SIS 2000
Problemi di Fisica

———

Vittorio de Alfaro
Dip. di Fisica Teorica, Università di Torino

Marzo 2000

Chapter 1

A- Specificità della Fisica (e delle scienze)

1.1 Introduzione

Mi è stato assegnato un tema, per questo discorso iniziale: il messaggio specifico che un insegnante potrebbe dare nell'insegnare la fisica; ovvero, il senso dell'insegnamento della fisica nella Scuola Secondaria superiore.

Non è facile svolgerlo. La fisica è un insieme di concezioni, di metodi; svolge, come ogni altra scienza, una funzione internazionale; chi la pratica fa parte di una comunità internazionale ben demarcata e caratterizzata da cultura, informazioni e valori comuni. In questa lettura cercherò di delineare alcune caratteristiche della fisica, e della scienza in genere, che possono essere di un certo interesse per le discussioni interdisciplinari nelle scuole. Non analizzerò invece le caratteristiche sociologiche dell'ambiente.

1.2 La Natura

Una caratteristica della fisica è la percezione elementare che la natura stia di fronte a noi in modo indipendente, con le proprie regole; e che si debba usare molta pazienza ed astuzia per comprenderle. L'oggetto dell'indagine appare rigido. Il ricercatore ha l'impressione che esso abbia una propria logica, sue proprie leggi che rivela solo a chi abbia il linguaggio adatto. Un approccio qualsiasi non basta. Non si possono fornire descrizioni incompatibili della natura, come se si trattasse della interpretazione di un testo letterario. La scienza non è una storia né un'interpretazione né un'esposizione che debba soltanto convincere. Essa deve operare sulla natura, riprodurre risultati, fabbricare apparecchi che funzionano. La prova della scienza è nella prassi.

Questa impressione di oggettività non è caratteristica solo dell'attività scientifica ma di ogni attività che si rivolga in linea di principio all'azione sulle cose, sul mondo esterno e non solo su altre persone: dai contadini ai calzolai. Qua come lì il criterio di validità sta nella prassi.

Possiamo dunque parlare di un elementare realismo da parte del ricercatore, proprio come accade in tutte le attività, ffondato nella prassi e precedente rispetto a convinzioni filosofiche di qualunque livello, che spesso non ci sono o comunque non interferiscono nella pratica della scienza.

Si potrà obiettare che decisioni fondamentali che riguardano problemi di coscienza dipendono in modo essenziale dalle convinzioni più profonde dello scienziato. Ciò è vero, benchè accada assai raramente in condizioni normali; ma la questione si pone per qualsiasi persona che si trovi a dover affrontare un problema di coscienza: è dunque una questione generale, non riguarda la fisica o la scienza soltanto.

Spesso dall'esterno si pone l'accento sulla filosofia della ricerca, sul fatto che tutti hanno almeno implicitamente una filosofia. Ma quest'argomento è troppo generico e vale anche per moltissime attività; e invece nessuno pensa di porre ad avvocati o dentisti o segretari comunali questioni sulla loro filosofia o metodologia[1]. In questo vi è un pregiudizio: una stima esagerata della differenziazione tra l'attività di conoscenza della natura e attività ritenute meramente pratiche; differenziazione che non sempre corrisponde alla realtà.

A mio parere l'attività di ricerca scientifica non è fondamentalmente diversa da ogni attività di comprensione delle regole con cui operare sulla realtà se non per l'intensità. La conoscenza scientifica della realtà non fornisce verità assolute o standard di essenza assoluta, ma conoscenze (parziali ed approssimate, e limitate a certe regioni di energia e spazio - tempo) vere e valide perchè verificate e funzionanti nella prassi.

Ma una parte della filosofia contemporanea, nella sete, magari latente, di trascendenza o di "conoscenza dell'essere", imputa alla scienza la "metafisica" del realismo e giunge a negarne la capacità di possedere criterii sia pure limitati di verità e quindi di conoscere la natura. Da queste posizioni segue una sfiducia gen-

[1] Ad esempio nei concorsi per entrare nella magistratura la commissione non perde tempo ad accertare se il candidato crede nell'esistenza reale del mondo esterno; si dà per scontato un robusto realismo pratico che permette di operare. Un giudice che considerasse il mondo come una finzione o una interpretazione e pensasse che ai fatti su cui indaga non corrisponda un unico svolgimento, al di là delle diverse testimonianze, avrebbe problemi a formulare giudizi (il che è poi l'essenza del suo mestiere).

erale: la scienza sarebbe un insieme di opinioni o di interpretazioni o di convenzioni. E così si giunge alla negazione della realtà intesa come permanenza della natura e oggettività della conoscenza scientifica. Si sostiene infine che altre forme di conoscenza – essenzialmente filosofiche o estetiche – possiederebbero un carattere, come dire, più fondamentale; costituirebbero una conoscenza di livello superiore.

Si imputa alla scienza anche la semplificazione e la conseguente astrazione; ma la semplificazione è una caratteristica indispensabile, e non solo della scienza ma di ogni linguaggio (menomale, altrimenti sai che noia!). Si dovrebbe forse descrivere ogni granello di sabbia quando si parla del deserto? Al di sotto in realtà sta il problema delle approssimazioni ai fenomeni.

Sì, la scienza è una cattiva conoscenza della realtà naturale nel quadro dello spazio e del tempo: semplifica, astrae, è approssimata e limitata. Ma è l'unica che abbiamo. Certamente esistono varie forme di credenze, le vediamo sul piano storico; ma non esistono altre forme di conoscenza della natura e di operabilità su di essa. Tutto dipende da quello che uno vuole.

1.3 Modelli e teorie

Il realismo elementare, la credenza forte di avere a che fare con una realtà rigida, si manifesta per esempio nella distinzione che si opera abitualmente tra teoria e modello.

Spesso vale la moda di chiamare modelli tutte le forme di teoria nella scienza. L'idea di fondo è che la fisica non descrive strutture reali ma fornisce una interpretazione mediante formule matematiche. Così si raccomanda di prendere le distanze dall'oggetto per evitare gli antichi errori di materialismo, di metafisicità, di realismo, riconoscendo subito il carattere arbitrario o convenzionale della descrizione, e soprattutto il carattere di temporaneità: ogni modello, si dice, è destinato ad essere superato da una descrizione migliore, ma soprattutto diversa. Illusoria e dannosa sarebbe quindi la impressione di realtà, di oggettività della descrizione.

Sarà pure così; ma questo non è ciò che pensa intuitivamente uno scienziato. E si fa un gran torto a Galileo (che aveva credenze oggettive da cui traeva vigore), e una gran ragione a Bellarmino, a dire queste cose, magari ai giovani che pure avrebbero bisogno di credere che al mondo esiste anche qualcosa di oggettivo, di non relativo, di sicuro. No, uno scienziato distingue chiaramente tra un modello ed una teoria. Intanto, uno scienziato sa che l'oggetto delle sue ricerche si situa in una fascia opportuna di conoscenza. Per un fisico, si tratterà di strutture di una certa grandezza, di fenomeni che coinvolgono certe quantità di energia, certi valori di distanze, certe precisioni sperimentali e certi limiti di validità. Ma, entro questo quadro, un modello consiste di una descrizione che renda conto di alcuni aspetti del fenomeno, ma di cui si sappia già che non può spiegare tutti gli aspetti in studio entro i limiti detti sopra[2]. Una teoria è un'altra cosa. La legge di Newton sulla gravitazione universale non è, per un fisico, un modello: è una teoria; e così l'elettrodinamica.

Magari una teoria sarà domani conglobata in una formulazione più generale; ma una teoria è quella che, nell'ambito di una certa fascia di fenomeni scientifici ed entro una certa precisione, rende conto di tutti gli aspetti. E questa distinzione, come ho detto, è ben presente nella mente degli scienziati. Insegnare che le due categorie –teorie e modelli– sono la stessa cosa, fa un gran torto alla conoscenza e diseduca, sia pure partendo dalle intenzioni della più asettica intenzione critica.

1.4 Compatibilità delle teorie e proprietà accrescitiva

Molti non saranno d'accordo. Proprio l'esempio della gravità newtoniana è buono!, diranno; quando i fisici sono i primi a sapere che la gravità di Newton è stata superata dalla relatività generale di Einstein, che le equazioni di Newton sono solo buone come approssimazioni per corpi lenti e poco densi, e che lo spazio - tempo non è newtoniano! Dovrebbero aver imparato la lezione della temporaneità delle teorie, del loro valore limitato, di costruzione artificiale, di modello, appunto.

Certamente, siamo perfettamente consci del carattere approssimato delle leggi della fisica. Certamente, sappiamo che Newton è stato superato concettualmente dalla gravitazione di Einstein. Ma come ho detto, non buttiamo via tutto. Se gli scienziati non la pensano più come un tempo, quando si diceva che era un peccato che ci fosse un solo universo e l'avesse già spiegato Newton, d'altra parte essi mettono piuttosto l'accento sul fatto chiaro che le teorie passate, come la gravità newtoniana, mantengono la loro validità (come ho detto, per una certa fascia di fenomeni ed entro una data precisione). Per studiare i movimenti della Luna e degli altri corpi del sistema solare è raramente necessario usare Einstein, il vecchio Newton va spesso benissimo. Naturalmente è un pensiero di Newton rivisitato, sul quale gli storici avrebbero da ridire. Ma vi sono, nelle vecchie teorie, risultati considerati perenni; e sono questi che interessano lo scienziato.

Il cambiamento di teoria può mutare i termini della concezione del mondo fisico; può produrre grandi risonanze culturali anche al di fuori dell'ambito specializzato, come è appunto accaduto nei primi decenni del '900. Le nuove teorie scientifiche sono apparse come una rottura rivoluzionaria rispetto a quelle precedenti; però esse contengono in certi loro limiti tutti i risultati della fisica precedente (non necessariamente i concetti). Le rotture di fondo riguardano i concetti e l'immagine del mondo, non la descrizione dei processi fisici che resta compatibile.

Ciò accade perché la descrizione è garantita dalla permanenza della natura. Se una teoria riproduceva i fatti osservati e permetteva di operare, essa ha validità per

[2]Gli esempi sono molti. La teoria fenomenologica di Fermi del decadimento debole è un modello, e Fermi lo sapeva benissimo. Il modello a strati del nucleo è appunto un modello; e così via.

certe categorie e scale di fenomeni. Il carattere di stabilità si trasferisce dalla natura alla sua descrizione, la conoscenza scientifica. Per via della stabilità e permanenza della natura le teorie nuove conglobano le teorie precedenti.

1.5 Scienza e storia della scienza

Delle teorie del passato la scienza usa oggi soltanto quella parte che ritiene (in base a criteri oggettivi) essenziale, la parte permanente dei risultati. Lo scienziato non è uno storico di mestiere e non è interessato (sia pure con eccezioni) alla ricostruzione delle complessità del pensiero dei predecessori; non è quello che si propone.

Il punto di vista dello storico della scienza è diverso. Egli o ella non si occupa della natura nè ci insegna a studiarla, ma si occupa di ricostruire il pensiero e quindi il significato delle teorie scientifiche nella loro interezza, per il valore che avevano al loro tempo, ed è interessato fortemente ai legami generali della scienza con la cultura e le vicende dell'epoca.

Si può capire che parlino di cose diverse anche quando le parole usate sono simili.

1.6 Esclusività della descrizione scientifica

All'interno di ogni scala definita la scienza pretende di conoscere i fenomeni e di escluderne altri. Alla domanda dell'astrologo o dello spiritista "Come puoi escludere che esistano altri fenomeni" lo scienziato risponde che sì, è proprio il compito della scienza quello di sapere quali sono le interazioni che regolano una certa scala di fenomeni; e che, entro le approssimazioni note, le interazioni e il comportamento della materia sono questi e questi, e non c'è spazio per altro entro i limiti già detti. So che in montagna non c'è il mare; so che i virus non sono spiriti ma strutture tridimensionali; so che non c'è spazio per influenze astrali, spiritismo etc etc. So che gli atomi si combinano in un certo modo e non in altri.

In conclusione, per costituzione la scienza si limita all'immanenza sistematica. Il suo interesse non si estende a credenze non riconducibili a proprietà della materia nello spazio e nel tempo; inoltre essa esclude che vi sia posto per fenomeni fondamentali nuovi, nelle regioni spazio - temporali e di energia note e tenendo conto delle approssimazioni che le caratterizzano.

L'accusa di riduzionismo, inteso come l'intenzione di principio di ricondurre ogni fenomeno alle strutture fondamentali, è insensata: cos'altro deve fare la scienza se non cercare di spiegare il comportamento della natura mediante le strutture esistenti?

