

# Spazio-tempo e Cosmologia

Vittorio de Alfaro  
Dip. di Fisica Teorica, Università di Torino

Marzo 2000

# Chapter 1

## 1- Struttura dello spazio - tempo

Un argomento di interesse notevole nella scuola superiore può essere la concezione dello spazio e del tempo, la sua struttura matematica secondo le diverse teorie (newtoniana, relatività speciale o generale) e le proprietà di equivalenza dei sistemi di riferimento per la descrizione dei sistemi fisici. Questo capitolo è quindi dedicato all'esposizione succinta di questi soggetti.

### 1.1 Meccanica newtoniana

Come sappiamo, per descrivere i moti dei corpi Newton formulò la teoria delle forze e stabilì l'equazione fondamentale della dinamica che connette la forza applicata ad un corpo all'accelerazione che ne risulta:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

L'equazione si applica ad ogni sistema fisico, terrestre o celeste, formato da corpi materiali soggetti a forze. Ogni corpo è caratterizzato da una massa  $m$ .

Secondo Newton le distanze spaziali e le durate temporali restano invariate per osservatori in moto relativo<sup>1</sup>. Inoltre le forze fisiche non dipendono dallo stato di moto ma solo dalle distanze relative e sono pertanto invariate tra i suddetti osservatori. Anche le accelerazioni sono invariate se osservate da sistemi di riferimento in moto relativo a velocità costante.

Quindi l'equazione fondamentale della meccanica (1.1), se vale in un SR, vale in tutti i sistemi in moto a velocità costante rispetto a quello. I SR in cui vale la (1.1) sono detti sistemi inerziali, tutti equivalenti nel senso che ogni termine che compare nella (1.1) resta invariato.

Sia  $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  il vettore posizione di un punto in un SR  $K$  e  $\mathbf{Y}$  la posizione dello stesso punto in un SR  $K'$  che si muove con velocità costante  $\mathbf{v}$  rispetto a  $K$ . Secondo la visione newtoniana le trasformazioni di coordinate da  $K$  a  $K'$  che lasciano invariata l'equazione fondamentale (1.1) sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= R\mathbf{X} + \mathbf{v}t - \mathbf{A}, \\ t' &= t + t_0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Notare che l'invarianza delle distanze permette l'uso del concetto di corpo rigido nella meccanica newtoniana.

dove le quantità  $R$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{A}$  e  $t_0$  sono indipendenti dal tempo.

$R$  è una matrice  $3 \times 3$  che rappresenta una rotazione generica degli assi coordinati. Essa è definita da 3 parametri (la direzione dell'asse di rotazione e l'angolo). Il vettore  $\mathbf{v}$  è la velocità relativa tra i due sistemi (definita dai 3 parametri delle componenti della velocità) e definisce le trasformazioni di Galileo a velocità costante [13]. Il vettore  $\mathbf{A}$  rappresenta la differenza nella posizione dell'origine dei due sistemi di coordinate (traslazione dell'origine) all'istante  $t = 0$  e contiene 3 parametri. Infine, nel passare da un sistema all'altro si può cambiare l'istante in cui è stato posto lo zero del tempo; il parametro  $t_0$  rappresenta appunto questa possibilità.

La trasformazione (1.2) lascia invariate le distanze euclidee tra punti dello spazio, le durate e le derivate rispetto al tempo: le distanze tridimensionali e le durate temporali sono invarianti rispetto a trasformazioni tra sistemi inerziali.

Le trasformazioni (1.2) lasciano invariate in forma le equazioni del moto di ogni sistema isolato. Infatti la definizione di "sistema isolato" implica che tutte le forze si esprimano in termini di distanze relative tra corpi che sono invarianti per le operazioni rappresentate dalle (1.2).

Esse formano un gruppo (nel senso matematico) a 10 parametri: 3 per le rotazioni, 3 per le traslazioni, 3 per le trasformazioni di Galileo, uno per le traslazioni del tempo.

Le invarianze per rotazione, traslazione spaziale e traslazione del tempo sono le proprietà generali dello spazio e del tempo newtoniano. L'invarianza per la trasformazione rappresentata da  $R$  ( $R\mathbf{X}$  è una rotazione degli assi), è l'espressione dell'isotropia dello spazio: tutte le direzioni sono equivalenti. L'invarianza per traslazione dell'origine degli assi ( $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{A}$  è una traslazione) è l'espressione dell'omogeneità dello spazio: tutti i punti dello spazio sono equivalenti. Quella per traslazione del tempo ( $t' = t + t_0$ ) è l'espressione dell'omogeneità del tempo: gli istanti del tempo sono tutti equivalenti.

L'invarianza per trasformazioni di Galileo ( $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{v}t$ ) è un po' diversa: rappresenta l'equivalenza, ai fini della descrizione del moto, tra sistemi a velocità relativa costante. È la relatività galileiana. Se un'equazione del

moto vale in un SR, varrà anche immutata in tutti i SR in moto a velocità relativa costante [13].

Questi sono dunque i postulati sulla struttura dello spazio - tempo e sul comportamento dei sistemi dinamici nella fisica newtoniana.

## 1.2 Forze fittizie

Newton osserva che esistono accelerazioni che non sono dovute a forze perché il loro valore dipende solo da parametri geometrici e non da posizioni relative di corpi.

Percorrendo una curva ad alta velocità si è soggetti accelerazioni cui non corrispondono forze effettive: su una giostra un pendolo devia dalla verticale; un recipiente pieno di acqua legato ad una corda e fatto girare in un piano verticale non rovescia l'acqua contenuta. Le accelerazioni sperimentate nei moti circolari dipendono dal raggio e dalla velocità della rotazione, non da agenti fisici: sono dovute al moto. In questi sistemi di riferimento non vale la legge fondamentale della dinamica (1.1), a meno di inventare forze fittizie.

Supponiamo che in un dato SR che chiamiamo  $K$  valga l'eq. (1.1) con forze fisiche, cioè che  $K$  sia un sistema inerziale. Consideriamo una rotazione e una traslazione del sistema  $K'$  dipendenti dal tempo in modo qualunque. La relazione generale tra le coordinate, che sostituisce la (1.1) è<sup>2</sup>

$$\mathbf{X} = R^{-1}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{b}(t). \quad (1.3)$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= R^{-1} \frac{d\mathbf{Y}}{dt} + \frac{dR^{-1}}{dt} \mathbf{Y} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \\ \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} &= R^{-1} \frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} + 2 \frac{dR^{-1}}{dt} \frac{d\mathbf{Y}}{dt} + \frac{d^2R^{-1}}{dt^2} \mathbf{Y} + \\ &+ \frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2}, \end{aligned}$$

e quindi consideriamo l'accelerazione nel sistema in moto  $K'$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} &= \frac{R\mathbf{F}}{m} - 2R \frac{dR^{-1}}{dt} \frac{d\mathbf{Y}}{dt} - \\ &- R \frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2} - R \frac{d^2R^{-1}}{dt^2} \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il primo termine a destra dell' '=' è la forza scritta nel sistema rotante:

$$\frac{R\mathbf{F}}{m} = R \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}.$$

Il secondo termine,

$$-2R \frac{dR^{-1}}{dt} \frac{d\mathbf{Y}}{dt},$$

<sup>2</sup>Attenzione alle differenze tra la (1.2) e la (1.3) in cui le quantità  $R$  e  $\mathbf{b}$  sono funzioni del tempo.

corrisponde alla forza di Coriolis; il terzo termine,

$$-R \frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2},$$

corrisponde alla forza di inerzia sperimentata nel sistema  $K'$  per via della accelerazione dovuta alla traslazione rappresentata da  $\mathbf{b}(t)$ ; il quarto termine,

$$-R \frac{d^2R^{-1}}{dt^2} \mathbf{Y},$$

è il responsabile della forza centrifuga.

Dunque nel sistema  $K'$  esistono forze fittizie, dovute alla rotazione del sistema (ricordiamo la giostra). Diremo che il sistema  $K'$  non è inerziale.

Conclusione: Si possono distinguere i sistemi in cui vale la (1.1) con forze fisiche (sistemi inerziali) da quelli, in moto vario rispetto ai precedenti, in cui appaiono forze fittizie. L'accelerazione rispetto ai sistemi inerziali è una grandezza assoluta: essa è la stessa per tutti, non dipende dai parametri del particolare sistema inerziale. L'accelerazione inoltre permette di distinguere un sistema inerziale da uno non inerziale: dato un sistema di riferimento a caso, se una parte dell'accelerazione è descrivibile mediante i termini successivi al primo nella formula (1.4), essa è "apparente", dovuta all'accelerazione del sistema di riferimento rispetto all'insieme dei sistemi inerziali, e il sistema di riferimento non è inerziale. Si può dunque parlare di, e misurare la, accelerazione assoluta. Si noti che non è impossibile usare un SR non inerziale; è necessario aggiungere le "forze fittizie", cioè utilizzare l'eq. (1.4) in luogo della (1.1).

## 1.3 Newton e lo spazio assoluto

La meccanica newtoniana ha bisogno di postulare soltanto l'insieme di SR inerziali collegati dalle operazioni di invarianza descritte dalle (1.2). Ma per ragioni che qui non ci interessano, Newton trasferì il carattere essenzialmente assoluto dell'accelerazione, inevitabile e inconfutabile, allo spazio assoluto del quale postulò l'esistenza. In parole moderne, tra tutti i sistemi di riferimento inerziali equivalenti ne esiste uno più fondamentale degli altri, perché coincide con lo "spazio assoluto", che per Newton è il laboratorio privilegiato. Esso giustifica la validità della legge fondamentale della dinamica (1.1) e la definizione assoluta delle distanze tridimensionali.

Anche il tempo newtoniano è assoluto. Distanze tra punti e durate temporali sono indipendenti dallo stato di moto perché identiche a quelle misurate nello spazio e nel tempo assoluti. Osservatori che misurino distanze e durate in diversi sistemi di riferimento misurano sempre le stesse porzioni di spazio e di tempo assoluto.

Riportiamo le parole che Newton scrisse a proposito dello spazio ed il tempo nello Scholium Generale (Comento Generale) della seconda edizione dei Principia [14]<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Il testo è tradotto da me.

Fin qui ho dato le definizioni delle parole che sono meno note e ho spiegato il senso in cui devono essere comprese nel discorso seguente. Non definisco Tempo, Spazio, Luogo e Moto, che sono ben noti a tutti. Voglio solo osservare che il volgo concepisce queste quantità soltanto sotto il profilo della relazione che hanno con corpi sensibili. Ne segue che nascono certi pregiudizi e per rimuoverli sarà conveniente distinguerle in Assolute e Relative, Vere ed Apparenti, Matematiche e Comuni.

I. Il Tempo Assoluto, Vero e Matematico, fluisce uniformemente in sé e per sua natura senza relazione con alcunché di esterno, e con altro nome viene chiamato Durata: il tempo Relativo, Apparente e Volgare, è una qualche misura (sia essa accurata o no) sensibile ed esterna della Durata per mezzo di movimento, la quale è comunemente usata invece del tempo Vero; come per esempio un'Ora, un Giorno, un Mese, un Anno.

II. Lo Spazio Assoluto, per la sua propria essenza, senza relazione con alcunché di esterno, rimane sempre simile e immobile. Lo Spazio Relativo è qualche dimensione mobile o misura degli spazi assoluti; che i nostri sensi determinano, per la sua posizione relativa a corpi; e che è comunemente scambiato per lo spazio immobile; Tale è la dimensione di uno spazio sotterraneo, aereo o celeste, determinato dalla sua posizione rispetto alla Terra. Lo Spazio Assoluto e quello Relativo, sono identici in forma e grandezza; ma essi non restano sempre numericamente gli stessi. Perché se la Terra, per esempio, si muove; un luogo della nostra Aria, che relativamente e rispetto alla Terra, rimane sempre lo stesso, sarà ad un certo tempo una parte dello spazio assoluto in cui l'Aria passa; ad un altro tempo sarà un'altra parte dello stesso, e così, compreso in modo assoluto sarà mutevole in perpetuo.

III. Il Luogo è una porzione di spazio che un corpo occupa, e, a seconda dello spazio, è assoluto o relativo. Dico, una Porzione di Spazio, non la posizione né la superficie esterna del corpo. Perché i luoghi di solidi eguali sono sempre uguali; mentre le loro superfici, per via delle diverse forme, sono spesso diseguali. Le posizioni, propriamente, non hanno quantità né sono esse stesse propriamente i luoghi, quanto piuttosto sono le proprietà dei luoghi. [...]

IV. Il moto Assoluto, è la traslazione di un corpo da un luogo assoluto ad un altro; e il moto Relativo, la traslazione da un luogo relativo ad un altro. Così in una Nave in navigazione, il luogo relativo di un corpo è quella parte della Nave che il Corpo possiede; o quella parte della sua cavità che il Corpo

riempie, e che quindi si muove insieme alla Nave: E la quiete Relativa è la permanenza del Corpo nella stessa parte della Nave o della sua cavità. Ma la quiete Reale, assoluta, è la permanenza del Corpo nello stesso luogo di quello Spazio Immobile in cui la Nave stessa, la sua cavità e tutto ciò che contiene si muovono. Ne segue che, se la Terra è davvero in quiete, il Corpo a riposo relativamente alla Nave si muoverà realmente e assolutamente con la stessa velocità che la Nave ha sulla Terra. Ma se anche la Terra si muove, il moto vero ed assoluto del Corpo risulterà, in parte dal vero moto della Terra nello spazio immobile; in parte dal moto relativo della Nave sulla Terra; e se il corpo si muove anche rispetto alla Nave; il suo vero moto risulterà, in parte dal vero moto della Terra, nello spazio immobile, e in parte dai moti relativi sia della Nave sulla Terra che del Corpo nella Nave; e da questi moti relativi risulterà sul moto relativo del Corpo sulla Terra.[...]

Il tempo Assoluto, in Astronomia, si distingue da quello Relativo, per l'Equazione o correzione del tempo volgare<sup>4</sup>. Perché i giorni naturali sono per natura ineguali, benché comunemente vengano considerati uguali, e usati come misura del tempo: gli Astronomi correggono questa disegualianza per poter dedurre più accuratamente i moti celesti. Può darsi che non esista un moto equabile che permetta la misura accurata del tempo. Tutti i moti possono essere accelerati e ritardati, ma la progressione vera, o equabile, del tempo assoluto non ammette alcuna variazione. La durata, o perseveranza dell'esistenza delle cose rimane immutata, sia che il moto sia veloce o lento o inesistente.

Come l'ordine delle parti del Tempo è immutabile, così anche l'ordine delle parti nello Spazio [...] Perché, i tempi e gli spazi sono, come se fossero, i Luoghi sia di se stessi che di tutte le altre cose. Tutte le cose sono poste nel Tempo in ordine di successione; e nello spazio nell'ordine di Posizione. È dalla loro essenza o natura che essi siano Luoghi; e che i luoghi primari delle cose sian in movimento è assurdo. Questi sono quindi i luoghi assoluti; e le traslazioni fuori da quei luoghi sono i soli Moti Assoluti.

Ma poichè le parti dello Spazio non possono essere viste né distinte l'una dall'altra dai sensi, allora al loro posto noi usiamo misure sensibili di quelle [...]. E così invece di luoghi e moti assoluti, usiamo quelli relativi; e ciò senza inconvenienti nelle questioni comuni: ma nelle disquisizioni Filosofiche, dovremmo

<sup>4</sup>Newton si riferisce alla "equazione del tempo", differenza tra il passaggio medio al meridiano e il passaggio effettivo nei diversi giorni dell'anno.

astrarre dai sensi e considerare le cose in sé, distinte da quelle che sono solo misure sensibili di esse. Perché può darsi che non esista alcun corpo realmente in quiete al quale i luoghi e i moti degli altri possano essere riferiti.

Ma noi possiamo distinguere la Quietè dal Moto, assoluti e relativi, uno dall'altro, dalle loro Proprietà, Cause ed Effetti. È una proprietà della Quietè, che i corpi realmente in quiete sono in quiete uno rispetto all'altro. E quindi, siccome è possibile, che nelle regioni remote delle Stelle fisse, o forse molto oltre, vi possa essere qualche corpo in quiete assoluta; ma è impossibile sapere dalla posizione relativa di corpi nelle nostre regioni, se ce n'è qualcuno che mantiene la stessa posizione rispetto a quel corpo remoto; ne segue che la quiete assoluta non può essere determinata a partire dalla posizione di corpi nelle nostre regioni.[...]

