta del chiodo raggiunge la membrana di carta prima che la testa tocchi il bordo dell'altra estremità del cilindro. La conclusione "la carta si rompe" è inevitabile.

Il ragionamento fatto dal punto di vista del SR del cilindro invece ha un difetto: assume che la punta del chiodo si fermi *nello stesso istante* in cui la testa urta il bordo del cilindro. In altre parole si assume che il chiodo sia un corpo perfettamente rigido. Un corpo rigido è un concetto molto usato in fisica classica. Si assume che un corpo soggetto all'azione di una forza alteri il suo stato di moto senza deformarsi. Per esempio se una sbarra rigida inizialmente a riposo viene colpita ad un'estremità, essa si mette in moto istantaneamente in ogni sua parte, cioè l'estremità lontana dal punto in cui è avvenuto l'urto si muove *esattamente come e nello stesso istante* dell'estremità vicina. Questo presuppone che l'informazione dell'avvenuto urto si propaghi in modo istantaneo, con velocità infinita, lungo la sbarra stessa. Ovviamente il corpo rigido è un'astrazione, non esiste in natura. In fisica classica non esiste nessuna velocità limite e non c'è nessun problema concettuale nell'introduzione del concetto di corpo rigido che anzi consente una notevole semplificazione dei calcoli. In relatività invece l'esistenza di una velocità limite, quella della luce nel vuoto, impone che nessuna informazione/interazione si propaghi con velocità maggiore di essa: i corpi perfettamente rigidi sono *concettualmente* impossibili.

Rivediamo dunque il ragionamento nel SR del cilindro tenendo presente che la punta del chiodo non può fermarsi nello stesso istante in cui la testa urta contro il cilindro: è necessario un certo tempo affinché l'informazione (tramite, per esempio, un'onda elastica) passi dalla testa alla punta e nel frattempo la punta prosegue il suo viaggio. Il chiodo quindi, come ogni corpo elastico, si allunga. Nell'istante $t = 0$ in cui la testa del chiodo tocca l'estremità del cilindro situata in $x = 0$, la punta si trova in $x = L_0/\gamma$ e viaggia con velocità costante v . La posizione della punta del chiodo quindi è, in ogni istante $t > 0$: $x_P(t) = vt + L_0/\gamma$. L'informazione dell'avvenuto urto tra la testa del chiodo e il bordo del cilindro parte da $x = 0$ a $t = 0$ e si propaga attraverso il chiodo con velocità $u \leq c$ ^[c] (tanto minore è l'elasticità del chiodo, tanto maggiore è la velocità u), quindi al tempo $t > 0$ l'informazione si trova in $x_U(t) = ut$. L'informazione giunge alla testa del chiodo al tempo \bar{t} tale che $x_U(\bar{t}) = x_P(\bar{t})$ cioè $\bar{t} = \frac{L_0}{\gamma(u-v)}$, che è sicuramente maggiore di $t_{min} = \frac{L_0}{\gamma(c-v)}$. La distanza percorsa dalla punta tra il tempo $t = 0$ ed il tempo $t = \bar{t}$ è $d = v\bar{t} \geq vt_{min}$. La posizione finale della punta del chiodo è quindi

$$\frac{L_0}{\gamma} + d \geq \frac{L_0}{\gamma} + v \frac{L_0}{\gamma(c-v)} = \frac{L_0}{\gamma(1-\beta)} = L_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > L_0$$

quindi la punta del chiodo prosegue la sua corsa fino a raggiungere e superare l'altra estremità del cilindro e la carta si rompe ! Non abbiamo qui considerato l'elasticità del cilindro, che lo fa comprimere quando urta il chiodo, o il tempo necessario all'informazione dell'urto di andare dal bordo al centro della testa del chiodo: entrambi questi effetti non fanno che aggiungere ulteriori ritardi all'istante in cui la punta del chiodo si arresta, confermando, a maggior ragione, la stessa conclusione.

^[c]Il velocità di propagazione del segnale dell'avvenuto urto non può essere maggiore di c altrimenti, come verrà spiegato nel paragrafo 3.3, si violerebbe la relazione di causalità tra l'arresto della testa del chiodo e l'arresto della punta.

3.3 Lo spazio-tempo

Lo spazio-tempo, un linguaggio matematico con cui la teoria della relatività trova una espressione particolarmente semplice ed elegante, fu ideato da H. Minkowski nel 1908. Sebbene non suggerisca risultati nuovi, che non si ottengano dalle nostre considerazioni precedenti, lo spazio-tempo ha offerto quella forma matematica della teoria più direttamente generalizzabile al caso della relatività generale. Spazio e tempo non sono più concetti indipendenti, ma un'unica entità, un continuo quadridimensionale. Un evento A è un punto nello spazio di Minkowski, specificato da quattro coordinate (x_A, y_A, z_A, t_A) . Nello spazio tridimensionale ordinario la distanza L tra due punti A e B è definita come $L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$ ed è invariante per trasformazioni ortogonali (cioè rotazioni) delle coordinate. Analogamente nello spazio di Minkowski si può definire la distanza tra due punti (=eventi) A e B tramite

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = c^2(\Delta t)^2 - L^2 ,$$

che è invariante per TL, cioè per trasformazioni ortogonali nello spazio di Minkowski. A differenza della distanza dello spazio tridimensionale, la distanza invariante dello spazio di Minkowski non è definita positiva. Dati due eventi A e B , si possono avere i seguenti tre casi :

- $(\Delta s)^2 < 0$: la distanza invariante ha il segno dei termini spaziali; l'intervallo che separa i due eventi viene allora detto *intervallo di tipo-spazio*. In ogni SR si possono determinare le quantità $c\Delta t$ e L : in generale esse assumono valori diversi in SR diversi, ma la differenza dei loro quadrati è costante. In particolare, in ogni SR si ha $L > c|\Delta t|$. È possibile, tramite una TL, trovare un SR inerziale in cui i due eventi sono simultanei $t'_A = t'_B$, ma non esiste un SR in cui sono spazialmente coincidenti: in tale SR infatti si avrebbe $L = 0$ e non si potrebbe avere $(\Delta s)^2 < 0$. La distanza spaziale minima tra i due eventi è quella che si misura nel SR in cui essi sono simultanei.

Due eventi A e B separati da un intervallo di tipo spazio sono *causalmente indipendenti* cioè non può esistere tra di essi un rapporto di causa-effetto. Il loro ordine cronologico infatti dipende dal SR, è sicuramente possibile trovare SR in cui l'ordine cronologico dei due eventi è invertito: in un SR A accade prima di B , nell'altro SR B accade prima di A . Nell'esempio 3.2.2 l'arrivo della luce in A ($x_A = -L, t_A = L/c$) e in B ($x_B = L, t_B = L/c$) sono due eventi separati proprio da un intervallo tipo-spazio $(\Delta s)^2 = -4L^2$. Nel SR K i due eventi sono simultanei ($t_A = t_B$) invece nel SR K' la luce arriva prima in B e successivamente in A ($t'_B < t'_A$) e per il SR K'' addirittura è il contrario: la luce arriva prima in A e poi in B ($t''_A < t''_B$).

- $(\Delta s)^2 = 0$: la distanza spaziale tra il punto A ed il punto B è esattamente uguale alla distanza percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo Δt . L'intervallo tra i due eventi viene allora chiamato *intervallo di tipo-luce*. In ogni SR inerziale la distanza invariante tra i due eventi è nulla: $L = c|\Delta t|$. Un'interazione ed una connessione causale tra i due eventi è possibile, ma solo con segnali di tipo luminoso.
- $(\Delta s)^2 > 0$: la distanza invariante ha il segno del contributo temporale; l'intervallo che separa i due eventi viene allora detto *intervallo di tipo-tempo*. In ogni SR si avrà $L < c|\Delta t|$. È possibile, tramite una TL, trovare un SR in cui i due eventi sono spazialmente coincidenti $L = 0$, ma non esiste un SR in cui essi sono simultanei: l'intervallo temporale minimo tra i due eventi è quello osservato nel SR in cui essi sono spazialmente coincidenti: $(\Delta t)_{min} = \sqrt{(\Delta s)^2}/c = \Delta \tau$.

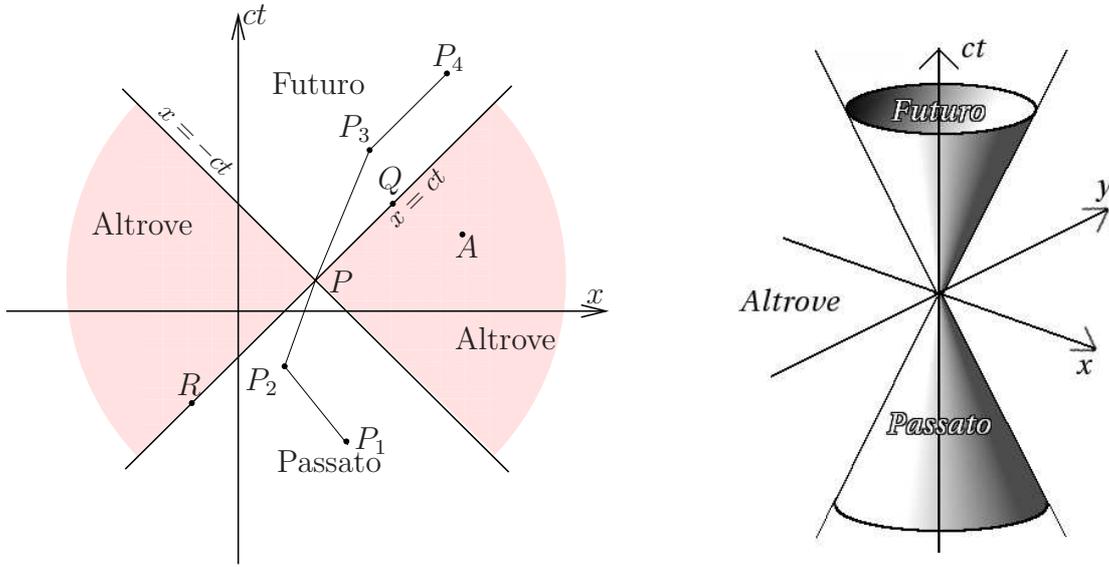


Figura 3.5 (sinistra) Divisione dello spazio-tempo nelle regioni di passato, futuro e altrove per un osservatore situato nel punto P . (destra) Diagramma cono-luce per 2 dimensioni spaziali per un osservatore situato nell'origine degli assi.

Dato un generico vettore A^μ di tipo-tempo, è facile dimostrare che una TL propria non può cambiare il segno della sua componente temporale. Supponiamo infatti che sia $|A^0| > |\mathbf{A}|$ (condizione per il vettore di tipo-tempo) e che $A^0 > 0$. In un SR K' in moto relativo uniforme il vettore in esame avrà componenti A'^μ ottenute dalle A^μ con le TL, in particolare (usando la (2.56)) :

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) \geq \gamma(A^0 - |\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}|) \geq \gamma(A^0 - |\boldsymbol{\beta}| |\mathbf{A}|) > \gamma(A^0 - |\mathbf{A}|) > 0$$

(si è fatto uso della disuguaglianza di Schwarz $|\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}|^2 \leq |\boldsymbol{\beta}|^2 |\mathbf{A}|^2$ e del fatto che $|\boldsymbol{\beta}| < 1$), quindi anche A'^0 è positivo. Di conseguenza anche $A^0 < 0$ implica $A'^0 < 0$. Applicando queste considerazioni ad intervalli tra eventi dello spazio-tempo, possiamo concludere che per intervalli di tipo tempo non è possibile trovare un SR in cui l'ordine cronologico dei due eventi è invertito: $\Delta t = t_B - t_A$ ha lo stesso segno in tutti i SR inerziali, quindi se $t_A < t_B$ in un certo SR allora $t'_A < t'_B$ in ogni altro SR. Questa proprietà caratterizza gli eventi collegati da rapporto di causa ed effetto: se l'evento A è causa dell'evento B , allora in *ogni* SR A deve avvenire *prima* di B e questo è possibile solo se la separazione tra A e B è di tipo-tempo; detto in altre parole, solo tra due eventi separati da un intervallo di tipo-tempo è possibile (ma non necessaria) una connessione causale. Il segnale che collega i due eventi si propaga con velocità $v = L/(t_B - t_A) < c$. È perciò impossibile che un segnale (cioè una relazione causale tra due eventi) si propaghi con velocità maggiore di c : la separazione tra di essi non sarebbe di tipo-tempo e il loro ordine cronologico non sarebbe invariante.

Sebbene il concetto di simultaneità non abbia un preciso significato in relatività, è possibile definire in modo invariante, cioè lo stesso per tutti i SR inerziali, il futuro e il passato per un certo evento P . Il *passato*, per un certo evento P , è costituito da tutti quegli eventi che potrebbero, in linea di principio, avere avuto un effetto di tipo causale su di esso, cioè tutti gli eventi separati da esso da un intervallo di tipo-tempo con $t < t_P$, come ad esempio gli eventi P_1 e P_2 della figura 3.5. Il *futuro* è l'insieme degli eventi che potrebbero, almeno in teoria,

essere conseguenza dell'evento P , separati quindi da esso da intervalli di tipo-tempo con $t > t_P$. Essi si trovano perciò nel cono-luce del futuro, come ad esempio i punti P_3 e P_4 . Tutti gli eventi separati da P da intervalli di tipo spazio si trovano al di fuori del cono-luce, nella regione definita *altrove*, come ad esempio il punto A che si trova ad una distanza spaziale troppo grande e ad una distanza temporale troppo piccola perché un segnale luminoso possa collegarlo con P : non ci può essere quindi alcun rapporto di causa ed effetto tra A e P . Il loro ordine temporale dipende dall'osservatore. La superficie del cono-luce è invece definita da tutti gli eventi connessi con P da segnali di tipo-luce, come ad esempio i punti Q ed R .

In figura 3.5 è anche rappresentato il cono-luce per un punto d'osservazione situato nell'origine per uno spazio-tempo a due dimensioni spaziali. I punti sul cono-luce a t costante sono circonferenze sulla superficie conica che rappresentano fronti d'onda luminosi che si propagano allontanandosi dall'origine (per $t > 0$) o convergendo in essa (per $t < 0$). In uno spazio-tempo a tre dimensioni spaziali, gli insiemi di punti a t costante sulla superficie del cono-luce sono ovviamente sfere.

3.4 Diagrammi di Minkowski

I diagrammi di Minkowski sono utili per discutere alcuni problemi di relatività speciale senza ricorrere al calcolo esplicito. Limitandoci, per semplicità, ad una sola dimensione spaziale, il moto di un corpo può essere rappresentato in un diagramma spazio-tempo in cui in ogni istante viene data la posizione del corpo.

Rappresentiamo la coordinata spaziale sull'asse orizzontale e il tempo (moltiplicato per c , per avere uniformità di dimensioni) sull'asse verticale. È ovvio che un corpo a riposo è rappresentato da una linea verticale, poiché la sua posizione è costante nel tempo (linea a in figura 3.6). Un segnale luminoso si muove con velocità c , quindi è rappresentato da una linea parallela alla diagonale del I e III quadrante oppure del II e IV quadrante, per la propagazione, rispettivamente, nella direzione delle x positive o negative. Ad esempio, la linea b rappresenta un segnale luminoso emesso all'istante $t = 0$ dal punto $x = x_0$ nella direzione positiva delle x , mentre la linea c è un segnale luminoso emesso all'istante $t = t_1$ dal punto $x = x_1$ nella direzione opposta. Un corpo materiale che si muove con velocità $v < c$ sarà rappresentato da una retta come la linea d , che forma con l'asse verticale (ct) un angolo minore di 45° (e con l'asse orizzontale un angolo α maggiore di 45°).

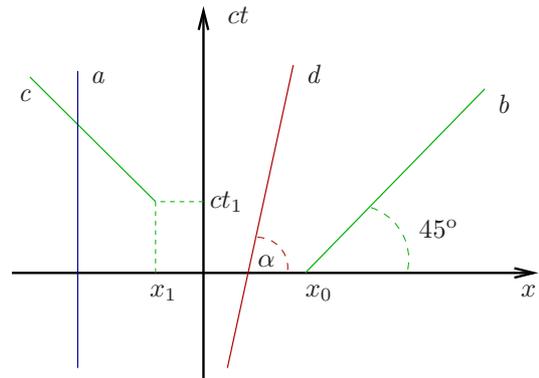


Figura 3.6 Diagramma di Minkowski: a : corpo fermo, b, c : segnali luminosi, d : corpo in moto con velocità $v = \beta c = c / \tan \alpha$.

Consideriamo una TL da un SR (x, ct) ad un altro SR (x', ct') in moto, rispetto al primo, con velocità v nel verso delle x crescenti. L'asse temporale ct' , di equazione $x' = 0$, è rappresentato nel piano (x, ct) dalla retta $ct = x/\beta$ (ricordando che $x' = \gamma(x - \beta ct)$). Viceversa, l'asse delle coordinate x' (cioè $ct' = 0$), nel piano (x, ct) è rappresentato dalla retta di equazione $ct = \beta x$. Quindi gli assi x' e ct' sono rappresentati, nel piano (x, ct), come due rette non ortogonali, disposte simmetricamente rispetto alla diagonale del I e III quadrante (a cui tendono nel limite $\beta \rightarrow 1$), come illustrato in figura 3.7. Un evento A di coordinate (x_A, ct_A) avrà coordinate (x'_A, ct'_A) nel nuovo SR determinate tracciando le parallele agli assi x' e ct' . È utile sottolineare che il SR (x, ct) non ha nulla di speciale: avremmo potuto scegliere di rappresentare gli assi (x', ct') come ortogonali e di conseguenza disegnare gli assi (x, ct) del SR in moto con velocità $-v$ come in fig. 3.8.

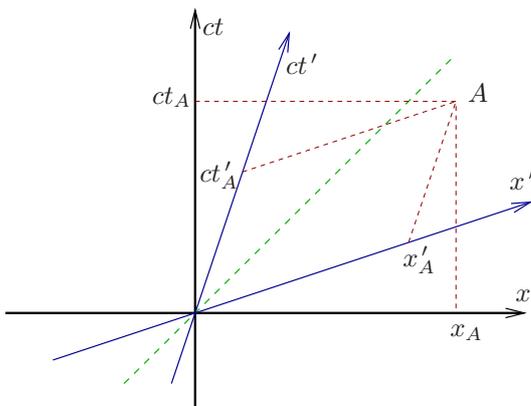


Figura 3.7 Diagramma di Minkowski per trasformazioni di Lorentz tra un SR (x, ct) ed un SR (x', ct') in moto con velocità v nel verso delle x positive.

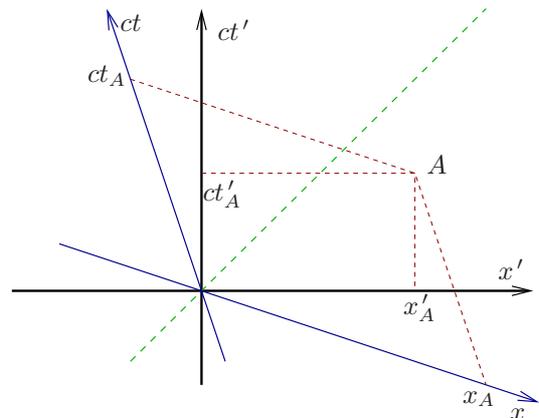


Figura 3.8 Diagramma di Minkowski per trasformazioni di Lorentz tra un SR (x', ct') ed un SR (x, ct) in moto con velocità v nel verso delle x negative.

Le unità di misura sugli assi (x, ct) e (x', ct') si determinano dalle *curve di calibrazione* disegnate in fig. 3.9. Ad esempio l'iperbole di equazione $x^2 - (ct)^2 = 1$ intercetta l'asse x nel punto di coordinate $(x = 1, ct = 0)$; osserviamo però che $x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$, quindi la stessa iperbole interseca anche l'asse x' nel punto di coordinate $(x' = 1, ct' = 0)$. Tale iperbole serve a calibrare le unità di misura per gli assi delle coordinate spaziali per una qualsiasi TL. Analogamente l'iperbole $x^2 - (ct)^2 = -1$ interseca gli assi temporali nei punti $ct = 1$ e $ct' = 1$ e serve a calibrare le unità di misura per i tempi.

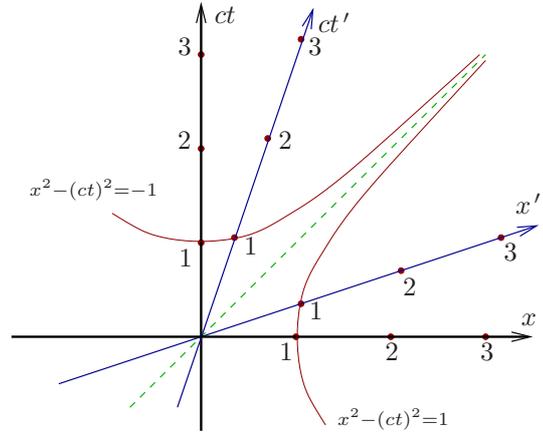


Figura 3.9 Curve di calibrazione per i diagrammi di Minkowski.

La dilatazione del tempo si può vedere graficamente dalla figura 3.10. Consideriamo due eventi O ed A che avvengono, per il SR (x, ct) , nello stesso punto $x_O = x_A = 0$ ai tempi $t_O = 0$ e $t_A > 0$. L'intervallo di tempo tra i due eventi è, per definizione, l'intervallo di tempo proprio $\Delta\tau = t_A - t_O = \Delta t$. Per il SR (x', ct') , le coordinate dei due eventi sono $(x'_O = 0, t'_O = 0)$ e (x'_A, t'_A) . È evidente che l'intervallo di tempo $\Delta t' = t'_A - t'_O$ tra i due eventi misurato nel SR in moto è maggiore dell'intervallo di tempo proprio: il confronto si esegue facilmente riportando sull'asse ct' l'intervallo $\Delta\tau$ tramite la curva di calibrazione $x^2 - (ct)^2 = -(c\Delta\tau)^2$.

Infine la contrazione delle lunghezze si verifica graficamente come mostrato in fig. 3.11. Consideriamo una sbarra a riposo nel SR (x, ct) con gli estremi situati in $x_O = 0$ e $x_A = L$. La lunghezza della sbarra nel SR (x', ct') viene determinata osservandone la posizione degli estremi in uno stesso istante t' (nel nostro esempio $t' = 0$): si trova quindi una lunghezza $L' = x'_A - x'_O$ che è chiaramente minore della lunghezza a riposo L riportata sull'asse x' dalla curva di calibrazione $x^2 - (ct)^2 = L^2$.

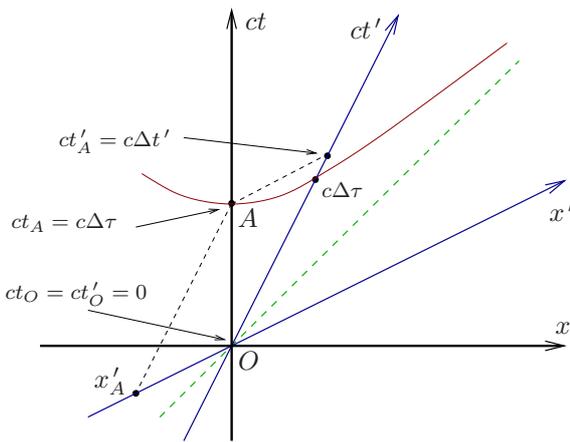


Figura 3.10 Diagramma di Minkowski per la dilatazione del tempo.

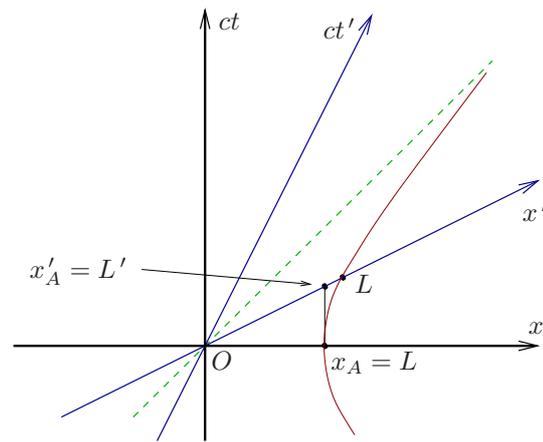


Figura 3.11 Diagramma di Minkowski per la contrazione della lunghezza.

È istruttivo riprendere la discussione di alcuni degli esempi del paragrafo 3.2 utilizzando i diagrammi di Minkowski. L'esempio 3.2.3 è illustrato in figura 3.12: nel diagramma a sinistra si vede che i due orologi di A_2 e B_2 , sono sincronizzati nel loro SR (x', ct') dove si ha $t'_{A_2} = t'_{B_2}$, ma non nel SR (x, ct) di A_1 e B_1 in cui $t_{A_2} > t_{B_2}$. Il diagramma di destra mostra il viceversa: nel SR (x, ct) A_1 e B_1 sono sincronizzati poiché $t_{A_1} = t_{B_1}$, ma nel SR (x', ct') si ha $t'_{B_1} < t'_{A_1}$.

La fig. 3.13 illustra l'esempio degli orologi in moto (3.2.4): nel SR (x, ct) gli orologi sono fermi e sincronizzati

tra di loro; ad un certo istante, uguale per tutti gli orologi nel SR a riposo, corrispondono istanti diversi nel SR in moto (x', ct') e il ritardo cresce al crescere della coordinata x_n di posizione, in accordo con l'eq. (3.5). In fig. 3.14 è illustrato l'esempio del treno e della galleria, sia nel SR solidale con la galleria (diagramma di sinistra) che nel SR solidale con il treno (diagramma di destra). Appare chiaro che, mentre nel SR della galleria la coda del treno entra prima che la testa esca, nel SR del treno i due eventi sono cronologicamente invertiti.