Beninteso, ció non significa che si possa ricavare la struttura di ogni fenomeno complesso a partire dalle interazioni fondamentali. Nessuno tenta di ottenere la spiegazione delle malattie degenerative dai principii della meccanica quantistica. Ha senso però ritenere che le strutture molecolari del DNA etc siano rette dalla meccanica quantistica. E la conoscenza delle proprietà del DNA a sua volta permette di stabilire molti altri fatti in biologia, e così via. Gli scienziati si basano su quel che sanno per indagare quello che non sanno, ma questo proprio non pare un pregiudizio da buttar via[3]. Forse troveranno fenomeni nuovi, per via della complessità; ma le strutture più piccole sono comprese in quelle più grandi. Il punto di vista dei ricercatori è quello sostenuto da Galileo quando dice nel Dialogo che il suo metodo è di fondare quanto si afferma su cose note in precedenza, come gli hanno insegnato i suoi maestri di matematica.

1.7 Disciplina matematizzata

Quando si pensa alla matematica si pensa subito a numeri e geometria; ma si tratta soltanto delle prime forme di matematica incontrate nella storia. La matematica consiste nello studiare strutture in cui ogni proposizione riguardanti enti matematici è connessa ad altre mediante regole consistenti. Le proposizioni iniziali, che non vengono ricondotte ad altre, sono gli assiomi; da questi e dalle regole di connessione segue l'intera struttura. La matematica non richiede che le strutture siano realizzate da elementi materiali ma soltanto che siano consistenti. Le nuove strutture che un matematico inventa prendono talvolta ispirazione dalla fisica, ma non necessariamente.

Il programma generale della fisica, sia storicamente che nella pratica quotidiana, consiste nel mettere ordine nei fenomeni osservati cercando una corrispondenza tra le entità matematiche soggetti delle proposizioni in una certa struttura e le grandezze fisiche di quella regione della natura che si sta osservando. La struttura quindi è matematica, come ha osservato Galileo quando sostiene che il libro della natura è scritto in linguaggio matematico.

La simbiosi tra matematica e fisica è eccezionalmente fertile. La relazione tra le due discipline è complessa. Può essere interessante ricordare alcuni esempi della relazione tra fisica e matematica:

- Aristotele: La geometria come modello di classificazione.
- Newton e Leibniz: l'analisi.
- Fisica classica e fisica matematica.
- Relatività e geometria differenziale.
- Cristalli e gruppi di simmetria.
- Meccanica quantistica e analisi funzionale.
- Meccanica quantistica, gruppi e rappresentazioni.
- Particelle e gruppi di Lie.

[3]Di pregiudizi la ricerca è piena, ma non corrispondono a questo banale denominatore filosofico.

- Teoria dei campi, geometria algebrica, topologia.

In questa simbiosi la relazione tra le due discipline è costruita pezzo per pezzo come prodotto di uno sviluppo storico dettato dal successo; talvolta la matematica ha preceduto la fisica, talvolta la fisica ha indotto sviluppi matematici, talvolta la fisica si è reinventata branche di matematica di cui aveva bisogno.

È singolarmente interessante che la struttura matematica che è posta in relazione biunivoca con un insieme di fenomeni naturali esista e non sia banale; per esempio, la descrizione non consiste nella rappresentazione di ciascun fenomeno (questa sarebbe una copia indistinguibile del mondo esterno), ma ha un immenso potere di semplificazione, di generalizzazione e di sintesi[4]. Le regole sono poche e semplici e permettono di descrivere e calcolare una immensità di fenomeni.

Questo straordinario successo ha fatto molto pensare. Alcuni ritengono che abbiamo avuto successo nell'applicare la logica della matematica al mondo proprio perchè ci occupiamo soltanto della parte stabile dei fenomeni che ammette regolarità suscettibili di generalizzazione matematica. C'è chi pensa che le leggi della natura a noi note esistano perché è l'unico modo (o perlomeno uno dei modi) in cui il mondo può sistemarsi in modo compatibile. Molti invece, constatando il successo, si meravigliano che la materia e le sue interazioni possano essere descritte per mezzo di un linguaggio razionale creato dalla mente; il pensiero di Einstein ad esempio partiva da quest'ultimo atteggiamento per giungere ad un panteismo alla Spinoza.

Si tratta di uno dei temi più difficili, che a parer mio possono essere affrontati efficacemente fra persone che conoscano in modo approfondito sia la matematica che la fisica e la storia delle relazioni tra le due discipline.

Da un punto di vista di discussione scolastica consiglierei di fornire esempi che chiariscano le relazioni tenendo un atteggiamento concreto, poiché altrimenti ci si può smarrire in una discussione troppo generale. La nostra cultura ama molto discutere di questioni generali mentre sono più significativi i problemi di livello un po' più basso.

1.8 Discorso sul metodo

Talvolta nelle scuole qualcuno vuole porre l'accento sul metodo scientifico e addirittura sostiene che l'essenza del valore della scienza sia nel metodo scientifico, di cui la fisica sarebbe l'esempio più evidente. Non è forse il metodo scientifico l'astrazione che fornisce l'unificazione fondamentale dell'attività di ricerca e dà alla scienza uno stato privilegiato?

Questa del metodo scientifico generale e dell'unificazione è una chimera discorsiva che non svolge alcuna funzione reale nella ricerca del nostro tempo. Penso sia un retaggio dell'approccio filosofico: non potendo cogliere il significato della scienza perchè è necessario un lungo tirocinio di metodi e linguaggi nelle varie discipline, si sostiene talvolta che la cosa interessante è il metodo e si cerca di trovarvi l'unità – e il criterio di verità – che dovrebbe caratterizzare l'attività scientifica.

Ma la scienza, per essere nobilitata, non ha bisogno di discorsi sul metodo in generale né di riconoscimenti di unità o patenti di verità; ha bisogno di essere compresa nei suoi processi reali, nei suoi metodi e nel contenuto. Nel processo di formazione delle nuove idee vi sono molte caratteristiche determinanti, per esempio l'intuizione, il modo di rappresentarsi i concetti, la fantasia, il senso della bellezza e così via. E il successo non dipende dall'adesione a regole prestabilite, né il valore di una ricerca risiede principalmente nel suo rigore; valore e successo sono determinati da una sorta di lotta per la sopravvivenza combattuta nella comunità scientifica soprattutto con le idee e gli esperimenti. Sono le spinte interne, non l'aderenza ad un metodo generale, a portare cambiamenti. La natura ha più forza critica che non le costruzioni critiche.

È certamente diverso il discorso sulla funzione del metodo se rivolto ad altri tempi, quando la scienza stentava a nascere ed essere accettata nella società; ma mi riferisco ad oggi. E del resto, se guardiamo rapidamente all'evoluzione del pensiero sul metodo scientifico, troviamo che più volte, nella storia della filosofia, furono fatti tentativi per l'unificazione del metodo e per dare una struttura unificata e gerarchica, naturalmente, alle diverse branche della scienza. Prescindiamo da Francesco Bacone, importantissimo naturalmente per diffondere una certa idea della scienza più che per l'aiuto fornito agli scienziati militanti; e da Aristotele, la cui grandissima sistemazione unificata dello scibile è tramontata da un pezzo. Un tentativo fondamentale di unificazione nel metodo e nella descrizione della conoscenza moderna era stato concepito da Cartesio (vedere il titolo del paragrafo). Ma chi troverebbe valida e utile oggi la sua sistemazione? Un'altra spinta all'unificazione del metodo scientifico venne dal tentativo, a partire dalla seconda metà dell'800, di riportare tutte le scienze del reale alla matematica e quindi alla logica. Un tentativo di gerarchizzazione che si sa come sia finito. La logica matematica ha avuto sviluppi impressionanti ma le diverse scienze non sono state per questo unificate e gerarchizzate, né, quando si è in crisi, la logica risolve i problemi. Viceversa, questo secolo ci ha mostrato un fiorire della conoscenza impensabile, ma accompagnato da una progressiva divaricazione nei metodi di ricerca. Oggi ogni scienza esprime i propri metodi di indagine, diversificati ad ogni livello; né si ritiene più che le diverse discipline e sottodiscipline debbano adattarsi ad uno stesso modello. Nessuno ritiene per esempio che la biologia sarà illegittima finché non usera' i metodi della fisica e non si riconosce né alla fisica, né all'epistemologia, né alla logica matematica o ad altro alcun valore gerarchico. I principii generici non ci servono più. Essi sono serviti a difendere queste at-

[4] Per questa ragione una teoria fisica che contiene molti parametri liberi non è considerata una buona teoria. Una teoria è tanto migliore quanto maggiore è il suo potere di previsione, e quindi quando il numero di parametri che possano essere aggiustati per accordarla ai fenomeni è ridotto al minimo. Lo studio di questi parametri è spesso il punto di partenza di ulteriori sviluppi.

tività quando la loro rilevanza era in dubbio. È perfino di poca utilità il sottolineare il carattere rinnovatore della scienza e il carattere temporaneo delle nostre sistemazioni teoriche. Oggi siamo bombardati da proposte di ogni genere che mettono in dubbio ogni principio attuale e ne suggeriscono alternative. Semmai nella fisica odierna sembra che manchino, non la fantasia nè la volontà iconoclasta, ma i fatti sperimentali per andare al di là della conoscenza oggi stabilizzata.

Sembra proprio che non basti aver buoni principii per fare progredire la scienza, anzi particolarmente oggi sembra che i buoni principii critici e le ben intenzionate regole su come la scienza debba procedere e tutta la riflessione che possiamo chiamare metascienza (epistemologia, metodologia, filosofia e storia della scienza), non abbiano di per sé potere di invenzione e di guida nella scienza, benchè ovviamente possano costituire stimolo e veicolo per idee nuove in momenti di polemica, come accadde in certi periodi critici.

Dunque il metodo scientifico in generale non esiste? Certamente, come ho detto, non esiste alcuna "lista delle regole di comportamento" che garantisca qualcosa. Intendiamoci, si deve parlare di alcune cose fondamentali: educazione alla ragione, analisi dei fatti, trattazione quantitativa, universale, ripetizione degli esperimenti e così via. Si possono elencare ed analizzare alcuni principii generali, cose importantissime e note; e soprattutto il valore della conoscenza che trae la giustificazione dal successo nell'operare sulla natura. È bene ricordarsene e parlarne. Questi principii (analisi dei fatti, conferma, etc) possono essere considerati caratteristici anche di molte attività abitualmente non considerate scientifiche in senso stretto. Ma nelle scienze vi sono, rispetto ai vecchi mestieri naturali, ben altre intensità, potenza conoscitive e operative, e più di recente anche una immensa rapidità di innovazione.

In conclusione, il discorso sul metodo sembra avere (o avere avuto) due funzioni principali. In primo luogo, inquadrare l'attività scientifica, così rilevante, negli schemi dei filosofi; in secondo luogo, aiutare ad affermare la validità della scienza o a superare difficoltà nei momenti di crisi. Questo secondo aspetto sembra essere quasi inutile oggi[5]. Quanto al primo, se a uno interessa, faccia pure; ma non riguarda l'attività scientifica.

1.9 Valore della scienza

Mi pare che la credenza che la scienza sia valida per via del metodo generale sia un pregiudizio della cultura più lontana dalla pratica scientifica. è un pregiudizio al quale la nostra cultura, in cui la scienza entra solo di striscio, è particolarmente soggetta. In fondo, si tratta di una visione riduttiva della scienza. Ritengo invece che la corretta impostazione della conoscenza diffusa delle scienze sia essenziale. Ma per i veri valori della scienza, che è conoscenza pratica e operabile.

Non dimentichiamo che la scienza è potere sulle cose, e quindi anche sulle persone. Bisogna che questo sia chiaro, senza rifiuti moraleggianti a priori, perchè la conoscenza è la base di ogni decisione. La discussione sulle applicazioni è altra cosa e viene dopo. Pertanto il rifiuto della scienza non è possibile per una società nel suo complesso. Anzi, si ritiene che sia una situazione grave se in una comunità culturale come la nostra lo sviluppo di tutte le varie discipline non è egualmente soddisfacente, e soprattutto se la scienza non ha il suo posto ed è poco legata agli altri aspetti della vita: alla scuola, alla tecnologia, al resto della cultura e alla organizzazione del Paese.

Ma la pratica della scienza ha un interesse di per sè per il suo valore intrinsecamente etico, che consiste nello spirito stesso della ricerca: l'interesse di capire la natura, di osservare, classificare e prevedere i fenomeni, l'invenzione di controlli più profondi sul lavorio della natura, l'uso di ingegnosità e tecnologie per osservare fenomeni significativi in condizioni insolite, l'uso di profonda intelligenza, la scoperta di strutture straordinariamente ricche.