Le Cause dalle quali si distinguono i moti veri da quelli relativi, uno dall'altro, sono le forze esercitate sui corpi per generare il moto. Il moto vero non è né generato né alterato se non da qualche forza impressa sul corpo che viene mosso; mentre il moto relativo può venir generato o alterato senza alcuna forza impressa al corpo.[...]

Gli effetti che distinguono il moto assoluto da quello relativo sono le forze di allontanamento dall'asse del moto circolare. Perché, non ci sono queste forze in un moto circolare puramente relativo, mentre nel moto circolare vero e assoluto, esse sono maggiori o minori, a seconda della quantità di moto.

[Segue l'esempio del secchio pieno d'acqua posto in rotazione attorno al proprio asse di simmetria:]

...all'inizio la superficie dell'acqua sarà piana come era prima che il recipiente cominciasse a ruotare; ma il recipiente, comunicando gradualmente il proprio moto all'acqua, comincerà a farla ruotare percettibilmente e ritirarsi poco a poco dal centro, e montare ai lati del recipiente, formando una figura concava, (come ho sperimentato) e più veloce è il moto e più l'acqua salirà, finché infine, svolgendo le sue rivoluzioni nello stesso tempo che il recipiente, essa diventa in quiete nel suo interno. Questa salita dell'acqua mostra la sua tendenza a recedere dall'asse del moto; e il moto circolare vero e assoluto dell'acqua, che è qui direttamente contrario a quello relativo, si rende manifesto, e può essere misurato da questa tendenza. Dapprima, quando il moto relativo dell'acqua nel secchio era massimo non produceva alcuna tendenza a recedere dall'asse: l'acqua non tendeva ad andare verso la circonferenza né a salire verso il bordo del recipiente, ma restava con superficie piana, e quindi il suo Vero moto circolare non

era cominciato. Ma poi, quando il moto relativo dell'acqua era diminuito, la salita verso i bordi del recipiente provava la sua tendenza a recedere dall'asse; e questa tendenza mostrava l'aumento continuo del moto circolare reale dell'acqua, finché non aveva raggiunto la massima grandezza, quando l'acqua era a riposo relativamente al recipiente. E quindi questa tendenza non dipende in alcun modo dalla traslazione dell'acqua rispetto allo spazio ambiente, né il moto circolare vero può venir definito da traslazioni di questo genere. Esiste un solo moto circolare reale per ogni corpo in rotazione, in corrispondenza di una unica capacità di tendere a recedere dal proprio asse del moto, come suo effetto proprio e corrispondente: mentre i moti relativi in uno stesso corpo sono innumerevoli, a seconda delle varie relazioni che esso ha con i differenti corpi esterni. E altre relazioni simili, sono del tutto sprovviste di qualsiasi effetto reale, a parte il fatto che anche essi possono prender parte a quell'unico vero moto. [...] È molto difficile scoprire, e distinguere effettivamente, i moti Veri dei singoli corpi e distinguerli da quelli Apparenti: poiché le parti di quello spazio immobile in cui quei moti si compiono, non vengono in alcun modo sotto l'osservazione dei nostri sensi.

Postulare l'esistenza dello spazio assoluto non era una necessità della fisica newtoniana: bastava postulare l'esistenza dei sistemi inerziali equivalenti tra i quali nessuna esperienza di meccanica può distinguere lo spazio assoluto (è la relatività galileiana della meccanica [13]). Se Newton pose lo spazio assoluto a garante della accelerazione assoluta, fu per altre ragioni, esterne rispetto alla struttura della sua fisica, che non discuteremo qui.

La meccanica newtoniana, si sa, trionfò, con l'applicazione ai moti celesti e a quelli terrestri e con i successivi sviluppi formali. La questione dell'esistenza di uno spazio assoluto rimase nello sfondo e divenne rilevante con lo sviluppo della conoscenza dei fenomeni elettrici e magnetici.

## 1.4 Relatività speciale e sistemi inerziali

Alla fine dell'800 due problematiche riguardanti in definitiva la struttura dello spazio - tempo si intersecano. La prima riguarda la critica dello spazio assoluto newtoniano inteso come corpo fisico in qualche senso [15]; la seconda, il comportamento dell'elettromagnetismo rispetto a cambiamenti di sistemi inerziali.

Il programma di revisione critica dei fondamenti della meccanica riprende, con ben maggiore conoscenza, il punto di vista relazionista con l'intento di eliminare gli assoluti: lo spazio assoluto e quindi, stavolta,

l'accelerazione assoluta. Mach (1838-1916) propone che la accelerazione e l'inerzia siano in realtà definite relativamente alle grandi masse dell'universo [16]. Ma la proposta non costituisce una alternativa reale alla fisica newtoniana perchè Mach non è in grado di fornire una teoria ma soltanto un programma e una speranza, programma non realizzato e speranza delusa.

Ma in realtà è l'elettromagnetismo, ben più che la indagine critica, a portare cambiamenti nella struttura fisica attribuita allo spazio e al tempo (come sempre, la natura ha più forza critica delle costruzioni critiche).

Con la sistemazione formale dei fenomeni elettromagnetici, nella seconda metà dell'800, il problema dello spazio assoluto assume un aspetto nuovo. I fenomeni elettromagnetici risiedono nello spazio, implicano localizzazione di energia e vibrazioni che trasportano energia e quantità di moto. Dunque dovrà esistere un entità materiale, l'etere, sede dei fenomeni elettromagnetici. Ma allora lo spazio assoluto di Newton, non rivelabile con esperimenti meccanici, sarà forse il sistema in cui l'etere è fermo? E la equivalenza dei sistemi inerziali sarebbe violata per l'elettromagnetismo? Il dibattito è lungo e complesso.

Sappiamo quale via sia stata presa da Einstein: la Relatività speciale elimina l'etere e ripristina l'insieme dei riferimenti equivalenti richiedendo che le equazioni dell'elettromagnetismo, come quelle della meccanica, siano le stesse nell'insieme di sistemi inerziali in moto uniforme relativo<sup>5</sup>. All'inizio del lavoro del 1905 [8] Einstein dice, (con parole in parte già riportate nel capitolo precedente):

“... i tentativi falliti di individuare qualche movimento della Terra relativamente al "mezzo luminifero" suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all'idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che [...] per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche. Eleveremo questa congettura (il contenuto della quale verrà detto, in quanto segue, "principio di relatività") al rango di postulato; supporremo inoltre - un postulato, questo, solo apparentemente incompatibile col precedente - che la luce, nello spazio vuoto, si propaghi sempre con una velocità determinata che non dipende dallo stato di moto del corpo che la emette. Questi due postulati bastano per giungere ad una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento, semplice e coerente, fondata sulla teoria di Maxwell per i corpi stazionari. L'introduzione di un "etere luminifero" si manifesterà superflua, tanto più che la concezione che qui illustreremo non avrà bisogno di uno "spazio assolutamente stazionario" corredato di particolari proprietà nè di un vettore velocità asse-

<sup>5</sup>Quindi in particolare la velocità della luce deve essere la stessa in tutti questi sistemi.

nato ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici.”

Per instaurare la nuova relatività che comprende i fenomeni elettromagnetici le leggi di trasformazione tra sistemi inerziali cambiano (trasformazioni di Lorentz), e richiedono che la misura di distanze e di durate dipenda dal moto dell'osservatore. L'unico invariante spazio-temporale è la traiettoria della luce. In termini formali, nella fisica newtoniana sono invarianti rispetto allo stato di moto dell'osservatore sia le distanze infinitesime tra due punti spaziali che le durate temporali:

$$d\mathbf{x}^2 = \text{costante}; \quad dt^2 = \text{costante}. \quad (1.5)$$

Nella Relatività speciale l'unico invariante è

$$ds^2 \equiv d\mathbf{x}^2 - dx_0^2 = \text{costante}. \quad (1.6)$$

Einstein deve modificare la meccanica per adattarla alle nuove trasformazioni che non ammettono né corpi rigidi né distanze e durate assolute: così vengono eliminati lo spazio assoluto e il tempo assoluto newtoniani, che peraltro non giocavano alcun ruolo, se non psicologico, nella meccanica.

Rimandiamo al capitolo sulla Relatività speciale per maggiori particolari. Facciamo qui soltanto alcune osservazioni generali.

La vera differenza tra meccanica newtoniana e relatività speciale non sta nell'affermazione di un principio di relatività (presente, seppure diverso, in ambedue), e neppure nella qualità metodologica della teoria: sta nel fatto che la relatività speciale contiene l'elettromagnetismo e descrive i moti ad alta velocità, mentre la fisica newtoniana no. Nell'analizzare il contenuto concettuale di una teoria appare dunque necessario separarne il contenuto matematico e il valore conoscitivo dagli argomenti di carattere meta scientifico che vennero avanzati per favorire la sua adozione.

Dal punto di vista formale la struttura newtoniana e quella relativistica non sono così profondamente diverse: i cambiamenti sono compendati nella differenza tra la (1.5) e la (1.6).

I due gruppi di invarianza, quello della relatività newtoniana e quello della relatività speciale einsteiniana, hanno relazioni interessanti. Il gruppo di invarianza della Relatività speciale ha 10 parametri classificati nello stesso modo del gruppo di invarianza newtoniano: 3 parametri per la rotazione degli assi spaziali, 3 parametri per le traslazioni spaziali, 1 parametro per la traslazione temporale, 3 parametri per le trasformazioni (di Lorentz) delle coordinate spaziali e temporali tra due sistemi in moto relativo a velocità costante. Riscriviamo le due trasformazioni nella direzione 3:

Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x'_3 &= x_3 C - ct S, \\ ct' &= ct C - x_3 S, \end{aligned} \quad (1.7)$$

con

$$C = \cosh \varphi = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

$$S = \sinh \varphi = \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Trasformazioni di Galileo:

$$\begin{aligned} x'_3 &= x_3 - vt, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (1.8)$$

La parte delle trasformazioni di invarianza che riguarda le rotazioni spaziali e le traslazioni spaziali e temporale è identica per il gruppo della Relatività speciale e per il gruppo della relatività newtoniana. La parte diversa riguarda le trasformazioni tra due sistemi a velocità relativa costante: le (1.7) confrontate con le (1.8). Questa differenza determina il cambiamento tra la struttura dello spazio - tempo newtoniano e quello della Relatività speciale.

Le proprietà geometriche dello spazio - tempo sono date a priori nella Relatività speciale quanto nella fisica newtoniana, e l'accelerazione rispetto ai sistemi inerziali è altrettanto assoluta quanto lo era per Newton. Tuttavia la differenza tra le (1.7) e le (1.8) conduce ad una fisica profondamente diversa.

La Relatività speciale ha eliminato lo spazio e il tempo assoluti di Newton. Ciò è vero storicamente: fino ad Einstein quasi tutti hanno continuato a pensare in termini di spazio assoluto e di tempo assoluto. Ma va ricordato che lo spazio e il tempo assoluti newtoniani non sono un postulato necessario nella fisica newtoniana, ma una estensione concettualmente utile che venne introdotta per ragioni non strettamente necessarie. Per la fisica newtoniana basta postulare l'esistenza degli infiniti sistemi inerziali equivalenti. La stessa cosa avviene per la fisica relativistica: si postulano gli infiniti sistemi inerziali equivalenti. È la relazione tra questi sistemi inerziali che è diversa nei due casi.

Da un punto di vista astratto si può fare la seguente considerazione. Seguendo quanto fece Newton nella sua meccanica, diciamo che nella Relatività speciale esiste uno spazio - tempo assoluto. In esso valgono le equazioni del moto relativistiche; è dotato di metrica minkowskiana determinata dalle proprietà del movimento della luce. Per via dell'invarianza rispetto alle (1.7), le stesse equazioni valgono anche in tutti i sistemi in moto con velocità costante nello spazio - tempo assoluto. Sistemi accelerati rispetto a questo spazio - tempo mostrano forze fittizie.

Stiamo seguendo la traccia di Newton. Chi vuole un assoluto potrebbe essere contento. Ma ciò che andava bene per lo spazio e il tempo del 1687 non va più bene per lo spazio - tempo del 1905. In primo luogo lo spazio assoluto di Newton poteva essere intuitivo mentre quello della Relatività speciale no. In secondo luogo la motivazione di Einstein era proprio la rimozione di spazio e tempo assoluti! Questo spunto potrebbe essere interessante per le relazioni tra la descrizione matem-

atica dei sistemi fisici e il meta linguaggio di interpretazione.

Osserviamo infine che in Relatività speciale l'inerzia dei corpi non dipende dalla distribuzione delle masse: nonostante l'ispirazione del pensiero di Mach su Einstein, la relatività speciale non è una teoria machiana.

## 1.5 Relatività Generale

I limiti della Relatività speciale portarono Einstein a concepire la Relatività generale.

Mentre esiste in Relatività speciale un insieme di sistemi inerziali equivalenti per la descrizione dei corpi materiali e dei campi elettromagnetici, i sistemi di riferimento accelerati rispetto a quelli inerziali sono diversi: possiedono un'accelerazione assoluta e l'equazione del moto espressa in termini delle coordinate di questi sistemi non è la stessa che nel caso dei sistemi inerziali.

Questa differenza e il desiderio di includere la gravità nella descrizione relativistica spinsero Einstein ad andare oltre sviluppando due aspetti di un programma fondamentale: l'introduzione della gravitazione nello schema relativistico e l'estensione del principio di relatività a sistemi in moto qualunque, in modo da svincolarsi dalla distinzione fisica, valida tanto in relatività ristretta quanto in meccanica newtoniana, tra sistemi inerziali e non.

Al contrario di quanto era accaduto per la relatività ristretta, Einstein scrisse, tra il 1907 e il 1915, una quindicina di lavori sulla gravitazione e sul principio di equivalenza correggendosi, cambiando punti di vista e ampliando la portata della teoria. Il 24 novembre 1915 Einstein presentò alla Accademia Prussiana di Berlino la versione finale.

Elenchiamo i vari aspetti di questa teoria:

1. La covarianza generale, ovvero come descrivere la fisica in sistemi accelerati rispetto a sistemi inerziali: equivalenza formale tra tutti i sistemi di riferimento.
2. Il principio di equivalenza, ovvero l'equivalenza locale tra l'accelerazione e il campo gravitazionale: come si cancella il campo gravitazionale cadendo liberamente.
3. La gravità, ovvero come lo spazio - tempo si incurva per effetto delle masse e dell'energia: la struttura dello spazio - tempo non è più assegnata a priori.
4. Il movimento delle masse soggette a gravità avviene lungo le curve geodetiche dello spazio - tempo: visione geometrica del moto gravitazionale.

Ripercorriamo il cammino che portò Einstein a formulare la relatività generale. Cominciamo dalla covarianza generale. Non è difficile introdurre un formalismo che descriva sia i sistemi inerziali che quelli accelerati. Le leggi della fisica sono considerate una codificazione

dei risultati di osservazioni le quali consistono, in ultima analisi, nell'osservare coincidenze spazio - temporali (nella fisica non quantistica) mediante l'ausilio di un sistema di coordinate spaziali e di orologi. Si può adottare un principio molto plausibile: il comportamento dei sistemi fisici non dipende dal sistema di coordinate scelto per lo spazio e per il tempo, e pertanto le leggi della fisica devono essere esprimibili in qualsiasi sistema di coordinate, comunque definito, purchè reperiscano in modo non ambiguo ogni evento. Se si usa un sistema non inerziale, basterà fornire la relazione tra questo sistema ed un sistema inerziale e definire il modo di trasformarsi delle quantità fisiche coinvolte.

La scrittura delle eqq. del moto in sistemi qualsiasi non è dunque il contenuto essenziale della Relatività generale: sia nella fisica newtoniana che nella Relatività speciale si possono scrivere equazioni valide in sistemi non inerziali: ricordiamo le eqq. (1.4) che sono scritte in un sistema non inerziale. Il problema è che i sistemi accelerati rispetto a quelli inerziali sono distinguibili perché hanno fisica diversa, sia in Newton che in Relatività speciale.

Ricordiamo che lo spazio - tempo della relatività ristretta è una varietà priva di curvatura con metrica  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ . Le coordinate spaziali e temporali di un evento in due sistemi inerziali differiscono per le operazioni rappresentate dalle (1.2) che possono essere viste come un cambiamento di coordinate rettilinee nello spazio - tempo quadridimensionale.

L'uso di un sistema di riferimento accelerato rispetto ad un sistema inerziale corrisponde in Relatività speciale all'uso di un sistema di coordinate curvilinee nello spazio - tempo di Minkowski, e la geometria differenziale insegna appunto come passare dalle coordinate rettilinee alle coordinate curvilinee. Quindi la descrizione di un sistema in coordinate accelerate rispetto ad un sistema gravitazionale è possibile, sia nella fisica newtoniana che nella Relatività speciale, se si assegnano le regole per la rappresentazione delle grandezze fisiche in coordinate curvilinee (corrispondenza tra gli eventi e i valori delle coordinate, richieste di continuità etc).