Figura 3.12 Diagramma di Minkowski per l'esempio del paragrafo 3.2.3.

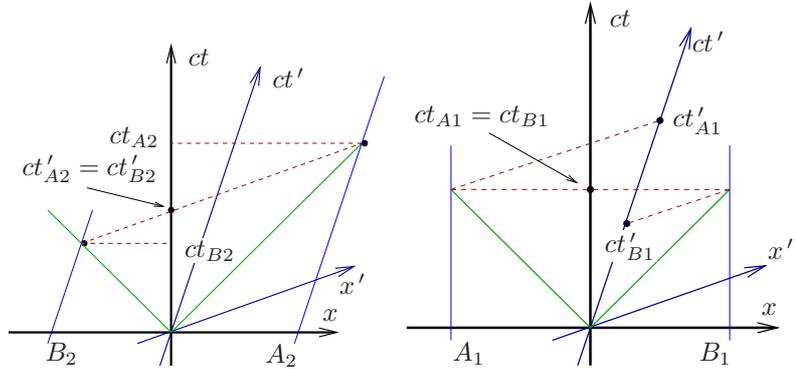


Figura 3.13 Diagramma di Minkowski per l'esempio 3.2.4 (orologi in moto).

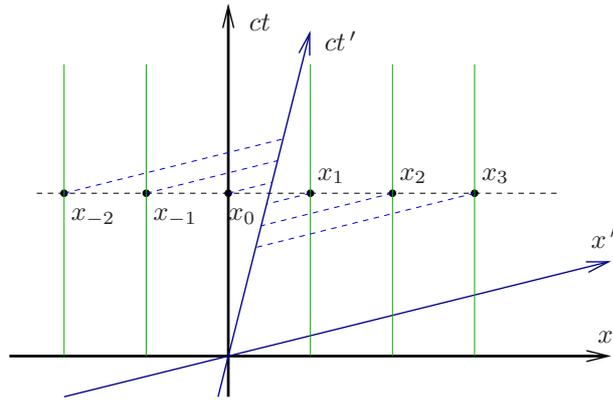
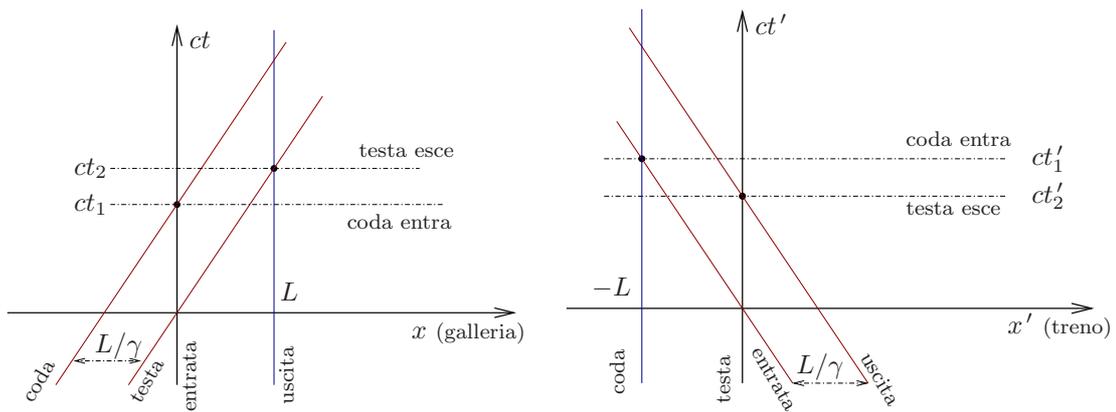


Figura 3.14 Diagramma di Minkowski per l'esempio 3.2.5 (treno e galleria). Nel grafico di sinistra è raffigurato il SR della galleria, in quello di destra il SR solidale con il treno.



3.5 Trasformazione della velocità

Un'altra conseguenza delle trasformazioni di Lorentz è una diversa formulazione della cinematica, in particolare delle leggi di trasformazione della velocità e dell'accelerazione tra SR inerziali.

Ricaviamo dalle TL la legge di trasformazione delle velocità in SR in moto relativo rettilineo e uniforme. Consideriamo un punto in moto, nel SR K , con velocità \mathbf{u} di componenti (u_x, u_y, u_z) . Per definizione, si ha $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$. Nel SR K' , in moto con velocità v rispetto a K nella direzione delle x positive, si avrà analogamente $\mathbf{u}' = d\mathbf{x}'/dt'$. Per calcolare la velocità del punto nel SR K' , calcoliamo i differenziali delle TL (2.5):

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \quad dx' = \gamma (dx - v dt) \quad dy' = dy \quad dz' = dz$$

da cui ricaviamo:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)},$$

e l'espressione per u'_z è analoga a quella per u'_y . In conclusione, le componenti della velocità del corpo in esame nel SR K' sono date da:

$$\boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}} \quad (3.6)$$

La legge di trasformazione inversa, da K' a K , ha ancora la stessa forma ma con il cambio di segno davanti alla velocità relativa v :

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)}} \quad (3.7)$$

Osservazione 1: nel limite non relativistico $u_i \ll c$, $v \ll c$ si riottengono le trasformazioni delle velocità della meccanica classica (1.2): $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Osservazione 2: a differenza delle coordinate, in cui le componenti trasverse al moto relativo dei due SR restano inalterate, nella trasformazione delle velocità anche le componenti lungo y e z cambiano, a causa della trasformazione del tempo.

Osservazione 3: Si noti che le componenti della velocità *non si trasformano come le componenti di un vettore* per TL, basta vedere come differiscono le (3.6) dalle TL (2.5) per le componenti spaziali. Questo è in profondo contrasto con la fisica classica, in cui le componenti della velocità hanno le stesse proprietà di trasformazione delle coordinate per rotazioni spaziali (trasformazioni ortogonali in tre dimensioni).

Osservazione 4: la direzione del moto può cambiare da un SR all'altro, infatti se la velocità \mathbf{u} forma con l'asse x un angolo θ e la sua proiezione nel piano yz forma con l'asse y un angolo ϕ , le sue componenti si possono scrivere come $u_x = u \cos \theta$, $u_y = u \sin \theta \cos \phi$, $u_z = u \sin \theta \sin \phi$

e nel SR K' si ha

$$u'_x = \frac{u \cos \theta - v}{1 - \frac{uv \cos \theta}{c^2}} \quad u'_y = \frac{u \sin \theta \cos \phi}{\gamma \left(1 - \frac{uv \cos \theta}{c^2}\right)} \quad u'_z = \frac{u \sin \theta \sin \phi}{\gamma \left(1 - \frac{uv \cos \theta}{c^2}\right)}$$

ma vale anche

$$u'_x = u' \cos \theta' \quad u'_y = u' \sin \theta' \cos \phi' \quad u'_z = u' \sin \theta' \sin \phi'$$

per cui

$$\tan \phi' = \frac{u'_z}{u'_y} = \tan \phi \quad \tan \theta' = \frac{\sqrt{u'^2_y + u'^2_z}}{u'_x} = \frac{u \sin \theta}{\gamma (u \cos \theta - v)}, \quad (3.8)$$

quindi l'angolo ϕ è invariato mentre $\theta' \neq \theta$ (a meno che sia $\theta = 0$ nel qual caso anche $\theta' = 0$).

Osservazione 5: se la velocità \mathbf{u} è parallela alla velocità del moto relativo \mathbf{v} , allora anche la velocità \mathbf{u}' nel nuovo SR sarà ancora parallela a \mathbf{v} , e si ha:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad \text{o anche} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

espressione, quest'ultima, che coincide con quella trovata nel paragrafo 2.2.3, equazione (2.12) per la composizione di boost collineari.

Osservazione 6: è immediato scrivere la trasformazione delle velocità per SR in moto relativo con direzione qualsiasi: dalle (2.56) si ha :

$$\boxed{\mathbf{u}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \quad \mathbf{u}'_{\perp} = \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}} \quad (3.9)$$

essendo \mathbf{u}_{\parallel} e \mathbf{u}_{\perp} le componenti di \mathbf{u} , rispettivamente, parallela e perpendicolare alla velocità \mathbf{v} .

3.5.1 Invarianza della velocità della luce

Consideriamo una sorgente luminosa che si muove, nel SR K , con velocità v (diretta lungo la direzione positiva dell'asse delle x). La luce emessa da questa sorgente viaggia rispetto alla sorgente stessa (cioè nel SR K') con velocità c . Vogliamo calcolare qual è la velocità della luce misurata nel SR K . Utilizziamo a questo scopo le trasformazioni inverse (3.7) con

$$u'_x = c \cos \theta' \quad u'_y = c \sin \theta' \cos \phi' \quad u'_z = c \sin \theta' \sin \phi'.$$

Abbiamo allora :

$$u_x = \frac{c (\cos \theta' + \beta)}{1 + \beta \cos \theta'} \quad u_y = \frac{c \sin \theta' \cos \phi'}{\gamma (1 + \beta \cos \theta')} \quad u_z = \frac{c \sin \theta' \sin \phi'}{\gamma (1 + \beta \sin \theta')}. \quad (3.10)$$

Il modulo della velocità \mathbf{u} nel SR K è :

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = c \sqrt{\frac{(\cos \theta' + \beta)^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2} + \frac{\sin^2 \theta' (1 - \beta^2)}{(1 + \beta \cos \theta')^2}} = c$$

Abbiamo quindi verificato che le TL garantiscono che la luce viaggia con velocità c nel vuoto in ogni SR, indipendentemente dal moto della sua sorgente, come richiesto dal postulato di Einstein.

3.5.2 Velocità limite

Consideriamo un punto materiale in moto con velocità $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ nel SR K . Sia $u \equiv |\mathbf{u}| < c$. Calcoliamo il modulo della velocità dello stesso punto materiale in un altro SR K' . Usando le (3.6) troviamo:

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2(1 - \beta^2) + u_z^2(1 - \beta^2)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{u^2 - 2u_x v + v^2 - \beta^2(u_y^2 + u_z^2)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}.$$

Questa velocità è sicuramente minore di c^2 , infatti:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{\frac{u^2}{c^2} - 2\frac{u_x v}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{u_y^2 + u_z^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2 u^2}{c^2 c^2}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}, \quad (3.11)$$

che è sicuramente maggiore di zero perché sia v che u sono minori di c . Quindi, qualunque sia la velocità u , non esiste un SR in cui il corpo si muova con velocità maggiore di c ; c è la velocità limite per ogni corpo materiale.

Esempio : Composizione di velocità

Consideriamo due punti materiali A e B in moto, rispetto al SR K , con velocità rispettivamente \mathbf{v} e $-\mathbf{v}$ parallelamente all'asse x . Vogliamo determinare qual è la velocità di A rispetto al SR solidale con B . Nel SR K si ha $u_{Ax} = v$, $u_{Ay} = u_{Az} = 0$ e $u_{Bx} = -v$, $u_{By} = u_{Bz} = 0$. Il SR K' solidale con B si muove con velocità v nel verso negativo delle x rispetto a K . Usando le (3.6) troviamo:

$$u'_{Ax} = \frac{u_{Ax} + v}{1 + \frac{u_{Ax} v}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}, \quad u'_{Ay} = u'_{Az} = 0, \quad u'_{Bx} = \frac{u_{Bx} + v}{1 + \frac{u_{Bx} v}{c^2}} = 0, \quad u'_{By} = u'_{Bz} = 0,$$

(ovviamente la velocità di B è zero nel suo SR) quindi il corpo A visto da B si muove con velocità sicuramente minore di c , infatti :

$$1 - \left(\frac{u'_{Ax}}{c}\right)^2 = \frac{1 + 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} - 4\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} > 0.$$

La Figura 3.15 mostra l'andamento di u'_{Ax} (in unità di c) in funzione di v/c : per piccole velocità l'approssimazione non relativistica $2v$ è buona (linea tratteggiata), ma per grandi v la velocità risultante u'_{Ax} si discosta dall'andamento lineare per tendere al valore limite c .

Un altro caso particolare molto interessante è $v = c$, A e B allora non sono corpi materiali ma segnali luminosi: la velocità di uno rispetto all'altro è $u'_{Ax} = 2c/(1 + c^2/c^2) = c$!

Una verifica sperimentale dell'invarianza della velocità della luce è stata effettuata misurando la velocità dei fotoni (quanti di luce) prodotti dal decadimento di pioni neutri^[d]. Indipendentemente dalla velocità con cui i pioni si muovono nel SR del laboratorio, si è visto che i fotoni da essi prodotti viaggiano con velocità c in tutte le direzioni.

^[d]I pioni neutri π^0 sono particelle senza carica elettrica, di massa circa 280 volte maggiore di quella di un elettrone; un pione neutro ha una vita media di circa 10^{-16} secondi e decade in due fotoni.

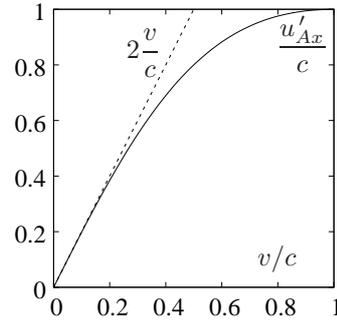


Figura 3.15 Composizione di velocità.

3.5.3 Quadrivelocità

Abbiamo visto in precedenza che le coordinate $x^\mu = (ct, x, y, z)$ sono le componenti di un vettore controvariante. Il tempo proprio invece è un invariante relativistico, infatti dato un SR K' in moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto al SR K è immediato ricavare il tempo misurato in K' (tempo proprio) in funzione del tempo misurato in K in modo univoco: $t' \equiv \tau = t/\gamma$. Abbiamo già osservato che moltiplicando tutte le componenti di un vettore controvariante per la stessa quantità scalare (cioè invariante) si ottiene un nuovo vettore controvariante. Quindi l'oggetto definito come

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

è un vettore controvariante. In forma esplicita le sue componenti sono:

$$U^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c \qquad U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dt} = \gamma u^i \qquad i = 1, 2, 3 .$$

L'equazione precedente ci fa intuire che è possibile, dato un punto materiale in moto con velocità \mathbf{u} , definire in modo univoco un quadrivettore U^μ considerando il SR solidale con esso: il fattore di Lorentz sarà dato allora da $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Per evitare ambiguità, in questo paragrafo, scriveremo il fattore Lorentz indicandone esplicitamente l'argomento (velocità). Il vettore

$$\boxed{U^\mu = \left(\gamma(u)c, \gamma(u)\mathbf{u} \right)}, \qquad (3.12)$$

le cui componenti spaziali sono proporzionali alle componenti della velocità del corpo in esame, si chiama **quadrivelocità**. Esso è un vettore di tipo-tempo la cui norma vale :

$$U^\mu U_\mu = \gamma(u)^2 (c^2 - \mathbf{u}^2) = \frac{c^2 - u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = c^2 . \qquad (3.13)$$

Il carattere di vettore si può verificare esplicitamente, scrivendo le leggi di trasformazione delle componenti di U^μ tra SR di inerziali. Innanzi tutto osserviamo che

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u) \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right) , \qquad (3.14)$$

identità che deriva dall'eq. (3.11). Quindi, se in un SR K abbiamo il vettore U^μ , in un altro

SR K' in moto con velocità v in direzione x rispetto a K , avremo il vettore U'^{μ} dato da :

$$\begin{aligned} U'_0 &\equiv \gamma(u')c = \gamma(v)\gamma(u) \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) c = \gamma(v) \left(\gamma(u)c - \frac{v}{c} \gamma(u)u_x\right) = \gamma(v) (U_0 - \beta U_x) \\ U'_x &\equiv \gamma(u')u'_x = \gamma(v)\gamma(u) \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \frac{u_x - v}{(1 - u_x v/c^2)} = \gamma(v) \left(\gamma(u)u_x - \frac{v}{c} \gamma(u)c\right) = \gamma(v) (U_x - \beta U_0) \\ U'_y &\equiv \gamma(u')u'_y = \gamma(v)\gamma(u) \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \frac{u_y}{\gamma(v)(1 - u_x v/c^2)} = \gamma(u)u_y = U_y \qquad U'_z = U_z \end{aligned}$$

Le equazioni di trasformazione di U^μ sono identiche alle (2.5) per le coordinate x^μ (si osservi in particolare la prima forma, in cui la coordinata temporale è scritta come $x_0 = ct$): il carattere vettoriale di U^μ è quindi evidente.

3.5.4 Aberrazione stellare ed esperimento di Fizeau secondo la relatività speciale

Riprendiamo in considerazione alcune delle misure sperimentali che avevano portato alla crisi della relatività di Galileo, discutendole dal punto di vista della nuova teoria della relatività.

Per studiare l'aberrazione stellare dobbiamo esaminare la trasformazione delle componenti della velocità della luce \mathbf{u}' misurate nel SR solidale con la Terra, a partire dalle componenti \mathbf{u} nel SR della stella. Consideriamo una stella la cui posizione reale sia individuata da un angolo θ_0 . La velocità della luce nel SR della stella ha componenti (si veda la figura 1.3b):

$$u_x = -c \cos \theta_0 \qquad u_y = -c \sin \theta_0 \qquad u_z = 0 ;$$

le componenti nel SR della Terra sono perciò, utilizzando le (3.6),

$$u'_x = \frac{-c \cos \theta_0 - v}{1 + \frac{c \cos \theta_0 v}{c^2}} = \frac{-c(\cos \theta_0 + \beta)}{1 + \beta \cos \theta_0} \qquad u'_y = \frac{-c \sin \theta_0}{\gamma(1 + \beta \cos \theta_0)} \qquad u'_z = 0 ,$$

quindi l'angolo di osservazione dalla Terra θ' è dato da :

$$\cos \theta' = -\frac{u'_x}{c} = \frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0} = (\cos \theta_0 + \beta) (1 - \beta \cos \theta_0 + \mathcal{O}(\beta^2)) \simeq \cos \theta_0 + \beta \sin^2 \theta_0 ,$$

l'approssimazione usata è valida poiché la velocità della Terra è molto piccola rispetto a c . L'angolo θ' differisce da θ_0 per l'angolo di aberrazione α : $\theta' = \theta_0 - \alpha$; essendo α molto piccolo, si possono usare altre approssimazioni :

$$\cos \theta' = \cos(\theta_0 - \alpha) = \cos \theta_0 \cos \alpha + \sin \theta_0 \sin \alpha \simeq \cos \theta_0 + \alpha \sin \theta_0 ,$$

sostituendo nell'equazione precedente si trova

$$\alpha = \beta \sin \theta_0 .$$

Il calcolo relativistico quindi dà per l'aberrazione stellare un risultato identico, all'ordine di approssimazione più basso, al risultato non relativistico discusso nel paragrafo 1.2.2 (si noti che, per angoli α piccoli, $\tan \alpha \simeq \alpha$). All'ordine β^2 ovviamente i risultati non coincidono più, ma il dispositivo sperimentale usato per misurare l'aberrazione stellare non consente una precisione sufficiente per apprezzare questa differenza.

Anche il risultato dell'esperimento di Fizeau ha una semplice interpretazione nell'ambito della relatività speciale. Se la velocità della luce in un mezzo è $u' = c/n$ nel SR in cui il mezzo è a riposo, nel SR del laboratorio rispetto a cui il mezzo si muove con velocità $\mp v$ la velocità della luce è (usando la (3.6)):

$$u = \frac{u' \pm v}{1 \pm \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{nc}} \simeq \frac{c}{n} \left(1 \pm \frac{nv}{c}\right) \left(1 \mp \frac{v}{nc}\right) \simeq \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \equiv c/n \pm fv$$

con f dato dall'espressione (1.17) e verificato sperimentalmente (con discreta precisione) da Fizeau. La formula è la stessa, ma l'interpretazione fisica è radicalmente diversa da quella data da Fizeau e dai suoi contemporanei: il termine fv non è dovuto al trascinarsi dell'etere da parte della materia ma alla legge relativistica di trasformazione delle velocità.

3.6 Trasformazione dell'accelerazione

Consideriamo un punto in moto, nel SR K , con accelerazione $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ di componenti (a_x, a_y, a_z) . Vogliamo determinare l'accelerazione $\mathbf{a}' = d\mathbf{u}'/dt'$ osservata in un altro SR K' in moto relativo rettilineo ed uniforme in direzione x rispetto al primo. In base alla regola di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{du'_x}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{du'_x}{dt} \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} \quad (3.15)$$

La derivata dt'/dt si calcola dalle TL (2.5):

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right),$$

mentre dalle (3.6) si ha:

$$\frac{du'_x}{dt} = \frac{\frac{du_x}{dt} \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + (u_x - v) \frac{v}{c^2} \frac{du_x}{dt}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{du_x}{dt} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{a_x}{\gamma^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}.$$

La componente x dell'accelerazione (eq. (3.15)) quindi risulta:

$$a'_x \equiv \frac{du'_x}{dt'} = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}. \quad (3.16)$$

Per ricavare le altre componenti si segue un procedimento analogo, il risultato è:

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_y v / c^2}{\gamma^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} \quad a'_z = \frac{a_z}{\gamma^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_z v / c^2}{\gamma^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} \quad (3.17)$$

Osservazione 1: L'accelerazione non è invariante per trasformazioni di Lorentz, contrariamente al caso non relativistico (trasformazioni di Galileo, si veda (1.3)). In fisica classica, l'invarianza dell'accelerazione aveva fatto sì che l'accelerazione stessa ricoprisse un ruolo centrale nelle equazioni fondamentali della meccanica, in particolare nella seconda legge di Newton.

Nella teoria della relatività non è più così, l'accelerazione cambia da un SR all'altro, e le sue componenti hanno leggi di trasformazione diverse tra loro.

Osservazione 2: L'invarianza dell'accelerazione si ritrova nel limite non relativistico ($v/c \ll 1$, $u_i/c \ll 1$).

3.6.1 Quadriaccelerazione

Analogamente alla quadrivelocità si può definire la **quadriaccelerazione** ($\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$, $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$):

$$A^\mu \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau} = \left(\gamma(u)^3 \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \gamma(u)^3 \left(\frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \right) \frac{\mathbf{u}}{c} + \gamma(u) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \right) = \gamma(u)^2 \left(\gamma(u)^2 \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}, \gamma(u)^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a} \right) \quad (3.18)$$

Le componenti spaziali dell'accelerazione relativistica coincidono con l'espressione classica solo se $\mathbf{u} = 0$, cioè solo se consideriamo il SR solidale con il corpo (in un certo istante); ovviamente non appena la velocità del corpo cambia, per effetto dell'accelerazione stessa, le due espressioni non coincidono più. Nel caso generale l'espressione per le componenti di A^μ è piuttosto complicata e non ha un'ovvia interpretazione fisica. Per questo motivo l'utilità del concetto di accelerazione è, in relatività speciale, molto limitato.

La quadriaccelerazione è sempre ortogonale alla quadrivelocità: lo si può dimostrare facilmente sia calcolando esplicitamente $A^\mu U_\mu$ sia osservando che $\frac{d(U^\mu U_\mu)}{d\tau} = 2 \frac{dU^\mu}{d\tau} U_\mu = 2A^\mu U_\mu$ ma è anche (per la (3.13)) $\frac{d(U^\mu U_\mu)}{d\tau} = \frac{d(c^2)}{d\tau} = 0$, quindi

$$A^\mu U_\mu = 0. \quad (3.19)$$

L'accelerazione, se non è un vettore nullo (ossia con tutte le componenti uguali a 0, cosa che può accadere se e solo se $\mathbf{a} = 0$), è un vettore di tipo-spazio^[e], infatti:

$$A^\mu A_\mu = -\gamma(u)^4 \left[\gamma(u)^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \mathbf{a}^2 \right],$$

ed è evidente che $A^\mu A_\mu < 0$ purché $\mathbf{a} \neq 0$. La norma di A^μ , grazie all'identità $(\mathbf{a} \times \boldsymbol{\beta})^2 = \mathbf{a}^2 \boldsymbol{\beta}^2 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2$ si può riscrivere come

$$A^\mu A_\mu = -\gamma(u)^6 \left[\mathbf{a}^2 - (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\beta})^2 \right].$$

3.6.2 Moto lineare uniformemente accelerato

Consideriamo un corpo soggetto ad un'accelerazione costante w diretta lungo l'asse x , vogliamo determinare la sua legge oraria supponendo che parta da fermo dall'origine delle coordinate del SR K all'istante $t = 0$. La sua velocità sarà, in ogni istante, parallela all'asse x . In ogni istante di tempo $t > 0$ consideriamo il SR K' solidale con il corpo: in tale SR la velocità (istantanea) è nulla e la quadriaccelerazione (istantanea), secondo la formula (3.18), è $A'^\mu = (A'_0, A'_x, A'_y, A'_z) = (0, w, 0, 0)$. Nel SR K rispetto al quale il corpo era inizialmente a riposo, che d'ora in poi chiameremo per brevità "SR del laboratorio", l'accelerazione istantanea è

$$A^\mu = \left(\gamma^4 \frac{u}{c} \frac{du}{dt}, \gamma^4 \frac{du}{dt} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \gamma^2 \frac{du}{dt}, 0, 0 \right), \quad (3.20)$$

^[e] Si dimostra facilmente che ogni vettore non nullo ortogonale ad un vettore di tipo-tempo è necessariamente di tipo-spazio, infatti dati due vettori A^μ e B^μ , con $|B^0| > |\mathbf{B}|$ (B^μ di tipo-tempo) e $A \cdot B = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ allora $(A^0 B^0)^2 = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 \leq |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2$, per la disuguaglianza di Schwarz. Quindi

$$\frac{(A^0 B^0)^2}{|\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2} \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{|A^0|}{|\mathbf{A}|} \leq \frac{|\mathbf{B}|}{|B^0|} < 1,$$

quindi A^μ è di tipo-spazio. Non vale il viceversa, cioè un vettore ortogonale ad un vettore di tipo-spazio non è necessariamente di tipo-tempo.

con u dipendente dal tempo (anche $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, di conseguenza, dipende dal tempo). Calcoliamo l'invariante relativistico $A^\mu A_\mu$:

$$A^\mu A_\mu = A'^\mu A'_\mu \quad \Rightarrow \quad \gamma^6 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = w^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{w}{\gamma^3} = w \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

quest'ultima equazione differenziale si può integrare per ottenere $u(t)$, imponendo la condizione iniziale $u(0) = 0$:

$$u(t) = \frac{wt}{\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}}}.$$

Con un'ulteriore integrazione si ottiene lo spazio percorso dal corpo, misurato nel SR del laboratorio (condizione iniziale: $x(0) = 0$):

$$x(t) = \int_0^t dt' u(t') = \frac{c^2}{w} \sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} - \frac{c^2}{w}$$

In ogni istante la variazione del tempo proprio $d\tau$ (misurato nel SR solidale con il corpo) è data dalla variazione dt del tempo del laboratorio: $d\tau = dt/\gamma$. Integrando sull'intervallo $(0, t)$ si ottiene la relazione tra il tempo proprio e il tempo del laboratorio:

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1 - \frac{(u(t'))^2}{c^2}} = \frac{c}{w} \ln \left(\frac{wt}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} \right) = \frac{c}{w} \operatorname{arcsinh} \frac{wt}{c} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{c}{w} \sinh \frac{w\tau}{c}.$$

La distanza percorsa in funzione del tempo proprio è:

$$x(\tau) = \frac{c^2}{w} \cosh \frac{w\tau}{c} - \frac{c^2}{w}.$$

Si noti che nel limite non relativistico $wt \ll c$ le equazioni precedenti danno le formule classiche $u(t) = wt$, $x(t) = \frac{1}{2}wt^2$ e $\tau = t$.