Perchè ho parlato di un valore etico? Perché, nonostante le possibili distorsioni e strumentalizzazioni, gli scienziati ritengono che la scienza sia dotata di un criterio di verità; almeno questo è ciò che pensa la maggioranza di coloro che vi partecipano. è necessario, almeno in linea di principio, che i risultati vengano confermati, che le teorie vengano condivise, che i calcoli diano gli stessi risultati. Le firme sotto i lavori, almeno in linea di principio, sono messe per testimoniare che il contenuto è vero al meglio delle conoscenze dell'autore. Non basta certo il principio di autorità.

L'organizzazione della scienza è (ripeto, in linea di principio; ma non è poco) fatta in modo che le cose sono dimostrabili, la scienza è comunicabile e convince non per principio di autorità (anche se l'autorità è un aspetto importante nell'apprendimento e ha effetti notevoli nella ricerca, essa non può essere invocata). E vi è una oggettività indipendente dalle ideologie. Pazienza, inventiva e intelligenza sono qualità necessarie. Tutte queste non sono cose da poco, non sono prive di valore etico, nel mondo in cui ci troviamo.

Ma allora tutto bene nella scienza? Dobbiamo fornire agli alunni, diranno i professori, una visione arcadica della scienza?

Non è questo quello che penso. Intanto, distinguerei il valore etico della sua prassi dalla questione delle applicazioni. E poi la pratica stessa della scienza è piena di problemi. Il mio vuole essere un invito a discutere i veri problemi concreti, non le esercitazioni accademiche. La pratica scientifica è piena di fatti entusiasmanti, di errori e pregiudizi e di vicende drammatiche. Plagiando Bacone, esistono errori da analogie sbagliate, da semplicità eccessiva, da trasferimento di concetti, da generalizzazioni; errori collettivi da ideologie, o mode, distorsioni, strumentalizzazioni. Il panorama, sia interno che nei riflessi esterni, come in tutte le attivitàe umane, è complesso e pieno di chiaroscuri.

Ripeto quindi, non voglio dire che sia Arcadia. Ma gli scienziati ritengono che si debba prendere la scienza per sè e considerarla nei suoi problemi reali, sia odierni

[5]A guardare la proliferazione di maghi, indovini ed astrologhi mi vien da pensare che mi sbaglio.

che storici, sia interni che esterni alla disciplina. Vi sono state tragedie collettive, che hanno fatto precipitare le organizzazioni scientifiche nel baratro; si pensi alla scienza tedesca all'avvento di Hitler, con la cacciata degli scienziati ebrei e la distruzione della scienza tedesca, o al dramma della biologia sovietica, che ha avuto i suoi morti e i suoi perseguitati. Sono purtroppo più vivi che mai i problemi della mancanza di un'educazione scientifica e della diffusione di credenze di ogni genere prive di basi qualsiasi. Ci sono oggi i problemi del futuro, della funzione della scienza globalmente nel mondo, della correlazione con la tecnologia, con lo sviluppo industriale e culturale; ci sono i grandi nuovi sviluppi di molte scienze. Questi sono esempi di cose da approfondire. Senza una corretta prospettiva scientifica sui problemi del futuro si resta oggi sul piano personale al puro rifiuto moraleggiante e su quello collettivo allo sbando.

1.10 Conclusione

Ricapitoliamo alcune caratteristiche della fisica:

1. Conoscenza della natura;
2. Accumulazione ed evoluzione storica;
3. Relazione con la matematica;
4. Relazioni con la metascienza (epistemologia, metodologia,; filosofia e storia della scienza etc);
5. Valore educativo;
6. Relazione con la tecnologia;
7. Sociologia dell'ambiente scientifico.

Noi richiediamo troppo all'insegnamento scolastico: vorremmo poter toccare tutti questi temi e dire qualcosa di interessante su ciascuno.

A mio parere l'obiettivo formativo da raggiungere consiste nel far capire i procedimenti della fisica. Per questo è importante evitare approcci descrittivi ed evitare di dare troppa informazione [6]. Si deve invece cercare di far comprendere il suo valore attraverso la sistemazione conoscitiva di classi di fenomeni e la ricostruzione delle loro problematiche.

Naturalmente è necessario, ed è anche importante, rispondere alle curiosità degli allievi sulla fisica contemporanea. Ma per formare gli allievi non importa molto che si insegnino le ultime novità sulle particelle elementari o su qualche altro soggetto. Poiché nello sviluppo della scienza non c'è una gerarchia di bontà o di superiorità metodologica ma solo una diversità di scale fisiche, ogni suo capitolo, purché insegnato traendo le conseguenze dalle osservazioni, inducendo regole generali, deducendo da principii congetturati il confronto con i fatti osservati, sottolineando l'interesse delle strutture matematiche e dei principii, è egualmente adatto a chiarire che cosa sono le scienze.

[6] Approfitto per un inciso di un certo interesse per chi insegna: il pericolo rappresentato dall'uso non critico, nella scuola, di esperimenti virtuali, cioé simulazioni al calcolatore di comportamenti di sistemi fisici. Un calcolatore è progettato e predisposto da persone: il suo insegnamento è, per certi versi, paradossalmente più simile alla risoluzione di parole incrociate che non alla ricerca sulla natura. Infatti si sa che il calcolatore contiene una logica umana e che l'esperimento virtuale è più o meno al livello dell'utente, mentre nel caso della ricerca questo non è per niente sicuro. Ciò può condurre ad un'immagine travisata della ricerca. Consiglierei quindi sí di usare i calcolatori, ma di tener presente questo. Certe volte una esperienza diretta , magari molto semplice come una pesata, può insegnare di più che un programma di simulazione.

Chapter 2

B- Fisica newtoniana e sistema del mondo

2.1 Introduzione

È utile e può interessare molto l'applicazione delle equazioni della gravità newtoniana al "sistema del mondo", cioé al sistema solare. Infatti questo è il sistema fisico al quale Newton applica la propria teoria con risultati controllabili.

Il disegno è il seguente. Si considerano valide le leggi di Keplero, considerate come fenomenologia del sistema solare. Si ricava quindi che l'accelerazione centripeta è inversamente proporzionale alla distanza del pianeta dal Sole. Si ripetono le operazioni per la Terra.

Si giunge quindi a dare una legge matematica di dipendenza inversa dalla distanza dell'attrazione tra corpi celesti. Per il principio di azione e reazione, la forza deve essere proporzionale al prodotto delle masse. Si giunge dunque alla gravità newtoniana.

Questo schema permette di comprendere che il contenuto della fisica non sta nell'enunciare principi ma nel ricercare stabilità di fenomeni, regolarità e quindi leggi generali.

È consigliabile inquadrare storicamente dati e teorie. Gli appunti che seguono sono soltanto una traccia e possono essere ampliati a gusto dell'insegnante.

2.2 Conoscenze antiche sul sistema solare

Consideriamo il sistema solare e in particolare le distanze dei pianeti dal Sole. Esprimiamo queste distanze in unità di distanza Terra - Sole. Aristarco di Samo (circa 310 - 230 a.C.) aveva ottenuto per la distanza Terra - Luna il valore di 10 diametri terrestri (il valore moderno è 30) e aveva stimato la distanza Terra - Sole eguale a circa 20 distanze Terra - Luna, 200 diametri terrestri. Ma per conoscere il valore del diametro terrestre bisogna attendere la misura di Eratostene (276 - 195 a.C.) che valuta la circonferenza a 250 000 stadii, valutazione abbastanza precisa se lo stadio corrisponde a circa 160 metri (ma lo stadio olimpico greco era di 600 piedi, probabilmente inntorno a 180 metri). Ciò portava la stima di Aristarco della distanza Terra - Sole a circa 2,6 milioni di chilometri.

Ipparco (attivo 160 - 130 a.C.) corresse la valutazione portandola a 630 diametri terrestri (circa 8 milioni di chilometri). La misura corrisponde al 5,4 % del valore moderno (11700 diametri, circa 150 milioni di chilometri); l'errore degli astronomi antichi era dovuto alla grande difficoltà della misura perche' il triangolo Terra - Luna - Sole ha l'angolo al Sole di circa 8' 5" di arco.

Aristarco, che riteneva che la Terra girasse intorno al Sole, aveva dedotto che la sfera delle stelle era a distanza incommensurabile. Ma successivamente la concezione che la Terra fosse al centro dell'universo tolse l'unica base topografica che rendesse possibile valutare le distanze dei pianeti. Si ricorreva ad altre considerazioni, come i contatti tra gli strati sferici che portavano i pianeti, per valutarne le distanze.

Copernico (1473 - 1543), riprendendo la concezione di Aristarco del Sole al centro dell'universo, usò l'orbita della Terra come base e valutò che le distanze dal Sole di Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, in unità di distanza Terra - Sole, fossero rispettivamente 0,38; 0.72; 1.52; 5.22; 9.17; rapporti molto vicini a quelli attuali della Tabella A. (Copernico usava per la distanza Terra - Sole il valore stimato dagli antichi, ma questa è una questione diversa.) I valori usati da Newton erano quelli, misurati con maggiore precisione da Tycho Brahe nella seconda metà del '500.

2.3 Dati sulle orbite dei pianeti

Si consiglia di presentare brevemente le figure di Copernico, Keplero e Brahe e di illustrare rapidamente la loro ricerca. Vedere p.es. [1], [2]. Le leggi che Keplero (1571 - 1630) dedusse dalle osservazioni planetarie di Tycho Brahe (1546 - 1601) sono le seguenti:

1. Ogni pianeta descrive un ellisse e il Sole è in uno dei fuochi.

2. Il raggio vettore tra il Sole e il pianeta descrive aree proporzionali ai tempi.

3. Il quadrato del periodo di ogni pianeta è proporzionale al cubo dell'asse maggiore dell'orbita.

Nella Tabella A sono riportati i valori dei semiassi maggiori r_{PS} delle orbite ellittiche dei pianeti intorno al Sole in unità del semiasse dell'orbita terrestre r_TS, i periodi dei pianeti T in unità del periodo della Terra T_T (anno) e le eccentricità delle orbite. Urano, Nettuno e Plutone sono separati perchè non erano noti al tempo di Newton.

Tabella A
Pianeti
Semiassi maggiori, periodi ed eccentricità

pianeta	r/r_{TS}	T/T_T	e
Me	0.3871	0.24085	0.206
Ve	0.7233	0.61521	0.007
Te	1	1	0.017
Ma	1.5237	1.8809	0.0931
Gi	5.2028	11.862	0.048
Sa	9.5388	29.458	0.056
Ur	19.182	84.013	0.047
Ne	30.058	164.79	0.009
Pl	39.518	248.43	0.249

Le osservazioni precise di Brahe che Keplero analizzò per lunghi anni si riferivano a Marte. Fu una circostanza fortunata, perchè l'orbita di Marte ha un valore relativamente alto dell'eccentricità e Keplero potè rendersi conto che il pianeta non si muove su una orbita circolare.

Poichè le orbite hanno piccole eccentricità potremo considerare le orbite come circolari e prendere come distanza fissa tra il pianeta e il Sole la misura del semiasse maggiore. Questa approssimazione (che Newton non fece)[1] permette di semplificare la trattazione. Il caso effettivo dell'orbita ellittica richiede una trattazione geometrica complessa (come fece Newton) o il calcolo infinitesimale.

2.4 Prima e seconda legge di Keplero

Abbiamo fatto l'approssimazione di orbita circolare. Allora, per la prima legge di Keplero, il Sole si trova al centro dell'orbita (punto in cui i due fuochi di un'ellisse coincidono quando l'ellisse degenera in un cerchio). Per ogni pianeta r è costante.

Per la seconda legge di Keplero la velocità ha grandezza costante: Infatti in un tempo t il pianeta percorre un arco di cerchio

$$c(t) = r\varphi(t)$$

dove $\varphi(t)$ è l'angolo di cui si sposta il raggio vettore nel tempo t; l'area spazzata dal raggio è

$$A = r^2\varphi(t)/2$$

e per la seconda legge di Keplero

$$r^2\varphi(t)/2 = Kt$$

con K costante; quindi

$$\varphi = 2K\,t/r^2. \tag{2.1}$$

Poichè K e r sono costanti, $\varphi(t)$ cresce linearmente nel tempo. Ne segue che la grandezza della velocità è costante. In tabella B è mostrato per ogni pianeta il valore della velocità in chilometri al secondo.