La possibilità di usare sistemi di coordinate qualsiasi (SR in moto qualsiasi) non limita la struttura delle leggi fisiche, né pone di per sé i sistemi accelerati sullo stesso piano dei sistemi inerziali. Nei sistemi accelerati esistono accelerazioni non dovute a forze fisiche ma al loro moto rispetto ai sistemi inerziali, che ci permettono di distinguerli da quelli inerziali. Possiamo scrivere le equazioni dell'elettromagnetismo usando un sistema di coordinate solidale con una giostra in moto, ma ciò non cambia il fatto che nella giostra misureremo accelerazioni che non sono dovute a forze fisiche. Per avere equivalenza tra tutti i sistemi di riferimento non basta scrivere le leggi di trasformazione tra sistemi in moto qualunque: bisogna che le accelerazioni diverse che esistono in questi sistemi siano egualmente attribuibili ad effetti fisici, altrimenti, nonostante il formalismo, la distinzione resta.

Le novità della Relatività generale rispetto alla equivalenza di tutti i sistemi di riferimento sono le seguenti.

- Lo spazio - tempo ammette una metrica generalizzata. Essa serve a scrivere in modo formalmente covariante le equazioni della fisica, cioè che la loro forma sia la stessa per tutti i sistemi di riferimento, cioè la formulazione dei principi fisici in modo formalmente valido per sistemi di riferimento in moto qualunque. Se la metrica descrive uno spazio - tempo di tipo Minkowski, si tratta soltanto dell'introduzione di un insieme di coordinate curvilinee e non vi è gravitazione. In uno spazio - tempo di Minkowski questo è il modo (di cui si è già parlato) di descrivere sistemi non inerziali: coordinate curvilinee in uno spazio - tempo minkowskiano.
- Se la metrica descrive invece una varietà dotata di curvatura, questo è un vero effetto gravitazionale. Le masse incurvano lo spazio - tempo.
- Supponiamo di fare solo misure *locali*, che NON possono rilevare se c'è curvatura nello spazio-tempo intorno al laboratorio. Non è possibile stabilire solo con queste misure se gli effetti di tipo accelerazione sperimentati in un sistema di riferimento in cui si stanno eseguendo gli esperimenti sono dovuti all'accelerazione rispetto a sistemi inerziali (forze "spurie" dovute a coordinate curvilinee) oppure alla presenza di campo gravitazionale (forza "fisica", curvatura). La distinzione richiede misure di curvatura (forze di marea).

Cade così la distinzione tra sistemi inerziali (forze fisiche) e sistemi accelerati (quelli dotati di forze spurie). In ambedue i sistemi ogni accelerazione può essere ricondotta ad una forza fisica.

Einstein si basò (principio di equivalenza) sull'identificazione di massa inerziale e massa gravitazionale enunciata da Galileo e incorporata nella meccanica newtoniana: in ogni campo gravitazionale tutti i corpi cadono con la stessa legge del moto, indipendentemente dalla loro massa. Se questo è vero, un campo gravitazionale, nella porzione di spazio e di tempo in cui è uniforme e costante (cioè localmente), ha gli stessi effetti di una accelerazione; i due effetti sono indistinguibili.

Consideriamo un laboratorio contenente persone e strumenti di misura, che sia tenuto fermo in un campo gravitazionale. Tutti i corpi contenuti sentono l'attrazione gravitazionale e se gli oggetti interni vengono liberati dall'appoggio si misura una accelerazione eguale per tutti. Questi effetti sono identici a quelli sperimentati all'interno di un laboratorio accelerato verso "l'alto" in assenza del campo gravitazionale. Le persone chiuse nella camera non sanno se stanno accelerando verso "l'alto" o se una forza gravitazionale le attrae nella direzione opposta.

Ne deduciamo una regola generale. I sistemi accelerati sono localmente indistinguibili da sistemi sottoposti ad una attrazione gravitazionale perchè l'effetto è identico. Pertanto le accelerazioni "spurie" possono essere spiegate con una causa fisica: una attrazione gravitazionale.

Quindi il principio di equivalenza pone tutti gli osservatori sullo stesso piano pur di considerare il campo



gravitazionale tra le grandezze esistenti nel mondo fisico. Questo basta per preservare l'idea della relatività di tutti i moti. Anche l'accelerazione ha dunque una sua relatività, a prezzo dell'introduzione del campo gravitazionale. Questo copre una parte del programma di Einstein: è stabilita l'equivalenza di tutti i sistemi.

Inoltre una forza gravitazionale è annullata localmente da una accelerazione opportuna del sistema di riferimento. Consideriamo un laboratorio non soggetto a forze esterne diverse dalla gravità e quindi in caduta libera nel campo gravitazionale. Gli oggetti racchiusi cadono tutti con la stessa accelerazione rispetto ad un osservatore esterno, mentre i loro moti relativi non sono modificati dalla caduta. Si possono includere i sistemi in interazione elettromagnetica e il principio di equivalenza assume la forma più generale: in un laboratorio non soggetto a vincoli esterni (in caduta libera) la fisica locale è descritta dalla relatività ristretta. Per un osservatore esterno esiste accelerazione e gravità; per l'osservatore in caduta libera non esiste gravità e egli ritiene di costituire un sistema inerziale.

Quindi, in ogni punto dello spazio in ogni istante del tempo, siano presenti o no campi gravitazionali, esiste un sistema di riferimento (detto "in caduta libera") in cui localmente non c'è campo gravitazionale e valgono le leggi della relatività ristretta<sup>6</sup>.

Per esempio, il Sole attrae ogni materia della Terra. L'accelerazione è la stessa per tutti (se prescindiamo da alcune piccole differenze dovute alle disomogeneità del campo gravitazionale solare sulla scala terrestre che sono tra l'altro la causa del contributo del Sole alle maree). Pertanto la posizione relativa dei corpi non cambia, sono tutti soggetti all'attrazione solare che imprime un'accelerazione molto piccola ( $0.6 \text{ cm/sec}^2$ ), sufficiente però a farci giungere sul Sole in 2 mesi e 3 settimane, se non avessimo fortunatamente una velocità tangenziale di circa 30 Km/sec. Poichè cadiamo, non risentiamo di questa attrazione e un laboratorio terrestre (non troppo grande altrimenti diventano evidenti le forze di marea) è approssimativamente un sistema inerziale.

Ma su regioni spazio - temporali estese, tali che il campo gravitazionale sia non costante e/o non omogeneo, l'effetto del campo gravitazionale non può essere annullato da una accelerazione; un esempio chiarirà la questione. Per esempio, le maree terrestri sono dovute all'inomogeneità del campo gravitazionale della Luna e del Sole tra le diverse zone della Terra, e le maree possono essere misurate perfettamente. Esse sono la conseguenza di disomogeneità nel campo gravitazionale in cui la Terra è immersa.

Inoltre, il campo gravitazionale prodotto dalla stessa Terra è non omogeneo: due oggetti in caduta libera, uno sopra Torino e una sopra Sydney, hanno un moto relativo non uniforme ma accelerato, conseguenza dell'inomogeneità della gravità. L'accelerazione relativa tra i due sistemi inerziali è l'effetto essenziale della gravità. Il campo gravitazionale può essere sempre

<sup>6</sup>Ne esistono infiniti, perchè se ne esiste uno, tutti quelli comunque orientati e in moto rettilineo uniforme rispetto a quello sono sistemi di riferimento inerziali.

annullato localmente mediante una opportuna caduta libera, grazie al principio di equivalenza, ma se non è costante (nello spazio e/o nel tempo) il suo effetto si rivela, su distanze spazio - temporali opportunamente grandi, perchè sistemi di riferimento localmente inerziali hanno una accelerazione relativa.

I sistemi in caduta libera su Torino e su Sydney, essendo localmente inerziali, definiscono localmente coordinate spazio - temporali rettilinee.<sup>7</sup> Ma se prolungassimo le coordinate in caduta a Torino fino a Sydney, vedremmo che non coincidono con quelle del sistema in caduta libera a Sydney e che esiste un'accelerazione relativa tra i due sistemi (basta pensare a come sono dirette le accelerazioni di gravità nelle due città).

Questo implica che lo spazio - tempo è curvo (non è solo lo spazio tridimensionale ad essere curvo, ma l'intero spazio - tempo). Purtroppo ci manca il tempo per chiarire che quanto detto prima sull'effetto del campo gravitazionale implica la curvatura dello spazio - tempo. Diamo solo qualche cenno.

Se lo spazio fosse a due dimensioni tutto ciò potrebbe essere visto in modo intuitivo. Uno spazio a due dimensioni può essere rappresentato come una superficie immersa, per esempio, in uno spazio a tre dimensioni. (Le proprietà della superficie sono intrinseche, non dipendono dalla dimensionalità dello spazio in cui vengono immerse). Anche se la superficie non è piatta, localmente nelle vicinanze di ogni suo punto esiste un sistema approssimato di coordinate rettilinee, quelle del piano tangente alla superficie in quel punto. Ma il piano tangente in un punto non è lo stesso del piano tangente in un altro punto, se la superficie è curva.

Lo spazio - tempo ha quattro dimensioni, e il "piano tangente allo spazio - tempo in un suo punto quadridimensionale (un evento) ha anche esso quattro dimensioni; localmente rappresenta il sistema di riferimento inerziale in caduta libera, dotato di geometria di relatività ristretta, che esiste in quel punto dello spazio - tempo. Questo "piano" tangente in un punto non coincide col "piano" tangente che rappresenta localmente il sistema inerziale in caduta libera in un punto diverso dello spazio - tempo, come abbiamo visto per le cadute libere a Torino e a Sydney.

La curvatura dello spazio - tempo può essere mostrata da un esempio. Supponiamo che a 10 000 Km di distanza dalla superficie della Terra si trovi una grande nube sferica di particelle di sabbia che cominciano a cadere. Il diametro della nube è grande, mettiamo, di 5 000 Km. Cadendo, le particelle non sentono attrazione gravitazionale perchè sono in caduta libera; ciascuna di esse fa i suoi esperimenti (locali) e conclude di essere un sistema inerziale. Ma le particelle più vicine alla Terra sono soggette ad una accelerazione maggiore; di conseguenza la sfera si allunga nella direzione della Terra. Al tempo stesso le particelle laterali convergono verso il centro della Terra e quindi si avvicinano

<sup>7</sup>Se vogliamo dare un significato quantitativo a questa locuzione dobbiamo sapere con quale precisione misuriamo disomogeneità della gravità. "Localmente" significa "entro i limiti in cui non rileviamo disomogeneità data la sensibilità dei nostri strumenti di misura".

tra loro. Dopo un po' la nube non è più sferica, si è ristretta orizzontalmente e allungata verticalmente e la distribuzione di velocità non è più uniforme. Osservandosi, le particelle concludono che lo spazio - tempo non è minkowskiano. Infatti ciascuna di esse ritiene a buona ragione di costituire un sistema inerziale flottante nello spazio, eppure posizione e velocità relativa tra questi sistemi inerziali sono cambiate. Questo effetto non dipende dal materiale di cui sono costituite le particelle: è allora una proprietà dello spazio - tempo. Chi distorce lo spazio - tempo? la gravità terrestre.

La struttura della curvatura dello spazio - tempo dipende dalla materia contenuta e si ottiene risolvendo le equazioni di Einstein con contenuto di materia assegnato. Lo spazio - tempo cessa di essere rigido ed è determinato volta per volta dalla materia (e dalle condizioni al contorno). A sua volta la materia si muove in questo spazio - tempo curvo seguendone le linee geodetiche.

La concezione dello spazio - tempo è profondamente cambiata: da spazio rigido euclideo e tempo infinito e assoluto siamo giunti ad uno spazio - tempo la cui struttura è una grandezza dinamica da determinare, caso per caso, partendo dalla distribuzione della materia e risolvendo le equazioni del moto, esercizio che ogni studente di relatività può divertirsi a svolgere in casi semplici. Le richieste a priori sullo spazio - tempo della Relatività generale sono poche. La topologia locale dello spazio deve essere  $R_4$  (3 dimensioni spaziali e 1 dimensione temporale). La struttura metrica è data dalle soluzioni delle eqq. di Einstein e dipende dalla materia

Nasce anche il problema della cosmologia relativistica: la determinazione delle proprietà dello spazio - tempo globale dell'universo in cui viviamo in base alle caratteristiche della materia contenuta.

# Chapter 2

## 2- Cosmologia

### 2.1 Cosmologia di Einstein

Nel 1916 Einstein scrisse una presentazione completa della nuova teoria che conteneva alcuni effetti fondamentali: il calcolo della variazione indotta nel perielio di Mercurio dagli effetti di relatività generale, l'incurvamento dei raggi di luce nel passare nelle vicinanze del Sole e il rallentamento del periodo di un orologio posto in un campo gravitazionale. La misura dell'incurvamento della luce era ancora da venire (eclisse del 29 maggio 1919), l'unico controllo possibile riguardava il moto del perielio di Mercurio, e il calcolo basato sulla relatività generale spiegò esattamente la discrepanza tra le misure e la teoria non relativistica.

In quell'anno Einstein discusse anche altri aspetti della teoria: questioni di principio, l'emissione di onde gravitazionali e l'effetto lente, conseguenza dell'incurvamento della luce intorno ad una stella (anche questo effetto è stato puntualmente verificato). Non male: L'evoluzione della relatività generale nei decenni seguenti riguarderà la problematica studiata da Einstein in quell'anno e nell'anno successivo.

Nel 1917 Einstein affrontò la cosmologia applicando la relatività generale alla struttura del cosmo. La relatività generale è una teoria molto innovativa: si tratta di determinare la struttura globale dello spazio - tempo in interazione con la materia in esso contenuta. Poiché la materia appare uniformemente distribuita su larga scala, l'ipotesi semplificatrice di ogni cosmologia globale è che la densità di materia sia uniforme, riservandosi di trattare come perturbazioni le disomogeneità. Arriviamo così alla curiosa storia della cosmologia einsteiniana e dell'introduzione del termine cosmologico.

Einstein cerca una soluzione in cui il volume dello spazio tridimensionale sia finito e quindi anche la quantità di materia. Le ragioni sono concettuali e riguardano una concezione dell'inerzia che Einstein sviluppa ispirandosi alle idee di Mach. Il "principio di Mach" da lui enunciato è il seguente: "il campo inerziale [cioè la struttura metrica] dell'universo deve essere determinato completamente dalla distribuzione di massa ed energia nell'universo".

Ma se lo spazio fosse infinito, argomenta Einstein, bisognerebbe introdurre anche condizioni all'infinito per risolvere le equazioni della relatività generale. Secondo Einstein, ciò violerebbe il principio di Mach: la

soluzione non sarebbe determinata soltanto dalla materia. Lo spazio dunque, conclude Einstein, sarà finito. E poiché con le ipotesi fatte la struttura spaziale deve essere uniforme, Einstein propone che lo spazio abbia la struttura di una sfera  $S_3$ , spazio tridimensionale a curvatura costante e volume finito.

Un modo di raffigurarsi questo spazio è di pensare ad un globo sferico in uno spazio euclideo a 4 dimensioni:  $S_3$  è il volume a tre dimensioni che circonda il globo. Ma attenzione: lo spazio a 4 dimensioni è fittizio, un puro artificio per rappresentarsi  $S_3$  in analogia a quanto si fa con la superficie a due dimensioni di un globo tridimensionale. Le proprietà metriche di  $S_3$  sono intrinseche, non dipendono dall'immersione in uno spazio di dimensionalità maggiore, cioè dal pensare  $S_3$  come il contorno di una figura di dimensioni maggiori.

$S_3$  non ha confini ma ha un volume finito. Se il raggio di questa sfera è  $a$ , il suo volume (il volume dell'universo) è  $V = 2\pi a^3$ . Un viandante che camminasse sempre dritto tornerebbe allo stesso luogo dalla direzione opposta. Ne segue che la massa totale dell'universo è finita poiché la densità è finita e costante.

Einstein opta per questo universo chiuso. Ma le sue equazioni non ammettono una soluzione statica; sotto l'azione delle forze attrattive tra le porzioni di materia l'universo si restringerebbe implodendo fino a ridurre a zero il volume e la densità di materia diventerebbe infinita. Per rendere statico il sistema bisogna bilanciare l'attrazione gravitazionale con una nuova forza. Così Einstein modifica le sue equazioni generali introducendovi un termine "cosmologico" repulsivo.