3.7 Effetto Doppler

Molte tra le più importanti osservazioni sperimentali in fisica atomica riguardano misure della radiazione emessa da atomi o nuclei in moto. La frequenza apparente (cioè osservata dall'apparato sperimentale) della radiazione emessa dipende dal moto relativo tra sorgente ed osservatore: questo fenomeno, noto come **effetto Doppler**, deve essere tenuto in conto per poter dedurre la frequenza originale della radiazione e studiare così le proprietà degli atomi o nuclei in esame.

3.7.1 Caso non relativistico: effetto Doppler acustico

Consideriamo prima l'effetto Doppler dal punto di vista non relativistico. La nostra esperienza quotidiana ci ha resi familiari con l'effetto Doppler acustico che consiste nell'abbassamento brusco della frequenza di una sirena di un'auto che passa velocemente in prossimità dell'osservatore. La velocità del suono nell'aria $c_s \simeq 340$ m/s e la velocità dell'auto sono molto piccole rispetto a c e il trattamento non relativistico è un'approssimazione sufficiente. Notiamo che il SR in cui l'aria, cioè il mezzo di propagazione dell'onda acustica, è a riposo costituisce un SR privilegiato: non dovremo perciò stupirci se non c'è equivalenza tra questo SR e un altro SR in moto relativo uniforme, nel caso di sorgente e/o osservatore in moto, dato che la velocità del suono in un mezzo dipende esclusivamente dalle proprietà meccaniche del mezzo stesso e non dalla velocità della sorgente rispetto ad esso (la situazione in relatività sarà, come vedremo nel

seguito, del tutto diversa poiché le radiazioni elettromagnetiche non hanno un SR privilegiato -l'etere- in cui si propagano).

Consideriamo un trasmettitore (sorgente) acustico T fermo nel SR dell'aria che emette un segnale di frequenza ν_T e periodo $T_T = 1/\nu_T$. Supponiamo, per semplicità, che il segnale consista in un'onda armonica di lunghezza d'onda $\lambda_T = c_s T_T = c_s/\nu_T$: due creste successive (o due punti qualunque con la stessa fase successivi) dell'onda si troveranno, evidentemente, a distanza λ_T .

Supponiamo ora che il trasmettitore T si muova rispetto all'aria con velocità v_T (fig. 3.16) : nell'intervallo di tempo T_T tra l'emissione di una cresta d'onda e la successiva, la prima cresta si è spostata di una distanza $\lambda_T = c_s T_T = c_s/\nu_T$, ma la sorgente nel frattempo è avanzata di $v_T T_T = v_T/\nu_T$, per cui la distanza tra le due creste nel SR dell'aria risulta $\lambda' = c_s T_T - v_T T_T = (c_s - v_T)/\nu_T$ (stiamo supponendo $v_T < c_s$; il caso di sorgenti supersoniche richiede una trattazione particolare).

Se il ricevitore (osservatore) si muove con velocità v_R , la velocità del suono rispetto ad esso è $c_s - v_R$, e l'intervallo di tempo tra l'arrivo di due creste d'onda distanziate di λ' è

$$T_R = \frac{1}{\nu_R} = \frac{\lambda'}{c_s - v_R} = \frac{1}{\nu_T} \frac{c_s - v_T}{c_s - v_R}$$

da cui

$$\boxed{\nu_R = \nu_T \frac{c_s - v_R}{c_s - v_T}}. \quad (3.21)$$

In fig. 3.16 trasmettitore e ricevitore si muovono verso destra, la formula per il caso in cui uno dei due (o entrambi) si muove nella direzione opposta si ottiene cambiando il segno della corrispondente velocità.

Notiamo che la modifica della frequenza dipende dalle *singole velocità* del moto del trasmettitore e del ricevitore, e non dalla loro velocità relativa, troviamo quindi il risultato che avevamo anticipato: il SR dell'aria è un SR particolare, quello in cui avviene la propagazione del suono e l'effetto Doppler dipende dalle velocità relative trasmettitore-aria e ricevitore-aria piuttosto che dalla velocità relativa trasmettitore-ricevitore. È possibile quindi stabilire il *moto assoluto* di un corpo (trasmettitore o ricevitore, in questo caso) rispetto all'aria. Per vedere questo fatto in modo esplicito, supponiamo che il trasmettitore sia fermo ($v_T = 0$) e che il ricevitore si muova verso *destra* con velocità v ($v_R = v$). Si ha allora

$$\nu_R = \nu_T \frac{1 - v/c_s}{1 - v_T/c_s} = \nu_T \left(1 - \frac{v}{c_s}\right);$$

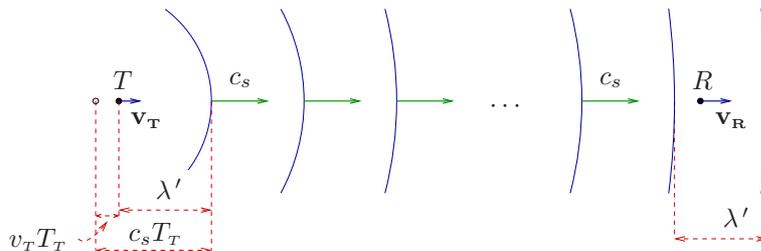


Figura 3.16 Effetto Doppler acustico, per trasmettitore (sorgente) e ricevitore (osservatore) in moto.

supponiamo ora che sia il trasmettitore a muoversi verso *sinistra* con velocità v ($v_T = -v$) e che il ricevitore sia fermo ($v_R = 0$), quindi:

$$\nu_R = \nu_T \frac{1 - v_R/c_s}{1 - v_T/c_s} = \frac{\nu_T}{1 + v/c_s} .$$

È evidente come i due risultati precedenti siano diversi tra loro nonostante la velocità relativa tra trasmettitore e ricevitore sia la stessa !

Esaminiamo in maggior dettaglio l'eq. (3.21) corrispondente alla figura 3.16. Se $v_T < v_R$ allora $\nu_T < \nu_R$: il trasmettitore ed il ricevitore si stanno allontanando (il trasmettitore è più lento del ricevitore) e la frequenza apparente è minore dell'originale. Viceversa se $v_T > v_R$, cioè se sorgente ed osservatore si avvicinano, la frequenza apparente è maggiore. Alle stesse conclusioni, a maggior ragione, si perviene se una delle due velocità è nella direzione opposta a quella indicata in figura. Ad esempio, se trasmettitore e ricevitore si muovono l'uno verso l'altro si trova

$$\nu_R = \nu_T \frac{1 + v_R/c_s}{1 - v_T/c_s} ,$$

ed è ovvio che $\nu_R > \nu_T$ qualunque siano (in modulo) le velocità v_T e v_R .

3.7.2 Effetto Doppler relativistico

Nello studio dello stesso fenomeno per le onde luminose l'approssimazione non relativistica è inadeguata, dovremo perciò usare le TL.

Con riferimento alla fig. 3.17 consideriamo una sorgente in moto nel SR K con velocità v_T verso sinistra, ed un ricevitore in moto con velocità v_R verso destra. Consideriamo, oltre al SR K , altri due SR: K' e K'' solidali, rispettivamente, con il trasmettitore ed il ricevitore. La posizione della sorgente e del ricevitore rispetto al SR K sono dati, in ogni istante, dalle leggi orarie:

$$x_T(t) = -v_T t , \quad x_R(t) = x_0 + v_R t . \quad (3.22)$$

Ovviamente nel SR K' la posizione della sorgente sarà, in ogni istante, $x' = 0$. Supponiamo che all'istante $t = 0$, quando il trasmettitore si trova nell'origine delle coordinate di K , esso emetta un segnale luminoso che

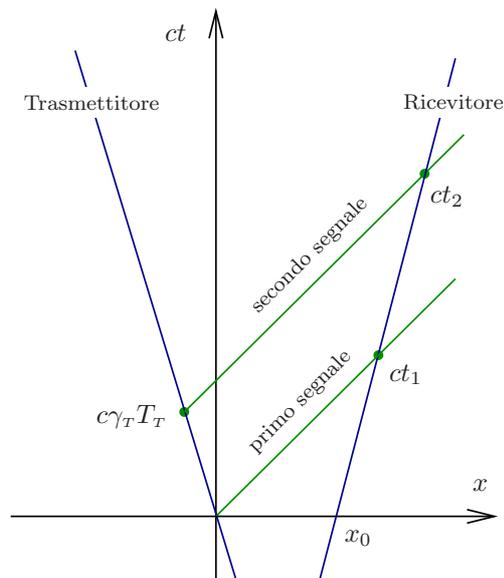


Figura 3.17 Effetto Doppler relativistico

viaggia con velocità c . Il successivo segnale luminoso viene emesso dalla sorgente al tempo $t' = T_T$ (misurato nel SR K') che nel SR K corrisponde a ($\gamma_T = \gamma(v_T)$) :

$$t = \gamma_T \left(t' - \frac{v_T}{c^2} x' \right) = \gamma_T t' = \gamma_T T_T$$

quando il trasmettitore si trova, sempre secondo K , in

$$x = \gamma_T (x' - v_T t') = -\gamma_T v_T t' = -\gamma_T v_T T_T .$$

I due segnali si propagano con le leggi orarie secondo il SR K :

$$x_{(I)}(t) = ct , \quad x_{(II)}(t) = c(t - \gamma_T T_T) - \gamma_T v_T T_T .$$

Il primo segnale raggiunge il ricevitore nel punto x_1 all'istante t_1 (entrambi misurati in K) tali che:

$$x_1 = x_{(I)}(t_1) = x_R(t_1) \quad \text{ossia} \quad ct_1 = x_0 + v_R t_1 . \quad (3.23)$$

Analogamente il secondo segnale raggiunge il ricevitore al tempo t_2 nel punto x_2 dati da:

$$x_2 = x_{(II)}(t_2) = x_R(t_2) \quad \text{ossia} \quad c(t_2 - \gamma_T T_T) - \gamma_T v_T T_T = x_0 + v_R t_2 . \quad (3.24)$$

Sottraendo membro a membro le (3.23) e (3.24) si ha ($\beta_T = v_T/c$, $\beta_R = v_R/c$) :

$$c(t_1 - t_2) + \gamma_T T_T (c + v_T) = v_R (t_1 - t_2) \quad \Longrightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{\gamma_T T_T (1 + \beta_T)}{1 - \beta_R} = \frac{T_T}{1 - \beta_R} \sqrt{\frac{1 + \beta_T}{1 - \beta_T}}$$

Nel SR del ricevitore l'intervallo di tempo tra la ricezione dei due segnali è ($\gamma_R = \gamma(v_R)$) :

$$T_R \equiv t_2'' - t_1'' = \frac{t_2 - t_1}{\gamma_R} ;$$

la relazione precedente è ovvia, considerando che nel SR K'' , in cui il ricevitore è a riposo, la ricezione dei due segnali avviene nello stesso luogo, quindi la loro separazione temporale è, per definizione, l'intervallo di tempo proprio. Si può, naturalmente, arrivare allo stesso risultato calcolando esplicitamente t_1'' e t_2'' con le TL. Si ha, in conclusione,

$$T_R = \frac{T_T}{\gamma_R (1 - \beta_R)} \sqrt{\frac{1 + \beta_T}{1 - \beta_T}} = T_T \sqrt{\frac{1 + \beta_R}{1 - \beta_R}} \sqrt{\frac{1 + \beta_T}{1 - \beta_T}} = T_T \sqrt{\frac{1 + \beta_R + \beta_T + \beta_R \beta_T}{1 - \beta_R - \beta_T + \beta_R \beta_T}} = T_T \sqrt{\frac{1 + \frac{\beta_R + \beta_T}{1 + \beta_R \beta_T}}{1 - \frac{\beta_R + \beta_T}{1 + \beta_R \beta_T}}} ,$$

nell'ultima uguaglianza si riconosce l'espressione per la velocità relativa tra trasmettitore e ricevitore $\beta_{RT} = (\beta_R + \beta_T)/(1 + \beta_R \beta_T)$, per cui la formula dell'effetto Doppler si può scrivere come:

$$\boxed{\nu_R = \nu_T \sqrt{\frac{1 - \beta_{RT}}{1 + \beta_{RT}}}} . \quad (3.25)$$

L'effetto Doppler relativistico gode dunque della simmetria che mancava al caso non relativistico; esso dipende solo dalla velocità relativa tra sorgente e osservatore: non esiste un SR privilegiato (etere) che permetta di definire il moto assoluto del trasmettitore o del ricevitore.

Nell'esempio considerato il ricevitore e sorgente si allontanano quindi $\nu_R < \nu_T$, o equivalentemente $\lambda_R > \lambda_T$: la lunghezza d'onda apparente è spostata verso il rosso (*red-shift*). Nel caso di sorgenti in avvicinamento si trova, in modo analogo, una lunghezza d'onda apparente minore (*blue-shift*).

Capitolo 4

Dinamica relativistica

Contenuto

4.1	Quantità di moto ed energia	72
4.1.1	Sistema di molte particelle	77
4.1.2	Quadrimpulso	78
4.1.3	Formule fondamentali	78
4.1.4	Il fotone	79
4.1.5	Ancora sull'effetto Doppler	80
4.2	Esempi	82
4.2.1	Decadimento a due corpi	82
4.2.2	Urto elastico tra due particelle identiche	84
4.2.3	Urto elastico tra due particelle diverse. Effetto Compton	85
4.3	Forza	88
4.3.1	Moto in un campo di forza uniforme e costante	89

Nel paragrafo 1.1.2 abbiamo verificato che le leggi di conservazione dell'impulso (o quantità di moto) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e dell'energia cinetica $E_{cin} = mv^2/2$ sono perfettamente compatibili con le trasformazioni di Galileo (1.1) e con le trasformazioni della velocità che da esse derivano (1.2). Ora abbiamo trovato che la velocità si trasforma, da un SR inerziale ad un altro con velocità relativa v , secondo le equazioni (3.6) : sono anch'esse compatibili con la conservazione dell'impulso e dell'energia cinetica ? Verifichiamolo considerando nuovamente l'urto di due particelle di massa m . Per comodità adotteremo le seguenti notazioni semplificate: $\mathbf{u}_{1(i)} = \mathbf{u}_a$, $\mathbf{u}_{2(i)} = \mathbf{u}_b$, $\mathbf{u}_{1(f)} = \tilde{\mathbf{u}}_a$ e $\mathbf{u}_{2(f)} = \tilde{\mathbf{u}}_b$. La conservazione della quantità di moto nel SR K è:

$$\mathbf{P}_{(i)} = \mathbf{P}_{(f)} \quad \Rightarrow \quad m\mathbf{u}_a + m\mathbf{u}_b = m\tilde{\mathbf{u}}_a + m\tilde{\mathbf{u}}_b$$

Nel SR K' le velocità sono date dalle (3.6) e si ha, per l'impulso totale iniziale (omettiamo la componente z che è analoga alla y) :

$$P'_{(i)x} = mu'_{ax} + mu'_{bx} = m \frac{u_{ax} - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_{ax}} + m \frac{u_{bx} - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_{bx}}$$
$$P'_{(i)y} = mu'_{ay} + mu'_{by} = m \frac{u_{ay}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_{ax})} + m \frac{u_{by}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_{bx})}$$

L'impulso totale finale è dato da

$$P'_{(f)x} = m\tilde{u}'_{ax} + m\tilde{u}'_{bx} = m \frac{\tilde{u}_{ax} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\tilde{u}_{ax}} + m \frac{\tilde{u}_{bx} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\tilde{u}_{bx}}$$

$$P'_{(f)y} = m\tilde{u}'_{ay} + m\tilde{u}'_{by} = m \frac{\tilde{u}_{ay}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}\tilde{u}_{ax})} + m \frac{\tilde{u}_{by}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}\tilde{u}_{bx})}$$

In generale, quindi, $\mathbf{P}'_{(i)} \neq \mathbf{P}'_{(f)}$ (l'uguaglianza può valere solo per alcuni valori particolari delle velocità, ma questo non è sufficiente).

Sembrirebbe di poter concludere che la legge di conservazione della quantità di moto non è compatibile con le TL e con la relatività speciale. Sicuramente questo è vero per la quantità di moto *definita* come $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Ma è noto dalla formulazione lagrangiana della meccanica che l'invarianza delle leggi della fisica per traslazioni del sistema di coordinate (conseguenza dell'omogeneità dello spazio) *implica* che esista una *grandezza conservata*. Nel caso della fisica classica tale grandezza risulta essere proprio $m\mathbf{v}$, ora con la nuova formulazione della relatività non è più così e si tratta perciò di trovare una nuova definizione di quantità di moto \mathbf{p} che si conservi in tutti i SR inerziali. È ovvio che, come la fisica classica è un caso particolare della teoria della relatività (corrispondente al limite per piccole velocità), così la nuova definizione di impulso dovrà ridursi alla forma classica nel limite non relativistico.

Analoghe considerazioni valgono per l'energia cinetica: la forma classica $mv^2/2$ non è compatibile con le TL e dovremo cercare una nuova definizione.

La nuova formulazione della relatività comporta quindi anche una nuova definizione della quantità di moto e dell'energia cinetica di un corpo; vedremo nel seguito che le leggi di conservazione di queste quantità assumeranno una forma più generale ed elegante del caso non relativistico.

4.1 Quantità di moto ed energia

Postuliamo che la conservazione dell'impulso \mathbf{p} e dell'energia E valga in tutti i SR inerziali e vediamo quale forma debbano avere \mathbf{p} ed E per soddisfare a questo requisito. Data una particella di massa m_0 e velocità \mathbf{u} secondo un determinato SR, come può essere fatta la sua quantità di moto? La cosa più ovvia è che deve essere un (tri)vettore, dato che lo è in meccanica classica (caso a cui vogliamo ricondurci nel limite non relativistico). Non può dipendere dalle coordinate del corpo, per l'omogeneità dello spazio. L'unico vettore disponibile è perciò \mathbf{u} stesso e non resta che assumere che \mathbf{p} sia proporzionale ad \mathbf{u} . La costante di proporzionalità dovrà allora essere una quantità scalare, per non rovinare il carattere vettoriale di \mathbf{u} ; può solo essere una funzione (scalare) del modulo di \mathbf{u} . Scriviamo dunque :

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}(u)\mathbf{u} ,$$

essendo $\mathcal{M}(u)$ una funzione che si riduce alla massa del corpo per velocità nulla: $\mathcal{M}(0) = m_0$. È anche più che ragionevole assumere che il modulo della quantità di moto $\mathcal{P}(u) = \mathcal{M}(u)|\mathbf{u}|$ sia una funzione monotona (crescente) e monodroma: data una velocità \mathbf{u} il suo impulso deve essere ben determinato (funzione monodroma) e deve crescere, in modulo, al crescere di u . Questa è la forma più generale e sensata di quantità di moto che ha il corretto limite non relativistico $\mathbf{p}^{NR} = m_0\mathbf{u}$.

Analogamente per l'energia cinetica, che è una quantità scalare, assumeremo

$$E_{cin} = \mathcal{E}_{cin}(u) , \quad (4.1)$$

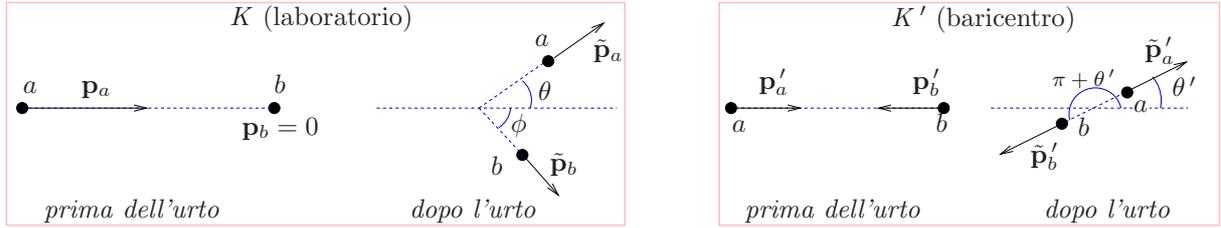


Figura 4.1 Urto di due particelle identiche nel SR del laboratorio (sinistra) e nel SR del baricentro (destra).

essendo anche $\mathcal{E}_{cin}(u)$ una funzione monotona (crescente) e monodroma del modulo della velocità della particella. Naturalmente anche nel caso dell'energia vogliamo riprodurre le formule classiche nel limite di piccole velocità.

Consideriamo l'urto elastico tra due particelle identiche, illustrato in figura 4.1^[a]. Studieremo l'urto delle due particelle dal punto di vista di due SR in moto relativo rettilineo ed uniforme nella direzione x . Sia K il SR (detto “del laboratorio”) in cui la particella b è inizialmente a riposo ($\mathbf{u}_b = 0$, che implica $\mathbf{p}_b = 0$) e la particella a possiede velocità \mathbf{u}_a (e quantità di moto \mathbf{p}_a) parallela all'asse delle x . Dopo l'urto le velocità e quantità di moto delle due particelle siano, rispettivamente, $\tilde{\mathbf{u}}_a$, $\tilde{\mathbf{u}}_b$ e $\tilde{\mathbf{p}}_a$, $\tilde{\mathbf{p}}_b$, formanti con l'asse x gli angoli θ e ϕ (figura 4.1). Supporremo che il moto delle particelle dello stato finale avvenga nel piano xy . La conservazione dell'impulso e dell'energia implica che:

$$p_{ax} + p_{bx} = \tilde{p}_{ax} + \tilde{p}_{bx} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(u_a)u_{ax} = \mathcal{M}(\tilde{u}_a)\tilde{u}_{ax} + \mathcal{M}(\tilde{u}_b)\tilde{u}_{bx} \quad (4.2a)$$

$$p_{ay} + p_{by} = \tilde{p}_{ay} + \tilde{p}_{by} \quad \Rightarrow \quad 0 = \mathcal{M}(\tilde{u}_a)\tilde{u}_{ay} + \mathcal{M}(\tilde{u}_b)\tilde{u}_{by} \quad (4.2b)$$

$$\mathcal{E}_{cin}(u_a) + \mathcal{E}_{cin}(0) = \mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}_a) + \mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}_b) . \quad (4.2c)$$

Si noti che abbiamo usato le stesse funzioni \mathcal{M} e \mathcal{E}_{cin} per entrambe le particelle a e b perché stiamo considerando particelle identiche, inoltre l'urto è elastico quindi le particelle dello stato finale sono identiche a quelle iniziali.

Consideriamo ora il SR del baricentro K' , definito come il SR in cui l'impulso totale del sistema è zero. La conservazione dell'impulso e dell'energia implica che:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b = \tilde{\mathbf{p}}'_a + \tilde{\mathbf{p}}'_b = 0 & \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(u'_a)\mathbf{u}'_a + \mathcal{M}(u'_b)\mathbf{u}'_b = \mathcal{M}(\tilde{u}'_a)\tilde{\mathbf{u}}'_a + \mathcal{M}(\tilde{u}'_b)\tilde{\mathbf{u}}'_b = 0 \\ \mathcal{E}_{cin}(u'_a) + \mathcal{E}_{cin}(u'_b) = \mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}'_a) + \mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}'_b) & \quad (4.3) \end{aligned}$$

Le due particelle iniziali nel SR del baricentro hanno impulsi uguali ed opposti :

$$\mathbf{p}'_a = -\mathbf{p}'_b \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{p}'_a| = |\mathbf{p}'_b| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(u'_a) = \mathcal{P}(u'_b) ;$$

per l'ipotesi di monotonicità della funzione \mathcal{P} deve essere $|\mathbf{u}'_a| = |\mathbf{u}'_b|$ che implica $\mathcal{M}(u'_a) = \mathcal{M}(u'_b)$ e $\mathbf{u}'_a = -\mathbf{u}'_b$. Le due particelle (identiche) dello stato iniziale, nel SR del baricentro, hanno velocità uguali in modulo, di conseguenza anche le loro energie sono uguali: $\mathcal{E}_{cin}(u'_a) = \mathcal{E}_{cin}(u'_b)$. Lo stesso ragionamento vale per lo stato finale: $\tilde{\mathbf{u}}'_a = -\tilde{\mathbf{u}}'_b$ e $\mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}'_a) = \mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}'_b)$.