Tabella B
Velocità dei pianeti

pianeta	v (Km/s)
Me	47.8
Ve	35.0
Te	29.8
Ma	24.2
Gi	13.1
Sa	9.7
Ur	6.8
Ne	5.4
Pl	4.7

2.5 Terza legge di Keplero

Dalla Tabella A è facile verificare la terza legge Keplero: il rapporto tra la distanza al cubo e il periodo al quadrato è costante. Il confronto è mostrato nella Tabella C.

Tabella C
Legge di Keplero

pianeta	$(r/r_{TS})^3$	$(T/T_T)^2$
Me	5.8006×10^{-2}	5.8009×10^{-2}
Ve	0.37840	0.37848
Te	1	1
Ma	3.5375	3.5378
Gi	1.4084×10^2	1.4071×10^2
Sa	8.6792×10^2	8.6777×10^2
Ur	7.0580×10^3	7.0582×10^3
Ne	2.7157×10^4	2.7156×10^4
Pl	6.1714×10^4	6.1717×10^4

La verifica della legge di Keplero è molto soddisfacente.

2.6 Accelerazione centripeta

Entra in scena la fisica newtoniana. Consideriamo una massa puntiforme che percorre una traiettoria qualunque. Conviene introdurre il concetto di raggio di curvatura in un punto: è il raggio del cerchio che

[1] È bene ricordare che Newton risolse il ben più complicato caso di orbite ellittiche con eccentricità non nulla. In questo caso generale l'accelerazione totale è diretta verso il Sole ma non coincide con l'accelerazione centripeta. Una parte dell'accelerazione è radiale e la velocità lungo l'orbita non è costante. Ci rendiamo conto di quali difficoltà Newton abbia dovuto superare.

meglio approssima la traiettoria intorno a quel punto. Sia $\mathbf{v}$ il vettore[2] velocità del punto materiale.

Bisogna introdurre l'accelerazione come limite della variazione di velocità nel tempo

$$\mathbf{a} = \lim \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

e separare l'accelerazione in una parte $\mathbf{a}_t$ che cambia il modulo della velocità ma non la sua direzione e in una parte $\mathbf{a}_c$ che cambia la direzione della velocità:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c.$$

L'accelerazione tangenziale $\mathbf{a}_t$ è tangente all'orbita e cambia la grandezza della velocità. L'accelerazione centripeta $\mathbf{a}_c$ è diretta verso il centro di curvatura della traiettoria. In un punto in cui il corpo ha velocità $\mathbf{v}$ e il raggio di curvatura dell'orbita è r, la sua grandezza è

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \tag{2.2}$$

Nel caso delle traiettorie circolari r è il raggio costante dell'orbita.

2.7 L'accelerazione centripeta è funzione della distanza dal Sole

Nell'approssimazione di traiettoria circolare r è costante. Dalla (2.1) la velocità angolare $d\varphi/dt$ è costante; quindi anche la velocità $v = rd\varphi/dt$ è costante. Quindi (nell'approssimazione circolare) la velocità di ogni pianeta lungo l'orbita è costante e così l'accelerazione tangenziale è nulla. Nella stessa approssimazione l'accelerazione centripeta è diretta verso il Sole (che è al centro dell'orbita), ed è costante per ogni pianeta. Poichè per ogni pianeta

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

si ha

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi)^2 r}{T^2} = \frac{(2\pi)^2}{r^2}\frac{r^3}{T^2}$$

e poichè per la legge di Keplero r^3/T^2 è costante si ha la dipendenza dell'accelerazione dalla distanza del pianeta dal Sole:

$$a_c = \frac{C_S}{r^2}. \tag{2.3}$$

Dunque l'accelerazione centripeta di ogni pianeta è inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal Sole. La costante C_S caratterizza l'intensità dell'attrazione solare e si ottiene dai parametri dell'orbita di un pianeta qualsiasi, p.es. la Terra.

[2] In queste letture i vettori tridimensionali sono indicati in grassetto.

La distanza Terra - Sole è di 1.50×10^{11} metri, la velocità (media) della Terra nella sua orbita è di 29.8 chilometri al secondo; l'accelerazione centripeta della Terra verso il Sole è data da:

$$a_T = \frac{v_T^2}{r_{TS}} = 5.92 \times 10^{-3}\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{2.4}$$

Si ottiene la costante C_S della (2.3):

$$C_S = a_T r_{TS}^2 = v_{TS}^2 r_{TS} = 1.33 \times 10^{20}\mathrm{m^3\ s^{-2}}. \tag{2.5}$$

2.8 Forze

La dinamica newtoniana non contiene soltanto distanze, velocità ed accelerazioni. Contiene anche massse e forze. Per esempio, il principio di azione e reazione non vale per le accelerazioni ma per le forze, come si vede con esperimenti con carrelli, masse e molle. Le accelerazioni sono diverse e anzi, a parità di molla, inversamente proporzionali ai pesi delle masse coinvolte. Le quantità che sono uguali, nel principio di azione e reazione, sono i prodotti delle accelerazioni per le masse. Si definiscono dunque le forze come

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.6}$$

equazione fondamentale della dinamica.

2.9 L'attrazione solare

Poichè l'attrazione centripeta del Sole è proporzionale a $1/r^2$, eq. (2.3), segue dalla legge generale della dinamica (2.6) il Sole esercita quindi su ogni pianeta una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Invece non vi è forza nella direzione del moto circolare del pianeta perchè la sua velocità è costante (stiamo usando la seconda legge di Keplero nell'approssimazione di orbita circolare).

Inoltre la forza di gravità deve essere proporzionale alla massa del pianeta; ciò è richiesto dalla eq. (2.3) dove si vede che l'accelerazione non dipende dalla massa del pianeta. Questo punto è importantissimo e ci ritorneremo.

Newton non si pronuncia sulle ragioni di questa forza. In una lettera a Cotes dirà "Hypotheses non fingo". Le pagine finali della seconda edizione dei Principia dicono [3]:

> Finora abbiamo spiegato i fenomeni del cieli e del mare con il potere della Gravità, ma non abbiamo ancora assegnato le cause di questo potere. Questo è certo, che deve procedere da una causa che penetra fino ai veri centri del Sole e dei Pianeti senza soffrire la menoma diminuzione della sua forza; che opera, non in conseguenza della quantità delle superfici delle particelle su cui agisce, (come fanno abitualmente le casuse meccaniche) ma

in conseguenza della quantità di materia solida che esse contengono, e propaga la sua virtù in tutte le direzioni a distanze immense. La gravitazione che tende al Sole è composta dalle gravitazioni che tendono verso le molte particelle di cui il corpo del Sole è composto; e nell'allontanarsi dal Sole, diminuisce accuratamente in proporzione duplicata delle distanze, fino all'orbe di Saturno, come appare evidente dalla quiescenza degli afelii del Pianeta [3]; no, ancora fino ai più remoti afelii delle comete, se quegli afelii sono anche essi quiescenti. Ma finora non sono stato in grado di scoprire la causa di queste proprietà della gravità dai fenomeni e non faccio ipotesi. Perché, qualsiasi cosa che non sia stata dedotta dai fenomeni deve essere chiamata una ipotesi; e le ipotesi, sia metafisiche che fisiche, se relative a qualità occulte o meccaniche, non hanno posto nella filosofia sperimentale. In questa filosofia particolari proposizioni sono indotte dai fenomeni e dopo sono rese generali mediante induzione. Così sono state scoperte l'impenetrabilità, la mobilità, e la forza impulsiva dei corpi. E per noi è sufficiente che la gravità esista realmente e agisca secondo le leggi che abbiamo esposto, e che serva pienamente a render conto di tutti i moti dei corpi celesti e del nostro mare.

E adesso potremmo aggiungere qualcosa a proposito di un qualche sottilissimo Spirito,[4] che pervade e resta nascosto in tutti i corpi massivi; per la cui forza ed azione, le particelle dei corpi si attraggono a breve distanza e stanno attaccate se contigue[5]; e i corpi elettrici operano a distanza maggiore, attraendo o respingendo i corpuscoli vicini; e la luce è emessa, riflessa, rifratta, inflessa, e scalda i corpi; e ogni sensazione è eccitata, e le membra dei corpi animali si muovono al comando della volontà, cioé, per le vibrazioni di questo Spirito, mutualmente propagate lungo i filamenti nervosi solidi, dall'organo esterno di senso fino al cervello, e dal cervello verso i muscoli. Ma queste sono cose che non possono essere spiegate in poche parole, né possediamo la sufficienza di esperimenti che è richiesta per determinare e dimostrare accuratamente le leggi con le quali questo spirito elettrico ed elastico opera.

[3]Si tratta della costanza della direzione dell'asse maggiore dell'orbita.

[4]Spirito è usato nel senso di forza, come appare dalla discussione successiva.

[5]Si tratta della coesione.

2.10 La forza è proporzionale alla massa del Sole

Si tratta ancora di stabilire che la attrazione gravitazionale del Sole è proporzionale alla massa del Sole. Per ottenere questo risultato si può usare il principio di azione e reazione tra un pianeta e il Sole. Newton postulò che la gravitazione fosse una forza universale che si esercita tra tutte le masse. Dunque un pianeta esercita una forza di attrazione sul Sole. Da quanto detto finora segue allora che la forza del pianeta sul Sole deve essere proporzionale alla massa del Sole. Ma il principio di azione e reazione impone che la forza esercitata dalla Terra sul Sole sia uguale alla forza esercitata dal Sole sul pianeta. La forza quindi deve essere proporzionale ad ambedue le masse.

2.11 L'attrazione terrestre

Consideriamo il sistema Terra, corpo sulla Terra, Luna. (Si noti che per questo si deve dimostrare che la forza con cui un corpo a simmetria sferica ne attrae un altro è la stessa che se la massa del corpo fosse concentrata nel suo centro. Newton l'ha dimostrato nel suo libro.)

Il raggio della Terra R_T, la distanza Terra - Luna r_{TL} e il periodo di rivoluzione (siderale) della Luna intorno alla Terra sono dati da:

$$\begin{aligned}
R_T &= 6.378 \times 10^6 \,\text{metri}, \\
r_{TL} &= 3.844 \times 10^8 \,\text{metri} \simeq 60\, R_T, \\
T &= 27.322 \,\text{giorni}.
\end{aligned}$$

Quindi la velocità con cui la Luna percorre l'orbita (circolare) è

$$v = \frac{2\pi r_{TL}}{T} = 1.023 \,\text{Km s}^{-1}.$$

Controlliamo che le accelerazioni centripete siano inversamente proporzionali al quadrato dei raggi. Ciò serve a stabilire che il sistema Terra - Luna ubbidisce alle stesse leggi del sistema Sole - pianeti. L'accelerazione centripeta sulla superficie terrestre è

$$g = 9.80 \,\text{m s}^{-2}.$$

L'accelerazione cui è soggetta la Luna è data da

$$a_{TL} = \frac{v^2}{r_{TL}} = 2.72 \times 10^{-3} \text{ms}^{-2}.$$

Il rapporto tra le due accelerazioni è dunque

$$\frac{g}{a_{TL}} = 3.60 \times 10^3$$

da confrontare con

$$(\frac{r_{TL}}{R_T})^2 = 3.63 \times 10^3.$$

Quindi il sistema Terra - Luna ha la stessa legge del sistema dei pianeti. Possiamo rappresentare l'accelerazione centripeta che la Terra imprime ad un corpo a distanza r analogamente alla (2.3):

$$a(r) = \frac{C_T}{r^2} \qquad (2.7)$$

Per calcolare C_T usiamo il sistema Terra - Luna. Si ha

$$C_T = a_{TL} r_{TL}^2 = v_L^2 r = 4.015 \times 10^{14} \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2} \qquad (2.8)$$

da confrontare con C_S, eq. (2.5):

$$\frac{C_S}{C_T} = 3.313 \times 10^5 \qquad (2.9)$$

Questo è dunque il rapporto tra la massa del Sole e la massa della Terra.

2.12 La costante G di Newton

La quantità C è, per ogni corpo, una misura della sua capacità di attrazione gravitazionale. La dimensione di C, come si vede dalle eqq. (2.5, 2.8), è $[\mathrm{l}^3\ \mathrm{t}^{-2}]$. D'altra parte sappiamo che la quantità C è proporzionale alla inerzia del corpo (alla massa inerziale). Potremmo quindi considerare la quantità C come la massa inerziale, e misurare la massa in unità $\mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$ Ciò non contrasta con niente. Naturalmente anche la massa che compare nell'equazione fondamentale della dinamica (2.6) va sostituita col corispondente C del corpo soggetto alla forza[6].