La soluzione adesso ha le caratteristiche richieste da Einstein: l'universo è statico e tenuto in piedi dalla materia e la sua curvatura è proporzionale alla densità di materia. Il termine cosmologico ha un effetto trascurabile a piccole distanze e così il perielio di Mercurio e il limite newtoniano della gravitazione sono salvi; la correzione modifica solo la gravità a grandi distanze, permettendo di definire un universo chiuso statico che realizza, secondo Einstein, quel "principio di Mach" a lui caro.

Fatale decisione: guidato da principi generali Einstein non dà rilevanza a quelle soluzioni non statiche in cui la curvatura dell'universo varia col tempo, che sono alla base della nostra cosmologia, mentre si convince del significato machiano, profondo del termine cosmo-

logico. Anni dopo dichiarerà: “La costante cosmologica e’ stata la mia peggiore cantonata”.

Fatale e’ anche la via che Einstein traccia: il termine cosmologico ritornerà puntualmente ad essere proposto tutte le volte che le equazioni richiedono la presenza di un parametro in piu’ per spiegare le osservazioni. Se ne discute anche oggi, seppure in termini diversi.

Se ci piace oggi stupirci per l’occasione di concepire un universo non statico, mancata da Einstein, e’ pero’ necessario sottolineare quanto stravolgente fosse la novita’ della cosmologia relativistica: la struttura dello spazio - tempo e’ determinata da una equazione che la connette alla densita’ di materia; la soluzione descrive un universo uniforme e statico, lo spazio e’ curvo, richiuso in se stesso sotto l’effetto della materia, il suo volume e la quantita’ di materia contenuta sono finiti.

Per una stima del raggio dell’universo statico di Einstein potremmo usare la stima di Hubble negli anni ’30 per la densita’ di materia nell’universo, intorno a  $1,3 - 1,5 \times 10^{-30}$  grammi al centimetro cubo. Con questo valore il raggio dell’universo di Einstein sarebbe di  $3 \times 10^{28}$  centimetri. Ma la misura di Hubble era ancora da venire, quando Einstein formulo’ il modello.

Non passa molto tempo e la certezza che la costante cosmologica soddisfi la sua interpretazione machiana dell’inerzia e’ scossa da un risultato: nel 1917 Willem de Sitter (1872-1934) mantiene il termine cosmologico ma elimina la materia e mostra che esiste una soluzione. L’universo vuoto di de Sitter si espande esponenzialmente per effetto della forza cosmologica. Lo spazio non e’ dunque sorretto dalla materia, il modello non soddisfa l’interpretazione einsteiniana del principio di Mach, secondo cui la materia determina lo spazio.

Particelle di prova poste nell’universo di de Sitter partecipano all’espansione: sia la loro distanza che la velocita’ relativa aumentano nel tempo. Analogamente, il modello prevede uno spostamento delle frequenze delle onde elettromagnetiche emesse dagli atomi. Se una particella emette una radiazione di data frequenza, l’osservatore nell’universo di de Sitter vede una frequenza minore, tanto piu’ piccola quanto maggiore e’ la distanza (“spostamento verso il rosso delle righe spettrali”). L’osservazione degli spettri di luce emessi dalle stelle potrebbe quindi decidere se un universo e’ di de Sitter.

Nel 1922 il russo Aleksander A. Friedmann (1888-1925), lavorando isolato a Leningrado, compi’ il passo giusto, risolvendo le equazioni della relativita’ generale (senza termine cosmologico) per un universo con densita’ uniforme ed esaminando il comportamento delle soluzioni. Non esistono soluzioni statiche: l’universo deve cambiare nel tempo. Inoltre esiste un punto singolare nel passato al quale la soluzione diventa singolare: il fattore di scala che determina le distanze nell’universo si annulla e la densita’ di materia diventa infinita. Per tempi successivi il raggio aumenta, l’universo diventa regolare e a densita’ finita. Non si puo’ prolungare la soluzione ad un tempo precedente l’istante singolare. Appare per la prima volta il concetto di inizio nel tempo, la Grande Esplosione (Big Bang). E poiche’ quello che inizia e’ l’universo, quell’istante e’ anche

l’inizio del tempo e dello spazio.

Einstein e’ sorpreso dell’esistenza di soluzioni non statiche, pensa ad un errore di Friedmann, ma si rivede e scrive:

In una nota precedente ho criticato il lavoro citato [di Friedmann]. La mia opposizione era basata [...] su un [mio] errore di calcolo. Sono convinto che i risultati del signor Friedmann sono giusti e chiarificatori. Essi dimostrano che, oltre alle soluzioni statiche delle equazioni di campo esistono soluzioni variabili nel tempo con struttura spazialmente simmetrica.

Piu’ tardi, nel 1932, Einstein stesso, in collaborazione con de Sitter, studiera’ un modello evolutivo di tipo Friedmann con spazio piatto, nascita ad un istante finito nel tempo ed espansione infinita. Questo modello e’ una delle possibilita’ attualmente in discussione per l’universo.

All’inizio degli anni ’30 ebbero un certo interesse anche le cosmologie di Lemaitre e Eddington - Lemaitre. Si trattava di modelli di universi, derivati da quello statico di Einstein, con forza cosmologica e nascita ad un istante finito, che passano un lungo periodo intorno alle condizioni dell’universo statico di Einstein o vi tendono per un lasso infinito di tempo. Questi modelli mostravano anche che l’universo statico di Einstein non e’ stabile: ogni sua perturbazione conduce o al crollo o a una dilatazione senza fine. La prima proposta di Einstein, l’universo reso statico dalla presenza della forza cosmologica, non e’ accettabile teoricamente.

## 2.2 Principii delle cosmologie relativistiche

Dopo la scoperta di Friedmann, Hermann Weyl (1885 - 1955) pose nel 1923 le basi per la teoria generale dei modelli cosmologici enunciando un insieme di regole che, tradotte in prosa, possono essere enunciate come segue.

Come principio iniziale Weyl dichiara che si devono usare teorie verificate nelle regioni da noi conosciute: quindi si applichera’ la relativita’ generale. Ora, l’osservazione dei nostri dintorni nel cosmo (il gruppo locale di galassie che comprende tra l’altro Andromeda) mostra che la distribuzione delle galassie e’ in media uniforme, e che le galassie vicine hanno differenze di velocita’ piccole e casuali. Anche nei gruppi lontani accade la stessa cosa: galassie vicine tra loro hanno velocita’ relative piccole. E’ dunque sensato supporre che lo spazio intorno a noi non abbia proprieta’ diverse dalla media dell’universo (per lo meno di quello osservato). E’ il cosiddetto Principio Cosmologico.

Pertanto, a parte piccoli moti locali e diversita’ locali nella distribuzione, le galassie costituiscono un sistema omogeneo di corpi in caduta libera nel cosmo, come le particelle di sabbia che abbiamo visto poc’anzi. Esse

stanno navigando nell'universo, non si scontrano continuamente come le molecole di un gas. I loro cammini si possono essere incontrati soltanto ad un tempo nel passato in cui la struttura dell'universo relativistico era singolare (o nel futuro, o forse in ambedue i casi). Questa deve essere la base della cosmologia.

Da questa uniformità spaziale dell'universo discende una importante conseguenza sul tempo. In generale in relatività il ritmo del tempo è diverso da punto a punto e da istante a istante nello spazio - tempo, poiché dipende dai campi gravitazionali e dal moto dell'osservatore. Nei modelli retti dai principi di Weyl l'uniformità dell'universo implica l'esistenza di un tempo cosmico identico per tutti gli osservatori in caduta libera che vedono l'universo come un sistema omogeneo e isotropo di galassie (in sostanza quelli solidali con la media delle galassie vicine). Ciascuno di questi vede l'universo in media identico e misura lo stesso ritmo di successione dei fenomeni (per esempio, le frequenze atomiche emesse dagli atomi delle galassie). Questo insieme di osservatori ha un tempo comune, detto tempo cosmico. L'esistenza di un tempo cosmico è una proprietà della classe di soluzioni che descrivono un cosmo spazialmente omogeneo e isotropo.

Usando questi principi si possono ottenere i vari modelli di cosmologia relativistica senza altre difficoltà che quelle degli sviluppi matematici. I particolari di questi modelli verranno discussi nel quadro della esposizione del modello di riferimento di cui formano la base.

L'era della cosmologia di osservazione e del controllo delle previsioni teoriche stava per cominciare.

## 2.3 Le distanze astronomiche

L'astronomo non può percorrere né ricoprire con un lungo metro le distanze galattiche o intergalattiche. Dalla Terra le misure di posizione dei corpi celesti sono puramente angolari. L'unica base per misurare le distanze come in topografia è data dal moto annuo della Terra intorno al Sole. Per assegnare le distanze dei corpi che formano l'universo è necessario impiegare varie tecniche, spesso dipendenti l'una dall'altra in scala. L'errore nella valutazione di una di queste scale comporta un errore a tutte le scale successive.

Aristarco di Samo (circa 310 - 230 a.C.) aveva ottenuto per la distanza Terra - Luna il valore di 10 diametri terrestri (il valore moderno è 30) e aveva stimato la distanza Terra - Sole eguale a circa 20 distanze Terra - Luna, 200 diametri terrestri. Ma per conoscere il valore del diametro terrestre bisogna attendere la misura di Eratostene (276 - 195 a.C.): 250 000 stadii, valutazione abbastanza precisa se lo stadio corrisponde a 167 metri, ma del 20 % maggiore del valore esatto se si usa la dimensione dello stadio di Olimpia. Ciò portava la stima di Aristarco della distanza Terra - Sole a circa 2,4 milioni di chilometri.

Ipparco (attivo 160 - 130 a.C.) corresse la valutazione portandola a 630 diametri terrestri (circa 8 milioni di chilometri). La misura corrisponde al 5,4 % del

valore moderno (11700 diametri, circa 150 milioni di chilometri); l'errore degli astronomi antichi era dovuto alla grande difficoltà della misura dell'angolo sotto cui il Sole vede la distanza Terra - Luna, circa 8,5 minuti di arco.

Aristarco, che riteneva che la Terra girasse intorno al Sole, aveva dedotto che la sfera delle stelle era a distanza incommensurabile. Ma successivamente la concezione che la Terra fosse al centro dell'universo tolse l'unica base topografica che rendesse possibile valutare le distanze dei pianeti. Si ricorreva ad altre considerazioni, come i contatti tra gli strati sferici che portavano i pianeti, per valutarne le distanze.

Copernico, riprendendo la concezione di Aristarco del Sole al centro dell'universo, usò l'orbita della Terra come base e valutò che le distanze dal Sole di Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, in unità di distanza Terra - Sole, fossero rispettivamente 0,38; 0,72; 1,52; 5,22; 9,17; valori molto vicini a quelli attuali. (Copernico usava per la distanza Terra - Sole il valore stimato dagli antichi, ma questa è una questione diversa.)

La scala delle distanze somiglia al finale della filastrocca "Petruccio va a prendere il cavoluccio per il tuo pa' che ha male": si tratta di una successione di concatenazioni. Dalla distanza Alessandria - Assuan si ottenne la dimensione della Terra, da cui la distanza Terra - Luna, da cui quella Terra - Sole, da cui quelle dei pianeti e delle stelle più vicine; da queste si ottenne la luminosità assoluta di alcuni tipi di stelle, che permise di calibrare la relazione periodo - luminosità delle Cefeidi, che permise di misurare la distanza delle galassie vicine, la cui conoscenza permise di calibrare la luminosità delle stelle più brillanti e poi degli ammassi globulari nelle galassie, da cui si ottenne la calibrazione delle luminosità delle galassie a spirale ed ellittiche che permise di stabilire la proporzionalità tra lo spostamento verso il rosso e la distanza per galassie che oggi viene usato come indicatore della distanza per i corpi più lontani.

Se molto tempo era passato da Copernico, il cosmo degli astronomi nel 1917 era ancora piuttosto ridotto, composto, a parte astri vaganti come i pianeti e le comete, di stelle e nebulose. La distanza delle stelle più vicine, la forma della Via Lattea (la nostra galassia) erano note, ma non così le sue dimensioni globali né la distanza delle nebulose a spirale.

Le valutazioni delle dimensioni della Via Lattea oscillavano tra due modelli. L'astronomo olandese Jacobus Kapteyn (1851-1922) valutava la scala della distribuzione delle stelle usando il metodo del parallasse delle stelle più vicine e i moti propri rilevabili nelle stelle; osservando che la densità stellare decresce allontanandosi dal Sole, aveva proposto nel 1901 che la Via Lattea fosse un disco spesso circa 10 000 anni luce, dal diametro di 30 000 anni luce, e che il Sole stesse vicino al centro. (Esistevano poche prove della presenza di polvere stellare, causa reale del diradarsi apparente delle stelle allontanandosi dal Sole.) Harlow Shapley (1885 - 1972) misurò invece la distribuzione degli ammassi globulari, da cui dedusse correttamente la posizione del centro della Via Lattea. La sua stima del diametro era

10 volte piu' grande di quella di Kapteyn: 300 000 anni luce. (La verita' sta tra i due modelli: il diametro e' di circa 100 000 anni luce.)

Un altro capitolo della questione riguarda le nebulose. Con i progressi dei telescopi e soprattutto con i metodi della spettroscopia si era trovato che molte delle nebulose catalogate dalla fine del '700 sono distribuzioni di materia interne alla Via Lattea. Nel 1917 restavano irrisolte le cosiddette nebulose a spirale, per le quali vi erano due proposte molto diverse: per Shapley e alcuni si trattava di corpi interni alla Via Lattea, mentre per Heber Curtis (1872 - 1942) e altri si trattava di sistemi di stelle esterni e analoghi alla Via Lattea. Se a sostenere questi ultimi andarono alcune misure, come quella di Ernst Öpik che stimo' in 1,3 milioni di anni luce la distanza della nebulosa di Andromeda, in favore dei primi andavano altre osservazioni, come quella di un bravo astronomo olandese che ritenne di aver misurato la rotazione di Andromeda, per cui concluse che la nebulosa stava all'interno della Via Lattea (si trattava di analisi ai limiti dei mezzi sperimentali e l'evidenza sperimentale risulto' poi sbagliata).

Nessuno di costoro era superficiale ne' sbagliava in modo evidente: il dibattito rispecchia la difficolta' di fare l'astronomia con un solo universo osservato da un solo punto di vista, la Terra, con la visibilita' parzialmente ostruita dalla stessa Via Lattea e dalla polvere interstellare. Questi erano i termini del dibattito sul cosmo al tempo in cui Einstein fece il primo modello cosmologico.

Il quadro cambio' il 1 gennaio 1925, quando l'astronomo Edwin Hubble (1889 - 1953) che lavorava a Mount Wilson, presso Los Angeles, invio' un messaggio al convegno di capo d'anno della American Astronomic Society a New York, riferendo il suo lavoro degli ultimi 14 mesi che gli aveva permesso di determinare la distanza della nebulosa di Andromeda e di una nebulosa vicina, M33.

Hubble aveva scoperto alcune stelle variabili Cefeidi in Andromeda. Per queste stelle esiste una relazione fissa tra periodo e luminosita' determinata da Henrietta Swan Leavitt (1868-1921) nel 1912: misurando il periodo si conosce la quantita' di luce emessa). Hubble aveva trovato 12 Cefeidi in Andromeda e 22 nella nebulosa compagna M33. Dalla misura della luce raccolta, conoscendo la luminosita' assoluta, aveva potuto determinare la distanza di queste stelle. Secondo la calibrazione delle Cefeidi, Hubble concluse che Andromeda distava 900 000 anni luce (vedremo che la calibrazione era sbagliata: Andromeda dista 2,2 milioni di anni luce). Hubble aveva risolto la questione: le nebulose a spirale non stanno nella Via Lattea, sono "universi" (come si diceva allora) simili alla Via Lattea; galassie (come si disse poi). La disputa era risolta.

## 2.4 L'espansione dell'universo

L'effetto Doppler acustico e' ben noto dalla vita quotidiana: il tono della sirena di un'auto e' piu' alto quando si avvicina che quando si allontana. Un effetto sim-

ile avviene per un'onda luminosa che viene emessa con una definita frequenza (analogo al tono delle onde acustiche). Noi vediamo una luce di frequenza maggiore (tono piu' acuto) se la sorgente si muove verso di noi, o di frequenza minore se la sorgente si allontana. Lo spostamento percentuale di frequenza e' (a meno di correzioni relativistiche) proporzionale alla velocita' con cui la sorgente si allontana da noi.