Sostituendo in (4.3) si ha $2\mathcal{E}_{cin}(u'_a) = 2\mathcal{E}_{cin}(\tilde{u}'_a)$ e quindi, sempre per la monotonicità di \mathcal{E}_{cin} , $u'_a = \tilde{u}'_a \equiv u'$. Nel SR del baricentro quindi tutte le particelle hanno in modulo la stessa velocità

^[a]Negli esempi studiati in relatività è molto frequente considerare *particelle*, cioè corpi materiali di dimensioni trascurabili. I corpi materiali estesi sono più complicati da trattare perché bisogna considerare il tempo finito di propagazione di una qualunque interazione all'interno del corpo stesso, come illustrato nell'esempio 3.2.8 del paragrafo 3.2, dato che in relatività l'approssimazione di corpo rigido, molto utile in meccanica classica, non è accettabile.

sia prima che dopo l'urto, cambia solo la direzione (questo vale solo perché le particelle a e b hanno la stessa massa, essendo identiche). Riassumendo:

$$\begin{aligned} u'_{ax} &= u' & u'_{bx} &= -u' & \tilde{u}'_{ax} &= u' \cos \theta' & \tilde{u}'_{bx} &= -u' \cos \theta' \\ u'_{ay} &= 0 & u'_{by} &= 0 & \tilde{u}'_{ay} &= u' \sin \theta' & \tilde{u}'_{by} &= -u' \sin \theta' \end{aligned}$$

Passiamo ora nel SR K , con una TL con velocità relativa v in direzione x . Usiamo le formule di trasformazione (3.7) per determinare le velocità delle particelle, in particolare ricordiamo che nel SR del laboratorio la particella b è a riposo (come indicato nelle (4.2)) per cui

$$u_{bx} = \frac{u'_{bx} + v}{1 + vu'_{bx}/c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -u'_{bx} = u'$$

quindi ($\beta = v/c = u'/c$):

$$\begin{aligned} u_{ax} &= \frac{2c\beta}{1 + \beta^2} & u_{bx} &= 0 & \tilde{u}_{ax} &= \frac{c\beta(1 + \cos \theta')}{1 + \beta^2 \cos \theta'} & \tilde{u}_{bx} &= \frac{c\beta(1 - \cos \theta')}{1 - \beta^2 \cos \theta'} \\ u_{ay} &= 0 & u_{by} &= 0 & \tilde{u}_{ay} &= \frac{c\beta \sin \theta'}{\gamma(v)(1 + \beta^2 \cos \theta')} & \tilde{u}_{by} &= \frac{-c\beta \sin \theta'}{\gamma(v)(1 - \beta^2 \cos \theta')} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4.2b) si trova:

$$0 = \mathcal{M}(\tilde{u}_a) \frac{c\beta \sin \theta'}{\gamma(v)(1 + \beta^2 \cos \theta')} + \mathcal{M}(\tilde{u}_b) \frac{-c\beta \sin \theta'}{\gamma(v)(1 - \beta^2 \cos \theta')}$$

cioè

$$\frac{\mathcal{M}(\tilde{u}_a)}{1 + \beta^2 \cos \theta'} = \frac{\mathcal{M}(\tilde{u}_b)}{1 - \beta^2 \cos \theta'} \quad (4.4)$$

questa equazione è valida per ogni valore di θ' , in particolare per $\theta' = 0$ (che implica $\tilde{\mathbf{u}}_b = 0$, $\tilde{\mathbf{u}}_a = \mathbf{u}_a$) si trova:

$$\mathcal{M}(\tilde{u}_a(\theta' = 0)) = \mathcal{M}(u_a) = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \mathcal{M}(\tilde{u}_b(\theta' = 0)) = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \mathcal{M}(0) \quad (4.5)$$

Osserviamo che

$$\gamma(u_a) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_a^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_{ax}^2 + u_{ay}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2}}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}$$

quindi la relazione (4.5) si può riscrivere come

$$\mathcal{M}(u_a) = \gamma(u_a) \mathcal{M}(0) = m_0 \gamma(u_a) \quad (4.6)$$

Si osservi che la funzione \mathcal{M} dipende solo dal modulo della velocità e non dall'angolo θ' : la precedente relazione, ricavata per $\theta' = 0$, è quindi valida per ogni valore di θ' , come si può anche verificare andando a sostituire la (4.6) in (4.4).

Avendo così trovato la funzione \mathcal{M} della velocità, possiamo scrivere l'espressione cercata per la **quantità di moto relativistica di una particella di massa m_0 e velocità \mathbf{u}** come :

$$\boxed{\mathbf{p} = m_0 \gamma(u) \mathbf{u} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \quad (4.7)$$

La quantità di moto definita in questo modo ha tutte le proprietà desiderate: è compatibile con le TL (cioè la conservazione dell'impulso totale in un SR implica automaticamente la sua conservazione in ogni altro SR inerziale^[b]) e nel limite non relativistico $u \ll c$ coincide con la definizione classica.

L'equazione (4.7) è suscettibile di un'interessante interpretazione fisica: la quantità di moto relativistica può formalmente essere scritta nella forma classica $\mathbf{p} = m(u)\mathbf{u}$ a patto di introdurre una **massa relativistica** dipendente dalla velocità $m(u) = m_0\gamma(u)$. La massa $m_0 = m(0)$ calcolata a velocità nulla si chiama **massa a riposo** ed è un invariante relativistico.

Ricordiamo che la quadrivelocità (3.12) ha componenti spaziali $\mathbf{U} = \gamma(u)\mathbf{u}$ che differiscono dalla quantità di moto solo per la massa a riposo. Saremmo tentati allora di introdurre un nuovo quadrivettore proporzionale alla quadrivelocità:

$$p^\mu = m_0 U^\mu = (m_0 c \gamma(u), m_0 \gamma(u) \mathbf{u}), \quad (4.8)$$

le cui componenti spaziali coincidono con la quantità di moto relativistica, ma che significato dovremmo dare alla componente temporale? Esaminiamola attentamente, calcolando in particolare il limite non relativistico:

$$p^0 = m_0 U^0 = m_0 c \gamma(u) = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \xrightarrow{\frac{u}{c} \rightarrow 0} m_0 c \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right) = m_0 c + \frac{m_0 u^2}{2c} = m_0 c + \frac{E_{cin}^{NR}}{c}, \quad (4.9)$$

avendo introdotto l'espressione classica dell'energia cinetica $E_{cin}^{NR} = \frac{1}{2}m_0 u^2$. Questo suggerisce che la quantità $cp^0 - m_0 c^2$ (si noti che cp^0 ha le dimensioni di un'energia) potrebbe essere effettivamente la definizione relativistica dell'energia cinetica introdotta in (4.1). In effetti, ponendo $\mathcal{E}_{cin}(u) = m_0 c^2(\gamma(u) - 1)$ si verifica che la condizione (4.2c) è soddisfatta. Ma la conservazione dell'energia cinetica vale solo per una collisione elastica, come era appunto quella considerata nell'esempio precedente. Cosa succede quando la collisione non è elastica?

Consideriamo un esempio di urto anelastico: le particelle iniziali a e b (entrambe di massa a riposo m_0) collidono e formano una nuova particella c di massa (a riposo) M_0 (figura 4.2).

Nel SR del laboratorio la particella b è ferma ed a ha quantità di moto \mathbf{p}_a (velocità \mathbf{u}_a). Dopo l'urto la particella c si muove con velocità $\tilde{\mathbf{u}}_c$ ed ha impulso $\tilde{\mathbf{p}}_c$. Nel SR del centro di massa le due particelle iniziali hanno impulsi uguali ed opposti e la particella finale è ferma: la velocità relativa v tra i due SR è perciò uguale alla velocità \tilde{u}_c misurata nel laboratorio.

Scriviamo l'equazione per la conservazione dell'impulso nel SR del laboratorio, $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \tilde{\mathbf{p}}_c$, con $\mathbf{p}_a = m_0 \gamma(u_a) \mathbf{u}_a$, $\mathbf{p}_b = 0$, $\tilde{\mathbf{p}}_c = M_0 \gamma(\tilde{u}_c) \tilde{\mathbf{u}}_c = M_0 \gamma(v) \mathbf{v}$:

$$m_0 \gamma(u_a) \mathbf{u}_a = M_0 \gamma(v) \mathbf{v}.$$

^[b]In realtà la dimostrazione qui presentata è valida solo per una coppia di particelle identiche e due SR particolari: il laboratorio e il baricentro. Vedremo nel paragrafo 4.1.1 una dimostrazione più generale.

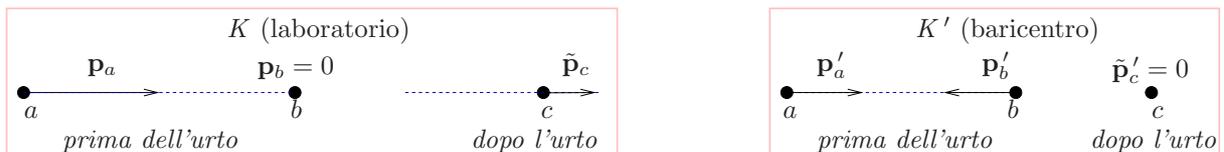


Figura 4.2 Urto inelastico di due particelle nel SR del laboratorio (sinistra) e nel SR del baricentro (destra).

Nel SR del centro di massa si ha $\mathbf{u}'_a = \mathbf{u}'$, $\mathbf{u}'_b = -\mathbf{u}'$, $\tilde{\mathbf{u}}'_c = 0$. Per determinare la relazione tra u' e le velocità delle particelle nello stato iniziale usiamo la legge di trasformazione delle velocità (si noti che il moto in questo esempio è unidimensionale, quindi possiamo assumere l'unica componente non nulla di tutte le velocità sia parallela all'asse x):

$$\begin{aligned} u_b &= \frac{u'_b + v}{1 + u'_b v/c^2} = \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} = 0 & \Rightarrow & u' = v \\ u_a &= \frac{u'_a + v}{1 + u'_a v/c^2} = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Consideriamo ora l'energia: nello stato iniziale, secondo il SR del centro di massa, entrambe le particelle hanno energia cinetica non nulla mentre la particella finale ha energia cinetica zero (è ferma!), è ovvio quindi che l'energia cinetica non si conserva ma questo non deve sorprenderci, dato che la collisione è inelastica: evidentemente l'energia cinetica iniziale si trasforma in energia di altro tipo (deve comunque valere la conservazione dell'energia totale). Guidati dalle considerazioni precedenti, *assumiamo* che l'energia di una particella di massa m_0 e velocità u sia data da $cp^0 = m_0\gamma(u)c^2$ e vediamo se questa ipotesi è compatibile con le TL. *Supponiamo quindi che cp^0 si conservi nel SR del laboratorio:*

$$m_0\gamma(u_a)c^2 + m_0\gamma(0)c^2 = M_0\gamma(v)c^2 \quad \text{cioè} \quad m_0(\gamma(u_a) + 1) = M_0\gamma(v), \quad (4.11)$$

il cui primo membro, usando la (4.10), diventa ($\beta = v/c$):

$$m_0(\gamma(u_a) + 1) = m_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2} \right)^2 \right]^{-1/2} + 1 \right\} = m_0 \frac{2}{1 - \beta^2} = 2m_0\gamma^2(v)$$

quindi si ottiene $2m_0\gamma(v) = M_0$ che, a meno della costante moltiplicativa c^2 (e ricordando che $v = u'$), esprime la *conservazione di cp^0 nel SR del baricentro:*

$$2m_0\gamma(u')c^2 = M_0\gamma(0)c^2 = M_0c^2.$$

Abbiamo quindi trovato che la conservazione della quantità cp^0 è compatibile con le TL: possiamo perciò definire l'**energia relativistica di una particella di massa m_0 e velocità u come** :

$$\boxed{E = cp^0 = m_0\gamma(u)c^2}. \quad (4.12)$$

Come abbiamo notato in precedenza (eq. (4.9)), il limite non relativistico di E non riproduce semplicemente l'energia cinetica classica, ma dà un termine aggiuntivo proporzionale alla massa a riposo della particella: in relatività la massa di un corpo contribuisce alla sua energia. Un corpo fermo ha infatti un'energia pari a

$$E_0 = m_0c^2.$$

Tale energia è detta anche **energia di riposo**.

Esaminando ancora il nostro esempio d'urto inelastico notiamo che nel baricentro si ha $\gamma(u') = M_0/2m_0$, da cui segue che $M_0 > 2m_0$ dato che $\gamma(u')$ è sicuramente maggiore di 1 (potrebbe essere esattamente 1 solo se $u' = 0$, ma allora non si avrebbe nessuna collisione). Concludiamo che, oltre all'energia cinetica, *anche la massa non si conserva in un processo inelastico*. Abbiamo però verificato che si conserva l'energia relativistica E : in altre parole la scomparsa di energia cinetica delle particelle iniziali si trasforma in energia di massa per la particella finale.

La legge di conservazione dell'energia in relatività quindi comprende sia l'energia cinetica che la massa e vale anche per processi in cui tali forme di energia si trasformano l'una nell'altra. È quindi più generale della fisica classica in cui si avevano, *separatamente*, le conservazioni dell'energia cinetica e della massa.

Nel limite $u \rightarrow c$ l'energia di un corpo tende ad infinito (a meno che la sua massa sia nulla, ma esamineremo questo caso a parte, nel paragrafo 4.1.4). Per velocità superluminali ($u > c$) l'energia è immaginaria: questa è un'altra conferma che nessun corpo materiale può muoversi con velocità maggiori di c .

Sottolineiamo che le definizioni adottate per l'impulso e l'energia di un corpo sono delle *ipotesi* e la loro validità viene dal confronto con l'esperimento. Tutta la prima metà del XX secolo e buona parte della seconda sono state dedicate alla verifica sperimentale di queste formule con un successo tale che ormai esse sono universalmente accettate.

Nel seguito con il termine "massa" di un corpo si intenderà la sua "massa a riposo" e si scriverà, per semplicità di notazione, m anziché m_0 .

4.1.1 Sistema di molte particelle

Gli esempi del paragrafo precedente possono sembrare artificiali e poco convincenti: in fondo abbiamo dimostrato che momento ed energia definiti da (4.7) e (4.12) si conservano per due tipi di collisioni particolari e per due SR particolari, il centro di massa e il baricentro. Vogliamo ora estendere la verifica ad un esempio molto più generale.

Consideriamo un sistema composto da un numero N qualsiasi di particelle, con masse $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ e velocità iniziali $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$. Dopo un certo tempo, e dopo molteplici collisioni di tutti i tipi (sia elastiche che inelastiche), avremo un sistema finale costituito da M particelle con masse $\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_M\}$ e velocità $\{\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_M\}$. Le particelle dello stato finale possono differire sia in numero che in specie da quelle dello stato iniziale. Consideriamo due SR inerziali K e K' qualsiasi (cioè non coincidenti, necessariamente, con il centro di massa o il laboratorio) in moto relativo con velocità v : verifichiamo che *se il momento (4.7) e l'energia (4.12) si conservano in K allora si conservano anche in K'* .

Per dimostrarlo supponiamo dunque che l'impulso e l'energia si conservino nel SR K . Possiamo quindi scrivere :

$$\mathbf{P}_{(in)} = \mathbf{P}_{(fin)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u_i) \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^M \tilde{m}_j \gamma(\tilde{u}_j) \tilde{\mathbf{u}}_j \quad (4.13a)$$

$$E_{(in)} = E_{(fin)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u_i) c^2 = \sum_{j=1}^M \tilde{m}_j \gamma(\tilde{u}_j) c^2 . \quad (4.13b)$$

Le velocità nel SR K' sono date dalle equazioni (3.9); faremo inoltre uso della (3.14) scritta nella forma

$$\gamma(u'_i) = \gamma(v) \gamma(u_i) \left(1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) .$$

La componente dell'impulso totale iniziale parallela alla velocità del moto relativo \mathbf{v} nel SR K' è :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_{(in)\parallel} &= \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u'_i) \mathbf{u}'_{i\parallel} = \sum_{i=1}^N m_i \gamma(v) \gamma(u_i) \left(1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \frac{\mathbf{u}_{i\parallel} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \\ &= \gamma(v) \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u_i) \mathbf{u}_{i\parallel} - \gamma(v) \mathbf{v} \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u_i) = \gamma(v) \mathbf{P}_{(in)\parallel} - \gamma(v) \frac{\mathbf{v}}{c^2} E_{(in)} ; \end{aligned}$$

per la componente trasversa si ha

$$\mathbf{P}'_{(in)\perp} = \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u'_i) \mathbf{u}'_{i\perp} = \sum_{i=1}^N m_i \gamma(v) \gamma(u_i) \left(1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \frac{\mathbf{u}_{i\perp}}{\gamma(v) \left(1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} = \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u_i) \mathbf{u}_{i\perp} = \mathbf{P}_{(in)\perp}$$

e per l'energia iniziale:

$$E'_{(in)} = \sum_{i=1}^N m_i \gamma(u'_i) c^2 = \sum_{i=1}^N m_i c^2 \gamma(v) \gamma(u_i) \left(1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) = \gamma(v) E_{(in)} - \gamma(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_{(in)} .$$

Per lo stato finale valgono espressioni analoghe :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_{(fin)\parallel} &= \gamma(v) \mathbf{P}_{(fin)\parallel} - \gamma(v) \frac{\mathbf{v}}{c^2} E_{(fin)} & \mathbf{P}'_{(fin)\perp} &= \mathbf{P}_{(fin)\perp} \\ E'_{(fin)} &= \gamma(v) E_{(fin)} - \gamma(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_{(fin)} . \end{aligned}$$

Dall'ipotesi $\mathbf{P}_{(in)} = \mathbf{P}_{(fin)}$ (che vale separatamente per le componenti parallela e perpendicolare a \mathbf{v}) e $E_{(in)} = E_{(fin)}$ si ottiene immediatamente :

$$\mathbf{P}'_{(in)} = \mathbf{P}'_{(fin)} \quad \text{e} \quad E'_{(in)} = E'_{(fin)}$$

che esprimono la conservazione del momento e dell'energia anche nel SR K' . Abbiamo quindi verificato che l'energia e l'impulso definiti secondo le (4.7) e (4.12) sono compatibili con le TL.

4.1.2 Quadrimpulso

Siamo riusciti a dare un'interpretazione fisica convincente della componente temporale del quadrivettore p^μ introdotto nella (4.8): essa è proporzionale all'energia relativistica. Possiamo perciò definire il **quadrimpulso** di una particella di massa a riposo m e velocità \mathbf{u} come:

$$\boxed{p^\mu = mU^\mu = (m\gamma(u)c, m\gamma(u)\mathbf{u}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)} . \quad (4.14)$$

Esso è un quadrivettore, significa che si trasforma, da un SR K ad un altro con velocità v parallela a x come :

$$\begin{cases} p'_0 = \gamma (p_0 - \beta p_x) & \text{cioè} & E' = \gamma (E - vp_x) \\ p'_x = \gamma (p_x - \beta p_0) & \text{cioè} & p'_x = \gamma (p_x - \frac{v}{c^2} E) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases} \quad (4.15)$$

Si noti che gli impulsi e le energie totali (iniziale e finale) dell'insieme di particelle considerato nel paragrafo precedente si trasformano proprio in questo modo.

Le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, che nella Meccanica Classica erano distinte, vengono ora riassunte dall'unica **legge di conservazione del quadrimpulso**.

La norma del quadrimpulso è:

$$p^\mu p_\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 \gamma(u)^2 c^2 - m^2 \gamma(u)^2 \mathbf{u}^2 = m^2 c^2 , \quad (4.16)$$

quindi il quadrimpulso è un vettore di tipo-tempo per una particella massiva, mentre è di tipo-luce per una particella a massa nulla.

4.1.3 Formule fondamentali

Riassumiamo le definizioni della quantità di moto ed energia relativistiche per una particella di massa (a riposo) m e velocità \mathbf{u} :

$$\boxed{\mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{u}} \quad \boxed{E = m\gamma(u)c^2} .$$

Dall'equazione (4.16) si ricava che l'energia relativistica si scrive anche nella seguente forma:

$$\boxed{E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}}; \quad (4.17)$$

dalla precedente equazione è evidente che l'energia di una particella con massa non nulla è sempre maggiore di $c|\mathbf{p}|$. Da queste definizioni si ricavano le seguenti relazioni:

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{E}{c} \boldsymbol{\beta}} \quad \boxed{\boldsymbol{\beta} = \frac{c\mathbf{p}}{E}} \quad \boxed{\gamma = \frac{E}{mc^2}}. \quad (4.18)$$

In particolare la seconda equazione esprime in modo matematico che la velocità di una particella con massa non nulla è sempre minore di c . Data una qualsiasi particella in moto in un determinato SR, le formule precedenti ci dicono quale sia la velocità relativa di un altro SR inerziale in cui essa è a riposo: tale SR, per una particella di massa non nulla, esiste sempre. L'energia cinetica relativistica è definita come

$$E_{cin} = E - mc^2 = mc^2(\gamma(u) - 1), \quad (4.19)$$

tuttavia tale quantità non ha un ruolo centrale in relatività, come lo aveva in fisica classica. La ragione è che gran parte delle interazioni tra particelle elementari ad alte energie (cioè in "regime relativistico"), sono inelastiche: l'energia cinetica e la massa (a riposo) quindi non si conservano, ma si conserva invece l'energia (4.12) o (4.17). Il concetto di energia cinetica, in relatività, è quindi di scarsa utilità pratica.

4.1.4 Il fotone

In natura esistono particelle di massa a riposo nulla. Le più comuni sono i **fotoni**: essi sono *quanti di luce*, costituiscono cioè l'aspetto corpuscolare della luce. Dalla (4.17) si ricava

$$\boxed{E = |\mathbf{p}|c} \quad \text{o anche} \quad \boxed{|\mathbf{p}| = \frac{E}{c}}. \quad (4.20)$$

Come vedremo in seguito, l'energia di un fotone è proporzionale alla sua frequenza :

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}} \quad (4.21)$$

e l'impulso è dato da

$$\boxed{|\mathbf{p}| = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}} \quad (4.22)$$

Il fattore di proporzionalità h è la *costante di Planck*, un'altra costante fondamentale della fisica che vale :

$$\boxed{h = 6.6261765 \times 10^{-34} J s}$$

Applicando le formule (4.18) al fotone, si vede che β è sempre uguale a 1, cioè *il fotone viaggia nel vuoto sempre con velocità esattamente uguale a c* . Da qui discende un'altra peculiarità del fotone: *non esiste un SR in cui esso è a riposo* dato che non è possibile effettuare una TL con γ infinito.

4.1.5 Ancora sull'effetto Doppler

Consideriamo una sorgente luminosa T in moto con velocità v in direzione x nel SR K che passa ad una distanza d da un osservatore R fermo nell'origine, come illustrato in figura 4.3. Il SR K' solidale con la sorgente si muove verso destra con velocità v . Applichiamo le TL per il quadrimpulso (4.15), in particolare ci interessa determinare la trasformazione dell'energia della luce:

$$E' = \gamma(v) (E - \beta c p_x) = \gamma(v) (E - \beta c p \cos \theta) = \gamma(v) E (1 - \beta \cos \theta) ,$$

avendo usato la relazione tra energia ed impulso valida per i fotoni (che costituiscono la radiazione luminosa) data in eq. (4.20). Le energie E ed E' sono proporzionali, rispettivamente, alle frequenze ν e ν' osservate nel SR del ricevitore e nel SR solidale con la sorgente (si veda l'eq. (4.21)). Per uniformità con le notazioni del paragrafo 3.7 poniamo $\nu = \nu_R$ e $\nu' = \nu_T$ per cui l'equazione precedente si scrive come:

$$\boxed{\nu_R = \nu_T \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}} \quad (4.23)$$

Questa è la formula più generale dell'effetto Doppler, per una sorgente che si muove in direzione qualunque rispetto al ricevitore (θ è l'angolo tra la posizione della sorgente e la sua velocità, viste dall'osservatore). Le formule della sezione 3.7 si ottengono calcolando il limite $d \rightarrow 0$. Poiché $\sin \theta = d/r$, essendo r la distanza tra ricevitore e trasmettitore, si ha $\cos \theta = -x/r$ (si noti che quando la sorgente è a sinistra dell'origine x è negativo e $\theta < \pi/2$). Nel limite $d \rightarrow 0$ si ha $r \rightarrow |x|$, quindi $\cos \theta = -x/|x|$, e la formula precedente diventa:

$$\begin{aligned} \nu_R &= \nu_T \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \nu_T \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} && \text{per } x < 0, \text{ sorgente in avvicinamento} \\ \nu_R &= \nu_T \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = \nu_T \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} && \text{per } x > 0, \text{ sorgente in allontanamento} \end{aligned}$$

esattamente come la (3.25). Nel limite non relativistico, cioè per $\beta \ll 1$, si può trascurare β^2 e la (4.23) diventa :

$$\nu_R^{NR} = \frac{\nu_T}{1 - \beta \cos \theta} ,$$

in accordo con la (3.21) (con $v_R = 0$, $c_s = c$, $\theta = 0$).

Un caso particolare interessante della (4.23) è il cosiddetto **effetto Doppler trasversale** che si ottiene quando $\theta = \pi/2$, cioè nell'istante in cui la sorgente si trova nel punto più vicino all'osservatore (punto A in fig. 4.3): nel caso relativistico c'è variazione della frequenza per effetto del fattore di Lorentz: $\nu_R = \nu_T/\gamma$, mentre nel limite non relativistico si ha $\nu_R = \nu_T$. L'effetto Doppler trasversale è stato verificato sperimentalmente confermando la formula relativistica.