Questa possibilità, cioè l'uso della legge universale di attrazione per definire l'unità di massa come derivata dal metro e dal secondo, non e ' la strada che è stata usata. Un corpo di massa di un Kg avrebbe una "massa" $C = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$, come vedremo nella prossima lettura. Una unità scomoda per la vita quotidiana; dovremmo comperare il pane in pezzi da 10 pico metri^3 secondi^{-2}, corrispondenti a circa 150 grammi.

Si preferisce definire una diversa, opportuna, unità di massa (il chilogrammo Kg o il grammo g) e addirittura assegnare alla massa una dimensione indipendente da lunghezze e tempi[7]. Si introduce quindi una costante universale di proporzionalità ponendo per ogni corpo

$$C = Gm \qquad (2.10)$$

Dalla dimensione di C segue che la quantità G ha la dimensione

$$[G] = [\mathrm{l}^3\ \mathrm{t}^{-2}\ \mathrm{m}^{-1}]. \qquad (2.11)$$

G è chiamata la costante di Newton.

[6] Vedere la lettura seguente in questo corso, dedicata alla questione delle dimensioni.

[7] Non si sfrutta dunque l'occasione fornita dalla gravità universale per dimiuire il numero di dimensioni indipendenti. Questa possibilità viene invece spesso usata nella teoria della Relatività Generale. è una utile lezione sul problema del numero di dimensioni indipendenti delle grandezze fisiche, vedere la lettura seguente.

2.13 Pesare la Terra

Per ottenere il valore di G occorre misurare l'attrazione tra due masse note in termini di una massa campione (p.es. 1 Kg). Questo obiettivo può essere raggiunto con varii metodi che mettono a confronto l'attrazione gravitazionale di un corpo di massa nota con l'attrazione della Terra. Esponiamo il metodo usato da von Jolly (Munich 1881) per il quale è necessaria una bilancia di alta precisione[8].

Si mettano sui due piatti di una bilancia due masse campione di valore eguale noto, m_s a sinistra e m_d a destra, che si equilibrano entro la sensibilità della bilancia.[9] Adesso poniamo sotto il piatto sinistro una massa nota più grande possibile, M. Si avrà cura che la forma sia sferica, in modo che l'attrazione che essa esercita sulla massa nel piatto al di sopra si possa calcolare come se la grossa massa fosse puntiforme e la distanza si possa calcolare dal suo centro.

Per riequilibrare la bilancia bisognerà aggiungere una massa supplementare m' all'altro piatto.

Sia d la distanza tra il centro di M e la massa m_s. Scriviamo le equazioni che regolano l'eqilibrio tenendo conto dell'attrazione di M su m_s. Trascureremo invece l'attrazione di M sui due piatti e sulla massa di destra m_d.[10]

Poniamo per semplicità $m_s = m_d = m$ supponendo che la bilancia sia costruita bene. La forza di gravità impressa su braccio di sinistra alla massa m dalla Terra e dalla massa M è

$$F_s = m a_s = m \left(\frac{C_T}{R_T^2} + \frac{C_M}{d^2} \right). \qquad (2.12)$$

A destra agisce invece la forza

$$F_d = \big(m + m'\big) \big(\frac{C_T}{R_T^2} + \frac{C_T}{R_T^2} \big). \qquad (2.13)$$

Le due forze si fanno equilibrio, $F_s = F_d$. Dalle eqq. (2.12) e (2.13), ricordando l'eq. (2.10), noti m, m', M, d e il raggio della Terra R_T si ottiene M_T :

$$M_T = M\, \frac{m}{m'}\, \big(\frac{R_T}{d}\big)^2.$$

Il risultato delle misure dà per la massa della Terra il valore di

$$M_T \;=\; 5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{Kg}. \qquad (2.14)$$

Se $m = 1$ Kg, se la massa aggiuntiva m' è di 33 tonnellate (corrispondente ad una sfera di ferro di raggio di 1 metro) e se $d =$ 5 metri la attrazione della sfera sarà compensata da una massa m' il cui valore sarà

[8] La prima determinazione è dovuta a Cavendish (1731 - 1810) che usò nel 1798 una bilancia di torsione per misurare l'attrazione tra due masse fisse e un equipaggio con due masse mobili appese ad un filo.

[9] Se la bilancia è costruita male le due masse possono essere diverse.

[10] Domanda: paragonare gli errori dovuti a queste due approssimazioni.

$$m' = 0.89 \times 10^{-8} \text{ Kg}.$$

La bilancia deve avere bracci abbastanza lunghi da trascurare l'azione di M sul piatto destro e abbastanza forti da reggere 1 Kg; al tempo stesso deve essere sensibile alla variazione di peso di $m' = 10^{-9}$ Kg. Si capisce che quest'esperienza non è facile da realizzare.

2.14 Valore di G e massa del Sole

Il valore di G si trova conoscendo C_T, eq. (2.8) e M_T, eq. (2.14):

$$G = \frac{C_T}{M_T} = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Kg}^{-1}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-2}. \tag{2.15}$$

Possiamo adessso ricavare la massa del Sole dal valore di C_S, eq. (2.5):

$$M_S = \frac{C_S}{G} = 1.99 \times 10^{30}\,\text{Kg}. \tag{2.16}$$

Si noti che finora non abbiamo determinato le masse degli altri pianeti. Il metodo più semplice è di misurare distanze e periodi dei loro satelliti in modo da ottenere il valore di C_P. [11]

[11] Vedere [4].

Chapter 3

C- Dimensioni e unità di misura

3.1 Introduzione

Le grandezze misurate in fisica sono rappresentate da un numero puro seguito dal campione di misura. Il numero esprime il rapporto tra la grandezza misurata e la grandezza del campione, che ha quindi la funzione di unità di misura. Il campione di misura definisce una dimensione (nelll'esempio che segue, lunghezza) che viene attribuita alle grandezze in questione anche se l'unità di misura può variare (metro, yarda, piede, trabucco etc.). Il problema al quale siamo interessati è il seguente: quante sono le dimensioni indipendenti necessarie per descrivere le differenti parti della fisica (meccanica, elettromagnetismo, etc.)?

Infatti esiste spesso confusione sul numero di dimensioni indipendenti necessarie nell'ambito di una data teoria. La confusione, come vedremo, è frequente, dato che si tratta di convenzioni che dipendono dalla scelta delle leggi della fisica considerate universali e dal modo in cui sono scritte, mentre invece spesso la questione delle dimensioni viene considerata fondamentale, dettata da ragioni inderogabili, e viene sostenuta da convenzioni internazionali e da pubblicazione di leggi e regolamenti sulle gazzette uficiali. Vale dunque la pena di guardare la questione da vicino.

In principio ogni misura che abbia bisogno di specificare una unità campione richiede una sua dimensione. Per esempio, si può attribuire una dimensione alle lunghezze misurate a Cavoretto con un metro che sta a Cavoretto e un'altra dimensione alle lunghezze misurate a Moncalieri con un metro di Moncalieri. Si può inoltre pensare che la misura di una lunghezza qui in una certa direzione non sia paragonabile con la misura della lunghezza qui lungo un'altra direzione. Cosi si dovrebbe introdurre la dimensione "lunghezza misurata qui nella direzione della Stella Polare" e questa misura avrebbe una dimensione diversa da altre misure di lunghezza altrove e/o in altre direzioni e/o con altre velocità. Inoltre, misure fatte in tempi diversi dovrebbero avere dimensioni diverse.

L'unificazione delle misure e la diminuzione delle dimensioni indipendenti sono conseguenze delle leggi della fisica che vengono considerate fondamentali e universali nell'ambito di una teoria.

Cosi l'introduzione di una dimensione generale di lunghezza, senza specificare il luogo nè l'orientazione né la velocità, è basata su una legge di invarianza che riguarda la struttura stessa dello spazio: si dichiara che la lughezza di riferimento può essere spostata da un luogo all'altro e puntata in diverse direzioni in differenti istanti di tempo, o mossa a velocità costante, ma è sempre eguale a se stessa. Si stipula dunque la omogeneità e isotropia dello spazio, cioè la congruenza dei campioni di lunghezza per traslazioni nello spazio, rotazioni, trasformazioni a velocità costante e spostamenti dell'istante di tempo in cui è effettuata la misura. Ciò permette che misure di lunghezza fatte in luoghi differenti ed in direzioni differenti a tempi diversi siano espresse con la stessa dimensione e si perviene a definire la dimensione di lunghezza in generale. L'equivalenza tra misure in tempi diversi introduce anche il concetto di omogeneità nel tempo. [1]

Una situazione analoga si ha nel definire una dimensione di tempo. Un fenomeno definito "periodico" (cioè che appare ripetersi, per esempio l'oscillazione di un pendolo) viene utilizzato per segnare intervalli di tempo che quindi hanno la stessa dimensione e misura. La convenzione della equivalenza tra orologi in punti differenti, orientati diversamente, in istanti diversi, è alla base della definizione di dimensione di tempo.

Cosi per la massa. Si possono misurare rapporti di massa con le bilance. Si introduce la dimensione di massa, indipendentemente dal luogo e dal tempo. Se la bilancia fosse universale, si potrebbe definire la massa con la misura dell'angolo di cui il suo ago si scosta dalla posizione di equilibrio e la dimensione di massa sarebbe eguale alla dimensione di angolo [2]; ma lo spostamento

[1] Si può essere tentati di porre la questione se ogni legge fisica sia una stipulazione, cioé una convenzione. La risposta è negativa. Se così fosse la fisica sarebbe soltanto un'opinione (ricordare che la fisica non è una opinione è importante). Il numero di stipulazioni permesse non copre tutte le leggi della fisica, tutt'altro. Ad esempio la legge di Newton, $F = ma$, con F forza gravitazionale, non è una convenzione e ha un contenuto poiché la forza gravitazionale è una funzione della distanza spaziale e le accelerazioni si definiscono indipendentemente (dopo aver stipulato le convenzioni sullo spazio e il tempo). Quanto alla scelta delle stipulazioni iniziali, molto è stato detto sui criteri di semplicità e generalità. Per quanto concerne la convenzionalità della fisica, la cui portata alcuni tentono a generalizzare, è importante chiedere di produrre esplicitamente convenzioni alternative. Le convenzioni hanno il valore di fatti stabiliti quando sono praticamente uniche e su di esse si basa una teoria complessa che a sua volta è la base di ulteriori conoscenze e conferme sperimentali. Per la questione del convenzionalismo si veda ad esempio [5], [6].

[2] Che è adimensionale se l'angolo si misura come rapporto tra porzione di circonferenza e raggio

dell'ago non è un dato universale.

Impariamo dunque un principio generale di grande portata: le leggi fisiche che vengono considerate come universali abbassano il numero di dimensioni indipendenti. è ben noto che nell'Eden Eva e Adamo, che peraltro conducevano una vita beata, non conoscendo leggi generali della fisica avevano un numero infinito di dimensioni indipendenti. Quando l'elettricità era prodotta per strofinio di pelli di gatto, a misura della carica elettrica si doveva introdurre la pelle media del gatto medio.

Insomma: il numero di dimensioni di cui c'è bisogno dipende dal numero di leggi fisiche considerate così universali da permettere di accomunare fenomeni che senza queste leggi sarebbero indipendenti. La discussione sulle misure di lunghezza ha fornito un esempio chiaro.

Accade forse per le dimensioni in fisica quello che i glottologi dicono sia accaduto per i linguaggi: che i linguaggi primitivi avessero parole molto specifiche e possedessero declinazioni e coniugazioni che davano alla singola parola un significato ancora più determinato.

3.2 La forza e la legge di Newton della dinamica

Supponiamo di avere stabilito tre dimensioni fondamentali: lunghezza (dovunque e comunque orientata in qualsiasi istante), tempo (dovunque e comunque orientato sia lo strumento in qualsiasi istante) e massa (dovunque e comunque orientato sia lo strumento che le paragona in qualsiasi istante).

La meccanica ha ancora bisogno della forza. Se la forza fosse misurata solo dall'effetto di una molla sul dito, bisognerebbe introdurre la dimensione indipendente di forza; o magari la dimensione di forza si potrebbe rapportare allo spostamento del dito e avrebbe quindi una dimensione di lunghezza. Ma le dita che esistono nel mondo sono molto diverse tra loro, è difficile esprimere una universalità (analogamente al caso dell'angolo dell'ago della bilancia).