Se una sorgente si allontana diciamo che la sua luce e' "spostata verso il rosso" perche' il rosso e' una frequenza bassa, tra quelle visibili; inversamente, se una sorgente si avvicina, parleremo di "spostamento verso il blu" perche' il blu e' una frequenza alta nello spettro delle frequenze visibili. Il linguaggio e' rimasto anche se lo spettro delle frequenze esaminate non e' necessariamente quello visibile.

Gia' nel secondo decennio del secolo l'astronomo Vesto Slipher del Lowell Observatory, osservando gli spettri emessi dalle galassie, aveva notato che mostrano uno spostamento verso il rosso e quindi si allontanano. Hubble lavoro' sistematicamente al problema e il 17 gennaio 1929 invio' ai Proceedings della National Academy of Sciences un lavoro dal titolo "una relazione tra la distanza e la velocita' radiale delle nebulose extra galattiche" il cui contenuto cambio' la visione del cosmo.

Esaminando gli spettri di 18 galassie Hubble mostro' che la velocita' di allontanamento, misurata dallo spostamento verso il rosso, e' proporzionale alla distanza. La relazione trovata e'

$$v = H_0 d \quad (2.1)$$

dove  $v$  e' la velocita' di allontanamento,  $d$  la distanza e la costante  $H_0$  si chiama oggi costante di Hubble.

La relazione di Hubble non privilegia la Terra, la stessa considerazione varrebbe per ogni galassia: secondo la relazione di Hubble ogni galassia vede le altre allontanarsi con la stessa legge della proporzionalita' tra velocita' e distanza. La relazione trovata da Hubble rappresenta l'espansione dell'intero spazio intergalattico. Nella conclusione Hubble dice:

L'aspetto piu' importante e' la possibilita' che la relazione velocita' - distanza rappresenti l'effetto de Sitter, e quindi che si possano introdurre dati numerici nella discussione generale sulla curvatura dello spazio.

Il valore di  $H_0$  misurato da Hubble era di circa 500 Km al secondo per milione di parsec. (Agli astronomi e' comodo dare il valore in queste unita' perche' le velocita' misurate per le galassie vicine sono dell'ordine del centinaio di chilometri al secondo e le distanze dell'ordine del milione di parsec. 1 milione di parsec = 3,26 milioni di anni luce). Vedremo che la stima di Hubble era troppo alta; le misure recenti attribuiscono ad  $H_0$  un valore di circa 6-10 volte minore.

La costante di Hubble ha un significato fisico immediato: misura il ritmo con cui l'universo si espande oggi.

Un breve inciso sulla dilatazione dell'universo. La considerazione che lo spazio si dilata non deve far concludere che si dilatano anche i nostri metri, gli oggetti

che ci circondano, il sistema solare e magari noi stessi. Se così fosse la dilatazione sarebbe irrilevante. I metri e gli altri oggetti non si dilatano; la loro dimensione è determinata da forze elettromagnetiche che contengono costanti che ne determinano le dimensioni. Inoltre i sistemi gravitazionali "piccoli", come il sistema solare, le singole galassie e i gruppi locali, non si dilatano. Se la distanza Terra - Sole si dilatasse, noi ci allontaneremmo dal Sole di circa 10 metri all'anno; ma la distanza Terra - Sole non si dilata. Si dilata lo spazio intergalattico compreso tra i grandi sistemi galattici i quali determinano la struttura globale dello spazio.

L'inverso della costante di Hubble è un tempo, chiamato il tempo di Hubble:

$$t_H = 1/H_0$$

Dalla misura di Hubble, il tempo di Hubble risultava essere 1,8 miliardi di anni; ma la valutazione attuale è tra 6 e 10 volte maggiore.

Supponiamo per un momento che nel passato ogni galassia avesse la stessa velocità di allontanamento  $v$  che ha adesso. Consideriamo una durata nel passato eguale al tempo di Hubble. Durante questo tempo ogni galassia ha percorso una distanza  $D$  eguale alla velocità  $v$  per il tempo di Hubble, cioè  $D = vt_H = v/H_0$ . Dalla relazione (2.1) si vede che  $D$  è proprio la distanza  $d$  che la separa da noi. Dunque, se le velocità fossero costanti, andando all'indietro di un tempo  $t_H$  tutte le galassie si troverebbero nello stesso punto e la densità di materia sarebbe infinita proprio come prevedono i modelli alla Friedmann. Anche gli abitanti delle altre galassie arriverebbero a questa conclusione. Nessun punto dell'universo è privilegiato, e l'intero universo a diventare singolare, con densità infinita mentre la scala delle distanze si annulla (la grande esplosione). Quindi il tempo di Hubble sarebbe la durata attuale dell'universo se la velocità con cui ogni galassia si è allontanata nel passato fosse sempre stata quella di oggi.

Ma (se non c'è forza repulsiva cosmologica) nel passato le galassie avevano velocità maggiori di adesso (perché col passare del tempo l'espansione è frenata dall'attrazione gravitazionale delle masse che si espandono) e così il tempo effettivamente impiegato dall'inizio è minore del tempo di Hubble. Ne segue che l'età dell'universo è minore del tempo di Hubble (a meno che sia presente una forza cosmologica).

## 2.5 Distanze galattiche ed età dell'universo

Dalla misura di Hubble seguiva che l'età dell'universo doveva essere minore di 1,8 miliardi di anni. Questa limitazione causò molte perplessità negli anni '30 e '40 poiché altre stime attribuivano a sistemi interni all'universo un'età maggiore del tempo di Hubble. Verso la fine degli anni '40, studiando la dinamica degli ammassi di galassie e di ammassi stellari e la statistica di stelle binarie, si concluse che i sistemi stellari e le galassie esistevano da almeno 3 o 5 miliardi di anni.

La durata di questi sistemi sarebbe stata dunque superiore al limite di Hubble. Altre prove venivano dalla datazione di rocce terrestri. Le valutazioni dell'età della Terra basate sulla radioattività erano all'inizio compatibili col tempo di Hubble, ma successivamente dati più precisi portarono alla stima di almeno 3,3 miliardi di anni di esistenza della Terra come corpo separato e sufficientemente freddo da sviluppare radioattività in condizioni normali; la stima fu poi portata a 4,3 miliardi di anni. Tempi troppo lunghi rispetto al tempo di Hubble.

Conseguentemente, la situazione divenne confusa. Le soluzioni cosmologiche alla Friedmann, basate sulla relatività generale senza termine cosmologico, erano in disaccordo con i dati sulla durata della Terra e delle galassie. In genere, mentre l'ipotesi dell'espansione attuale dello spazio intergalattico era generalmente accettata, l'estrema conseguenza della cosmologia, la singolarità iniziale, era in dubbio.

Si cercarono altre soluzioni, con l'aiuto del termine cosmologico: un universo oscillante che non raggiungesse mai il valore singolare, o un universo alla de Sitter che cominciava ad un tempo infinito nel passato. P. Jordan (1938), H. Bondi e T. Gold (1948) e F. Hoyle (1948) proposero in varie forme che l'universo, benché in espansione, fosse reso stazionario nel tempo dalla creazione continua di materia. Può interessare riportare il valore della materia che deve essere creata per mantenerne costante la densità nonostante l'espansione: la stima di allora fu che dovesse apparire all'incirca un atomo per metro cubo ogni 500 000 anni. Questa creazione compenserebbe il calo di densità dovuto all'espansione dell'universo (stima degli anni '40); sperimentalmente il ritmo di materia creata era accettabile perché era inferiore ai limiti sulla conservazione della materia posti dagli esperimenti.

Si dubitò anche che l'esistenza di un'età finita per l'universo fosse legata alla particolare simmetria spaziale delle soluzioni. La risposta finale si ebbe alla fine degli anni '60 quando Steve Hawking e Roger Penrose dimostrarono che la singolarità iniziale non si evita neppure per universi asimmetrici.

Alcuni fisici misero in discussione i principi stessi della relatività generale, aprendo la strada alle congetture più varie. Così fu proposto che le galassie fossero ferme, e che lo spostamento verso il rosso fosse dovuto a qualche altra causa. Fu proposta una diversa definizione del tempo (Milne 1935), o la variazione nel tempo delle costanti della natura (Dirac 1938, Jordan 1949).

La proposta più interessante fu avanzata anni dopo, quando il problema dell'età dell'universo era stato risolto. La teoria di Brans - Dicke (1961) sostituisce la costante di Newton con un campo dinamico. Gli esperimenti di questi ultimi decenni, confermando la relatività generale einsteiniana entro i limiti degli errori, pongono limiti superiori alla presenza di queste modifiche.

Nessuna di queste proposte convinse, anche per la loro arbitrarietà, mentre la relatività generale era una teoria ormai provata.

La soluzione alla contraddizione era altrove. Nel '47 K. Lundmark evidenzio' un problema nella stima della distanza di Andromeda. Nel 1952 un lavoro di Walter Baade (1893-1960) risolse le contraddizioni, mostrando che la scala delle distanze e di conseguenza il valore della costante di Hubble dovevano essere cambiati. Baade aveva trovato che esistono due diverse specie di stelle variabili Cefeidi in Andromeda e in altre galassie: quelle nei dischi delle galassie a spirale sono parecchio piu' luminose di quelle degli ammassi globulari negli aloni galattici. La confusione tra queste due classi aveva indotto a sottostimare le distanze intergalattiche. Se la distanza reale e' maggiore di quella stimata prima, a parita' di misura della velocita' (spostamento verso il rosso) diminuisce la costante di Hubble. L'universo quindi era piu' grande e anche piu' vecchio di quanto aveva valutato Hubble

Un ulteriore passo nell'aumento della stima delle distanze si ebbe quando Allan Sandage dimostro' nel 1956 che corpi luminosi nelle galassie vicine, che erano stati ritenuti singole stelle, erano in realta' gruppi di stelle. La luce raccolta da stelle singole sarebbe stata meno intensa di quanto osservato. Cosi' le galassie erano piu' lontane. Il valore che Sandage ottenne nel 1956 fu  $H_0 = 75$  Km/sec per milione di parsec e rappresento' un aumento nella stima delle dimensioni dell'universo di circa 6 volte rispetto alla prima stima di Hubble. Corrispondentemente il tempo di Hubble sali' a 13 miliardi di anni, compatibile con l'eta' della Terra e delle galassie.

Le misure attuali della costante di Hubble non si discostano molto da questo valore. Ne parleremo piu' avanti.

## 2.6 La sintesi dei nuclei

Come abbiamo detto, la cosmologia relativistica implica l'esistenza di un istante iniziale a distanza finita nel passato in cui la struttura dell'universo e' singolare mentre la temperatura e la densita' della materia sono infinite (grande esplosione). Nel corso dell'evoluzione a partire da questo istante l'universo si raffredda mentre la densita' di materia diminuisce e le distanze medie tra particelle aumentano.

Prima di seguire nei particolari la storia dell'universo parliamo di due prove che, insieme all'espansione delle galassie, costituiscono i pilastri della cosmologia della grande esplosione. Si tratta della formazione degli elementi (nucleosintesi) e della presenza di una radiazione elettromagnetica di fondo nell'universo.

Alle alte temperature iniziali i nuclei non possono essere presenti perche' la temperatura ne romperebbe i legami. La condensazione dei nuclei a partire da un plasma di nucleoni diventa possibile quando la temperatura si abbassa fino a consentire che i protoni e i neutroni formino legami nucleari stabili. Cio' avviene durante il periodo compreso tra circa 1/10 di secondo e un paio di minuti dopo l'inizio.

L'idea della sintesi primordiale dei nuclei come conseguenza della nascita di un universo caldo fu esposta

da George Gamow (1904-1968) nel 1946 e fu sviluppata in una serie di lavori di Gamow, R.A. Alpher, H. Bethe, e R.C. Herman.

La proposta originale di Gamow e colleghi prevedeva che tutti gli elementi della tavola periodica si fossero formati nella nucleosintesi successiva alla Grande Esplosione. Naturalmente oggi sappiamo che la sintesi iniziale riguarda soltanto gli elementi leggeri. E' una occasione per ricordare che, nello stesso giornale scientifico (Physical Review, volume 73, 1948) che conteneva un articolo di Alpher, Bethe e Gamow sulla nucleosintesi, apparve una lettera di Gleb Wataghin che argomentava che i nuclei degli elementi pesanti si formano nelle stelle in condizioni speciali e non nel plasma nucleare primitivo. La congettura di Wataghin era giusta. (Gleb Wataghin, 1899 - 1986, di scuola torinese, rientro' dal Brasile nel 1949 per dirigere l'Istituto di Fisica Generale dell'Universita' di Torino.)

Il calcolo preciso delle percentuali di elementi leggeri formati nell'universo primitivo e' complicato. Dopo le prime ricerche degli anni '40 una serie di lavori ha successivamente affinato le previsioni numeriche. Negli anni '70 e primi anni '80 sono stati approntati complessi programmi per calcolare l'evoluzione delle reazioni che hanno prodotto i nuclei leggeri. Il calcolo mostra che Deuterio, Elio 3 e 4, e Litio 7 sono gli unici nuclei prodotti in quantita' significativa. Le percentuali di questi elementi rispetto all'idrogeno primitivo si accordano perfettamente con le osservazioni (corrette per l'effetto della combustione nucleare nelle stelle durante la vita dell'universo, che ha cambiato i rapporti). Tra l'altro il confronto ha permesso di fissare a 3 il numero di tipi di neutrini leggeri prima che questo fosse determinato direttamente da esperienze di fisica delle particelle (agli acceleratori LEP del CERN, Ginevra e SLC, di Stanford, California nel 1989).

L'accordo tra le percentuali dei nuclei leggeri calcolate teoricamente e i valori osservati prova che l'universo nel passato era piu' caldo e denso.

## 2.7 La radiazione cosmica di fondo

Un'altra prova fondamentale della grande esplosione, ancora piu' ricca di informazioni con l'affinarsi delle tecniche di misura, e' costituita dalla radiazione di fondo cosmico.

Tra il 1948 e il 1950 Alpher, Herman e Gamow avevano proposto un'altra conseguenza del raffreddamento di un universo caldo: una radiazione elettromagnetica che pervaderebbe tutto l'universo provenendo uniformemente da ogni direzione, con una temperatura di radiazione intorno a 3-5 gradi assoluti (lo zero assoluto si trova a -273 gradi centigradi). Questa radiazione si forma ad un istante ben preciso della vita dell'universo con una temperatura calcolabile. Vediamo perche'.

Nell'universo primordiale caldo tutta la radiazione viene continuamente assorbita, riemessa e diffusa dalla materia perche' le cariche elettriche libere nel plasma



ad alta temperatura interagiscono fortemente con la radiazione elettromagnetica; ma, con il raffreddamento dell'universo per via dell'espansione, si giunge ad una temperatura sufficientemente bassa da permettere che elettroni carichi negativamente e nuclei positivi si combinino a formare atomi che non si dissociano piu' perche' la temperatura e' troppo bassa per scomporli. Poiche' le cariche elettriche si sono ricombinate, la materia e' diventata neutra e non interagisce con la radiazione; cosi' l'universo improvvisamente diventa trasparente alla radiazione elettromagnetica.

La teoria permette di calcolare la data in cui questo processo e' avvenuto sulla base della densita' di radiazione attualmente osservata: l'universo aveva alcune centinaia di migliaia di anni. L'incertezza nella data precisa dipende dalla incertezza nella densita' di materia nell'universo e nella costante di Hubble, non ancora conosciute con precisione. La temperatura della radiazione era allora di circa 3000 gradi assoluti. Questa radiazione dovrebbe essersi raffreddata durante l'espansione fino ad una temperatura odierna di qualche grado assoluto. Tuttavia i primi autori temevano che la radiazione fosse stata assorbita successivamente dalla materia.

La questione, accantonata, fu risolta piu' tardi. Nei primi anni '60 un gruppo di fisici e di astronomi di Princeton, nel New Jersey, (R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roy e D.T. Wilkinson) progettarono un esperimento per misurare questa radiazione, un problema tutt'altro che banale.

Nel 1964 due russi bene informati, Igor Novikov e Andrei Doroshkevich, avevano pubblicato un lavoro su una rivista sovietica segnalando che la radiazione cosmica di fondo avrebbe dovuto esser evidenziata da una grande antenna che era stata costruita nei laboratori della Bell Telephone Company nel New Jersey per osservare il satellite Echo. Se i sovietici erano assai bene informati sulle caratteristiche dell'antenna, non altrettanto informati sulla teoria della radiazione cosmica erano i due scienziati, Arno Penzias e Robert Wilson, che gestivano quell'antenna a forma di enorme cornetta acustica per ricerche di radio astronomia. Pero' conoscevano molto bene il loro mestiere e rilevarono un segnale molto debole che proveniva da ogni direzione uniformemente e produceva nell'antenna una temperatura di circa 3 gradi assoluti (riuscirono a stimare l'indeterminazione della misura in piu' o meno un grado).