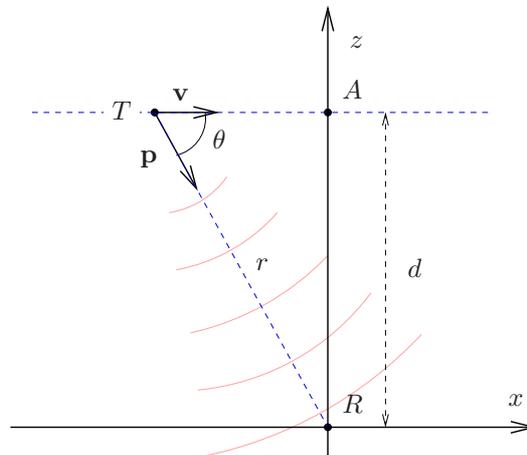


Figura 4.3 Effetto Doppler in direzione qualsiasi.

In figura 4.4 sono rappresentati i risultati ottenuti con la formula (4.23) per diversi valori della velocità relativa (in unità di c) tra sorgente e ricevitore e della distanza d di massimo avvicinamento. Nel grafico superiore la velocità relativa è piccola (il limite non relativistico darebbe una buona approssimazione), in quello inferiore invece è $c/2$. In quest'ultimo caso è evidente l'effetto Doppler trasversale: la frequenza ν_R non coincide con ν_T nel punto di massimo avvicinamento ($\theta = \pi/2$, cioè $x = 0$). La rapidità della variazione della frequenza diminuisce al crescere della distanza d . Nel limite $d = 0$ si ha una funzione discontinua in $x = 0$.

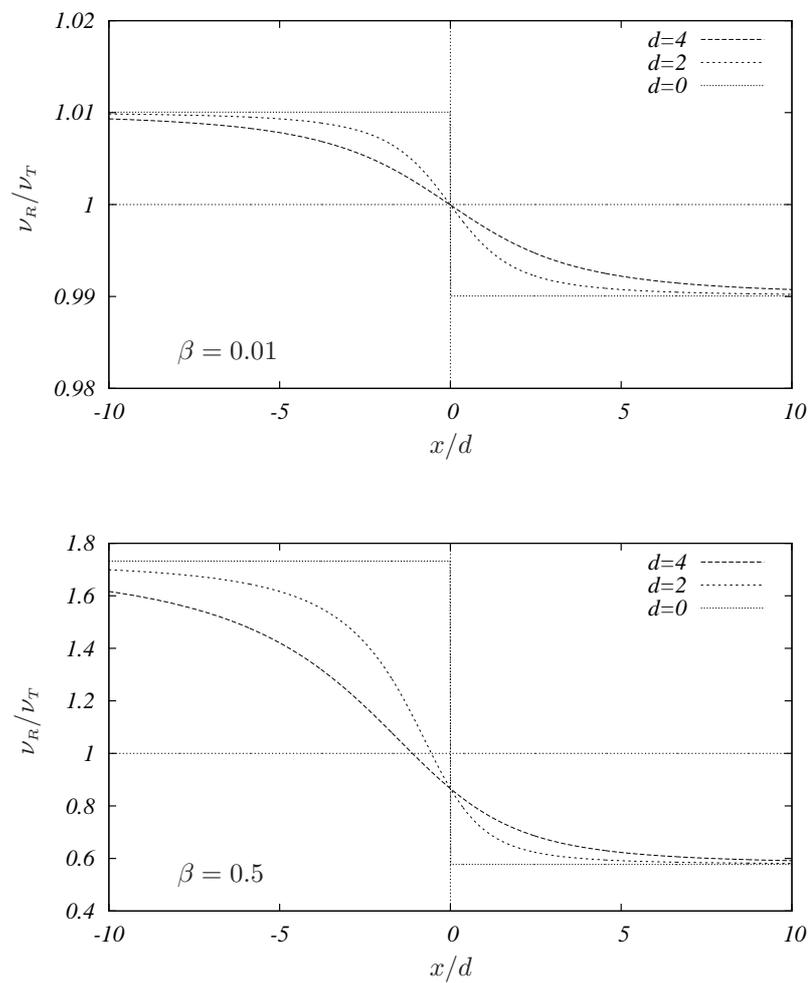


Figura 4.4 Rapporto ν_R/ν_T in funzione della posizione della sorgente in moto e della distanza d , per due diversi valori della velocità relativa

4.2 Esempi

4.2.1 Decadimento a due corpi

In natura esistono molti tipi di particelle subatomiche, la maggior parte di esse sono instabili: dopo un certo tempo decadono in due o più particelle di tipo diverso. I decadimenti a due corpi, cioè con due particelle nello stato finale, sono i più semplici da trattare. Consideriamo una particella di massa a riposo M che decade in due particelle di massa, rispettivamente, m_1 ed m_2 . Studieremo la reazione di decadimento in due SR inerziali: quello del centro di massa, in cui la particella iniziale è a riposo (quindi la quantità di moto è nulla e l'energia coincide con l'energia di riposo Mc^2), e il SR in cui la particella si muove in direzione x con quantità di moto P ed energia $E = \sqrt{c^2P^2 + M^2c^4}$ (quest'ultimo SR verrà chiamato nel seguito "SR del laboratorio").

Il passaggio da un SR all'altro si ottiene con una TL con $\beta = cP/E$ e $\gamma = E/Mc^2$. Le notazioni per gli impulsi delle particelle iniziali e finali nei due SR sono definite in fig. 4.5.

Nel SR K' del baricentro la quantità di moto iniziale è zero e tale dovrà essere anche quella finale, quindi $\tilde{\mathbf{p}}'_1 = -\tilde{\mathbf{p}}'_2 \equiv \tilde{\mathbf{p}}'$. In componenti:

$$\tilde{p}'_{1x} = \tilde{p}' \cos \theta' \quad \tilde{p}'_{1y} = \tilde{p}' \sin \theta' \quad \tilde{p}'_{2x} = -\tilde{p}' \cos \theta' \quad \tilde{p}'_{2y} = -\tilde{p}' \sin \theta'$$

La conservazione dell'energia nel SR del baricentro si scrive come:

$$Mc^2 = \tilde{E}'_1 + \tilde{E}'_2 = \sqrt{\tilde{p}'^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{\tilde{p}'^2 c^2 + m_2^2 c^4} = \tilde{E}'_1 + \sqrt{\tilde{E}'_1{}^2 + m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4}$$

da cui si ricava:

$$\tilde{E}'_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2}{2M} \quad \tilde{E}'_2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2}{2M} \quad (4.24a)$$

$$\tilde{p}' = \frac{1}{c} \sqrt{\tilde{E}'_1{}^2 - m_1^2 c^4} = \frac{c}{2M} \sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}, \quad (4.24b)$$

quindi, assegnate le masse M , m_1 e m_2 , nel SR del centro di massa restano univocamente fissate le energie e l'impulso delle particelle finali. L'unico grado di libertà è l'angolo θ' cioè la direzione (comune) degli impulsi $\tilde{\mathbf{p}}'_1$ e $\tilde{\mathbf{p}}'_2$ dato che nel SR del baricentro non esiste una direzione privilegiata (si noti che questo è vero solo per un decadimento a due corpi: nel caso le particelle dello stato finale siano più di due i loro impulsi ed energie nel centro di massa non sono più univocamente definiti perché ci sono più gradi di libertà).

Nel SR del laboratorio le particelle finali non hanno energie ed impulsi fissi. Utilizziamo le (inverse delle) TL (4.15) per calcolare gli impulsi in questo nuovo SR; per la particella 1 si ha:

$$\tilde{E}_1 = \gamma (\tilde{E}'_1 + \beta c \tilde{p}'_{1x}) = \gamma \left(\sqrt{\tilde{p}'^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \beta c \tilde{p}' \cos \theta' \right) \quad (4.25a)$$

$$\tilde{p}_{1x} = \gamma \left(\tilde{p}'_{1x} + \beta \frac{\tilde{E}'_1}{c} \right) = \gamma \left(\tilde{p}' \cos \theta' + \beta \sqrt{\tilde{p}'^2 c^2 + m_1^2 c^4} \right) \quad \tilde{p}_{1y} = \tilde{p}'_{1y} = \tilde{p}' \sin \theta' \quad (4.25b)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\tilde{p}_{1y}}{\tilde{p}_{1x}} = \frac{\tilde{p}' \sin \theta'}{\gamma \left(\tilde{p}' \cos \theta' + \beta \sqrt{\tilde{p}'^2 c^2 + m_1^2 c^4} \right)} = \frac{\sin \theta'}{\gamma \left(\cos \theta' + \beta \sqrt{1 + \frac{m_1^2 c^2}{\tilde{p}'^2}} \right)}, \quad (4.25c)$$

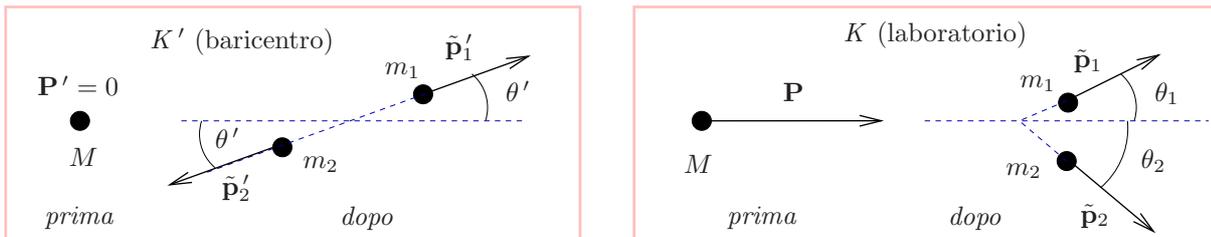


Figura 4.5 Decadimento a due corpi di una particella nel SR del baricentro (sinistra) e nel SR del laboratorio (destra).

e si può verificare che vale $\tilde{E}_1 = \sqrt{(\tilde{p}_{1x}^2 + \tilde{p}_{1y}^2)c^2 + m_1^2 c^4}$.

Le formule per la particella 2 sono analoghe. Come si vede chiaramente, nel SR del laboratorio le particelle finali non hanno energie ed impulsi univocamente definiti dalle masse a riposo perché dipendono anche dall'angolo θ' misurato nel SR del centro di massa. Per la particella 1, ad esempio, l'energia ed il modulo dell'impulso del laboratorio variano tra un valore minimo ad uno massimo corrispondenti, rispettivamente, a $\theta' = \pi$ e $\theta' = 0$. Si noti che, qualunque siano le masse delle particelle finali, vale sempre $M = \tilde{E}'_1 + \tilde{E}'_2 \geq m_1 + m_2$ (l'uguaglianza vale solo nel caso limite in cui le particelle figlie sono a loro volta a riposo nel SR del baricentro), cioè una parte dell'energia associata alla massa della particella che decade viene tramutata in energia cinetica delle particelle prodotte. Questo vale, in generale, per tutti i decadimenti qualunque sia il numero di particelle nello stato finale.

Le formule fin qui derivate hanno validità generale. Consideriamo ora alcuni casi particolari.

Nel caso in cui una delle particelle finali, per esempio la 2, sia un fotone, (questo processo è detto “*emissione di un fotone*”) le formule (4.24) diventano, ponendo $m_2 = 0$:

$$\tilde{p}' = \frac{c}{2M}(M^2 - m_1^2) \quad \tilde{E}'_1 = \frac{(M^2 + m_1^2)c^2}{2M} \quad \tilde{E}'_2 = \frac{(M^2 - m_1^2)c^2}{2M} = \tilde{p}'c .$$

Osserviamo che la particella 1 finale deve necessariamente avere una massa minore della particella iniziale: $m_1 < M$. Se fosse $m_1 = M$ il fotone finale avrebbe energia nulla, sarebbe perciò “fermo” nel SR solidale con la particella iniziale ma ciò non è possibile in quanto i fotoni si muovono con velocità c in tutti i SR. Si conclude che una particella che emette un fotone deve necessariamente trasformarsi in una particella di tipo diverso (con massa minore), un processo del tipo $e \rightarrow e\gamma$ (e = elettrone) non è possibile.

Un altro caso particolare è quello in cui le particelle finali hanno la stessa massa $m_1 = m_2 = m$; le formule (4.24) e (4.25) si semplificano:

$$\tilde{E}'_1 = \tilde{E}'_2 = \tilde{E}' = \frac{Mc^2}{2} \quad \tilde{p}' = \frac{c}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2} , \quad (4.26)$$

per il SR del baricentro, mentre nel laboratorio:

$$\tilde{p}_{1x} = \gamma \left(\tilde{p}'_{1x} + \beta \frac{\tilde{E}'_1}{c} \right) = \frac{M\gamma c}{2} \left(\beta + \cos \theta' \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \right) \quad (4.27a)$$

$$\tilde{p}_{1y} = \tilde{p}'_{1y} = \frac{Mc}{2} \sin \theta' \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \quad (4.27b)$$

$$\tilde{E}_1 = \gamma \left(\tilde{E}'_1 + \beta c \tilde{p}'_{1x} \right) = \frac{M\gamma c^2}{2} \left(1 + \beta \cos \theta' \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \right) \quad (4.27c)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta'}{\gamma \left(\cos \theta' + \beta \frac{M}{\sqrt{M^2 - 4m^2}} \right)} . \quad (4.27d)$$

Queste formule si applicano anche nel caso in cui le particelle finali abbiano massa nulla, siano cioè fotoni. Le (4.26) e (4.27) diventano:

$$\tilde{E}' = \frac{Mc^2}{2} \quad \tilde{p}' = \frac{Mc}{2} = \frac{\tilde{E}'}{c}$$

e nel SR del laboratorio si ha (scriviamo solo le formule relative al fotone 1, quelle per il secondo fotone si ottengono con la sostituzione $\theta' \rightarrow \pi + \theta'$):

$$\tilde{p}_{1x} = \gamma \tilde{p}' (\cos \theta' + \beta) \quad \tilde{p}_{1y} = \tilde{p}' \sin \theta' \quad \tilde{p}_1 = \gamma \tilde{p}' (1 + \beta \cos \theta') ,$$

$$\tilde{E}_1 = \gamma c \tilde{p}' (1 + \beta \cos \theta') = c \tilde{p}_1 \quad \tan \theta_1 = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + \beta)}$$

in accordo con le formule del paragrafo 4.1.3 e con l'invarianza della velocità della luce in tutti i SR inerziali: $\beta = c \tilde{p}' / \tilde{E}' = c \tilde{p}_1 / \tilde{E}_1 = 1$.

4.2.2 Urto elastico tra due particelle identiche

Consideriamo l'urto tra due particelle a e b di massa a riposo m . Useremo le notazioni definite in figura 4.6. Usando la legge di conservazione del quadrimpulso nel SR del centro di massa si ha:

$$P'^{\mu} = p'_a{}^{\mu} + p'_b{}^{\mu} = \tilde{p}'_a{}^{\mu} + \tilde{p}'_b{}^{\mu} . \quad (4.28)$$

Essendo i quadrimpulsi delle particelle quadrivettori di tipo tempo, anche il quadrimpulso totale è di tipo tempo. Calcoliamo la norma di P'^{μ} :

$$P'^{\mu} P'_{\mu} = P_0'^2 - \mathbf{P}'^2 = P_0'^2 = \frac{1}{c^2} (E'_a + E'_b)^2 = \frac{1}{c^2} (\tilde{E}'_a + \tilde{E}'_b)^2 , \quad (4.29)$$

essendo il tri-momento totale nullo, per definizione, nel centro di massa. La norma di un quadrivettore è un invariante relativistico, quindi possiamo definire la quantità scalare W^2 e la “massa invariante” M come:

$$W^2 \equiv c^4 M^2 \equiv c^2 P'^{\mu} P'_{\mu} ; \quad (4.30)$$

W coincide con l'energia totale misurata nel centro di massa (si noti che W^2 è definita positiva poiché è la norma di un quadrivettore di tipo-tempo).

Le energie e i moduli degli impulsi delle particelle nel SR del baricentro risultano univocamente determinati una volta assegnate la massa m e la variabile W :

$$p' \equiv |\mathbf{p}'_a| = |\mathbf{p}'_b| = |\tilde{\mathbf{p}}'_a| = |\tilde{\mathbf{p}}'_b| \quad \Rightarrow \quad W = E'_a + E'_b = \tilde{E}'_a + \tilde{E}'_b = 2E'_a$$

quindi

$$E' \equiv E'_a = E'_b = \tilde{E}'_a = \tilde{E}'_b = \frac{W}{2} = \frac{Mc^2}{2} \quad p' = \frac{c}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} . \quad (4.31)$$

È evidente l'analogia di queste formule con quelle ricavate nell'esempio precedente (4.26) : le particelle sia dello stato finale che di quello iniziale hanno impulsi ed energie, nel SR del centro di massa, identici a quelli dei prodotti di decadimento a due corpi di una particella fittizia di massa $M = W/c^2$. Si noti che la massa M non è uguale alla somma delle masse delle particelle.

È consuetudine definire il SR del laboratorio come il SR in cui una delle particelle iniziali, per esempio la b , è a riposo. In tal caso il passaggio dal SR del baricentro si ottiene con una TL in cui $\gamma = E'/mc^2 = M/2m$, $\beta = cp'/E' = \sqrt{1 - 4m^2/M^2}$. La condizione di conservazione del quadrimpulso nel SR del laboratorio si scrive come :

$$P^{\mu} = p_a{}^{\mu} + p_b{}^{\mu} = \tilde{p}_a{}^{\mu} + \tilde{p}_b{}^{\mu} .$$

La norma di P^{μ} è data da

$$P^{\mu} P_{\mu} = p_a^{\mu} p_{a\mu} + p_b^{\mu} p_{b\mu} + 2p_a^{\mu} p_{b\mu} = 2m^2 c^2 + 2mE_a$$

essendo la particella b inizialmente ferma nel laboratorio (si è fatto uso della (4.16)). La precedente equazione si può riscrivere utilizzando ancora l'invariante relativistico W :

$$W^2 = c^2 P^{\mu} P_{\mu} = 2m^2 c^4 + 2mc^2 E_a , \quad (4.32)$$

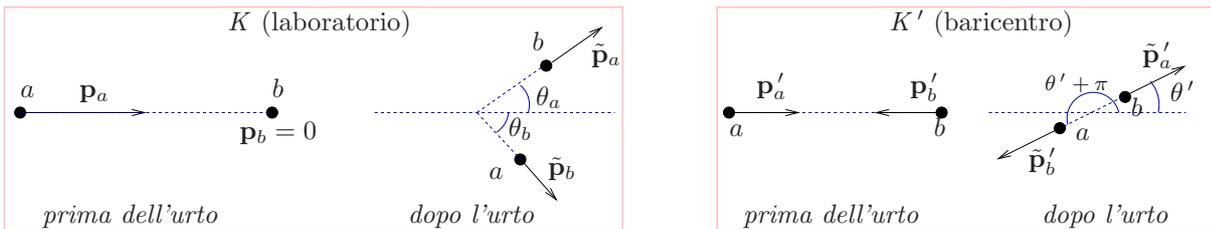


Figura 4.6 Urto di due particelle identiche nel SR del laboratorio (sinistra) e nel SR del baricentro (destra).

da cui si vede che W o, equivalentemente, la massa M della particella fittizia, dipende dall'energia iniziale, nel laboratorio, della particella incidente. Invertendo la relazione precedente possiamo scrivere:

$$E_a = \frac{W^2 - 2m^2c^4}{2mc^2} = c^2 \frac{M^2 - 2m^2}{2m}. \quad (4.33)$$

Le componenti degli impulsi nel SR del baricentro sono (supponiamo che la reazione avvenga nel piano xy):

$$\begin{aligned} p'_{ax} &= p' & p'_{bx} &= -p' & \tilde{p}'_{ax} &= \tilde{p}' \cos \theta' & \tilde{p}'_{bx} &= -\tilde{p}' \cos \theta' \\ p'_{ay} &= 0 & p'_{by} &= 0 & \tilde{p}'_{ay} &= \tilde{p}' \sin \theta' & \tilde{p}'_{by} &= -\tilde{p}' \sin \theta'. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Le energie e gli impulsi nel SR del laboratorio si ottengono con semplici TL :

$$\begin{aligned} p_{ax} &= \gamma \left(p'_{ax} + \beta \frac{E'_a}{c} \right) = 2\gamma p' = \frac{W\sqrt{M^2 - 4m^2}}{2mc} & p_{ay} &= p'_{ay} = 0 \\ \tilde{p}_{ax} &= \gamma \left(\tilde{p}'_{ax} + \beta \frac{\tilde{E}'_a}{c} \right) = \frac{W\sqrt{M^2 - 4m^2}}{4mc} (1 + \cos \theta') & \tilde{p}_{ay} &= \tilde{p}'_{ay} = p' \sin \theta' = c \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{2} \sin \theta' \\ \tilde{p}_{bx} &= \gamma \left(\tilde{p}'_{bx} + \beta \frac{\tilde{E}'_b}{c} \right) = \frac{W\sqrt{M^2 - 4m^2}}{4mc} (1 - \cos \theta') & \tilde{p}_{by} &= \tilde{p}'_{by} = -p' \sin \theta' = -c \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{2} \sin \theta'. \end{aligned}$$

L'energia finale della particella a nel SR del laboratorio dipende dall'angolo θ' :

$$\tilde{E}_a = \gamma (\tilde{E}'_a + \beta c \tilde{p}'_{ax}) = \frac{M^2 + (M^2 - 4m^2) \cos \theta'}{4m} c^2$$

e varia da un valore minimo $E_{min} = mc^2$, che si ottiene per $\theta' = \pi$, e corrisponde al caso in cui la particella incidente si ferma a seguito dell'urto trasferendo interamente la propria energia cinetica all'altra particella, ad un valore massimo $E_{max} = E_a$, che si ha per $\theta' = 0$ e corrisponde al caso in cui la particella incidente prosegue indisturbata (in pratica non c'è stata alcuna interazione durante l'urto). L'energia della particella b ha un'espressione analoga, basta sostituire $\theta' \rightarrow \pi + \theta'$.

Gli impulsi finali delle particelle nel SR del laboratorio formano con l'asse x degli angoli dati da :

$$\begin{aligned} \tan \theta_a &= \frac{\tilde{p}_{ay}}{\tilde{p}_{ax}} = \frac{2mc^2}{W} \frac{\sin \theta'}{1 + \cos \theta'} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + \cos \theta')} \\ \tan \theta_b &= \frac{-\tilde{p}_{by}}{\tilde{p}_{bx}} = \frac{2mc^2}{W} \frac{\sin \theta'}{1 - \cos \theta'} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 - \cos \theta')} \end{aligned}$$

e l'angolo di apertura tra le traiettorie delle due particelle nel laboratorio $\theta = \theta_a + \theta_b$ risulta :

$$\tan \theta = \frac{\tan \theta_a + \tan \theta_b}{1 - \tan \theta_a \tan \theta_b} = \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1) \sin \theta'}.$$

Nel limite non relativistico $\gamma \rightarrow 1$ e $\tan \theta \rightarrow \infty$, cioè l'angolo di apertura è $\pi/2$ e si ritrova un risultato noto della meccanica classica (si noti che questa conclusione vale solo se le due particelle hanno masse uguali). Nel regime relativistico invece l'angolo di apertura risulta sempre minore di 90° , tranne nei casi particolari di $\theta' = 0$ e $\theta' = \pi$, in cui una delle due particelle è ferma nel SR del laboratorio anche dopo l'urto e l'altra prosegue con la stessa velocità iniziale della particella incidente.

4.2.3 Urto elastico tra due particelle diverse. Effetto Compton

Consideriamo l'urto tra due particelle a e b di massa a riposo, rispettivamente, m_a e m_b . Come nell'esempio precedente, useremo le notazioni della figura 4.6. Le equazioni (4.28) e (4.29) sono valide anche in questo caso (ma si avrà $E'_a \neq E'_b$, $\tilde{E}'_a \neq \tilde{E}'_b$) e permettono di ricavare le energie e i moduli degli impulsi delle particelle nel

SR del baricentro in funzione delle masse m_a ed m_b e della variabile W (introdotta, insieme alla massa fittizia M , come nell'esempio precedente, eq. (4.30)) :

$$\begin{aligned}
 p' &\equiv |\mathbf{p}'_a| = |\mathbf{p}'_b| = |\tilde{\mathbf{p}}'_a| = |\tilde{\mathbf{p}}'_b| && \Rightarrow && W = E'_a + E'_b = \tilde{E}'_a + \tilde{E}'_b \\
 W = E'_a + E'_b &= \sqrt{p'^2 c^2 + m_a^2 c^4} + \sqrt{p'^2 c^2 + m_b^2 c^4} = E'_a + \sqrt{E'^2_a + m_b^2 c^4 - m_a^2 c^4} \\
 E'_a = \tilde{E}'_a &= \frac{W^2 + m_a^2 c^4 - m_b^2 c^4}{2W} = \frac{c^2(M^2 + m_a^2 - m_b^2)}{2M} \\
 E'_b = \tilde{E}'_b &= \frac{W^2 - m_a^2 c^4 + m_b^2 c^4}{2W} = \frac{c^2(M^2 - m_a^2 + m_b^2)}{2M} \\
 p' = \tilde{p}' &= \frac{c}{2M} \sqrt{[M^2 - (m_a + m_b)^2][M^2 - (m_a - m_b)^2]}
 \end{aligned}$$

Le componenti degli impulsi, nel SR del baricentro, prima e dopo l'urto sono definiti ancora dalle equazioni (4.34). Si noti che nel SR del baricentro (e solo in esso) l'energia iniziale di ogni particella (e quindi anche il modulo dell'impulso) è uguale alla sua energia finale.