Consideriamo invece la legge di Newton della dinamica che stabilisce proporzionalità tra la forza applicata, la massa e l'accelerazione. Supponiamo che sia valida universalmente. Ci sono modi alternativi di introdurre dimensioni. Scrivere la legge di Newton come segue:

$$\mathbf{F} = \varepsilon m\mathbf{a}. \tag{3.1}$$

Possiamo distinguere tre possibilità:

1. ε=1. è la soluzione adottata universalmente; per mezzo della (3.1) con $\varepsilon = 1$ si misura la forza F in unità di $[\mathrm{mlt}^{-2}]$:

   $$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{3.2}$$

   Per esempio, la forza è misurata in chili $\times$ metri $\times$ secondi^{-2}.

2. $\varepsilon = 1$ ma espresso come rapporto tra due unità di misura diverse con la stessa dimensione. Serve ad introdurre una unità pratica di forza diversa da quella meccanica (Newton). è quanto si fa se si vuole prendere la forza peso di 1 Kg $\equiv$ 9.8 Newton (oggi proibito per non confondere le idee, ma è quanto fanno le bilance meccaniche a molla o elettriche, da non confondere con quelle meccaniche a piatti che misurano rapporti di masse e non di forze). Con

   $$\varepsilon = 1 = \frac{1\mathrm{Kgp}}{9.8\ \mathrm{Newton}}$$

   l'eq. (3.1) si leggerebbe

   $$\mathbf{F} = \frac{1\mathrm{Kgp}}{9.8\ \mathrm{Newton}} m\mathbf{a} \tag{3.3}$$

   e misurando masse in Kg, lunghezze in metri e tempi in secondi, la forza sarebbe espressa in Kgp$\equiv$ 9.8 Newton.

   Questa situazione è un esempio di cambiamento di unità di misura, del tutto tollerabile e utile per ragioni pratiche. L'utilità di tale procedimento fa sì che talvolta si passi al'estremo di definire una nuova dimensione quando non ce n'è bisogno, vedi il prossimo caso.

3. Assegnamo una dimensione a ε nella (3.1) in modo che la dimensione della forza sia svincolata da masse, lunghezze e tempi. ε verrebbe chiamata la "costante universale (assoluta) di forza del vuoto". In pratica ciò equivale al caso precedente, considerato però non un cambiamento di unità ma l'introduzione di una dimensione per la forza (il Kg peso) indipendente dal Newton. Il vuoto avrebbe una costante assoluta di 1 Kgp /9.8 Newton, Newton e Kgp considerati di dimensione indipendente.

   Ciò non si fa. Sarebbe sensato se la equazione (3.1) non fosse applicabile universalmente, per esempio se nella (3.1) si dovesse introdurre un diverso valore ε a seconda del mezzo in cui avviene il movimento. Sappiamo che non è così; eventuali resistenze del mezzo si rappresentano in altro modo e l'eq. (3.1) ha un valore universale.

   Una persona che volesse utilizzare il Kg peso come unità di peso, e che non avesse idee chiare sulla validità della (3.2), potrebbe seguire questa procedura e introdurre una dimensione della forza indipendente da quella delle tre altre dimensioni meccaniche. Gli resterebbe da giustificare l'introduzione di una costante universale dimensionale (cosa non proibita, ripetiamo, è quel che si fa di solito per la gravità e l'elettrostatica come vedremo, ma sovrabbondante e contraria allo spirito delll'uso delle leggi universali per diminuire le dimensioni).

3.3 La legge di gravità

Passiamo a considerare la forza gravitazionale con cui si attraggono due corpi di masse inerziali[3] m_1, m_2 (scriviamo solo il modulo della forza per semplicità):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{3.4}$$

Newton propose come del tutto naturale la forma (3.4) in cui le quantità m_i che appaiono sono le stesse masse inerziali che compaiono nell'eq. (3.2) (vedere [7]).

Naturalmente la scelta fatta da Newton costituisce un principio fisico denso di conseguenze[4]. In generale si potrebbe concepire che la massa che compare nella legge di gravità (3.4) (massa gravitazionale) e quella che compare nella legge della dinamica (3.2) (massa inerziale) siano due diverse grandezze fisiche attribuite ad ogni corpo. Basta pensare alla legge che Coulomb (1736 - 1806) stabilì nel 1785, che ha una dipendenza dalla distanza uguale a quella della gravitazionale; le cariche elettriche non sono proporzionali alle masse dei corpi.

Possiamo ripetere le considerazioni sviluppate a proposito di (3.1). Come è noto, nella (3.4) G è la costante universale di Newton. Se misuriamo le masse in Kg, le lunghezze in metri e il tempo in secondi, la costante G vale

$$G = 6.7 \times 10^{-11}\mathrm{Kg}^{-1}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}.$$

In questo caso viene usata la strategia n. 3 della discussione a proposito della (3.2). La costante G ha un ruolo analogo a ε nel caso 3, permette che si definiscano dimensioni della massa indipendenti da quelle di spazio e di tempo.

Una strategia alternativa consiste nel porre $G = 1$. Ciò sarebbe possibile perchè la (3.4) è una legge fondamentale e la quantità G è, per quel che ne sappiamo oggi, una costante universale. In tal caso la forma della legge della forza gravitazionale sarebbe

$$F = \frac{M_1 M_2}{r^2}. \tag{3.5}$$

e le quantità M sarebbero introdotte anche nell'equazione della dinamica, che adesso sarebbe

$$F = Ma.$$

Le dimensioni delle quantità M così definite sarebbe

$$[\,M\,] = [l^3\,t^{-2}\,]. \tag{3.6}$$

(Ovviamente cio è equivalente a ridefinire le masse, $M = Gm$.)

Se si seguisse questa strada le masse sarebbero misurate in unità metri^3 secondi^{-2}. Niente lo impedisce, anzi è ciò che si fa spesso in relatività generale. Se si divide M per c^2 si ottiene una distanza che è la metà del raggio di Schwarzschild di quella massa[5]:

$$r_{\mathrm{schw}} = \frac{2M}{c^2}.$$

La ragione per cui questa strada non viene seguita abitualmente è che si ottengono unità di massa troppo scomode. La massa di 1 metro^3 sec^{-2} corrisponde a 1.5×10^{10} Kg. è troppo scomodo comperare il pane in pezzi da 10 pico metri^3 secondi^{-2} (150 grammi) a cui corrisponde un raggio di Schwarzschild di circa 10^{-28} metri.

[3] La massa inerziale è quella che compare nell'eq. (3.2).

[4] Esso è dovuto all'osservazione che le accelerazioni dei pianeti sono indipendenti dalla loro massa, vedere la lettura sul sistema del mondo newtoniano.

3.4 Campo elettrico e magnetico

Si può ripetere per la forza coulombiana tra cariche elettriche quanto detto per il caso gravitazionale. Scriviamo la legge di Coulomb in un mezzo come segue:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{3.7}$$

La presenza di $1/(4\pi\varepsilon)$ permette di definire l'unità di carica elettrica in modo svincolato dall'unità di forza e quindi da masse, tempi e lunghezze, in accordo con il punto di vista 3 nella discussione precedente sulla legge della dinamica ([7]). Questa è la strada seguita dai sistemi pratici internazionali, in cui si definisce il Coulomb (o dall'Ampére o da un'altra dimensione pensata indipendente, il che è lo stesso).

L'equazione (3.7) permette di tener conto fenomenologicamente dell'effetto di un mezzo polarizzabile nella elettrostatica. ε è la costante dielettrica del mezzo. Naturalmente si tratta di una descrizione approssimata, valida solo per campi elettrici costanti. Dal punto di vista fondamentale ha senso soltanto la trattazione nel vuoto, corrispondente alla costante ε_0:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{3.8}$$

Questa equazione è analoga alla (3.4); la costante $1/(4\pi\varepsilon_0)$ è analoga alla costante di Newton.

Misurando le grandezze meccaniche in unità di chilogrammi, metri e secondi, la carica elettrica in Coulomb e ricordando che 1 Coulomb × 1 Volt = 1 Joule, la costante dielettrica del vuoto ha la dimensione di Coulomb/ (Volt × metri) e vale

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8.854 \times 10^{-12}\frac{\text{Coulomb}}{\text{volt} \times \text{metri}}\\ &= 8.854 \times 10^{-12}\text{Farad/metri}.\end{aligned}$$

Come si vede il sistema diventa molto laborioso e sembra suggerire che il valore di ε_0 sia una proprietà del vuoto[6], mentre ciò è dovuto soltanto al desiderio di

[5] c è la velocità della luce.

[6] Sarebbe come misurare le lunghezze in metri e i volumi in piedi cubi: nella trattazione delle aree si troverebbe una costante universale, proprietà apparentemente del vuoto perchè non dipende dalle caratteristiche di alcun sistema, di dimensione piedi cubi/metri, data da $S_0 \equiv 37.04$ piedi^3/metro: la superficianza assoluta del vuoto.

introdurre una unità pratica per la carica elettrica, il Coulomb, che si è trascinato dietro il Volt, l'Ampére (1 Coulomb al secondo) e il Farad (1 Coulomb/Volt) [7].

La strada diversa consiste nel non assegnare alla carica elettrica una dimensione indipendente e neppure una unità pratica. Ciò è perfettamente possibile; è la scelta adottata nella fisica fondamentale, in cui non si introduce alcuna costante dielettrica del vuoto. L'unità di carica elettrica nel sistema metro Kg secondo è quella che, posta a distanza di un metro da un'altra carica eguale, la respinge con la forza di 1 Newton (e analogamente nel sistema centimetro granmmo secondo).

Si definiscono alora le dimensioni della carica elettrica attraverso la legge di Coulomb con $\varepsilon_0 = 1$. La dimensione della carica elettrica è espressa in termini di quantità meccaniche:

$$[\, q \,] = [\, \mathrm{m}^{1/2}\, \mathrm{l}^{3/2}\, \mathrm{t}^{-1} \,]. \tag{3.9}$$

L'unità di carica nel sistema centimetro grammo secondo è detta unità elettrostatica (u.e.s.), è la carica che posta ad 1 cm di distanza da un'altra eguale la respinge con la forza di 1 dina e vale

$$\begin{aligned} (q_{un})_{cgs} &= 1\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{sec}^{-1} \\ &= 0.333 \times 10^{-9}\,\mathrm{Coulomb.} \end{aligned}$$

Nel sistema MKS l'unità di carica posta a distanza di 1 metro da un'altra uguale la respinge con la forza di 1 newton:

$$\begin{aligned} (q_{un})_{MKS} &= 1\,\mathrm{kg}^{1/2}\,\mathrm{m}^{3/2}\,\mathrm{sec}^{-1} \\ &= 3.16 \times 10^{4}\,(q_u n) \\ &= 1.05 \times 10^{-5}\,\mathrm{Coulomb.} \end{aligned}$$

La dimensione del campo elettrico è data da

$$[E] = \frac{\text{forza}}{\text{carica}} = [\, \mathrm{m}^{1/2}\, \mathrm{l}^{-1/2}\, \mathrm{t}^{-1} \,].$$

L'unità di campo elettrico nel sistema MKS è

$$(E_{un})_{MKS}\; 1\,\mathrm{kg}^{1/2}\,\mathrm{m}^{-1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

Per passare alle unità pratiche (Coulomb, Volt etc) ricordiamo che

$$\begin{aligned} 1\text{ Joule} &= 1\,\mathrm{Volt} \times 1\,\mathrm{Coulomb} \\ &= 1\,(E_{un})_{MKS} \times \,(1\,q_{un})_{MKS} \times 1m. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} (E_{un})_{MKS} &= \frac{1\mathrm{Volt} \times 1\mathrm{Coulomb}}{1.05 \times 10^{-5}\mathrm{Coulomb} \times \mathrm{metri}} \\ &= 0.95\, \times 10^{5}\,\mathrm{Volt/metro.} \end{aligned}$$

[7]Da questo punto di vista è irrilevante che oggi si preferisca definire come grandezza indipendente l'Ampére piuttosto che il Coulomb o il Farad o un'altra quantità elettromagnetica.

Si noti che le dimensioni di E^2 sono le dimensioni di una densita' di energia. Infatti la densita' di energia del campo elettrico è proprio $E^2/4\pi$.

La stessa cosa avviene per il campo magnetico, che ha le stesse dimensioni del campo elettrico. Nella trattazione teorica dell'elettromagnetismo è essenziale che il campo magnetico abbia la stessa dimensione del campo elettrico. Infatti per trasformazioni tra un sistema di riferimento e un altro che si muova a velocità relativa costante (trasformazioni di Lorentz) il campo elettrico e il campo magnetico si trasformano combinandosi linearmente con coefficienti puramente numerici. Questo sarà trattato nella lettura dedicata alla relatività ristretta.