Altri nel passato avevano visto eccesso di radiazione, o molecole di cianogeno nello spazio interstellare che si comportavano come se fossero immerse in un bagno di temperatura di qualche grado, ma non avevano tratto la conclusione finale. Penzias e Wilson dettero importanza al segnale raccolto: la loro era una misura assoluta. Esclusero ogni causa terrestre o galattica e conclusero che si trattava di un segnale proveniente dalle profondita' del cosmo. Parlando con un amico di Washington seppero del gruppo di Princeton a loro vicinissimo, con cui allora si consultarono. Il lavoro di Penzias e Wilson apparve con un titolo dimesso, "Una misura di un eccesso di temperatura di antenna a 4080 Mhz". L'articolo uscì su *Astrophysics Journal* accompagnato

dall'articolo dei quattro di Princeton che interpretava l'effetto. Penzias e Wilson ebbero il premio Nobel nel 1978.

Misure recenti con oltre una decina di esperimenti hanno aumentato le nostre conoscenze. In particolare il satellite COBE (Cosmic Background Explorer) all'inizio degli anni '90 ha misurato la distribuzione in lunghezze d'onda con grande precisione. La radiazione cosmica costituisce un esempio di radiazione, emessa da un corpo nero (radiatore matematico perfetto) misurata su una grande regione di lunghezze d'onda, piu' precisa dei radiatori costruiti in laboratorio. Nessuna altra sorgente, terrestre, galattica o cosmica, puo' aver emesso una radiazione con queste caratteristiche; essa costituisce una prova decisiva dell'espansione dell'universo a partire da uno stato denso e caldo.

La radiazione di fondo piove uniformemente su di noi da ogni parte da una distanza dell'ordine di circa  $10^{28}$  centimetri (circa 10 miliardi di anni luce) a cui si trova oggi intorno a noi in ogni direzione l'evento del distacco; essa ha oggi una densita' di circa 410 fotoni al centimetro cubo e una temperatura di corpo nero di 2,73 gradi assoluti.

COBE ha misurato piccole variazioni nella temperatura (dell'ordine di trenta milionesimi di grado) di estremo interesse. Esse indicano l'esistenza di disomogeneita' nella densita' dell'universo di allora che corrispondono alle grandi strutture nella distribuzione delle galassie. E' stata misurata anche la velocita' del sistema locale cui appartiene la nostra galassia rispetto alla radiazione: e' di circa 600 chilometri al secondo.

La radiazione di fondo fornisce in definitiva una veduta dell'universo primordiale datata a 300 - 500 mila anni dall'inizio (cosi' come l'osservazione ottica fornisce una veduta dei tempi recenti) e comincia a rivelarci le strutture primordiali su larga scala. Le misure future, piu' precise, porteranno informazioni piu' specifiche su scale piu' piccole. Davvero quella ottenuta con la radiazione di fondo e' una nostra foto di gruppo di molti, molti anni fa.

La teoria prevede anche l'esistenza di un'altra radiazione fossile nell'universo, composta da neutrini. Con il raffreddamento dell'universo si giunse ad una temperatura (un po' maggiore di quella del distacco della radiazione elettromagnetica) in cui l'interazione (debole) dei neutrini leggeri con la materia divento' trascurabile. I neutrini da allora costituiscono una radiazione non interagente con la materia e con la radiazione elettromagnetica, dotata di temperatura propria, che si raffredda indipendentemente dal resto durante l'ulteriore espansione. La temperatura media attuale di questa radiazione di fondo di neutrini e' calcolata in 1,96 gradi assoluti. Vi sono oggi alcune centinaia di neutrini al centimetro cubo (il numero esatto dipende da alcune caratteristiche ancora non note dei neutrini) in ogni parte dell'universo. La loro osservazione non e' ancora possibile per via della bassissima intensita' delle loro interazioni a queste energie.

# Chapter 3

## 3- I dati dell'universo attuale

Per ricostruire la storia passata e la sorte dell'universo la teoria ha bisogno di alcuni dati: la densità e la temperatura della radiazione di fondo elettromagnetica e neutrinica, la densità della materia, la misura della costante di Hubble e possibilmente della decelerazione dell'espansione, la conoscenza del tipo di universo spaziale. Esaminiamo da vicino la conoscenza attuale di questi parametri.

### 3.1 La costante di Hubble

La conoscenza esatta della costante di Hubble è indispensabile perché misura il ritmo attuale di espansione ed appare in molte quantità importanti. Conviene introdurre la costante di Hubble ridotta  $h$  definita dalla relazione

$$H_0 = h \times 100 \text{ Km al secondo per milione di parsec.}$$

La conoscenza di  $h$  non è ancora molto precisa. Il suo valore, ricavato da vari tipi di osservazioni, è compreso tra 0,5 e 0,8; il valore più probabile è intorno a 0,67. Questi valori sono ottenuti con determinazioni diverse, ciascuna con varie ipotesi interpretative. In queste condizioni l'accordo è soddisfacente. Con i dati a disposizione tra pochi anni la conoscenza del ritmo attuale di espansione dell'universo sarà molto più precisa.

In termini di  $h$  il tempo di Hubble è dato da

$$t_H = \frac{1}{h} \times 9,8 \text{ miliardi di anni.}$$

Dall'incertezza sul valore di  $h$  segue che il tempo di Hubble è compreso tra 12,5 e 20 miliardi di anni (il valore corrispondente ad  $h = 0,67$  è circa 15 miliardi di anni).

### 3.2 La densità di radiazione

La densità di massa della radiazione elettromagnetica è nota e il suo valore è dato da

$$\rho_{\text{rad}} = 4,7 \times 10^{-34} \text{ gr/cm}^3.$$

Per i neutrini la valutazione dipende dalla loro massa e il problema è aperto. Se, come i fotoni della radiazione elettromagnetica, i neutrini non hanno massa, il loro contributo alla densità di materia dell'universo

è 0,68 volte quello della radiazione elettromagnetica. Se invece sono dotati di massa, il loro contributo può diventare una frazione importante della materia totale. Questo punto attende chiarificazioni dagli esperimenti in corso per determinare le masse dei neutrini per le quali finora esistono solo limiti superiori.

### 3.3 La densità di materia

I dati sulla densità di materia nell'universo osservato non sono ancora molto precisi. La densità della materia visibile nelle galassie è data da

$$\rho_{\text{vis}} \simeq 10^{-31} \text{ grammi al centimetro cubo}$$

corrispondente a circa un protone ogni qualche metro cubo.

La densità di materia totale,  $\rho_0$ , è certamente maggiore della densità di materia visibile. Osservazioni sul moto delle stelle nelle regioni periferiche delle galassie e negli aloni galattici e sul moto relativo di galassie e sistemi galattici mostrano che la densità totale di materia è dell'ordine di  $10^{-30} - 10^{-29}$  grammi al centimetro cubo o maggiore. Esiste dunque, ed è quantitativamente dominante, una materia oscura, non rilevabile mediante luce o altra radiazione elettromagnetica emessa. La composizione e la quantità di materia oscura sono questioni ancora aperte su cui fisici delle particelle e cosmologi stanno lavorando.

### 3.4 La densità critica

Un parametro fondamentale per conoscere la sorte dell'universo è la densità critica, una quantità che dipende dalla costante di Hubble ridotta  $h$  e dalla costante di Newton della gravitazione  $G$ . La densità critica è definita da

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,88 h^2 \times 10^{-29} \text{ gr/cm}^3.$$

Se usiamo il valore  $h = 0,67$  si ottiene

$$\rho_c = 0,84 \times 10^{-29} \text{ gr/cm}^3.$$

Il valore della densità critica è vicino a quello della densità totale  $\rho_0$ , e questo è uno dei problemi più profondi che l'universo ci presenta perché il tipo di spazio

che costituisce l'universo e' diverso a seconda che  $\rho_0$  sia minore o eguale o maggiore della densita' critica.

### 3.5 Densita' e futuro dell'universo

La struttura dello spazio tridimensionale puo' essere di tre tipi (vedere l'appendice A per i dettagli):

1. Spazio  $H_3$ : aperto, curvo con geometria iperbolica e volume infinito.
2. Spazio  $E_3$ : aperto, con geometria euclidea, curvatura nulla, volume infinito.
3. Spazio  $S_3$ : chiuso, curvo con geometria ellittica e volume finito.

In assenza di termine cosmologico esiste una relazione precisa tra il tipo di spazio, la densita' e la densita' critica (vedere l'appendice C).

Nel caso 1 la densita'  $\rho_0$  e' minore di quella critica; nel caso 2 la densita' e' uguale a quella critica. In questi due casi l'espansione continuera' all'infinito e l'universo continuera' a raffreddarsi (futuro freddo).

Nel caso 3 la densita'  $\rho_0$  e' maggiore di quella critica. La fase di espansione continuera' fino a raggiungere un volume massimo, poi l'espansione si trasformerà in contrazione, le galassie invertiranno il loro moto riavvicinandosi (spostamento verso il blu) e sarà il grande crollo fino ad uno stato singolare di temperatura e densita' infinite e volume nullo. La durata totale dell'universo sarà finita.

Poiche' lo spazio oggi ha comunque una curvatura piccola (se non nulla), non e' facile fare misure dirette che determinino il tipo di spazio e quindi ci si deve basare sul rapporto tra  $\rho_0$  e  $\rho_c$ . Ricapitoliamo la situazione.

I movimenti di strutture fino a distanze di circa 150 milioni di anni luce portano ad un valore  $\rho_0 \simeq 0,2 \rho_c$ ; le osservazioni su scale maggiori, pur con errori grandi, sembrano indicare  $\rho_0 \simeq 0,4 - 0,8 \rho_c$ . Considerazioni teoriche farebbero preferire il valore  $\rho_0 = \rho_c$  e un universo euclideo. Possiamo riassumere la conoscenza attuale del valore di  $\rho_c$  nel modo seguente:

$$0,2 \rho_c \leq \rho_0 \leq \rho_c.$$

Così i dati attualmente disponibili indicano un universo aperto di tipo iperbolico o euclideo e un finale freddo. Dovremo frenare la nostra curiosita' fino a quando saranno disponibili osservazioni piu' precise della densita' di materia e della costante di Hubble. Molte osservazioni sono in corso o in progetto e tra alcuni anni ne sapremo molto di piu'.

Una determinazione indipendente della sorte dell'universo puo' essere ottenuta misurando la decelerazione dell'espansione dell'universo. Anche per questa determinazione bisogna attendere una misura precisa dello spostamento verso il rosso di un grande numero di galassie lontane.

### 3.6 L'eta' dell'universo

L'eta' dell'universo  $t_0$  dipende dal valore del rapporto tra la densita' dell'universo e la densita' critica. Diamo una tabella del valore di  $t_0$  per diversi valori di  $\rho_0/\rho_c$  e di  $h$ .  $t_0$  e' espresso in miliardi di anni.  $\rho_0 = \rho_c$  corrisponde all'universo di Einstein - de Sitter. Se  $\rho_0 < \rho_c$  lo spazio e' aperto.

Eta' dell'universo (in miliardi di anni)

$\rho_0/\rho_c$	$h=0.7$	$h=0.55$
0.1	13	16
0.2	12	15
0.4	11	14
1.0	9	12

Le

misure dell'eta' attribuita a componenti dell'universo (in miliardi di anni) danno i risultati seguenti:

- 1- stelle piu' vecchie:  $12 \pm 4$ ;
- 2- dalla radioattivita': maggiore di 10;
- 3- dallo studio del disco della Via Lattea: circa 10;
- 4- dallo studio del sistema solare:  $4,6 \pm 0,1$ .

Naturalmente l'eta' dell'universo e' maggiore dell'eta' di ogni componente. Potrebbero nascere problemi per la cosmologia standard se fossero confermate datazioni alte per qualche componente per valori alti di  $h$ : 0,7 o maggiori. Per il momento non vi e' alcuna contraddizione. In caso di discrepanza si potrebbe ricorrere alla presenza di un termine cosmologico nelle equazioni ma senza altre conferme la procedura non sarebbe molto giustificata. Bisogna attendere misure piu' precise di  $h$  e migliori determinazioni dell'eta' delle stelle e di altre componenti dell'universo.

### 3.7 Dimensioni dell'universo osservabile

Per via dell'eta' finita e dell'espansione, la luce che riceviamo proviene, in linea di principio, da una regione limitata dell'universo. La porzione che possiamo osservare oggi ha una dimensione lineare  $L_0$  limitata approssimativamente come segue ( $c$  è la velocità della luce e abbiamo usato  $h=0,67$ ):

$$L_0 < ct_0 < ct_H = c/H \simeq 1,4 \times 10^{28} \text{ centimetri.}$$

### 3.8 Date importanti

La ricostruzione delle condizioni locali nel passato dipende dalle interazioni tra le diverse componenti di materia presenti ad ogni dato istante. Queste interazioni sono note dalle conoscenze della fisica delle particelle, dei nuclei e degli atomi; gli esperimenti sistematici sono stati condotti fino ad un'energia dell'ordine di circa 100 GeV, corrispondenti alla temperatura di circa  $10^{15}$  gradi. (Un GeV e' l'energia che un elettrone

acquista attraverso la differenza di potenziale di 1 miliardo di elettroni - volt; corrisponde a  $1,6 \times 10^{-10}$  Joule.

Quindi a partire dall'istante del tempo in cui l'universo si è raffreddato fino a  $10^{15}$  gradi (circa  $10^{-11}$  secondi dopo l'inizio) la ricostruzione delle vicende medie dell'universo è abbastanza sicura. Da quel tempo abbiamo i seguenti eventi importanti:

1. Tempo a partire dal quale sono ben note le interazioni della materia:

$$t \simeq 10^{-11} \text{ sec.}$$

La materia è un gas di particelle relativistiche (leptoni, quark e radiazione).

2. Tempo della condensazione dei quark in adroni:

$$t \simeq 10^{-6} \text{ sec.}$$

Raffreddandosi, i quark si condensano a formare protoni e neutroni.

3. Tempo della sintesi dei nuclei:

$$t \simeq 0.01 \text{ sec} - 3 \text{ minuti.}$$

Questo è il tempo più antico del quale abbiamo un riscontro diretto per mezzo delle percentuali attuali di nuclei leggeri. In questo periodo i neutrini cessano di interagire con le altre componenti della materia e da allora in poi costituiscono una radiazione che si raffredda separatamente.

4. Tempo dell'equilibrio tra radiazione e materia:

$$t \simeq 1000 \text{ anni.}$$

La densità di energia della radiazione (elettromagnetica, neutrini) è eguale alla densità di energia della materia non relativistica (nuclei, elettroni). Da ora in poi la densità sarà essenzialmente dovuta alla materia invece che alla radiazione.

5. La materia si distacca dalla radiazione elettromagnetica:

$$t \simeq 300 \text{ 000 anni.}$$

A questa temperatura l'universo diventa trasparente e si forma la radiazione di fondo cosmico.

Temperature, densità e fattori di scala di questi tempi sono mostrati in Appendice B.

Nel quadro del modello uniforme la storia successiva non offre più eventi. Naturalmente l'universo reale non è così semplice: si sono formate le galassie, le stelle etc. Lo studio della formazione delle strutture a diverse scale (dalle stelle ai super ammassi di galassie, grandi attrattori e grandi vuoti) a partire da perturbazioni primordiali dell'uniformità sta progredendo rapidamente. Ma questa è un'altra storia.

### 3.9 Preistoria

La storia dei tempi primordiali (precedenti a  $10^{-11}$  secondi) dipende dai fenomeni fisici che avvengono a temperature maggiori di  $10^{15}$  gradi, sui quali abbiamo parecchie idee teoriche abbastanza plausibili ma nessuna sperimentazione sistematica.

Si può ritenere che le interazioni fondamentali diventino tutte egualmente intense (unificazione delle interazioni) intorno ad una temperatura di  $10^{30}$  gradi; una teoria della unificazione delle forze permetterebbe la ricostruzione della storia primordiale fino a quella temperatura, corrispondente grosso modo ad un tempo dell'ordine di  $10^{-36}$  secondi dall'inizio.

Nel lasso di tempo tra  $10^{-11}$  secondi e il tempo dell'unificazione può trovarsi la risposta a un problema di grande importanza, la prevalenza di protoni rispetto ad antiprotoni (e corrispondentemente di elettroni rispetto a positroni). Nell'universo attuale l'antimateria è molto rara. Si cerca di spiegare questa asimmetria con l'azione di interazioni, attive a temperature esistenti in tempi precedenti  $10^{-11}$  secondi, secondo l'ipotesi formulata nel 1967 da Andrei Sakharov (1921-1989).