Nel SR del laboratorio la particella b è inizialmente a riposo: tutti gli impulsi e le energie si ottengono tramite TL come visto negli esempi precedenti.

È particolarmente interessante il caso in cui la particella incidente ha massa nulla (fotone); le equazioni precedenti scritte con $m_a = 0$ si semplificano :

$$E'_a = c^2 \frac{M^2 - m_b^2}{2M} \quad E'_b = c^2 \frac{M^2 + m_b^2}{2M} \quad p' = \frac{c}{2M} (M^2 - m_b^2) = \frac{E'_a}{c} \quad (4.35)$$

Il fattore di Lorentz γ e la velocità relativa (in unità di c) β per il passaggio dal SR del baricentro a quello del laboratorio sono dati da :

$$\gamma = \frac{E'_b}{m_b c^2} = \frac{M^2 + m_b^2}{2m_b M} \quad \beta = \frac{cp'}{E'_b} = \frac{E'_a}{E'_b}. \quad (4.36)$$

Le energie e gli impulsi nel SR del laboratorio si ottengono mediante TL (dalle (4.34) e (4.35)); per l'energia iniziale della particella incidente (fotone) si ha :

$$E_a = \gamma(E'_a + \beta cp'_{ax}) = \gamma E'_a (1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} E'_a \quad (\text{effetto Doppler}) \quad (4.37)$$

Usando nuovamente l'invariante relativistico $W^2 = c^4 M^2 = c^2 P^\mu P_\mu = m_b^2 c^4 + 2m_b c^2 E_a$ si ha anche :

$$E_a = c^2 \frac{M^2 - m_b^2}{2m_b} = \frac{M}{m_b} E'_a \quad \text{quindi} \quad \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \left(\frac{E_a}{E'_a} \right)^2 = \frac{M^2}{m_b^2}. \quad (4.38)$$

Per lo stato finale :

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_a &= \gamma(\tilde{E}'_a + \beta c \tilde{p}'_{ax}) = \gamma \tilde{E}'_a (1 + \beta \cos \theta') = \gamma E'_a (1 + \beta \cos \theta') \\
 \tilde{p}_{ax} &= \gamma(\tilde{p}'_{ax} + \beta \frac{\tilde{E}'_a}{c}) = \gamma \frac{\tilde{E}'_a}{c} (\cos \theta' + \beta) = \gamma \frac{E'_a}{c} (\cos \theta' + \beta) \\
 \tilde{p}_{ay} &= \tilde{p}'_{ay} = \frac{\tilde{E}'_a}{c} \sin \theta' = \frac{E'_a}{c} \sin \theta' \\
 \tilde{p}_a &= \sqrt{\tilde{p}_{ax}^2 + \tilde{p}_{ay}^2} = \gamma \frac{E'_a}{c} (1 + \beta \cos \theta') = \frac{\tilde{E}_a}{c}
 \end{aligned}$$

(si noti che per la particella a massa nulla vale la relazione (4.20) sia nello stato iniziale che in quello finale). L'angolo di diffusione della particella incidente nel SR del laboratorio è dato da :

$$\cos \theta_a = \frac{\tilde{p}_{ax}}{\tilde{p}_a} = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \quad \text{da cui} \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta_a - \beta}{1 - \beta \cos \theta_a}$$

inoltre

$$1 + \beta \cos \theta' = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta_a} .$$

Possiamo perciò scrivere la relazione tra l'energia finale e iniziale della particella incidente, misurate nel laboratorio, come :

$$\tilde{E}_a = \gamma \tilde{E}'_a (1 + \beta \cos \theta') = \gamma E'_a (1 + \beta \cos \theta') = \gamma \frac{E_a}{\gamma(1 + \beta)} \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta_a} = E_a \frac{1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_a} , \quad (4.39)$$

avendo fatto uso della (4.37).

Si è osservato sperimentalmente che un fotone di lunghezza d'onda λ_i che incide su una particella di massa m a riposo (generalmente si tratta di un elettrone) viene deflesso e la lunghezza d'onda finale dipende dall'angolo di diffusione θ . Questo fenomeno è noto come **effetto Compton** e si può spiegare con le formule appena trovate. Le lunghezze d'onda iniziale λ_i e finale λ_f sono infatti correlate, rispettivamente, alle energie E_a ed \tilde{E}_a mediante l'equazione (4.21) :

$$\lambda_i = \frac{hc}{E_a} \quad \lambda_f = \frac{hc}{\tilde{E}_a}$$

per cui (ponendo, per semplicità di notazione, $\theta_a = \theta$ e $m_b = m$) dalla (4.39) si ottiene :

$$\frac{hc}{\lambda_f} = \frac{hc}{\lambda_i} \frac{1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \lambda_f = \lambda_i \frac{1 - \beta \cos \theta}{1 - \beta} .$$

La variazione della lunghezza d'onda è data da

$$\lambda_f - \lambda_i = \lambda_i \left(\frac{1 - \beta \cos \theta}{1 - \beta} - 1 \right) = \frac{hc}{E_a} \frac{\beta}{1 - \beta} (1 - \cos \theta) ;$$

usando le equazioni (4.35), (4.36) e l'espressione di E_a data in (4.38), si ottiene

$$hc \frac{1}{E_a} \frac{\beta}{1 - \beta} = hc \frac{m}{ME'_a} \frac{E'_a}{E'_b - E'_a} = hc \frac{m}{M} \frac{2M}{2m^2} = \frac{h}{mc}$$

che sostituita nell'equazione precedente dà :

$$\boxed{\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)} . \quad (4.40)$$

Questa è l'equazione che descrive l'effetto Compton, in ottimo accordo con i dati sperimentali. Alla stessa formula si può arrivare in modo molto più rapido nel modo seguente: siano p^μ e k^μ i quadrimpulsi iniziali dell'elettrone (cioè della particella massiva) e del fotone. I quadrimpulsi finali siano \tilde{p}^μ e \tilde{k}^μ . Dalla legge di conservazione del quadrimpulso si ha $p^\mu + k^\mu = \tilde{p}^\mu + \tilde{k}^\mu$, che implica :

$$\tilde{p}^\mu = p^\mu + k^\mu - \tilde{k}^\mu ,$$

da cui, calcolando la norma di entrambi i membri e ricordando la formula (4.16) che dà $p^\mu p_\mu = \tilde{p}^\mu \tilde{p}_\mu = m^2 c^2$, per la particella massiva, e $k^\mu k_\mu = \tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = 0$, per il fotone,

$$m^2 c^2 = m^2 c^2 + 2p^\mu (k_\mu - \tilde{k}_\mu) - 2k^\mu \tilde{k}_\mu \quad \Rightarrow \quad p^\mu (k_\mu - \tilde{k}_\mu) = k^\mu \tilde{k}_\mu . \quad (4.41)$$

Nel SR del laboratorio l'elettrone iniziale è fermo per cui $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$, e i quadrimpulsi iniziale e finale del fotone possono essere definiti come (usando le relazioni del paragrafo 4.1.4):

$$k^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{k} \right) = \left(\frac{h}{\lambda_i}, \frac{h}{\lambda_i}, 0, 0 \right) \quad \tilde{k}^\mu = \left(\frac{\tilde{E}}{c}, \tilde{\mathbf{k}} \right) = \left(\frac{h}{\lambda_f}, \frac{h}{\lambda_f} \cos \theta, \frac{h}{\lambda_f} \sin \theta, 0 \right) ,$$

che sostituiti nella (4.41) danno la (4.40).

4.3 Forza

Avendo definito il quadripulso, è immediato definire anche la **quadriforza**, ottenuta derivando rispetto al tempo proprio:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \left(c \frac{d(m\gamma)}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \gamma \left(c \frac{d(m\gamma)}{dt}, \mathbf{F} \right) .$$

Nelle componenti spaziali della quadriforza compare il tri-vettore $\mathbf{F} = d(m\gamma(u)\mathbf{u})/dt$ che è una ovvia estensione relativistica della forza classica.

Limitandoci a considerare casi in cui la massa a riposo m non cambia durante il moto, troviamo che la quadriforza è proporzionale alla quadriaccelerazione quindi la (3.19) implica $U^\mu \mathcal{F}_\mu = 0$, cioè:

$$(\gamma c)^2 \frac{d(m\gamma)}{dt} - \gamma^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(m\gamma)}{dt} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c^2} , \quad (4.42)$$

quindi la quadriforza si può scrivere come:

$$\mathcal{F}^\mu = \gamma(u) \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c}, \mathbf{F} \right) .$$

In meccanica classica la forza \mathbf{F} è sempre parallela all'accelerazione \mathbf{a} , ora non è più così, a causa del fattore γ :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\gamma(u)\mathbf{u}) = m\gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c} \frac{\mathbf{u}}{c} + m\gamma \mathbf{a}$$

da cui è evidente che forza e accelerazione sono paralleli solo se la velocità istantanea \mathbf{u} è nulla, o se \mathbf{u} è perpendicolare ad \mathbf{a} (moto circolare) o se \mathbf{u} è parallela ad \mathbf{a} (moto lineare).

Le leggi di trasformazione delle componenti spaziali della forza tra SR inerziali si ottengono in modo analogo a quanto fatto per la velocità e l'accelerazione. Dalle definizioni

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

ed usando le (4.15) si ha, per la componente parallela al moto relativo :

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\frac{dp'_x}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\gamma \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} \right)}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} ;$$

dalla (4.42) si ha $\frac{dE}{dt} = \frac{d(mc^2\gamma)}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$, quindi

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} . \quad (4.43)$$

Per le altre due componenti invece si ha:

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{\frac{dp'_y}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dp_y}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} \quad F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} . \quad (4.44)$$

Nel caso particolare in cui nel SR K la velocità istantanea \mathbf{u} del corpo è nulla le precedenti relazioni si riducono a

$$F'_x = F_x \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma} \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma} . \quad (4.45)$$

4.3.1 Moto in un campo di forza uniforme e costante

Consideriamo una particella di massa m soggetta ad un campo di forza uniforme e costante in direzione y : $\mathbf{F} = (0, f, 0)$. Risolviamo le equazioni differenziali per le componenti spaziali dell'impulso, supponendo che la particella sia inizialmente in moto in direzione x :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = f \\ \dot{p}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = p_{0x} = p_0 \\ p_y = ft + p_{0y} = ft \\ p_z = p_{0z} = 0 \end{cases}$$

avendo posto per semplicità le condizioni iniziali $p_{0x} = p_0$ e $p_{0y} = p_{0z} = 0$. L'energia della particella in funzione del tempo è

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p_0^2 c^2 + f^2 c^2 t^2 + m^2 c^4} = \sqrt{E_0^2 + f^2 c^2 t^2},$$

essendo $E_0 \equiv \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}$ l'energia della particella all'istante $t = 0$. Dalle (4.18) ricaviamo la velocità:

$$\mathbf{u} = c\boldsymbol{\beta} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}$$

quindi

$$u_x = \frac{c^2 p_x}{E} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E_0^2 + f^2 c^2 t^2}} \quad u_y = \frac{c^2 p_y}{E} = \frac{c^2 f t}{\sqrt{E_0^2 + f^2 c^2 t^2}} \quad u_z = \frac{c^2 p_z}{E} = 0.$$

Notiamo che la componente x della velocità diminuisce con il passare del tempo, nonostante la forza agisca solo in direzione y ! In questo esempio quindi l'accelerazione non è parallela alla forza. La componente u_y invece tende a c per $t \rightarrow \infty$. Le componenti dell'accelerazione si ottengono calcolando la derivata della velocità: $a_x = du_x/dt$ è negativa (è nulla solo nell'istante $t = 0$), indicando che la particella rallenta in direzione x ; $a_y = du_y/dt$ invece è sempre positiva.

Il modulo della velocità è dato da:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c \sqrt{\frac{c^2 p_0^2 + f^2 c^2 t^2}{E_0^2 + f^2 c^2 t^2}}$$

e tende a c per $t \rightarrow \infty$; si noti che se $m = 0$ il modulo della velocità u è sempre uguale a c .

Integriamo nuovamente per ottenere le componenti del vettore posizione in funzione del tempo:

$$\frac{dx}{dt} = u_x \quad \Rightarrow \quad x = \int_0^t dt' \frac{p_0 c^2}{\sqrt{E_0^2 + f^2 c^2 t'^2}} = \frac{p_0 c}{f} \operatorname{arcsinh} \frac{c f t}{E_0}$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y \quad \Rightarrow \quad y = \int_0^t dt' \frac{c^2 f t'}{\sqrt{E_0^2 + f^2 c^2 t'^2}} = \frac{\sqrt{E_0^2 + f^2 c^2 t^2} - E_0}{f}$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_0 = \text{costante (il moto avviene in un piano parallelo al piano } xy \text{)}.$$

Eliminando t tra le prime due equazioni si ottiene la traiettoria descritta dalla particella :

$$t = \frac{E_0}{c f} \sinh \frac{f x}{p_0 c} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{E_0}{f} \left(\cosh \frac{f x}{p_0 c} - 1 \right).$$

Nel limite non relativistico ($c \rightarrow \infty$) l'equazione della traiettoria diventa

$$y = \frac{m f x^2}{2 p_0^2} = \frac{f x^2}{2 m v_0^2},$$

cioè la ben nota parabola.

Capitolo 5

Relatività ed elettromagnetismo

Contenuto

5.1	Richiami sulle equazioni di Maxwell	91
5.2	Forma covariante dell'Elettromagnetismo	93
5.2.1	Invarianza della carica elettrica. Quadricorrente	93
5.2.2	Forma covariante delle Equazioni di Maxwell	94
5.3	Trasformazione del campo elettromagnetico	97
5.3.1	Invarianti del campo elettromagnetico	98
5.3.2	Dimostrazioni alternative della legge di trasformazione del campo elettromagnetico	99
5.3.3	Trasformazione dei campi per boost in direzione qualsiasi	101
5.4	Esempi	102
5.4.1	Covarianza delle equazioni di Maxwell	102
5.4.2	Esempio di trasformazione di campi elettrici e magnetici	103
5.4.3	Forza di Lorentz	104
5.4.4	Campo generato da una carica puntiforme in moto uniforme	104
5.4.5	Forza tra cariche in moto	106
5.4.6	Campo generato da una distribuzione lineare di carica	107
5.4.7	Carica elettrica nel campo di un filo percorso da corrente	108
5.4.8	Prima legge di Laplace	109

5.1 Richiami sulle equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell microscopiche in presenza di cariche e correnti nel vuoto sono (nel sistema MKS razionalizzato) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{leggi di Coulomb e Gauss} \quad (5.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{non esistenza di monopoli magnetici} \quad (5.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{leggi di Faraday, Henry, Lenz} \quad (5.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{legge di Ampère-Maxwell} \quad (5.1d)$$

essendo ϵ_0 la **costante dielettrica** (o **permittività**) **del vuoto** e μ_0 la **permeabilità magnetica del vuoto**; la velocità della luce si esprime come $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Le sorgenti dei campi elettromagnetici sono ρ (densità di carica elettrica) e \mathbf{j} (densità di corrente elettrica).

I campi \mathbf{E} e \mathbf{B} si possono esprimere in termini del **potenziale scalare** ϕ e del **potenziale vettore** \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (5.2)$$

Tali potenziali non sono univocamente definiti, infatti i nuovi potenziali $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\mathbf{A}}$, ottenuti dai precedenti con una trasformazione del tipo :

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial\xi}{\partial t} \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\xi , \quad (5.3)$$

dove ξ è una funzione arbitraria (purché derivabile), generano gli stessi campi \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (5.4)$$

La (5.3) è detta **trasformazione di gauge** e l'equazione precedente esprime l'invarianza dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} per tali trasformazioni.

Con le definizioni (5.2) le equazioni di Maxwell omogenee, (5.1b) e (5.1c), sono identicamente soddisfatte, mentre le altre due, contenenti le sorgenti, diventano:

$$-\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (5.5a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} \right) , \quad (5.5b)$$

avendo usato l'identità, valida per un vettore \mathbf{a} qualsiasi: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a}$. Possiamo sfruttare la proprietà di invarianza di gauge dei campi elettromagnetici per semplificare queste equazioni: scegliamo una funzione ξ tale i nuovi potenziali soddisfino la relazione :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} \qquad \text{detta "condizione di Lorentz" o "gauge di Lorentz"} \quad (5.6)$$

(tale funzione ξ si ottiene risolvendo l'equazione $\square\xi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial\phi/\partial t$), cosicché le (5.5) diventano :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2} - \Delta\tilde{\phi} = \square\tilde{\phi} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{e} \qquad \square\tilde{\mathbf{A}} = \mu_0\mathbf{j} . \quad (5.7)$$

(l'operatore \square è stato definito in (2.41)). Queste equazioni, corredate dalle definizioni (5.2) e dalla condizione di Lorentz (5.6), sono perfettamente equivalenti alle equazioni di Maxwell (5.1).

La forza che agisce su una particella dotata di carica elettrica q che si muove con velocità \mathbf{u} in un campo elettromagnetico è la **forza di Lorentz**:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) . \quad (5.8)$$

Osserviamo che la forza di Lorentz è data dalla somma di due contributi: uno dovuto al campo elettrico $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ e l'altro al campo magnetico $\mathbf{F}_M = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ detti, rispettivamente, forza elettrica e forza magnetica.

Calcolando la divergenza della (5.1d) si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{I membro:} \quad & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 && \text{(per la definizione di } \nabla) \\ \text{II membro:} \quad & \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) && \text{(per la (5.1a))} \end{aligned}$$

si ricava così l'equazione di continuità :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.9)$$

che esprime la conservazione (locale) della carica elettrica.

Nel seguito del capitolo vedremo come dare forma invariante (o covariante) per TL a tutte queste equazioni.

5.2 Forma covariante dell'Elettromagnetismo

5.2.1 Invarianza della carica elettrica. Quadricorrente

La conservazione della carica elettrica è stata verificata sperimentalmente in molteplici occasioni, è quindi naturale postulare che essa valga anche in relatività. L'equazione (5.9) deve quindi valere in tutti i SR inerziali e deve essere possibile esprimerla in forma esplicitamente covariante, tale cioè da rendere evidenti le proprietà di trasformazione rispetto a TL delle grandezze che compaiono in essa.

Osserviamo innanzi tutto che la carica elettrica è un invariante relativistico, cioè la carica elettrica di una particella non dipende dal suo stato di moto. Un atomo è costituito da una parte centrale (nucleo) dotata di carica positiva (per la presenza, in esso, di protoni) e di un certo numero di elettroni (cariche negative) che ruotano attorno ad esso. In condizioni normali, il numero di elettroni uguaglia quello dei protoni e l'atomo è elettricamente neutro. Nell'atomo di idrogeno il protone, unico costituente del nucleo, si può considerare a riposo. In altri atomi i protoni del nucleo hanno energie cinetiche considerevoli: se la carica elettrica avesse una qualche dipendenza dallo stato di moto di una particella, non sarebbe possibile avere la neutralità elettrica in tutti gli atomi. Inoltre, esperimenti accurati sono stati eseguiti misurando la carica elettrica, mediante la forza di Lorentz, di particelle cariche in moto con velocità varie (anche prossime a c) in un campo elettromagnetico: si è effettivamente trovato che la carica elettrica è indipendente dalla velocità della particella.

Se la carica elettrica è un invariante relativistico, la densità elettrica ρ non può esserlo perché la contrazione della lunghezza di Lorentz altera il volume in cui la carica è contenuta. Sia ρ la densità di carica elettrica misurata, in un SR K , nell'elemento di volume spaziale d^3x : la carica elettrica in tale volumetto perciò è ρd^3x . In un altro SR K' , in moto rispetto al primo, la densità di carica è ρ' e l'elemento di volume corrispondente (ottenuto tramite TL) è d^3x' ma, in base al ragionamento precedente, la carica elettrica contenuta in tale volumetto spaziale è la stessa per entrambi i SR:

$$\rho' d^3x' = \rho d^3x \quad (5.10)$$

Un elemento di volume dello spazio-tempo è dato da $d^4x = dx^0 d^3x$ ed è un invariante relativistico, infatti :

$$d^4x' = \left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| d^4x = |\det \Lambda| d^4x = d^4x$$

(si veda la (2.44)) quindi

$$dx'^0 d^3x' = dx^0 d^3x$$

dal confronto di quest'ultima equazione con la (5.10) si ricava che ρ ha le stesse proprietà di trasformazione, per TL, della componente temporale di un quadrivettore.

Per vederlo in modo più esplicito consideriamo una singola particella di carica q a riposo nel SR K' ; se essa è contenuta nel volumetto d^3x' la densità di carica sarà $\rho' = q/d^3x'$: per evidenziare che si tratta della densità nel SR di riposo della carica useremo la notazione $\rho' \equiv \rho_0$. Nel SR K in cui la particella si muove con velocità \mathbf{u} il suo volume sarà (a causa della contrazione nella direzione parallela al moto) $d^3x = d^3x'/\gamma$ per cui la densità di carica misurata nel SR K è $\rho = q/d^3x = \gamma q/d^3x' = \gamma\rho_0$. La densità ρ_0 è univocamente definita: ogni osservatore inerziale è infatti in grado di misurare la densità ρ di una particella e la velocità \mathbf{u} con cui essa si muove nel proprio SR e ricavare quindi $\rho_0 \equiv \rho/\gamma(u)$: ρ_0 è quindi un invariante relativistico (analogo al tempo proprio τ). Moltiplicando la quadrivelocità U^μ per tale invariante si ottiene perciò un nuovo quadrivettore, detto **quadracorrente** :

$$J^\mu \equiv \rho_0 U^\mu = \frac{\rho}{\gamma(u)} U^\mu = \frac{\rho}{\gamma(u)} \left(\gamma(u)c, \gamma(u)\mathbf{u} \right) = (c\rho, \mathbf{j}) . \quad (5.11)$$

dove $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ è la densità di corrente di una particella singola. Essendo proporzionale alla quadrivelocità, anche la quadracorrente è un vettore di tipo-tempo: $J^\mu J_\mu = \rho_0^2 c^2$. Per completezza, scriviamo le leggi di trasformazione tra SR in moto relativo nella direzione x delle componenti di J^μ :

$$J'_0 = \gamma(J_0 - \beta J_x) \quad J'_x = \gamma(J_x - \beta J_0) \quad J'_y = J_y \quad J'_z = J_z$$

cioè

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right) \quad j'_x = \gamma (j_x - v\rho) \quad j'_y = j_y \quad j'_z = j_z . \quad (5.12)$$

Per un sistema di N particelle la quadracorrente totale si ottiene sommando i contributi di ogni singola particella:

$$J^\mu = \sum_{n=1}^N J_n^\mu = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\gamma(u_n)} U_n^\mu = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\gamma(u_n)} (\gamma(u_n)c, \gamma(u_n)\mathbf{u}_n) = \left(\sum_{n=1}^N c\rho_n, \sum_{n=1}^N \mathbf{j}_n \right) = (c\rho, \mathbf{j}) , \quad (5.13)$$

che è sicuramente un quadrivettore, essendo la somma dei quadrivettori J_n^μ . La quadracorrente permette di scrivere l'equazione di continuità in forma esplicitamente invariante per TL :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0} \quad (5.14)$$

che esprime la conservazione locale della carica elettrica in tutti i SR inerziali.

5.2.2 Forma covariante delle Equazioni di Maxwell

Riprendiamo in considerazione le equazioni di Maxwell per i potenziali (nella gauge di Lorentz) (5.7); la prima di tali equazioni può essere trasformata usando $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ (per comodità

scriveremo d'ora in poi \mathbf{A} e ϕ al posto di $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\phi}$:

$$\square\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \square\phi = c^2\mu_0\rho \quad \Rightarrow \quad \square\frac{\phi}{c} = \mu_0(c\rho) .$$

Le equazioni (5.7) si possono pertanto riscrivere in forma compatta come :

$$\boxed{\square A^\mu = \mu_0 J^\mu} , \quad (5.15)$$

avendo definito

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (5.16)$$

che è sicuramente un quadrivettore (poiché abbiamo già dimostrato che J^μ è un quadrivettore e \square un operatore scalare) : esso viene chiamato **quadripotenziale**. L'equazione (5.15) è la forma covariante delle (5.7).