Chapter 4

D- Elettrodinamica e Relatività

4.1 Introduzione

Questa lettura tende a ricostruire alcuni dei motivi che indussero Ein-stein a formulare la Relatività speciale; si tratta di difficoltà nel trasformare le equazioni di Maxwell dell'elettrodinamica tra sistemi inerziali secondo le regole della fisica newtoniana. Di solito nei libri si pongono in luce soltanto le difficoltà legate alla velocità della luce, che qui tralasciamo perché sono ben note.

Si può mettere nella giusta luce quanto viene detto spesso, cioé che in Ein-stein predominavano considerazioni teoriche rispetto al peso dell'evidenza sperimentale. Si tratta in realtà di temi (le trasformazioni delle quantità elettromagnetiche tra sistemi inerziali) di grande generalità e fondamentalità.

La difficoltà maggiore nel portare queste considerazioni a livello dell'insegnamento consiste nel presentare in modo adeguato quanto qui è svolto usando le equazioni differenziali di Maxwell.

Le sezioni segnate con * servono soltanto a richiamare concetti e formule ben note e possono essere trascurate.

4.2 Equazioni di Maxwell *

Le eqq. di Maxwell hanno la forma seguente[1] :

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{4.1}$$

(questa equazione contiene la legge di Ampére e in più il termine di spostamento $\partial \mathbf{E}/\partial t$);

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

(legge dell'induzione);

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{4.3}$$

(legge di Gauss: le cariche sono sorgenti del campo elettrico);

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{4.4}$$

(il campo magnetico non ha sorgenti).

[1]Usiamo la notazione seguente: i=1,2,3; $\partial_i = \partial/\partial x_i$. L'operatore rot è $\nabla\wedge$. Così $(\mathrm{rot}\mathbf{F})_i = (\nabla \wedge \mathbf{F})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k$.

A queste equazioni va aggiunta l'equazione che descrive la forza che un campo elettromagnetico esercita su una carica q (forza di Lorentz):

$$\mathbf{F} = q\big(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}\big). \tag{4.5}$$

4.3 Dimensioni

Riepiloghiamo la questione delle dimensioni. Le dimensioni della carica elettrica, della corrente e della densità si deducono, ad esempio, dalla legge di Coulomb in cui non si introducano costanti di proporzionalità dimensionali (vedere la lettura su dimensioni e unità di misura); esse sono le seguenti:

$$\begin{aligned}[q] &= [m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-1}],\\ [j] &= [m^{1/2}\, l^{-1/2}\, t^{-2}],\\ [\rho] &= [m^{1/2}\, l^{-3/2}\, t^{-1}].\end{aligned}$$

Usiamo le (4.1, 4.2, 4.3, 4.4) per assegnare le dimensioni di E e di B:

$$[E] = [B] = [m^{1/2}\, l^{-1/2},\, t^{-1}], \tag{4.6}$$

Notare che la (4.5) è consistente. L'assegnazione di uguali dimensioni per E e per B è molto importante per la teoria della Relatività dove si impara che E e B si mescolano per trasformazioni da un sistema inerziale all'altro.

Come si vede, le dimensioni di tutte le quantità che compaiono nella elettrodinamica possono essere ridotte a lunghezze, masse e tempi. Non c'è bisogno di introdurre dimensioni in più (p.es. l'Ampére o il Coulomb) per le quantità elettriche e magnetiche.

4.4 Onde elettromagnetiche*

Consideriamo le eqq. di Maxwell nel vuoto: $\rho = j = 0$. Usiamo la notazione $x_0 = ct$.

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_0} &= 0 \qquad (4.7)\\ \mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_0} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E} &= 0 \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Notare che queste equazioni hanno una proprietà di dualità: se

$$\mathbf{E} \leftrightarrow -\mathbf{B}$$

le equazioni nel vuoto restano invariate. Le equazioni generali di Maxwell in presenza di cariche e correnti elettriche perdono questa dualità perchè non esistono cariche e correnti magnetiche (non pariamo in questa sede della possibile esistenza dii monopoli magnetici).

Prendendo il rot della prima equazione e $\partial/\partial x_0$ della seconda, sottraendo e usando l'identità

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{E} - \Delta_2\mathbf{E}$$

si ottiene

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x_0^2} - \Delta_2\mathbf{E} = 0 \qquad (4.8)$$

e per dualità anche

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_0^2} - \Delta_2\mathbf{B} = 0. \qquad (4.9)$$

Un'onda piana elettromagnetica che si propaga nella direzione del vettore $\mathbf{k}$ è data da

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{a}e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)} + cc, \qquad (4.10)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{b}e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)} + cc. \qquad (4.11)$$

dove $\omega = ck$.

La soluzione più generale delle eqq. di Maxwell nel vuoto può essere scritta come una sovrapposizione di onde piane (serie o integrale di Fourier). In tal caso $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono vettori funzioni del vettore $\mathbf{k}$.

Osservazione 1 - Le onde sono reali, ma è comodo scrivere le soluzioni nella forma complessa ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori complessi). Ponendo $\mathbf{a} = \mathbf{a_0}$ exp $i\delta_a$, $\mathbf{b} = \mathbf{b_0}$ exp $i\delta_b$, con $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{b_0}$, $\delta_{a,b}$ reali, la soluzione (4.10. 4.11) può essere scritta con quantità tutte reali:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 2\mathbf{a_0}\cos\bigl(\mathbf{k}\dot{\mathbf{x}} - \omega t + \delta_a\bigr), && (4.12) \\ \mathbf{B} &= 2\mathbf{b_0}\cos\bigl(\mathbf{k}\dot{\mathbf{x}} - \omega t + \delta_b\bigr). && (4.13) \end{aligned}$$

Osservazione 2 - Le soluzioni per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non sono indipendenti. Infatti le eqq. di Maxwell

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

implicano per ogni onda

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{b} = 0$$

($\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono perpendicolari alla direzione di propagazione). Inoltre dalle (4.7) si ha

$$i\mathbf{k}\wedge\mathbf{a} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{b} = ik\mathbf{b}$$

ovvero

$$\frac{\mathbf{k}}{k}\wedge\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

(il vettore elettrico e quello magnetico sono perpendicolari); inoltre,

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.a = b.$$

Per dualità

$$\mathbf{a} \leftrightarrow -\mathbf{b}, .$$

Infatti dalla prima eq. (4.7) si ottiene $\mathbf{k}\wedge\mathbf{b} = |k|\mathbf{a}$. Conclusione: in ogni onda piana $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali tra loro e alla direzione della propagazione $\mathbf{k}$. $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono ortogonali a $\mathbf{k}$ e tra loro e hanno lo stesso modulo.

4.5 Einstein e l'elettromagnetismo

Einstein giunse alla formulazione della teoria della Relatività ristretta dopo aver riflettuto profondamente sul comportamento delle equazioni e delle grandezze che compaiono nell'elettromagnetismo (E, B, etc) rispetto a trasformazioni di Galileo tra sistemi inerziali. Le riflessioni su questo soggetto, prolungate per alcuni anni, lo indussero a costruire la teoria della Relatività speciale: una teoria delle trasformazioni tra sistemi a velocità relativa costante diversa da quella della fisica newtoniana. Queste considerazioni concettuali furono per lui più cogenti che i risultati degli esperimenti sulla invarianza della velocità della luce.

Diamo alcuni esempi del tipo di questioni che rendevano perplesso Einstein. Supponiamo che le equazioni di Maxwell siano trattate alla stregua delle eqq. di Newton, considerate cioé fondamentali, e cerchiamo di usare la relatività classica (galileiana) per ottenere la relazione tra le configurazioni del campo elettromagnetico in due sistemi a velocità relativa uniforme. Troveremo contraddizioni.

4.5.1 Un'onda elettromagnetica

L'onda (4.12, ref3101) rappresenta un'onda elettromagnetica sinusoidale con lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$ che si sposta con velocità c nella direzione del vettore $\mathbf{k}$. Supponiamo ora che un osservatore si muova a velocità c nella direzione in cui si muove l'onda ed applichiamo le proprietà dello spazio newtoniano e le leggi galileiane della composizione di velocità. Nel nuovo sistema di riferimento l'onda è ferma. Ha sempre la stesssa lunghezza d'onda perchè le distanze spaziali sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Chiamiamo $\mathbf{x}'$ le coordinate nel nuovo sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{k}}{k}ct.$$

Naturalmente per trasformazioni di Galileo il tempo t è indipendente dal moto dell'osservatore. Il problema che interessava Einstein è l'assegnazione della legge di trasformazione del campo elettrico. Se supponiamo che il campo elettrico rimanga invariato, la soluzione (4.12, 4.13) nelle nuove coordinate ha la forma

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{a_0}\cos(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}'}{\lambda}) \tag{4.14}$$

Ma l'espressione (4.14) non è soluzione delle equazioni di Maxwell nel sistema dell'osservatore in moto nella direzione dell'onda. Infatti nel nuovo sistema né **E** né **B** dipendono dal tempo e le eqq. (4.2) e (4.3) nel nuovo sistema diventano

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{a_0} = 0, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a_0} = 0, \tag{4.16}$$

due condizioni incompatibili. L'espressione (4.14) non è soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto. (La stessa cosa si può dire per il campo magnetico.). Nelle eqq. di Maxwell nel vuoto il termine $\partial\mathbf{E}/\partial t$ è necessario per poter avere rot **E** diverso da zero e analogamente per il campo elettrico. Nella soluzione ad onde piane la variazione di un campo è concatenata all'altro. Se si annulla la dipendenza temporale mediante una trasformazione di Galileo le due espressioni statiche per i due campi non sono soluzioni delle eqq. di Maxwell nel sistema x'. Come si deve dunque trasformare il campo elettromagnetico tra due sistemi inerziali?

Einstein citò questo caso come esempio di problema che l'aveva persuaso che l'elettrodinamica non era compatibile con le trasformazioni di Galileo,

4.5.2 Una spira oscillante in campo magnetico

Nell'introduzione all'articolo sulla Relatività speciale spedito agli "Annalen der Physik" nel giugno 1905 [8], Einstein presenta questo esempio per mostrare che secondo l'interpretazione classica le eqq. di Maxwell non sono compatibili con l'equivalenza tra sistemi inerziali.

Poniamo una spira tra le espansioni polari di un magnete e facciamola oscillare. Mettiamoci nel sistema di riferimento del magnete. La spira dondola. Gli elettroni della spira si muovono nel campo magnetico e sono sottoposti ad una forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}.$$

Si mettono quindi a circolare nella spira come se ci fosse una forza elettromotrice.

Mettiamoci ora nel sistema di riferimento della spira. Si vede un flusso magnetico variabile. Per la legge dell'induzione (4.2) si ha una forza elettromotrice che fa circolare le cariche nella spira. Il risultato finale è identico, ma la descrizione dei due fenomeni dipende dallo stato di moto assoluto, non da quello relativo. Ein-stein riteneva che questa descrizione, che dipende dal moto assoluto, dovesse essere sostituita da una descrizione in termini puramente relativi ai sistemi fisici interessati.

4.5.3 Un filo uniformemente carico

Consideriamo un filo con densità di carica lineare σ uniforme e costante (vedere anche [9]. Prendiamo il filo come asse 3. Essa crea un campo elettrico in ogni punto diretto perpendicolarmente al filo. In un punto a distanza r dal filo il modulo di **E** è

$$E = \frac{2\sigma}{r}. \tag{4.17}$$

Il campo magnetico è nullo. Un osservatore in moto a velocità v nella direzione 3 negativa vede una carica σ' e una corrente $\mathbf{j}' = \mathbf{v}\sigma'$. La densità di carica è una quantità invariante per trasformazioni di Galileo, $\sigma' = \sigma$ perché

$$\sigma = \frac{dq}{dV}$$

e sia q che V sono invarianti galileiani; inoltre

$$\mathbf{j}` = \mathbf{v}\sigma.$$

L'osservatore in moto vede un campo elettrico per via della distribuzione di carica[2] e, poichè c'è una corrente, anche un campo magnetico in ogni punto dello spazio esterno al filo, diretto perpendicolarmente al filo e alla direzione radiale. Dal valore della circuitazione,

$$\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}' = \frac{4\pi}{c}\mathbf{v}\sigma,$$

si ha il valore di B':

$$B' = \frac{2\sigma}{r}\frac{v}{c} = E\frac{v}{c}.$$

Inoltre per l'osservatore in moto vale la legge di Gauss:

$$\text{div}'\mathbf{E}' = 4\pi\sigma' = 4\pi\sigma.$$

Le derivate spaziali sono invariate: $\partial/\partial x_i' = \partial/\partial x_i$. Quindi il campo elettrico è invariato: $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$.