Ma i più grandi problemi si trovano a tempi ancora precedenti l'unificazione delle interazioni. La costante di tempo caratteristica dei fenomeni gravitazionali è il cosiddetto tempo di Planck, funzione della costante di Newton  $G$ , della velocità della luce  $c$  e della costante di Planck  $\hbar$ , definito da

$$t_p = \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ secondi.}$$

Il tempo caratteristico di Planck è molto piccolo paragonato a qualsiasi nostra unità di misura, ma è particolarmente piccolo rispetto all'età  $t_0$  dell'universo che è dell'ordine di 10 miliardi di anni:  $t_0 \simeq 10^{60} t_p$ . In questo tempo la luce percorre una lunghezza di Planck, definita da

$$l_p = ct_p = 1,62 \times 10^{-33} \text{ centimetri.}$$

Appare poco naturale dal punto di vista fisico che, dopo un tempo così grande se paragonato alla costante di tempo caratteristica  $t_p$ , l'universo oggi sia ancora in evoluzione non asintotica; in termini della figura A 2 siamo ancora nella parte centrale della curva  $a(t)$ , non in fondo al ramo asintotico dell'universo aperto (dove la densità sarebbe zero) né, nel caso l'universo fosse chiuso, il ciclo è terminato, anzi è a meno di metà. Ne segue che, per ottenere la densità attuale, il valore della densità al tempo di Planck deve essere aggiustato con una precisione assurda di una parte su  $10^{60}$ .

Un'altra faccia dello stesso problema è data dalla dimensione che l'universo attualmente osservabile aveva al tempo di Planck. Prendendo per  $L_0$  il valore  $10^{28}$  centimetri si ottiene la dimensione che l'universo attualmente osservabile aveva al tempo di Planck:

$$L(t_p) \simeq 10^{-3} \text{ millimetri, } \simeq 10^{29} l_p,$$

una dimensione enorme per quel tempo. Infatti un segnale luminoso che alla nascita dell'universo parte da un punto percorre nel tempo di Planck la lunghezza di Planck  $l_p$ . Poiche' la velocita' della luce e' il limite massimo della velocita' di ogni effetto fisico, e' evidente che punti dell'universo che al tempo di Planck erano distanti tra loro piu' di una lunghezza di Planck non hanno mai potuto scambiarsi nessun segnale. Come mai l'universo visibile era omogeneo al tempo di Planck in regioni che non erano mai state in contatto causale? La situazione appare poco soddisfacente dal punto di vista fisico.

Per queste ragioni, e per altre piu' sottili, e' stata proposta la teoria "dell'inflazione": un breve periodo primordiale in cui l'evoluzione del cosmo e' modificata dalla presenza di energia di vuoto che per un tempo limitato agisce come un termine cosmologico cambiando drasticamente il ritmo dell'espansione. Durante un periodo abbastanza breve la scala dell'universo aumenta esponenzialmente (inflazione!). Una crescita lineare di un fattore  $10^{30}$  o piu' sembra appropriata. In tal modo la parte dell'universo attualmente osservabile poteva essere molto piccola al tempo di Planck,  $L(t_p) \simeq l_p$  ed essersi espansa fino alla dimensione di  $10^{-3}$  millimetri in un tempo dell'ordine di qualche  $t_p$ .

I dettagli di questa idea non sono assestati. Nello scenario generale dell'inflazione si accomodano diversi contenuti e non c'e' ancora una ragionevole certezza sulla scelta della teoria.

### 3.10 L'inizio

Il punto effettivo di inizio della soluzione classica, la singolarita', e' al di fuori della portata delle leggi della fisica attualmente conosciute.

Per tempi inferiori al tempo di Planck non si possono adoperare le equazioni classiche di Einstein perche' la gravita' stessa deve essere descritta in modo quantistico, come le altre interazioni. Le nozioni di spazio, di tempo, e di localita' degli eventi fisici, legate alla formulazione non quantistica della relativita' generale, perderebbero significato a tempi e distanze di quell'ordine.

Ma attualmente non esiste una formulazione quantistica che permetta di paragonarne eventuali calcoli con risultati sperimentali. Abbiamo solo modelli, affascinanti ma non ancora completi, sulla teoria in grado di prolungare le nostre conoscenze al di sotto del tempo di Planck. Diamo un'idea delle concezioni piu' interessanti.

A distanze dell'ordine della lunghezza di Planck lo spazio - tempo perde la struttura classica. Steve Hawking e Alex Vilenkin nel 1983 hanno avanzato due proposte diverse per definire la probabilita' di formazione quantistica dell'universo dal nulla. Andrei Linde ha usato la teoria di Vilenkin per formulare un modello di formazione caotica di universi. Universi macroscopici si formano continuamente, emanati dalla schiuma quantistica esistente a distanze di Planck o da parti di universi stessi, perche' la probabilita' di enucleazione di

universi in stato inflazionario e' massima. Il nostro universo sarebbe uno di questi, in cui ormai l'inflazione si e' spenta; a sua volta puo' darsi che da un suo cantuccio si stia sviluppando un nuovo universo inflazionario.

Un punto di vista diverso e' stato sviluppato da Gabriele Veneziano e Maurizio Gasperini. E' basato sull'idea che gli enti fisici appropriati alla fisica delle piccole distanze non siano particelle ma stringhe, la cui dimensione dovrebbe essere dell'ordine della lunghezza di Planck.

La teoria delle stringhe costituisce uno schema di unificazione delle interazioni fondamentali elegante e molto potente. Qui ci interessa solo l'aspetto cosmologico. In breve il quadro dell'inizio proposto della cosmologia di stringa e' che non c'e' inizio: il tempo cosmico si prolunga fino all'infinito nel passato. L'istante iniziale della teoria classica sarebbe in realta' il periodo di tempo in cui l'universo diventa quantistico e cambia regime; prima esisteva un universo di dimensionalita' maggiore di 4, privo di materia e di interazioni, piatto e freddo; intorno al tempo iniziale tradizionale (Grande Esplosione) questo universo diventa quantistico, subisce un cambiamento, il numero di dimensioni macroscopiche si fissa a 4 (3 spaziali e 1 temporale), diventa caldissimo e si raccorda con la descrizione non quantistica della cosmologia tradizionale.

Lasciamo alla ricerca presente il tempo di maturare le idee. Certo e' che al momento attuale il prolungamento all'indietro del modello standard con spazio e tempo classici descritti dalla relativita' generale trova una barriera naturale di credibilita' al tempo di Planck. Prima di questo tempo le leggi della fisica attualmente note non sono applicabili.

### 3.11 Conclusione

La cosmologia e' una scienza con una lunga tradizione ma pochi dati. Nei prossimi anni la situazione cambiera' drasticamente perche' stanno iniziando grossi programmi di cooperazione internazionale per la raccolta di osservazioni cosmologiche.

Si attendono molte informazioni nuove. Un elenco delle piu' importanti e' il seguente: una mappa della temperatura della radiazione di fondo con una risoluzione angolare dell'ordine del grado o inferiore, fondamentale per studiare la formazione di strutture a partire dall'universo primitivo; la misura della velocita' di allontanamento di qualche milione di galassie, con determinazione precisa della costante di Hubble e del parametro di decelerazione; la misura del numero di galassie in funzione della distanza; le caratteristiche dei neutrini; la ricerca di antimateria nel cosmo; una misura piu' precisa della densita' di materia e della sua distribuzione, con la determinazione della densita' di materia oscura; la composizione della materia oscura; l'eventuale presenza di termine cosmologico. Infine ci aspettiamo anche la osservazione di onde gravitazionali, previste dalla teoria ma difficili da osservare, adesso che molti apparati sperimentali sono in fase di approntamento.

Queste misure intendono chiarire due tipi di problemi: sia la conoscenza dell'universo iniziale che la capacità del modello cosmologico di accomodare nella sua cornice la formazione delle disomogeneità (strutture dell'universo attuale), nel quadro della fisica delle particelle e della teoria quantistica delle loro interazioni estesa ad una trattazione che contenga la gravità.

## 3.12 Appendici

### 3.12.1 Lo spazio tridimensionale

Poiché il modello cosmologico iniziale prevede densità uniforme spazialmente, la teoria globale restringe la considerazione a spazi tridimensionali omogenei e isotropi (cioè tutti i punti e tutte le direzioni sono equivalenti).

Secondo la relatività generale lo spazio è curvato dalla presenza della materia. È dunque necessario usare concetti di geometria non euclidea, la cui formulazione è dovuta a tre matematici dell'800 che vogliamo ricordare: J. Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856) e Janos Bolyai (1802 - 1860). Per conoscere la struttura dello spazio tridimensionale bisogna classificare gli spazi tridimensionali omogenei ed isotropi e quindi a curvatura costante.

Rivolgiamoci prima agli spazi a due dimensioni, più facili da visualizzare. Classifichiamo gli spazi omogenei e isotropi a due dimensioni (superfici). Si pensa subito al piano; ma esistono superfici omogenee ed isotrope curve la cui curvatura è la stessa in tutti i punti.

Consideriamo la varietà a due dimensioni chiamata sfera  $S_2$ ; può essere immaginata come la superficie di raggio costante che racchiude un globo in uno spazio euclideo a tre dimensioni. Su  $S_2$  la curvatura è costante, tutti i punti e tutte le direzioni sono equivalenti: la superficie è omogenea e isotropa. La grandezza di ogni superficie di questo tipo è caratterizzata dal suo raggio  $a$  che possiamo chiamare fattore di scala perché in due di queste sfere con diversi valori di  $a$  le distanze tra due punti con stessa latitudine e longitudine sono proporzionali ai rispettivi fattori di scala.

La superficie  $S_2$  ha un'area finita,  $A = 4\pi a^2$ , ma non ha un confine. Nessuna superficie omogenea e isotropa può avere un confine, altrimenti i punti di confine sarebbero diversi dagli altri.

Dal punto di vista geometrico la superficie della Terra è approssimativamente una  $S_2$ . La curvatura della superficie terrestre è una proprietà intrinseca della geometria della superficie terrestre, non dipende dal fatto che la Terra è immersa in uno spazio più grande a tre dimensioni. Se non avessimo prove sperimentali della terza direzione potremmo pensare qualsiasi cosa (o anche niente) sulla immersione della superficie terrestre in altri spazi più grandi, ma determineremmo egualmente il fattore di scala della superficie terrestre (con misure topografiche).

Ad un essere di dimensione 2 che viva confinato su una varietà  $S_2$  non importa molto di sapere se e dove può essere immerso. Posto che non può uscire dalle 2 dimensioni, la discussione dell'immersione in uno spazio più grande è puramente matematica. Egli può pensare di essere immerso in qualsiasi spazio di dimensione maggiore che consenta matematicamente l'immersione; questo pensiero potrà forse cambiare la sua metafisica, ma non la sua fisica. Questo punto è essenziale.

Sulla varietà  $S_2$  non vale la geometria euclidea; per esempio la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180 gradi. Si dice che la sua curvatura è positiva.

Esiste un'altra superficie definita dalla proprietà di avere una curvatura costante, chiamata  $H_2$ . Essa ha curvatura negativa: se si disegna un triangolo sulla superficie, la somma degli angoli interni è minore di 180 gradi (la sua geometria è di tipo iperbolico). Intorno ad ogni suo punto la superficie  $H_2$  è a forma di sella.  $H_2$  ha un'area infinita.

A differenza della sfera  $S_2$ , questo spazio a curvatura negativa non può essere immerso completamente in uno spazio a tre dimensioni euclideo; solo sue porzioni ammettono l'immersione (vedi figura A 1.).

Infine, il piano a due dimensioni con geometria euclidea è omogeneo e isotropo; lo chiameremo  $E_2$ . La somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi.

$S_2$ ,  $H_2$  ed  $E_2$  sono i soli tipi di superfici omogenee ed isotrope a due dimensioni (se escludiamo topologie globali più complicate; in ogni caso ciò è vero per le proprietà locali). Una caratteristica di queste tre superfici è mostrata nella figura A 1.

Passiamo ora a spazi tridimensionali. Possiamo definire varie curvature bidimensionali in uno spazio tridimensionale ritagliando triangoli geodetici a due dimensioni nello spazio tridimensionale; nel caso di spazi omogenei e isotropi, la curvatura è la stessa per qualsiasi triangolo comunque orientato. Potremmo anche ricavare la curvatura costruendo tetraedri geodetici (volumi ottenuti unendo 4 punti con 6 lati costruiti lungo le geodetiche di uno spazio) invece che triangoli; in un volume tridimensionale a curvatura positiva i tetraedri costruiti con le geodetiche che uniscono 4 punti sono più gonfi che nello spazio tridimensionale euclideo (piatto), mentre in un volume a curvatura negativa i tetraedri geodetici sono più smunti.

Lasciando da parte la possibilità di topologie globali complicate gli spazi tridimensionali a curvatura costante sono soltanto tre: la sfera  $S_3$ , lo spazio iperbolico a tre dimensioni  $H_3$  e lo spazio euclideo a tre dimensioni  $E_3$ .

$S_3$  (sfera tridimensionale) può essere visualizzato come la superficie tridimensionale di un iperglobo costruito in uno spazio euclideo a 4 dimensioni. Ma questo spazio a 4 dimensioni è un puro ausilio matematico. Forse lo spazio dell'universo è di tipo  $S_3$ , ma non esiste alcuno spazio fisico a 4 dimensioni.  $S_3$  è uno spazio chiuso, naturalmente privo di confini. Il primo modello cosmologico di Einstein era proprio una sfera di questo genere.

$H_3$  e' uno spazio tridimensionale iperbolico, il suo volume e' infinito e per questo viene detto aperto.

Infine  $E_3$  e' lo spazio piatto a tre dimensioni in cui vale la geometria euclidea dello spazio. Ha chiaramente volume infinito ed e' quindi aperto.

All'esperienza quotidiana lo spazio in cui le nostre azioni si svolgono appare privo di curvatura e infinito, cioe'  $E_3$ ; questo significa soltanto che la curvatura (positiva o negativa) eventualmente presente nel nostro spazio tridimensionale e' troppo piccola per essere osservata localmente. E' nei problemi a grande scala che la curvatura dello spazio tridimensionale diventa importante.

Si introduce un fattore di scala  $a$  che ha la dimensione di lunghezza sia per  $S_3$  che per  $H_3$ ; nel caso di  $S_3$  corrisponde al raggio della sfera immersa nello spazio fittizio a quattro dimensioni. Il volume di  $S_3$ , finito, e'  $V = 2\pi a^3$ . Il fattore di scala fornisce una misura dell'incurvamento della variete'; la sua relazione con la curvatura  $C$  e' data da:

$$C = \frac{6k}{a^2} \quad (3.1)$$

$k = +1$  per  $S_3$  a curvatura positiva,  $k = -1$  per  $H_3$  a curvatura negativa. Nel caso dello spazio euclideo a tre dimensioni  $E_3$ ,  $k=0$  e la curvatura e' nulla. Anche in questo caso pero' si puo' introdurre un fattore di scala  $a$  definendo un sistema di coordinate adimensionali in modo che le distanze tra punti siano proporzionali al fattore di scala.

L'introduzione di un fattore di scala  $a$  per tutti tre i tipi di spazii a curvatura costante e' essenziale nella discussione cosmologica in cui la scala delle distanze varia col tempo (espansione dell'universo) indipendentemente dal tipo di universo. Si pone allora  $a = a(t)$ , funzione del tempo.

### 3.12.2 Evoluzione nel tempo del fattore di scala, della densita' e della temperatura

Usando l'equazione di stato della materia e la prima legge della termodinamica si ottiene la relazione tra la densita'  $\rho(t)$  ad un tempo generico  $t$  e il fattore di scala  $a(t)$ . La relazione e' diversa a seconda che la materia sia in maggior parte composta da radiazione o da materia lenta:

$$\rho_{\text{rad}}(t) \sim a(t)^{-4}, \quad \rho_{\text{mat}}(t) \sim a(t)^{-3}.$$

Andando indietro verso tempi iniziali il fattore di scala dell'universo decresce e quindi la densita' della radiazione cresce piu' di quella della materia. Per tempi iniziali (piccoli  $a(t)$ ) predomina la radiazione. Oggi la densita' di materia e' molto maggiore di quella della radiazione e i loro valori permettono di valutare l'istante in cui le due componenti avevano la stessa densita': 1000 anni o poco piu' dall'inizio.