Con l'introduzione del quadripotenziale, anche le trasformazioni di gauge (5.3) e la condizione di Lorentz (5.6) assumono un aspetto manifestamente covariante:

$$\left(\frac{\tilde{\phi}}{c}, \tilde{\mathbf{A}} \right) = \left(\frac{\phi}{c} - \frac{\partial\xi}{\partial(ct)}, \mathbf{A} + \nabla\xi \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu\xi} \quad (5.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{\phi}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} . \quad (5.18)$$

Consideriamo il tensore antisimmetrico di rango due $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ definito come :

$$\boxed{\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad (5.19)$$

esso è ovviamente invariante per trasformazioni di gauge (5.17), infatti $\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \mathcal{F}^{\mu\nu}$, e i suoi elementi sono ($i, j = 1, 2, 3$) :

$$\mathcal{F}^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial}{\partial(ct)} A^i + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\phi}{c} = -\frac{E^i}{c} \quad (5.20a)$$

$$\mathcal{F}^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijk} (-\nabla \times \mathbf{A})^k = -\epsilon^{ijk} B^k , \quad (5.20b)$$

avendo introdotto il tensore antisimmetrico ϵ^{ijk} definito come segue :

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ è una permutazione pari di } \{1, 2, 3\} \\ -1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ è una permutazione dispari di } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{se due o più indici sono uguali .} \end{cases}$$

Concludiamo quindi che i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} non sono, in relatività, entità separate, ma sono le componenti di un tensore antisimmetrico di rango due. In forma esplicita :

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.21)$$

Le relazioni inverse delle (5.20) sono :

$$E^i = c\mathcal{F}^{i0} \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\mathcal{F}^{jk} \quad (5.22)$$

L'equazione di Maxwell (5.1b) si scrive come:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = \partial_1 \mathcal{F}^{32} + \partial_2 \mathcal{F}^{13} + \partial_3 \mathcal{F}^{21} = \partial^1 \mathcal{F}^{23} + \partial^2 \mathcal{F}^{31} + \partial^3 \mathcal{F}^{12} = \\ &= -\epsilon_{0\alpha\beta\gamma} \partial^\alpha \mathcal{F}^{\beta\gamma} = 0 \end{aligned}$$

dove il tensore antisimmetrico $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è definito come

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \text{ è una permut. pari di } \{0, 1, 2, 3\} \\ -1 & \text{se } \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \text{ è una permut. dispari di } \{0, 1, 2, 3\} \\ 0 & \text{se due o più indici sono uguali,} \end{cases} \quad \epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = -1 .$$

La (5.1c), scritta per la componente x (per le altre due componenti si ottengono espressioni analoghe), diventa:

$$(\nabla \times \mathbf{E})^1 + \frac{\partial B^1}{\partial t} = \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + c \partial_0 B^1 = 0$$

cioè

$$\partial_2 \frac{E^3}{c} - \partial_3 \frac{E^2}{c} + \partial_0 B^1 = \partial^2 \mathcal{F}^{03} - \partial^3 \mathcal{F}^{02} + \partial^0 \mathcal{F}^{32} = -\frac{1}{2} \epsilon_{1\alpha\beta\gamma} \partial^\alpha \mathcal{F}^{\beta\gamma} = 0 .$$

In conclusione le equazioni di Maxwell omogenee si possono scrivere come :

$$\boxed{\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta \mathcal{F}^{\gamma\delta} = 0} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 . \quad (5.23)$$

Le equazioni di Maxwell non omogenee, (5.1a) e (5.1d), si scrivono come :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \partial_i \frac{E^i}{c} = \mu_0 (c\rho) \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha 0} = \mu_0 J^0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \epsilon^{ijk} \partial_i B^j - \partial_0 \frac{E^k}{c} = \mu_0 j^k \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha k} = \mu_0 J^k$$

che si possono riscrivere nella forma compatta :

$$\boxed{\partial_\beta \mathcal{F}^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\alpha} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 . \quad (5.24)$$

Le formule (5.23) e (5.24) esprimono le equazioni di Maxwell (5.1) in forma covariante. Poiché $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ è un tensore di rango 2 e la quadrivelocità di una particella U^μ è un quadrivettore, la loro contrazione $\mathcal{F}^{\mu\nu} U_\nu$ è ancora un quadrivettore. Studiamo le sue componenti spaziali, in particolare la componente x :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{1\nu} U_\nu &= \mathcal{F}^{10} U_0 + \mathcal{F}^{12} U_2 + \mathcal{F}^{13} U_3 = \mathcal{F}^{10} U^0 - \mathcal{F}^{12} U^2 - \mathcal{F}^{13} U^3 = \\ &= \gamma(u) \left(\frac{E_x}{c} c + B_z u_y - B_y u_z \right) = \gamma(u) (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_x . \end{aligned}$$

quindi, ricordando l'espressione per la forza di Lorentz (5.8) (e ricordando che la forza è la derivata temporale della quantità di moto), si ha :

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_x = \frac{q}{\gamma(u)} \mathcal{F}^{1\nu} U_\nu ;$$

considerando anche le altre componenti spaziali, si ha :

$$\gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) .$$

Si può scrivere perciò l'equazione :

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = q \mathcal{F}^{\mu\nu} U_\nu} , \quad (5.25)$$

che è manifestamente covariante e le cui componenti spaziali esprimono la forza di Lorentz in forma covariante. La componente temporale è (definiamo $p^0 = \mathcal{E}/c$; indichiamo qui l'energia con \mathcal{E} per evitare confusione con il campo elettrico) :

$$\frac{dp^0}{d\tau} \equiv \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = q \mathcal{F}^{0\nu} U_\nu = q (\mathcal{F}^{01} U_1 + \mathcal{F}^{02} U_2 + \mathcal{F}^{03} U_3) = \frac{q}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$$

ed esprime, in modo covariante, la conservazione dell'energia: la variazione di energia relativistica $\mathcal{E} \equiv m\gamma(u)c^2$ di una particella è pari al lavoro compiuto su di essa dalla forza di Lorentz (si noti che solo il campo elettrico compie lavoro, il campo magnetico no poiché $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ è sempre perpendicolare a \mathbf{u}).

5.3 Trasformazione del campo elettromagnetico

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che \mathbf{E} e \mathbf{B} sono gli elementi di un tensore di rango 2. Nel paragrafo 2.3 abbiamo imparato come questo oggetto si trasforma per TL tra SR inerziali:

$$\mathcal{F}'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \quad \text{o, in forma matriciale,} \quad \mathcal{F}' = \Lambda \mathcal{F} \Lambda^T .$$

Per una TL lungo l'asse x , la matrice Λ ha la forma :

$$\Lambda = \Lambda^T = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vediamo esplicitamente come si trasforma il tensore $\mathcal{F}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'^{01} &= \Lambda^{0\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 1} = (\gamma \mathcal{F}^{0\nu} - \gamma\beta \mathcal{F}^{1\nu}) \Lambda^{\nu 1} = \gamma^2 \mathcal{F}^{01} + \gamma^2 \beta^2 \mathcal{F}^{10} = \mathcal{F}^{01} \\ \mathcal{F}'^{02} &= \Lambda^{0\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 2} = \Lambda^{0\mu} \mathcal{F}^{\mu 2} = \gamma \mathcal{F}^{02} - \gamma\beta \mathcal{F}^{12} \\ \mathcal{F}'^{03} &= \Lambda^{0\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 3} = \gamma \mathcal{F}^{03} - \gamma\beta \mathcal{F}^{13} \\ \mathcal{F}'^{12} &= \Lambda^{1\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 2} = \Lambda^{1\mu} \mathcal{F}^{\mu 2} = -\gamma\beta \mathcal{F}^{02} + \gamma \mathcal{F}^{12} \\ \mathcal{F}'^{13} &= \Lambda^{1\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 3} = -\gamma\beta \mathcal{F}^{03} + \gamma \mathcal{F}^{13} \\ \mathcal{F}'^{23} &= \Lambda^{2\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 3} = \mathcal{F}^{23} , \quad \mathcal{F}'^{00} = \mathcal{F}'^{11} = \mathcal{F}'^{22} = \mathcal{F}'^{33} = 0 \end{aligned}$$

o, in termini dei campi elettrico e magnetico :

$$\boxed{\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) . \end{array}} \quad (5.26)$$

Per una TL inversa, cioè dal SR K' a K , si ottengono trasformazioni analoghe con $\beta \rightarrow -\beta$ ($v \rightarrow -v$).

5.3.1 Invarianti del campo elettromagnetico

Da quanto si è visto nei paragrafi precedenti, i campi elettrico e magnetico non hanno esistenza indipendente, ma sono “unificati” nel tensore del campo elettromagnetico $\mathcal{F}^{\mu\nu}$. Le TL inoltre mescolano le componenti di \mathbf{E} e \mathbf{B} : un campo puramente elettrico (o magnetico) in un SR K appare come una sovrapposizione di campi \mathbf{E} e \mathbf{B} in un altro SR inerziale in moto relativo rispetto al primo. È utile considerare gli **invarianti del campo elettromagnetico**, cioè delle quantità costruite con i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che risultino invarianti per TL. Le uniche combinazioni invarianti che si possono costruire con $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ sono $\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}^{\rho\sigma}$. In forma esplicita :

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} = (\mathcal{F}^{01}\mathcal{F}_{01} + \mathcal{F}^{10}\mathcal{F}_{10} + \dots + \mathcal{F}^{12}\mathcal{F}_{12} + \mathcal{F}^{21}\mathcal{F}_{21} + \dots) = 2\left(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2\right) \quad (5.27)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}^{\rho\sigma} = -\mathcal{F}^{01}\mathcal{F}^{23} + \mathcal{F}^{10}\mathcal{F}^{23} + \mathcal{F}^{01}\mathcal{F}^{32} - \mathcal{F}^{10}\mathcal{F}^{32} + \dots = \frac{4}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.28)$$

Si noti che (5.27) è uno scalare mentre (5.28) è uno pseudoscalare.

Ciò significa che se nel SR K si hanno i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , in un altro SR K' si hanno i campi \mathbf{E}' e \mathbf{B}' , ma valgono le condizioni

$$\boxed{B^2 - \frac{E^2}{c^2} = B'^2 - \frac{E'^2}{c^2}} \quad (5.29)$$

e

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'} . \quad (5.30)$$

Questi invarianti pongono delle limitazioni alle variazioni del campo elettromagnetico per TL. Se, per esempio, nel SR K si ha un campo puramente elettrostatico ($\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B} = 0$), la (5.29) implica che non esiste un SR in cui tale campo sia puramente magnetico e viceversa. Se \mathbf{E} e \mathbf{B} sono perpendicolari in K , la (5.30) implica che lo saranno in ogni altro SR oppure uno dei due sarà nullo (quale lo sia dipende dal segno di (5.29)). Se $E = cB$ in un SR, allora $B^2 - E^2/c^2 = 0$ e si avrà $E' = cB'$ in ogni altro SR. In generale, relazioni di disuguaglianza $E \geq cB$ non vengono alterate passando da un SR ad un altro perché determinano il segno dell'invariante (5.29).

5.3.2 Dimostrazioni alternative della legge di trasformazione del campo elettromagnetico

Le formule di trasformazione dei campi elettrico e magnetico si possono ottenere anche dalla forza di Lorentz, mediante le leggi di trasformazione delle componenti della forza (4.43) e (4.44). Ci limiteremo qui, per semplicità, a considerare una TL parallela all'asse x .

Consideriamo una particella di carica q in moto con velocità (in direzione qualsiasi) \mathbf{u} attraverso un campo elettromagnetico. La forza che agisce su di essa, descritta nel SR K , è la forza di Lorentz (5.8). In un altro SR inerziale K' , in moto rispetto ad K con velocità \mathbf{v} in direzione x , agisce la forza $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')$. Esaminiamo la componente x della forza in entrambi i SR. In K si ha :

$$F_x = qE_x + qu_y B_z - qu_z B_y$$

ed in K' si ha :

$$F'_x = qE'_x + qu'_y B'_z - qu'_z B'_y .$$

Usiamo la legge di trasformazione (4.43) per F'_x e le (3.6) per le componenti della velocità \mathbf{u}' :

$$\frac{F_x - \frac{v}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = qE'_x + qB'_z \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} - qB'_y \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} .$$

Nel primo membro esprimiamo la forza tramite i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , notando che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}$:

$$qE_x + qu_y B_z - qu_z B_y - q \frac{v}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = qE'_x \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + qB'_z \frac{u_y}{\gamma} - qB'_y \frac{u_z}{\gamma}$$

$$E_x \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + u_y \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) - u_z \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) = E'_x \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + u_y \frac{B'_z}{\gamma} - u_z \frac{B'_y}{\gamma} .$$

L'equazione appena scritta deve essere identicamente verificata per qualunque velocità \mathbf{u} (e \mathbf{v}). Devono perciò coincidere i coefficienti delle componenti di \mathbf{u} :

$$E'_x = E_x \quad B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \quad B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) . \quad (5.31)$$

Dalla componente y della forza di Lorentz si ottiene, con passaggi analoghi :

$$F_y = qE_y + qu_z B_x - qu_x B_z$$

$$\frac{F'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} = qE_y + qB_x \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} - qB_z \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

$$\frac{E'_y}{\gamma} + u'_z \frac{B'_x}{\gamma} - u'_x \frac{B'_z}{\gamma} = E_y \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right) + u'_z \frac{B_x}{\gamma} - (u'_x + v) B_z$$

avendo usato le (3.7) e l'inversa delle (4.44). Identificando i coefficienti, rispettivamente, di u'_x ed u'_z si ha:

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \quad B'_x = B_x ; \quad (5.32)$$

i termini rimanenti danno :

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) . \quad (5.33)$$

In modo del tutto analogo, dalla componente z della forza di Lorentz si ottiene

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) . \quad (5.34)$$

Le equazioni dalla (5.31) alla (5.34) coincidono con le espressioni (5.26) trovate in precedenza.

Una ulteriore derivazione delle precedenti leggi di trasformazione si ottiene considerando il quadripotenziale A^μ : esso è un quadrivettore, quindi per TL si trasforma come $A'^\mu = \Lambda^{\mu\nu} A^\nu$; considerando, per semplicità, un boost lungo l'asse x si ha

$$\phi' = \gamma(\phi - vA_x) , \quad A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) , \quad A'_y = A_y , \quad A'_z = A_z . \quad (5.35)$$

I campi \mathbf{E}' e \mathbf{B} , osservati nel SR K' si ottengono dal quadripotenziale A'^μ secondo le (5.2). Per il campo elettrico si ha

$$E'_x = -\frac{\partial\phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} , \quad E'_y = -\frac{\partial\phi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'} , \quad E'_z = -\frac{\partial\phi'}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial t'} . \quad (5.36)$$

Le derivate parziali si calcolano facendo uso delle TL per le coordinate $x = \gamma(x' + vt')$, $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$, $y = y'$, $z = z'$. Per esempio :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi'}{\partial x'} &= \frac{\partial\phi'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial\phi'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial\phi'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial\phi'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} = \gamma \frac{\partial\phi'}{\partial x} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial\phi'}{\partial t} = \\ &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma(\phi - vA_x) \right) + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma(\phi - vA_x) \right) \\ &= \gamma^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - v \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \gamma^2 \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - v \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) . \end{aligned}$$

In modo analogo si calcolano tutte le altre derivate e si trova :

$$\begin{aligned} E'_x &= -\frac{\partial\phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \mathbf{E}_x \\ E'_y &= -\frac{\partial\phi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'} = \gamma \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - \gamma v \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z &= -\frac{\partial\phi'}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial t'} = \gamma \left(-\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) - \gamma v \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \gamma(E_z + vB_y) , \end{aligned}$$

identiche alle formule trovate in precedenza. Anche per il campo magnetico si ha :

$$\begin{aligned} B'_x &= \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x \\ B'_y &= \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \gamma \frac{v}{c^2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \\ B'_z &= \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} = \gamma \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \gamma \frac{v}{c^2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{aligned}$$

in accordo con le (5.26).

5.3.3 Trasformazione dei campi per boost in direzione qualsiasi

Per un boost in una direzione qualsiasi la matrice Λ ha la forma (2.53) o (2.54) e i campi si trasformano come $\mathcal{F}'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu\beta}$; per le componenti \mathcal{F}'^{i0} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) si ha :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'^{i0} &= \Lambda^{i\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu 0} = \Lambda^{i\mu} (\gamma \mathcal{F}^{\mu 0} - \gamma \beta^k \mathcal{F}^{\mu k}) = \gamma \Lambda^{ik} \mathcal{F}^{k0} - \gamma \beta^k \Lambda^{i0} \mathcal{F}^{0k} - \gamma \beta^k \Lambda^{ij} \mathcal{F}^{jk} = \\ &= \gamma \left(\delta^{ik} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^k \right) \mathcal{F}^{k0} + \gamma^2 \beta^i \beta^k \mathcal{F}^{0k} - \gamma \beta^k \left(\delta^{ij} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^j \right) \mathcal{F}^{jk} = \\ &= \gamma \mathcal{F}^{i0} + \gamma \beta^i \beta^k \mathcal{F}^{k0} \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2} - \gamma \right) - \gamma \beta^k \mathcal{F}^{ik} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\beta^2} \beta^i \beta^j \beta^k \mathcal{F}^{jk} . \end{aligned}$$

L'ultimo termine della precedente espressione è identicamente nullo a causa dell'antisimmetria di F . L'espressione nella parentesi del secondo termine si può semplificare :

$$\frac{\gamma-1}{\beta^2} - \gamma = \frac{\gamma-1}{1-\frac{1}{\gamma^2}} - \gamma = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} - \gamma = \frac{-\gamma}{\gamma+1}$$

per ottenere :

$$\mathcal{F}'^{i0} = \gamma \mathcal{F}^{i0} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^i \beta^k \mathcal{F}^{k0} - \gamma \beta^k \mathcal{F}^{ik} = \gamma \mathcal{F}^{i0} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^k \mathcal{F}^{k0} - \gamma \beta^k \mathcal{F}^{ik} . \quad (5.37)$$

Gli elementi di \mathcal{F} con due indici spaziali invece si trasformano come :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'^{ij} &= \Lambda^{i\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu j} = \left(-\gamma \beta^i \mathcal{F}^{0\nu} + \delta^{ik} \mathcal{F}^{k\nu} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^k \mathcal{F}^{k\nu} \right) \Lambda^{\nu j} = \\ &= -\gamma \beta^i \mathcal{F}^{0k} \left(\delta^{kj} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^k \beta^j \right) - \gamma \beta^j \mathcal{F}^{i0} + \mathcal{F}^{ik} \left(\delta^{kj} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^k \beta^j \right) + \\ &\quad + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^k \left(-\gamma \beta^j \mathcal{F}^{k0} + \left[\delta^{lj} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^l \beta^j \right] \mathcal{F}^{kl} \right) = \\ &= \mathcal{F}^{ij} - \gamma \beta^i \mathcal{F}^{0j} - \gamma \beta^j \mathcal{F}^{i0} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\beta^j \beta^k \mathcal{F}^{ik} + \beta^i \beta^k \mathcal{F}^{kj}) . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Scrivendo esplicitamente i campi tramite le (5.20), riscriviamo le (5.37) e (5.38) come :

$$\begin{aligned} \frac{E'^i}{c} &= \gamma \frac{E^i}{c} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^k \frac{E^k}{c} + \gamma \beta^k \epsilon^{ikl} B^l \\ -\epsilon^{ijl} B'^l &= -\epsilon^{ijl} B^l + \gamma \beta^i \frac{E^j}{c} - \gamma \beta^j \frac{E^i}{c} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (-\beta^j \beta^k \epsilon^{ikl} B^l - \beta^i \beta^k \epsilon^{kjl} B^l) . \end{aligned}$$

Moltiplicando l'ultima equazione per ϵ^{ijm} , sommando su i e j e facendo uso delle identità $\epsilon^{ijl} \epsilon^{ijm} = 2\delta^{lm}$, $\epsilon^{ijm} \epsilon^{ikl} = \delta^{jk} \delta^{ml} - \delta^{jl} \delta^{mk}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} -B'^m &= -B^m + \frac{\gamma}{2c} (\epsilon^{ijm} \beta^i E^j - \epsilon^{ijm} \beta^j E^i) + \frac{\gamma-1}{2\beta^2} (-\beta^j \beta^k [\delta^{jk} \delta^{ml} - \delta^{jl} \delta^{mk}] - \beta^i \beta^k [\delta^{ik} \delta^{ml} - \delta^{il} \delta^{mk}]) B^l = \\ &= -B^m + \gamma \epsilon^{ijm} \beta^i \frac{E^j}{c} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (-\beta^2 B^m + \beta^l \beta^m B^l) = -\gamma B^m + \gamma \epsilon^{ijm} \beta^i \frac{E^j}{c} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^l \beta^m B^l . \end{aligned}$$

In conclusione si trova che la legge di trasformazione dei campi elettrico e magnetico per un boost in direzione qualsiasi, generalizzazione delle (5.26), è:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}'}{c} &= \gamma \frac{\mathbf{E}}{c} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\mathbf{E}}{c}) \boldsymbol{\beta} + \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \end{aligned}} \quad (5.39)$$

o anche, scrivendo esplicitamente le componenti dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} parallele e perpendicolari al moto relativo dei SR,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}\right) \end{array}}. \quad (5.40)$$

5.4 Esempi

5.4.1 Covarianza delle equazioni di Maxwell

All'origine della formulazione della Relatività di Einstein c'è la constatazione che le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Nei paragrafi precedenti abbiamo trovato che è possibile scrivere le equazioni di Maxwell in forma esplicitamente covariante per TL: questo è già sufficiente per concludere che esse sono compatibili con la nuova formulazione della relatività, ma vogliamo ora verificarlo esplicitamente.

Consideriamo due SR K e K' , in moto relativo rettilineo uniforme. Scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse x coincida con la direzione del moto di K' rispetto a K .

Supponiamo che nel SR K , in presenza delle sorgenti ρ e \mathbf{j} valgano le equazioni di Maxwell per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (5.41)$$

Nell'altro SR K' si osservano dei campi \mathbf{E}' e \mathbf{B}' , legati a \mathbf{E} e \mathbf{B} dalle (5.26), e delle sorgenti ρ' e \mathbf{j}' date da :

$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x\right) \quad j'_x = \gamma(j_x - v\rho) \quad j'_y = j_y \quad j'_z = j_z \quad (5.42)$$

Vediamo ora quali sono le equazioni soddisfatte dai campi \mathbf{E}' e \mathbf{B}' nel nuovo SR. Calcoliamo la quantità $\nabla' \cdot \mathbf{E}'$ (con la notazione ∇' si indica l'operatore gradiente calcolato rispetto alle coordinate del SR K') utilizzando le (5.26) e le (5.41) :

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{E}' &= \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}(\gamma(E_y - vB_z)) + \frac{\partial}{\partial z'}(\gamma(E_z + vB_y)) = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_y}{\partial y} - \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial z} = \\ &= \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \gamma \frac{\partial E_y}{\partial y} - \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ &= \gamma \nabla \cdot \mathbf{E} - \gamma v \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} - \gamma v \mu_0 j_x = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right) = \frac{\rho'}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Analogamente per la divergenza del campo magnetico in K' si trova:

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{B} + \gamma \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0.$$

Anche le altre due equazioni si trattano allo stesso modo:

$$(\nabla' \times \mathbf{E}')_x + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + \gamma v \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(\nabla' \times \mathbf{E}')_y + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla' \times \mathbf{E}')_z + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned}
(\nabla' \times \mathbf{B}')_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} &= \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) - \gamma \frac{v}{c^2} \nabla \cdot \mathbf{E} = \\
&= \gamma \mu_0 j_x - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\rho}{\epsilon_0} = \mu_0 \gamma (j_x - v \rho) = \mu_0 j'_x
\end{aligned}$$

$$(\nabla' \times \mathbf{B}')_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \mu_0 j_y = \mu_0 j'_y$$

$$(\nabla' \times \mathbf{B}')_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0 j_z = \mu_0 j'_z .$$

In conclusione si trova che i campi nel SR K' soddisfano le seguenti equazioni :

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad \nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0 \quad \nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{j}' ,$$

identiche alle (5.41). Abbiamo quindi verificato che le equazioni di Maxwell sono invarianti per TL.

5.4.2 Esempio di trasformazione di campi elettrici e magnetici

Consideriamo un campo puramente elettrico nel SR K' e vediamo come appare in un altro SR K in moto uniforme rispetto al primo. In K' si ha

$$\mathbf{E}' \neq 0 \quad \mathbf{B}' = 0 ;$$

in K si trova, usando le (inverse delle) (5.40)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}'_{\parallel} , & \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \gamma \mathbf{E}'_{\perp} \\
\mathbf{B}_{\parallel} &= \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 , & \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}' \right) = \gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}' = \gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}'_{\perp} \implies \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} ,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

quindi in K compare un campo magnetico accanto a quello elettrico.

Viceversa, se supponiamo che in K' esista un campo puramente magnetico

$$\mathbf{E}' = 0 \quad \mathbf{B}' \neq 0 ,$$

allora in K si troverà anche un campo elettrico:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\parallel} &= \mathbf{B}'_{\parallel} , & \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}' \right) = \gamma \mathbf{B}'_{\perp} \\
\mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}'_{\parallel} = 0 , & \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}' = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp} \implies \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} .
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Come si vede, in entrambi i casi, nel SR K i campi elettrico e magnetico sono perpendicolari tra di loro, quindi la condizione di invarianza (5.30) è soddisfatta. Si verifica facilmente che anche la quantità (5.29) è invariante.

5.4.3 Forza di Lorentz

Consideriamo un generico campo elettromagnetico (\mathbf{E} e \mathbf{B}) nel SR K e supponiamo che una particella di carica q sia in moto con velocità \mathbf{u} rispetto a tale SR. Vogliamo determinare la forza che agisce sulla carica q .

Con una TL passiamo nel SR K' solidale con la particella; sappiamo che su una particella ferma, sottoposta all'azione di un campo elettrico \mathbf{E}' , agisce la forza $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$, per la definizione stessa di campo elettrico. Separando le componenti parallela e perpendicolare alla direzione del moto della particella (cioè al moto relativo dei due SR) si ha :

$$\mathbf{F}'_{\parallel} = q\mathbf{E}'_{\parallel} \quad \mathbf{F}'_{\perp} = q\mathbf{E}'_{\perp} .$$

Con le eq. (5.40) è possibile ricavare il campo \mathbf{E}' in funzione dei campi (noti) nel SR K (la velocità relativa dei due SR è \mathbf{u}) :

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) .$$

Dalle inverse delle (4.43) e (4.44), con $\mathbf{u}' = 0$, si ha :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\parallel} &= \mathbf{F}'_{\parallel} = q\mathbf{E}'_{\parallel} = q\mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{F}_{\perp} &= \frac{\mathbf{F}'_{\perp}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} q\mathbf{E}'_{\perp} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) , \end{aligned}$$

per cui la forza risultante è :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) ,$$

cioè la forza di Lorentz. Si conclude quindi che la forza di Lorentz è la conseguenza della trasformazione del campo elettromagnetico tra SR inerziali.

5.4.4 Campo generato da una carica puntiforme in moto uniforme

Consideriamo una particella di carica q che si muove di moto uniforme con velocità \mathbf{v} lungo l'asse x nel SR K . La posizione della carica in funzione del tempo è, secondo K , $Q = (vt, 0, 0)$.

Sia K' il SR in cui la carica è a riposo nell'origine, in tale SR si ha soltanto un campo elettrico coulombiano:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad \text{con} \quad r' \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2},$$

avendo espresso le coordinate del SR K' in funzione di quelle di K tramite le TL ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$). I campi in K si ricavano tramite le (inverse delle) (5.26); per il campo elettrico si trova:

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{\gamma q(x - vt)}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.45a)$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) = \gamma E'_y = \frac{\gamma q y}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.45b)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) = \gamma E'_z = \frac{\gamma q z}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} , \quad (5.45c)$$

e il campo magnetico è dato da:

$$B_x = B'_x = 0 \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right) = -\frac{v}{c^2}E_z \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right) = \frac{v}{c^2}E_y \quad (5.46)$$

In conclusione si trova che nel SR K esiste anche un campo magnetico dato da $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}$, in accordo con la (5.43).

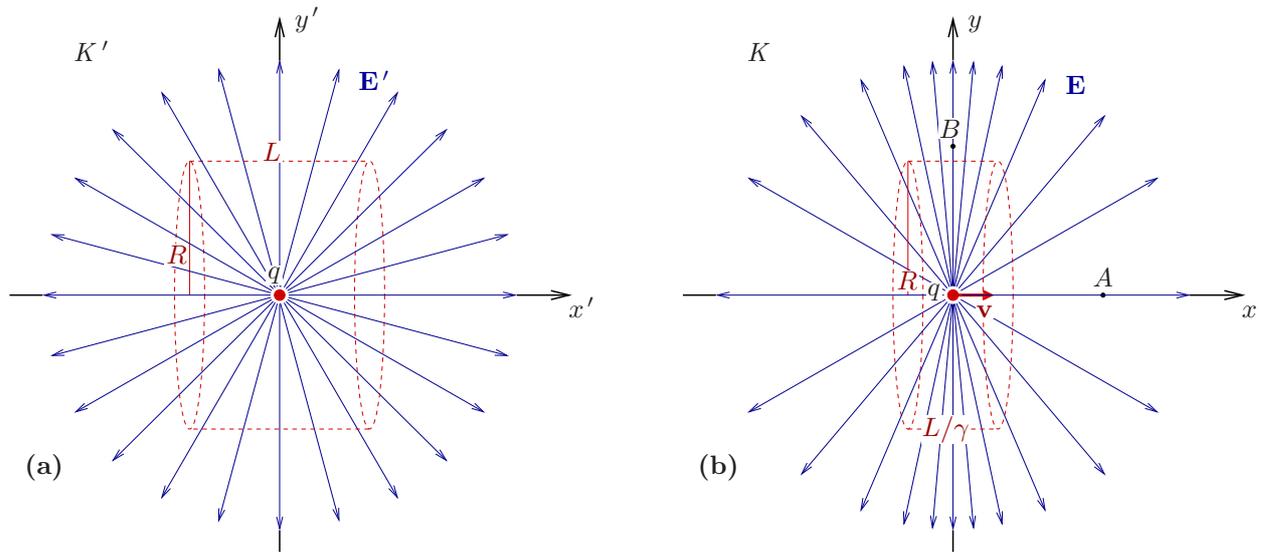


Figura 5.1 Campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto con velocità costante. Nel SR solidale con la carica (a) il campo elettrico è radiale ed ha simmetria sferica. Nel SR in cui la particella è in moto (b) il campo è ancora radiale ma non ha simmetria sferica bensì cilindrica: è più intenso nella direzione trasversale al moto della carica.

È interessante esaminare il campo elettrico in K ; consideriamo ad esempio l'istante $t = 0$, in cui la particella si trova nell'origine di K (in ogni altro istante $t \neq 0$ valgono considerazioni analoghe, si ha semplicemente una traslazione dei campi in conseguenza del moto della carica):

$$\mathbf{E}(t = 0) = \frac{\gamma q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (5.47)$$

da cui si nota che il campo elettrico anche in K è *radiale* (in ogni istante è diretto secondo il raggio vettore \mathbf{r} che dà la posizione della particella allo stesso istante) ma *non ha simmetria sferica*, come si può vedere esprimendo \mathbf{E} in coordinate polari :

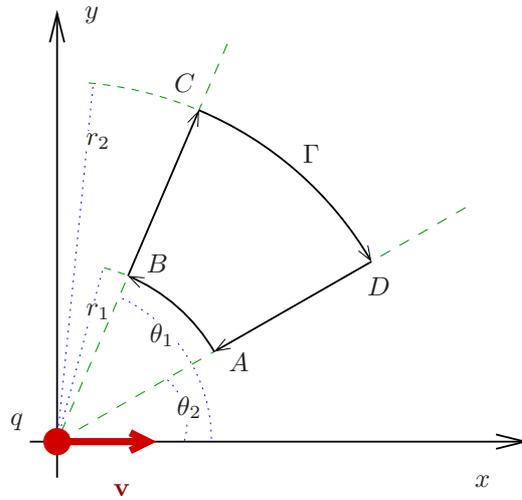
$$E_r(r, \theta, t = 0) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_r = \frac{q(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad E_\theta = E_\varphi = 0. \quad (5.48)$$

In particolare si osserva che il campo elettrico nella direzione trasversale al moto della particella è più intenso che nella direzione lungo il moto stesso, infatti nei punti A e B (si veda la fig. 5.1(b)) equidistanti da O il campo ha un'intensità diversa:

$$\begin{aligned} E_A &= E(r = d, \theta = 0, t = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 d^2} \\ E_B &= E(r = d, \theta = \frac{\pi}{2}, t = 0) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Questo risultato si può mettere in relazione con la proprietà di invarianza della carica elettrica. La quantità di carica contenuta all'interno di un volume dello spazio è definita dalla legge di Gauss: $q = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma}$, dove l'integrazione è effettuata sulla superficie che delimita il volume considerato. Appliciamo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica disegnata nella figura 5.1(a), nel SR solidale con la particella. Il contributo di integrazione dovuto alle basi del cilindro è $\phi'_{\parallel} = 2E'_x S$ mentre il contributo della superficie laterale è $\phi'_{\perp} = 2\pi R L E'_{\perp}$. (R ed L sono il raggio della base del cilindro e l'altezza laterale, $S = \pi R^2$ è l'area della base). Il teorema di Gauss quindi stabilisce che $q = \epsilon_0(\phi'_{\parallel} + \phi'_{\perp})$. Appliciamo ora il teorema nel SR K in cui la particella si muove. Il volume cilindrico apparirà contratto nel senso della lunghezza (l'altezza ora è L/γ) ma l'area e la circonferenza di base sono invariate. In questo SR si ha $\phi_{\parallel} = 2E_x S$ e $\phi_{\perp} = 2\pi R L E_{\perp}/\gamma$, ma la carica elettrica è invariante, quindi si deve avere $\phi'_{\parallel} + \phi'_{\perp} = \phi_{\parallel} + \phi_{\perp}$, qualunque siano R ed L : affinché ciò avvenga è necessario che $E_x = E'_x$ ed $E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}$, esattamente come trovato nelle (5.49).

Figura 5.2 Il campo elettrico generato da una carica in moto non è statico quindi non è irrotazionale: la circuitazione del vettore \mathbf{E} lungo il percorso Γ non è zero.



Un'ultima osservazione: il campo \mathbf{E} definito dall'equazione (5.47) oppure (5.48) non è irrotazionale, cioè la sua circuitazione lungo un percorso chiuso non è sempre nulla. Ad esempio consideriamo il circuito $ABCD$ disegnato in figura 5.2: la circuitazione di \mathbf{E} è definita come :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E} = \int_B^C \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E} + \int_D^A \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E} = \int_{r_1}^{r_2} E(r, \theta_1) dr + \int_{r_2}^{r_1} E(r, \theta_2) dr = \int_{r_1}^{r_2} [E(r, \theta_1) - E(r, \theta_2)] dr \neq 0 ,$$

poiché gli archi circonferenza AB (di raggio r_1) e CD (di raggio r_2) danno contributo nullo dato che, su di essi, il vettore \mathbf{E} è perpendicolare allo spostamento ds . Questo risultato non deve sorprendere dato che solo per un campo elettrostatico vale, per ogni percorso chiuso, $\oint \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E} = 0$, che è diretta conseguenza della relazione $\mathbf{E} = -\nabla\phi$; per un campo non statico, come quello di questo esempio, si ha $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ e la circuitazione di \mathbf{E} lungo il cammino Γ non è nulla ma è legata alla variazione nel tempo del flusso del campo magnetico attraverso la superficie contornata da Γ .

5.4.5 Forza tra cariche in moto

Consideriamo due particelle di cariche q_1 e q_2 che si muovono, nel SR K con velocità uguali \mathbf{v} come illustrato in fig. 5.3. Nel SR K' in cui le due cariche sono a riposo, la forza che agisce tra di esse è data dalla legge di Coulomb; l'unica componente non nulla è, per la configurazione scelta in fig. 5.3, quella in direzione y :

$$F'_x = 0 \quad F'_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad F'_z = 0 ,$$

avendo $r = r'$ perché perpendicolare alla direzione del moto relativo dei due SR. Come ben noto dallo studio dell'elettrostatica, tale forza è repulsiva se le due cariche elettriche hanno lo stesso segno, attrattiva se hanno segno opposto.

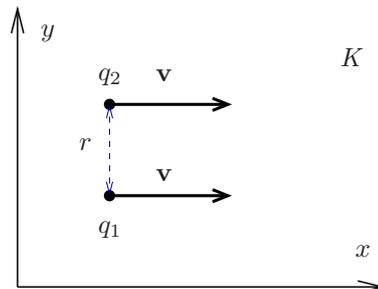


Figura 5.3 Interazione tra cariche in moto

Usiamo le leggi di trasformazione (inverse) (4.45) per scrivere le componenti della forza agente tra le due particelle nel SR K :

$$F_x = 0 \quad F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = \frac{q_1 q_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad F_z = 0 .$$

È istruttivo ragionare anche dal punto di vista dei campi elettromagnetici. Nel SR K' la particella q_2 è soggetta al campo elettrico \mathbf{E}_1 generato da q_1 (il ruolo delle due particelle è del tutto equivalente: potremmo ripetere lo stesso ragionamento considerando la particella q_1 soggetta al campo di q_2 con conclusioni identiche) :

$$E'_{1x} = 0 \quad E'_{1y} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E'_{1z} = 0 .$$

In K' , la particella q_1 genera solo un campo elettrico, quindi $\mathbf{B}'_1 = 0$. Nel SR K oltre al campo elettrico \mathbf{E}_1 esiste un campo magnetico \mathbf{B}_1 :

$$\begin{aligned} E_{1x} = E'_{1x} = 0 & & E_{1y} = \gamma (E'_{1y} + vB'_{1z}) = \frac{\gamma q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & & E_{1z} = \gamma (E'_{1z} - vB'_{1y}) = 0 \\ B_{1x} = B'_{1x} = 0 & & B_{1y} = \gamma (B'_{1y} - \frac{v}{c^2} E'_{1z}) = 0 & & B_{1z} = \gamma (B'_{1z} + \frac{v}{c^2} E'_{1y}) = \frac{\gamma q_1 v}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} , \end{aligned}$$

ed entrambi contribuiscono a determinare la forza che agisce su q_2 , secondo l'eq. (5.8) :

$$\begin{aligned} F_x &= q_2 E_{1x} = 0 \\ F_y &= q_2 (E_{1y} - vB_{1z}) = \frac{\gamma q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{q_2 E'_{1y}}{\gamma} = \frac{F'_y}{\gamma} \\ F_z &= q_2 (E_{1z} + vB_{1y}) = 0 \end{aligned}$$

coincidente con l'espressione trovata in precedenza. Osserviamo quindi che il contributo magnetico ha segno opposto a quello elettrico, ma è quest'ultimo a dominare. Si noti che se le cariche q_1 e q_2 hanno lo stesso segno, la forza tra di esse è repulsiva ($F_y > 0$), come avveniva nel SR K . I due SR sono quindi equivalenti, cioè in entrambi la forza tra le due cariche ha lo stesso segno, come vuole il principio di relatività.

5.4.6 Campo generato da una distribuzione lineare di carica

Consideriamo una distribuzione lineare infinita di cariche elettriche disposta lungo l'asse x . Supponiamo che le cariche siano stazionarie nel SR K' e che la densità lineare di carica (cioè la carica per unità di lunghezza) sia λ' . Nel SR si osserverà un campo elettrico con simmetria cilindrica, il cui modulo può essere facilmente determinato con la legge di Gauss e risulta :

$$E'(r') = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r'} .$$

Il campo magnetico $B'(r')$ sarà, ovviamente, nullo.

Consideriamo ora il campo nel SR K rispetto al quale il SR K' (e quindi anche la distribuzione di cariche) si muove con velocità v nel verso positivo dell'asse delle x . In tale SR il campo elettrico si può ottenere tramite le (5.26) per le componenti trasverse e risulta:

$$E(r) = \gamma E'(r') = \gamma E'(r) = \frac{\gamma \lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

essendo $\lambda = \gamma \lambda'$ la densità di carica elettrica misurata in K . Nel SR K però esiste anche un campo magnetico dovuto al moto delle cariche. Dall'eq. (5.43) si ha $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}$ che in modulo risulta :

$$B(r) = \frac{vE}{c^2} = \frac{\lambda v}{2\pi\epsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.50)$$

che coincide con la legge di Biot-Savart per il filo di corrente infinito ($I = \lambda v$). La direzione del campo magnetico è perpendicolare alla linea di cariche ed alla direzione radiale: le sue linee di campo sono quindi delle circonferenze con centro sull'asse x .

5.4.7 Carica elettrica nel campo di un filo percorso da corrente

Consideriamo un filo conduttore rettilineo ed infinito costituito da protoni fermi nel SR K e da elettroni in moto con velocità uniforme \mathbf{u} (è la velocità media degli elettroni, cioè la “velocità di deriva” che, tipicamente, è molto piccola, circa 1 mm/s). Ogni protone crea un campo elettrico coulombiano, mentre ogni elettrone ne crea uno del tipo (5.47) ma, a causa della velocità piccolissima si può usare l'approssimazione $\gamma = 1$. Se, nel SR K , le densità di elettroni e protoni sono uguali, i campi elettrici da essi prodotti si annullano a vicenda e il filo è elettricamente neutro. Nel SR K quindi esiste solo un campo magnetico dovuto al moto degli elettroni, esprimibile con la legge di Biot-Savart (5.50). Per fissare le idee, sia n la densità di protoni e di elettroni in K ; se la sezione del conduttore è S , la densità lineare di carica elettrica positiva sarà $\lambda_+ = nSe$ e quella di carica elettrica negativa sarà $\lambda_- = -nSe$ (e è la carica, in valore assoluto, di un elettrone). La densità totale di carica elettrica è quindi $\lambda = \lambda_+ + \lambda_- = 0$. La densità di corrente elettrica dovuta agli elettroni è (supponendo che il moto avvenga lungo la direzione x) $j_x^- = -neu$ e quella dovuta ai protoni è nulla, quindi la densità di corrente totale è $j_x = j_x^+ + j_x^- = -neu$.

Consideriamo ora un SR K' in moto con velocità \mathbf{v} rispetto ad K : in esso sia i protoni che gli elettroni sono in moto e le loro densità di carica e di corrente sono diverse da quelle osservate in K a causa della contrazione di Lorentz delle lunghezze. Usando le trasformazioni per le sorgenti (5.12) si ha ($\rho = \lambda/S$):

$$\begin{aligned}\rho' &= \gamma(v) \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right) = -\frac{v}{c^2} j_x = \gamma(v) ne \frac{uv}{c^2} \neq 0, \\ j_x' &= \gamma(v) (j_x - v\rho) = \gamma(v) j_x = -\gamma(v) neu.\end{aligned}\quad (5.51)$$

L'origine di una densità di carica elettrica netta nel SR K' si comprende facilmente esaminando l'effetto della TL su λ_+ e λ_- separatamente. Dato che per effetto della contrazione di Lorentz la dimensione longitudinale del conduttore nel SR K' si riduce di un fattore γ , la densità di carica risulta aumentata dello stesso fattore: per le cariche positive, ferme in K , si ha quindi $\lambda_+' = \gamma(v)\lambda_+ = \gamma(v)nSe$. Per le cariche negative bisogna tenere presente che esse sono già in moto nel SR K con velocità u , quindi per determinare la nuova densità di carica per il SR K' in cui la loro velocità è $u' = (u - v)/(1 - uv/c^2)$ bisogna riferirsi alla loro densità nel SR in cui esse sono in quiete $\lambda_-^{(0)} = \lambda/\gamma(u)$. Si ha in definitiva $\lambda_-' = \gamma(u')\lambda_-^{(0)} = \gamma(u')\lambda_-/\gamma(u)$. Usando la (3.14) si ha:

$$\lambda_-' = \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} \lambda_- = \gamma(v) \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \lambda_- = -\gamma(v) \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) nSe.$$

La densità volumica totale $(\lambda_+' + \lambda_-')/S$ coincide con l'espressione di ρ' trovata in (5.51) ed è chiara ora la sua origine: è dovuta alla diversa contrazione di Lorentz subita dalle cariche elettriche positive e negative. In K' dunque esiste ancora il campo magnetico (dovuto però sia al moto degli elettroni che dei protoni) ma compare anche un campo elettrico a causa della densità di carica elettrica totale non nulla.

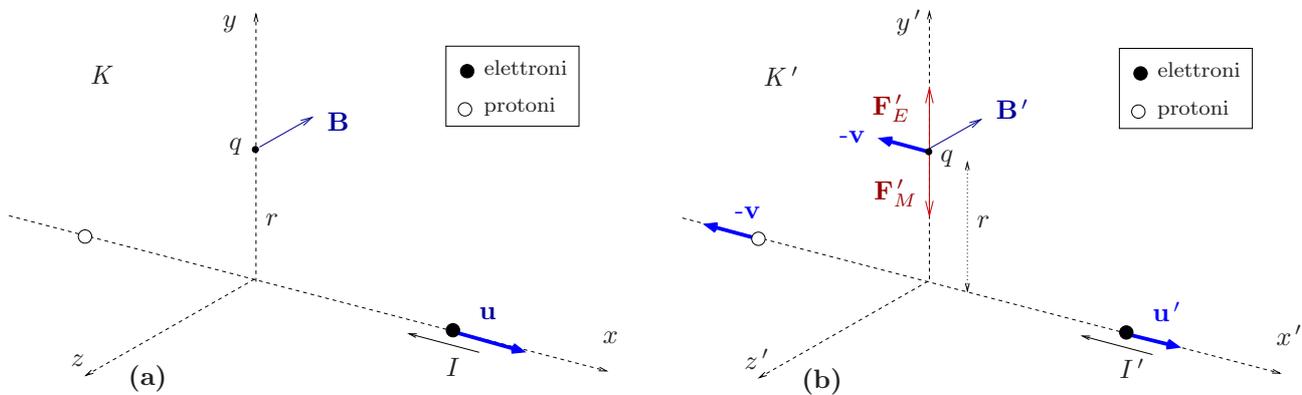


Figura 5.4 Forza su una particella ferma nel campo generato da un filo percorso da corrente costituita da elettroni in moto con velocità costante \mathbf{u} . (a): Nel SR K solidale con la carica di prova q (e con i protoni del filo) il campo elettrico è nullo, il campo magnetico è determinato dal moto degli elettroni; la forza agente sulla carica q è nulla. (b): Nel SR K' in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a K la particella è in moto e si ha sia un campo elettrico che un campo magnetico che agiscono in direzioni opposte: la forza risultante è ancora nulla.

Vediamo ora l'effetto di questi campi su una particella di prova di carica q ferma nel SR K in un punto a distanza r dal filo. È ovvio che in K la forza agente su q è nulla (figura 5.4a). In un SR K' in moto con velocità \mathbf{v} parallela al filo invece esistono sia un campo elettrico che un campo magnetico; in tale SR la particella q si muove con velocità $-\mathbf{v}$, quindi sarà soggetta sia alla forza elettrica che a quella magnetica. Calcoliamo la forza risultante in K' .

Data la simmetria cilindrica del problema possiamo, senza perdita di generalità, supporre che la carica di prova sia posizionata sull'asse delle y . Con le definizioni adottate in figura 5.4b, le componenti dei campi elettrico e magnetico nel SR K sono (si noti che, avendo gli elettroni carica elettrica negativa, il verso della corrente da essa prodotta è opposto al verso del loro moto) :

$$E_x = E_y = E_z = 0 \quad B_x = B_y = 0 \quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 \lambda^- u}{2\pi r}$$

Nel SR K' i campi sono (utilizzando le (5.26)) :

$$\begin{aligned} E'_x = E_x = 0 & \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = \frac{\gamma\mu_0\lambda^- uv}{2\pi r} & \quad E'_z = \gamma(E_z + vB_y) = 0 \\ B'_x = B_x = 0 & \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) = 0 & \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = -\frac{\gamma\mu_0\lambda^- u}{2\pi r}. \end{aligned}$$

Il termine della forza di Lorentz che agisce sulla carica q dovuto al campo elettrico è

$$\mathbf{F}'_E = q\mathbf{E}' \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} F'_{Ex} = F'_{Ez} = 0 \\ F'_{Ey} = qE'_y = \frac{\gamma q\mu_0\lambda^- uv}{2\pi r}, \end{cases}$$

mentre quello dovuto al campo magnetico è (si ricordi che la velocità della particella di prova è $-\mathbf{v}$) :

$$\mathbf{F}'_M = q(-\mathbf{v}) \times \mathbf{B}' \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} F'_{Mx} = F'_{Mz} = 0 \\ F'_{My} = qv_x B'_z = -\frac{\gamma\mu_0 q\lambda^- uv}{2\pi r}, \end{cases}$$

da cui si vede che le forze elettrica e magnetica nel SR K' hanno moduli uguali e versi opposti, quindi la forza risultante $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_M$ è zero, come illustrato in figura 5.4 (si noti che i versi delle forze sono stati disegnati assumendo che la carica q sia positiva; per q negativa entrambe le forze \mathbf{F}_E e \mathbf{F}_M sono invertite). In entrambi i SR dunque la particella di prova è soggetta ad una forza nulla: le descrizioni dei due SR sono equivalenti, come vuole il principio di relatività.

5.4.8 Prima legge di Laplace

Consideriamo un filo percorso da una corrente elettrica I . Per definizione, la corrente I è la quantità di carica che passa attraverso il filo nell'unità di tempo: $I = dq/dt$. Consideriamo un segmento ds del filo conduttore e definiamo un sistema di assi cartesiani orientato in modo che la direzione del segmento sia parallela all'asse x (figura 5.5).

Le cariche elettriche si muovono nel filo conduttore con velocità $\mathbf{v} = ds/dt$ e si ha $I ds = dq(ds/dt) = \mathbf{v} dq$.

Il campo elettrico $d\mathbf{E}$ generato dalla carica elettrica dq contenuta nel segmento di conduttore ds è dato dalle equazioni (5.45), il campo elettrico totale si otterrà integrando su tutto il filo conduttore. Osserviamo però che la velocità di deriva \mathbf{v} delle cariche elettriche (elettroni) in un filo conduttore è normalmente molto bassa, circa 1 mm/s, l'approssimazione non relativistica è quindi giustificata e nelle (5.45) si può porre $\gamma(v) = 1$, per cui il campo elettrico generato da ciascuno dei segmenti del filo conduttore è, con ottima approssimazione, coulombiano:

$$d\mathbf{E} \simeq \frac{dq \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

e il corrispondente campo magnetico, in base alla (5.43), è dato da

$$d\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times d\mathbf{E} \simeq \frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \frac{dq \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dq}{dt} d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.52)$$

che è la ben nota prima legge di Laplace.

Nel SR solidale con il filo, il campo elettrico degli elettroni è neutralizzato da quello dei protoni fermi, per cui si osserva solo il campo magnetico.

Da questi esempi appare chiaro che tutte le leggi della magnetostatica classica si possono ricavare dalle leggi fondamentali del campo elettrico e dalle trasformazioni di Lorentz.

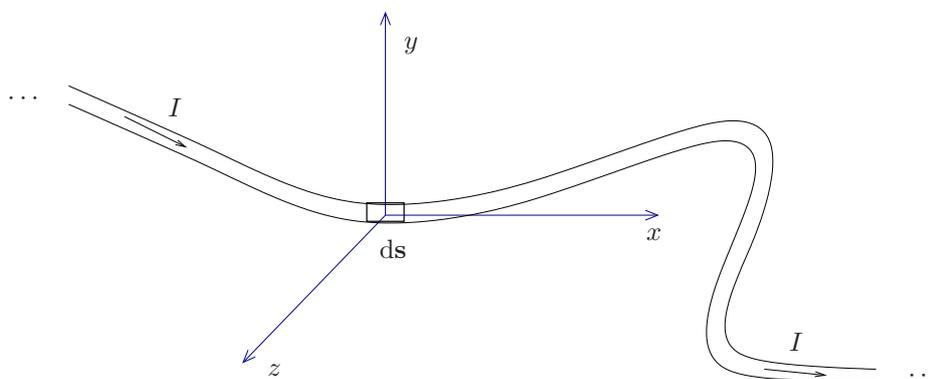


Figura 5.5 Conduttore percorso da corrente