Una regola molto importante segue dal fatto che l'espansione avviene senza variazioni nella quantita' di

calore nell'universo: la temperatura e' connessa al fattore di scala da

$$a(t)T(t) \simeq \text{costante}.$$

(questa legge e' approssimata; la formula esatta ammette una piccola variazione di  $a(t)T(t)$ , del tutto trascurabile in questa sede).

Durante l'evoluzione dell'universo il tipo di spazio non puo' cambiare. L'unica variabile che caratterizza la sua geometria e' il fattore di scala  $a(t)$  la cui evoluzione nel tempo cosmico e' determinata dalle equazioni di Einstein.

In tutti i casi nell'ambito della cosmologia classica l'evoluzione comincia ad un istante in cui  $a = 0$ , la densita' e' infinita e lo spazio e' una variete' singolare. E' l'istante della Grande Esplosione, a partire dal quale si conta l'eta' dell'universo. La singolarita' della soluzione impedisce che il modello venga continuato a tempi precedenti.

L'evoluzione e' diversa a seconda del tipo di spazio. Se lo spazio e' chiuso l'universo raggiunge un volume massimo e poi si contrae fino a volume nullo (singolarita' finale) in un tempo finito (la durata totale dell'universo). Negli altri due casi di spazii aperti l'evoluzione procede indefinitamente con fattore di scala sempre crescente (finale freddo).

In figura A 2 e' mostrato l'andamento del fattore di scala  $a(t)$  nel tempo. Le tre diverse curve con diversi andamenti si riferiscono ai tre diversi tipi di spazii tridimensionali ammessi: chiuso, aperto e iperbolico, aperto euclideo.

La relazione tra la costante di Hubble e il fattore di scala e'

$$H_0 = \left( \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \right)_{\text{oggi}}.$$

Da questa relazione si vede anche il significato geometrico del tempo di Hubble  $t_H$ : e' la distanza tra il punto  $T_a$ , incrocio della tangente alla curva e l'asse dei tempi, e il punto  $T_0$  che rappresenta il momento attuale. Poiche' la curva ha la concavita' verso il basso, il tempo di Hubble e' maggiore dell'eta' dell'universo, qualsiasi sia il tipo di spazio (tranne in presenza di termine cosmologico). Avevamo gia' ottenuto questo risultato con ragionamenti fisici.

Nella figura la differenza tra l'evoluzione del fattore di scala  $a$  per i tre tipi di spazii, per tempi precedenti quello attuale, e' stata esagerata per chiarezza; in realta', data la configurazione attuale, il tipo di spazio (chiuso o aperto) ha poca influenza sull'andamento di  $a$  per il passato (a parte il volume finito o infinito, che pero' non e' misurabile direttamente). Ad un osservatore che ripercorra all'indietro l'evoluzione a partire da oggi le osservazioni locali non permettono facilmente di capire quale e' il tipo di spazio. Tornando verso la Grande Esplosione l'osservatore vede un aumento sempre maggiore sia della temperatura che della densita', praticamente indipendenti dalla struttura dello spazio.

Le equazioni sono particolarmente semplici nel caso di spazio euclideo ( $\rho_0 = \rho_c$ ) e questa approssimazione fornisce una precisione sufficiente ai fini della nostra

ricostruzione del passato. Ci porremo dunque in questo caso. La relazione tra il fattore di scala  $a(t)$  e il tempo  $t$  e' diversa a seconda che domini la radiazione (tempi iniziali) o la materia. Per il tempo iniziale una buona approssimazione e' data dagli andamenti seguenti:

Dominanza di radiazione:

$$a(t) \sim t^{1/2}, \quad T \sim t^{-1/2}, \quad \rho \sim t^{-2}.$$

Dominanza di materia lenta:

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad T \sim t^{-2/3}, \quad \rho \sim t^{-2}.$$

In figura A 3 e' mostrato il comportamento della densita', temperatura e del fattore di scala per tempi iniziali, praticamente indipendente dal tipo di spazio.

Riportiamo in una tabella i parametri dell'universo in corrispondenza alle date citate nel testo. Le colonne contengono la data, la temperatura (in gradi), la densita' (in unita' di grammi al centimetro cubo), il rapporto tra il fattore di scala di allora e di oggi. Come date abbiamo scelto il tempo di Planck, il tempo dal quale sono note le interazioni, il tempo della condensazione degli adroni, il tempo della sintesi dei nuclei, il tempo dell'equilibrio, il tempo del distacco della radiazione elettromagnetica.

Parametri dell'universo a varie epoche

$t$	$T$	$\rho$	$a(t)/a_0$
$10^{-43}$ s	$10^{32}$	$10^{94}$	$10^{-32}$
$10^{-11}$ s	$10^{15}$	$10^{26}$	$10^{-14}$
$10^{-6}$ s	$10^{13}$	$10^{18}$	$10^{-12}$
0.01 s-3 min	10-0.1	$10^{10}$ - $10^2$	$10^{-10}$ - $10^{-8}$
1000 anni	20 000	$10^{-18}$	$10^{-4}$
300 000 anni	3000	$10^{-20}$	$10^{-3}$
oggi	2,73	$10^{-30}$	1

### 3.12.3 Densita' di materia e struttura dello spazio

Dalle equazioni di Einstein segue la relazione tra la densita'  $\rho_0$ , la densita' critica  $\rho_c$ , la costante di Hubble  $H$  e il fattore di scala  $a_0$ :

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} - 1 = k \frac{c^2}{a_0^2 H_0^2}. \quad (3.2)$$

In questa equazione il parametro  $k$  puo' assumere uno dei tre valori  $\pm 1, 0$  e dipende dal tipo di spazio. Se  $k = -1$  lo spazio e' aperto di tipo  $H_3$ ; se  $k = 0$  lo spazio e' euclideo; se  $k = +1$  lo spazio e' chiuso di tipo  $S_3$  (vedere la discussione dopo l'equazione (3.1).

Poiche'  $1/a_0^2 H_0^2$  e' sempre positivo, seguono i tre casi:

1. Se  $\rho_0 < \rho_c$  deve essere  $k = -1$ ; lo spazio e' aperto e curvo.
2. Se  $\rho_0 = \rho_c$  deve essere  $k = 0$ ; lo spazio e' aperto euclideo. In questo caso l'equazione (3.2) non determina il fattore di scala.
3. Se  $\rho_0 > \rho_c$  deve essere  $k = +1$ ; lo spazio e' finito.

Queste relazioni chiariscono l'importanza del rapporto tra la densita' media dell'universo e la densita' critica e permettono di determinare il valore del fattore di scala  $a_0$  in funzione della densita' di materia e della costante di Hubble se l'universo e'  $S_3$  o  $H_3$  (se  $\rho_0 = \rho_c$  la densita' non determina  $a_0$ , come si vede dalla (3.2)). I valori numerici sono riportati nella tabella. Il valore del fattore di scala  $a_0$  e' espresso in unita'  $10^{28}$  centimetri e si e' usato il valore 0,67 per la costante di Hubble ridotta  $h$ :

Fattore di scala  $a_0$  in funzione di  $\rho_c/\rho_0$

$\rho_0/\rho_c$	$a_0$	tipo di spazio
0,2	1,6	$H_3$
0,4	1,8	$H_3$
0,6	2,2	$H_3$
0,8	3,1	$H_3$
1,1	4,4	$S_3$
1,2	3,1	$S_3$
1,3	2,5	$S_3$
1,4	2,2	$S_3$

### 3.12.4 Unita' di misura e costanti fisiche

1 anno luce =  $0,95 \times 10^{18}$  cm = 0,307 parsec.

1 parsec = 3,26 anni luce =  $3,09 \times 10^{18}$  centimetri.

1 milione di parsec =  $3,09 \times 10^{24}$  centimetri.

1 anno =  $3,15 \times 10^7$  secondi.

Corrispondenza tra energia e temperatura: 1 GeV =  $1,60 \times 10^{-10}$  joules  $\Leftrightarrow 1.16 \times 10^{13}$  gradi.

Velocita' della luce:  $c = 2,998 \times 10^{10}$  centimetri al secondo.

Costante di Planck:  $\hbar = 1,055 \times 10^{-27}$  centimetri<sup>2</sup> grammi secondi<sup>-1</sup>.

Costante di Newton:  $G = 6,67 \times 10^{-8}$  centimetri<sup>3</sup> grammi<sup>-1</sup> secondi<sup>-2</sup>.

Tempo di Planck:  $t_p = 5,39 \times 10^{-44}$  secondi.

Lunghezza di Planck:  $l_p = ct_p = 1,62 \times 10^{-33}$  centimetri.

Distanza Terra - Sole:  $d=150$  milioni di chilometri (1 parsec =  $2,06 \times 10^5 d$ ).

Costante di Hubble:  $H_0 = 100 h$  chilometri al secondo per mega parsec;  $0,5 \leq h \leq 0,8$ .

Tempo di Hubble:  $t_H = 1/H_0 = 3.09 h^{-1} \times 10^{17}$  secondi =  $9,8 h^{-1}$  miliardi di anni.

Dimensione lineare dell'universo osservabile oggi:  $L_0 \leq 10^{28}$  centimetri.

Densita' critica:  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1,88 h^2 \times 10^{-29}$  grammi al centimetro cubo.

Temperatura odierna della radiazione di fondo elettromagnetica:  $T_\gamma = 2,73$  gradi.

Densita' di fotoni della radiazione di fondo:  $n_\gamma=413$  fotoni al centimetro cubo;  $\rho_\gamma = 4,7 \times 10^{-34}$  grammi al centimetro cubo.



# Bibliography

- [1] A. Koiré, "La rivoluzione astronomica: Copernico, Keplero, Borelli", Feltrinelli, Milano 1966.
- [2] T.S. Kuhn. "La rivoluzione copernicana", Einaudi Torino 1972.
- [3] Seguo la traduzione in Inglese di A. Motte della II edizione (1713) dei Principia: "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book III, General Scholium. Fac - simile by Dawsons of Pall Mall, London 1968, p.392 e seguenti.
- [4] Internet sito [http://www.astro.ku.dk/~lars\\_c/btp/solar/eng/data.htm](http://www.astro.ku.dk/~lars_c/btp/solar/eng/data.htm)
- [5] Anderson et al., Phys. Rep. 295, 93 (1998); P. Havas, Gen. Rel. Grav. 19, 435 (1987); Zazaletdinov, Tavakol, Ellis, Gen. Rel. Grav. 28, 1251 (1996); P. Bergmann, Rev. Mod. Phys. 33, 510 (1961).
- [6] V. de Alfaro, "Lo spazio e il tempo nelle teorie fisiche", L'Ateneo, anno XIV n.5, Torino, gennaio / febbraio 1998.
- [7] I. Newton, Op. Cit. Vedere Vol. II, Book III, "Of the System of the World" e in particolare Proposition VII.
- [8] A. Einstein, Ann. der Physik ser. 4, XVII 891 (1905). Vedere A. Einstein, "Opere Scelte" a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino 1988, p. 330.
- [9] R. Sexl e H.K. Schmidt, "Spaziotempo", Boringhieri, Torino 1980, p. 276.
- [10] E. Whittaker, "A Story of the Theories of Aether and Electricity", Am. Inst. of Physics Reprint 1987.
- [11] A. Pais, "Sottile è il Signore", Bollati Boringhieri, Torino; sez. 6a.
- [12] R. Sexl e H.K. Schmidt, Op. Cit.
- [13] Galileo, "Dialogo sui Massimi Sistemi," Giornata 2a, Esperienza con la qual sola si mostra la nullità di tutte le prove prodotte contro al moto della Terra.
- [14] I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book I, p.9 e seguenti.
- [15] E. Whittaker, Op. Cit. vedere la parte sul corpo  $\alpha$ .
- [16] E. Mach, "La meccanica nel suo sviluppo storico - critico", Boringhieri, Torino 1968.
- [17] Leggi della dipendenza dalle distanze in Newton: I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book ...
- [18] I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book II, p.261 e seguenti.
- [19] A.Einstein, L. Infeld, L'evoluzione della fisica, Einaudi Torino 1948
- [20] G.Galilei, "Dialogo dei massimi sistemi", Ed. Studio Tesi Pordenone 1988
- [21] Aristotele, "La Fisica", ed. Laterza Bari 1968
- [22] W.D.Ross, "Aristotele" Feltrinelli Milano 1971
- [23] N.Copernico, "De Revolutionibus Orbium Caelestium" libro I, a cura di A.Koyré, Einaudi Torino 1975
- [24] N.Copernico, "On the Revolutions of Heavenly Spheres", Prometheus Books Amherst, New York 1995
- [25] M.Jammer, "Storia del concetto di forza", Feltrinelli Milano 1971
- [26] E.J. Dijksterhuis "Il meccanicismo e l'immagine del mondo" Feltrinelli Milano 1971
- [27] L.N. Cooper, Introduction to the meaning and structure of physics. Harper, New York 1968
- [28] G.O. Abell, "Exploration of the Universe", 3rd Ed., Holt, Rinehart, and Winston, New York 1975.
- [29] H. Bondy, "Cosmology", Cambridge University Press 1961.
- [30] N. Calder, "L'universo di Einstein", Zanichelli, Bologna 1981.
- [31] "COBE Measures Anisotropy in Cosmic Microwave Background Radiation", Physics Today, June 1992, p. 17.

- [32] A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino 1988.
- [33] M. Friedmann, "Foundations of Space - Time Theories", Princeton University Press, 1983.
- [34] S. Hawking, G.F. Ellis, "The Large Scale Structure of Space - Time", Cambridge University Press 1973.
- [35] E. Hubble, ristampato in G.B. Field, H. Arp, J.N. Bahcall "The Redshift Controversy", Benjamin, Reading, MA 1973.
- [36] E.W. Kolb, M.S. Turner, "The Early Universe", Addison - Wesley Publ. Co. 1990.
- [37] Rocky Kolb, "Blind Watchers of the Sky", Helix Books 1996.
- [38] L.M. Lederman, D.N. Schramm, "Dai quark al cosmo", Zanichelli, Bologna 1991.
- [39] E. Mach, "La meccanica nel suo sviluppo storico - critico", Boringhieri, Torino 1968.
- [40] J.C. Maxwell, "Trattato di Elettricit  e Magnetismo", UTET, Torino 1973.
- [41] E.A. Milne, "Relativity, Gravitation and World Structure", Oxford 1935.
- [42] C.W. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler, "Gravitation", Freeman and Co. New York 1970.
- [43] I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy", translated into English by Andrew Motte, London 1727, reprinted by Dawsons of Pall Mall, 1968.
- [44] A. Pais, "Sottile e' il Signore", Boringhieri, Torino 1986.
- [45] W. Pauli, "Teoria della relativita'", Boringhieri Torino 1958.
- [46] M. Pauri, voce "Spazio e Tempo", Enciclopedia delle Scienze Fisiche, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1995.
- [47] A.A. Penzias, R. Wilson, *Astroph. Journal* 142, 419 (1965).
- [48] M. Rowan-Robinson, "The Cosmological Distance Ladder", W.H. Freeman and Company, New York 1985.
- [49] R. Sexl e H.K. Schmidt, "Spaziotempo", Boringhieri, Torino 1980.
- [50] R.C. Tolman, "Relativity, Thermodynamics and Cosmology". Clarendon Press, Oxford 1934.
- [51] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", J.Wiley and Sons, 1972.
- [52] S. Weinberg, "I primi tre minuti", Mondadori, Milano 1977.
- [53] J.A. Wheeler, "Gravita' e spaziotempo", Zanichelli, Bologna 1993.
- [54] G.J. Whitrow, "Time in History", Oxford University Press 1988.
- [55] E. Witten, "Reflections on the Fate of Spacetime", *Physics Today* 49, n.4 (April 1996) 24.
- [56] R. Alpher, H. Bethe, G. Gamow, *Phys. Rev.* 73, ... (1948).
- [57] C. Brans, R.H. Dicke, *Phys. Review* 124, 925 (1961).
- [58] W. de Sitter, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 78, 3 (1917).
- [59] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A*, 165, 199 (1938).
- [60] G.B. Field, H. Arp, J.N. Bahcall, "The Redshift Controversy", Benjamin 1973.
- [61] A. Friedmann, *Zeitschr. Phys.* 10, 377 (1922) e 21, 326 (1924).
- [62] G. Gamow, *Phys. Rev.* 74, 505 (1948).
- [63] P. Jordan, *Nature* 139, 323 (1937) e 164, 637 (1949).
- [64] G.F. Smoot, D. Scott "Cosmic Background Radiation" *astro-ph/9711069* 8 Nov. 1997.
- [65] G. Wataghin, *Phys. Rev.* 73, ... (1948).
- [66] H. Weyl, *Phys. Z.* 24, 230 (1923).