Si ha una contraddizione. Consideriamo l'equazione del moto newtoniana, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, per una particella di carica q soggetta alla forza di Lorentz nei due sistemi. Poichè la velocità relativa è costante, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Ma le forze nei due sistemi sono diverse. Nel primo sistema di riferimento si ha

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{4.18}$$

mentre nel secondo

$$\mathbf{F}' = q\big(\mathbf{E}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}'\big). \tag{4.19}$$

Abbiamo visto che $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$. Le due forze sono diverse per via del termine magnetico presente in (4.19). Le

[2] Questo caso è diverso da quello,a bitualmente discusso, di un filo percorso da corrente; in quest'ultimo la densità di carica è nulla perchè le cariche positive e negative sono uguali ma esiste corrente perchè le cariche negative (elettroni) si muovono mentre le cariche positive sono fisse; esiste campo magnetico ma non campo elettrico.

equazioni di Maxwell sono incompatibili con le trasformazioni di Galileo se le densità di carica sono invarianti.

Invece le trasformazioni di Lorentz di coordinate spaziali e temporali e dei campi elettrici e magnetici rendono perfettamente conto dell'equivalenza tra osservatori inerziali.

Queste considerazioni sono state svolte mediante l'uso di equazioni differenziali. Un compito tutt'altro che facile consiste nel proporre gli stessi problemi mediante argomentazioni finite.

4.6 Conclusione

La discussione precedente illustra il fatto che le equazioni dell'elettromagnetismo sono incompatibili con le trasformazioni di Galileo. L'alternativa è dunque la seguente:

1. Le equazioni dell'elettromagnetismo sono valide soltanto in un particolare sistema di riferimento (lo spazio assoluto che Newton voleva e non trovò nella meccanica? Il "corpo α" [10] di cui si parlava nell'800?).

2. Le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali da applicare all'elettromagnetismo NON sono quelle della relatività galileiana.

Contro l'alternativa 1 andava, al tempo di Einstein, la serie di esperimenti di Michelson: in essi non si rivelava alcuna dipendenza della velocità della luce dallo stato di moto dell'osservatore rispetto alla sorgente[3].

Einstein conosceva i risultati di questi esperimenti; tuttavia la spinta ideale a riformulare la teoria delle trasformazioni di invarianza tra sistemi inerziali (Relatività speciale) gli venne soprattutto dalla convinzione che l'equivalenza dei sistemi inerziali dovesse eatendersi anche all'elettromagnetismo e che quindi le trasformazioni di Galileo dovessero essere cambiate. Esistevano già indicazioni in questo senso; da parecchi anni Lorentz aveva scoperto che le equazioni dell'elettromagnetismo sono invarianti per quelle che vennero chiamate le "trasformazioni di Lorentz", benchè non vi si annettesse significato fisico.

[3]È anche vero che gli esperimenti scientifici di punta sono molto spesso al limite delle capacità di osservazione con la strumentazione dell'epoca e quindi i loro risultati non sono così netti come si può credere. Nel caso in questione, alcuni sperimentatori ritenevano di aver misurato variazioni della velocità della luce dovute al movimento, ancora decine di anni dopo la formulazione della Relatività speciale(vedere [11]).

Chapter 5

E- Relatività Ristretta

5.1 Introduzione

Molti sono i testi di relatività speciale. Si può trovare una grande quantità di esercizi interessanti in [12]. In questa lettura studiamo il modo di trasformarsi del campo EM tra sistemi inerziali e verifichiamo che per queste trasformazioni le equazioni di Maxwell si trasformano mescolandosi: in particolare, quelle inomogenee e quelle omogenee tra loro separatamente.

Le sezioni segnate con * servono soltanto a richiamare concetti e formule ben note e possono essere trascurate.

5.2 Le motivazioni

Albert Einstein (1879 - 1955), dopo aver riflettuto per parecchi anni sull'elettromagnetismo, formulò la Relatività speciale in modo definitivo in un singolo lavoro, ricevuto dagli Annalen der Physik il 30 giugno 1905. Egli fu spinto più da riflessioni concettuali che dagli esperimenti sulla velocità della luce. La questione di fondo riguardava il modo di trasformare le equazioni di Maxwell tra osservatori in moto relativo uniforme; per esempio, la diversità della descrizione usata in problemi di elettromagnetismo che non differiscono per il moto relativo dei sistemi fisici ma per il moto dell'osservatore.

Insoddisfatto dell'interpretazione della teoria che richiedeva l'esistenza di un sistema assoluto, e condividendo la critica di Ernst Mach (1838 - 1916) al concetto di spazio assoluto, egli volle ristabilire l'equivalenza tra i sistemi inerziali per la descrizione della fisica, includendovi l'elettromagnetismo. Propose di estendere per l'elettromagnetismo il principio di relatività che esisteva nell'ambito della meccanica (relatività galileiana): se le equazioni dell'elettromagnetismo valgono in un sistema, esse devono valere, invariate in forma, in ogni sistema in moto uniforme rispetto a quello, con lo stessa velocità della luce:

> Esempi [...] suggeriscono che [...] per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche. Eleveremo questa congettura (il contenuto della quale verrà detto, in quanto segue, "principio di relatività") al rango di postulato; supporremo inoltre – un postulato, questo, solo apparentemente incompatibile col precedente – che la luce, nello spazio vuoto, si propaghi sempre con una velocità determinata, c, che non dipende dallo stato di moto del corpo che la emette.

Non esiste un sistema privilegiato. L'etere che, come Einstein ebbe a dire, serviva solo a far da soggetto al verbo vibrare, così difficile da concepire come mezzo materiale, non esiste. I fenomeni EM avvengono nel vuoto; il campo EM non è riconducibile a grandezze materiali. La velocità della luce deve essere la stessa per tutti i sistemi in moto relativo uniforme, in conseguenza della richiesta che la relatività comprenda i fenomeni EM. Ne segue che essa è il valore limite della velocità di qualsiasi segnale fisico. Ogni altra azione si trasmette a velocità inferiore o uguale. Sono questi i principii ispiratori della relatività ristretta.

Sono principii in contrasto con le regole newtoniane di trasformazione tra sistemi inerziali. Di conseguenza Einstein indicò il modo di modificare l'intera struttura dello spazio - tempo e la meccanica. Se in meccanica nessuno si era accorto della necessità di correggerla, era perchè gli effetti relativistici si vedono nei moti materiali soltanto a velocità non trascurabili rispetto a quella della luce (la velocità della luce è di 300 000 chilometri al secondo).

Con geniale semplicità e profondità Einstein derivò le conseguenze di questa richiesta sulla struttura stessa dello spazio - tempo. Le ipotesi relativistiche sono incompatibili con le leggi newtoniane di invarianza delle distanze e delle durate tra sistemi a velocità diversa. Sia le distanze spaziali che le durate temporali dipendono dalla velocità dell'osservatore, cioè dal sistema di coordinate usato per descrivere i fenomeni. Le coordinate non hanno valore indipendente dal sistema di riferimento e non vi è nessuna contraddizione interna. La struttura dello spazio e del tempo non è quella della meccanica newtoniana e la nozione fondamentale di carattere fisico che fissa la struttura dello spazio - tempo relativistico è la traiettoria della luce.

Supponiamo che l'elettromagnetismo sia un fenomeno fondamentale e che le equazioni di Maxwell e di Lorentz debbano essere trattate alla stregua delle equazioni di Newton, estendendo il principio di equivalenza tra sistemi inerziali (principio di relatività) ai sistemi EM. Nelle equazioni compare il coefficiente c, che è una velocità e dunque non è invariante rispetto a trasformazioni di Galileo (TG): $\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{v}$ secondo le TG. Affinchè le equazioni abbiano una forma equivalente nei diversi sistemi inerziali Bisogna che c non varii. Dovremo rivedere i nostri concetti di

1. indipendenza della misura della lunghezza di un corpo dallo stato di moto dell'osservatore;
2. indipendenza della misura della durata di un evento dallo stato di moto dell'osservatore.

Ne seguirà che non esistono corpi rigidi nè durate assolute nè distanze assolute. Lo spazio - tempo della Relatività speciale ha proprietà diverse dallo spazio - tempo newtoniano e le trasformazioni tra sistemi inerziali hanno proprietà diverse dalle TG. Soltanto per velocità basse rispetto alla velocità della luce si possono adoperare, in modo approssimato, le trasformazioni di Galileo e le equazioni della fisica non relativistica.

5.3 Trasformazioni di Lorentz per le coordinate di un evento

Consideriamo due sistemi di riferimento, K e K', con velocità relativa $\mathbf{v}$. L'origine di K' si muove con velocità $\mathbf{v}$ rispetto all'origine di K nella direzione 3 che è anche la direzione $3'$, mentre le direzioni degli assi 1 e 2 restano invariate. Nei due sistemi le coordinate di un punto nelle direzioni ortogonali 1 e 2 sono identiche, come nel caso galileiano:

$$x_1' = x_1; \quad x_2' = x_2. \tag{5.1}$$

Per comodità supponiamo che all'istante $t = 0$ in K corrisponda l'istante $t' = 0$ in K' e che l'origine O coincida con l'origine O' a quell'istante (condizioni non restrittive). Le trasformazioni di Galileo sono rappresentate dalle (5.1) insieme alle trasformazioni

$$\begin{aligned} x_3' &= x_3 - vt, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Da queste trasformazioni segue l'invarianza di ogni distanza tridimensionale $x_{3A} - x_{3B}$ e di ogni durata $t_1 - t_2$ misurate in K e in K'.

Ma Ein-stein non impone l'invarianza delle distanze tridimensionali e del tempo. Egli basa invece le sue considerazioni sulla fisica delle onde EM. Supponiamo che una lampadina posta nell'origine O del sistema K emetta un lampo di luce sferico all'istante $t = 0$.

Per comodità useremo sempre $x_0 = ct$ e $x_0' = ct'$. Questo equivale a misurare i tempi in unità di spazio percorso a velocità c. Ciò ha senso universale perché in Relatività speciale la velocità della luce (nel vuoto) è una costante universale indipendente dalla velocità dll'osservatore.[1] Questo è il caso nella Relatività speciale.

[1] Essa è anche il limite superiore della velocità di ogni segnale.

L'eq. del fronte di luce dopo il tempo t in K è

$$\mathbf{x}^2 - x_0^2 = 0$$

Introduciamo il postulato della Relatività speciale: la propagazione della luce nei due sistemi deve avvenire con le stessse leggi, in particolare con la stessa velocità c. Allora in K'

$$\mathbf{x}'^2 - x_0'^2 = 0$$

La teoria richiede allora l'invarianza della quantità

$$S = \mathbf{x}^2 - x_0^2 = \mathbf{x}'^2 - x_0'^2. \tag{5.3}$$

Poiché $\mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}'^2$ (infatti almeno per Galileo $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$) ne segue che $x_0' \neq x_0$. Il tempo non può essere lo stesso in K e in K'.

Per via delle (5.1) la (5.3) implica

$$x_3^2 - x_0^2 = x_3'^2 - x_0'^2. \tag{5.4}$$

La trasformazione tra le due variabili che lascia invariata la forma sferica della superficie del lampo di luce è quella che lascia invariata la (5.4). Essa deve essere lineare e invertibile tra i due sistemi con $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. Poniamo quindi

$$\begin{aligned} x_3' &= x_3 C - x_0 S, \\ x_0' &= x_0 C - x_3 S, \\ x_1' &= x_1, \quad x_2' = x_2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Questa è la definizione di trasformazione di Lorentz (TL) nella direzione 3. Poichè si deve conservare la forma (5.4), deve valere la condizione fondamentale

$$C^2 - S^2 = 1. \tag{5.6}$$

Pertanto C e S si possono parametrizzare come segue:

$$\begin{aligned} C &= \cosh\varphi, \\ S &= \mathrm{senh}\varphi. \end{aligned} \tag{5.7}$$

in modo che la condizione (5.6) sia soddisfatta per via dell'identità $\cosh^2\varphi - \mathrm{senh}^2\varphi = 1$ per ogni φ.

L'inversione delle (5.5) si ottiene cambiando $\varphi \to -\varphi$ e quindi $C \to C$, $S \to -S$:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_3' C + x_0' S, \\ x_0 &= x_0' C + x_3' S, \\ x_1' &= x_1, \quad x_2` = x_2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Naturalmente la quantità φ è funzione della velocità relativa tra i due sistemi: $\varphi = \varphi(v)$. Per determinarne la dipendenza ricordiamo che l'origine O' delle coordinate in K' ($\mathbf{x}' = 0$) si muove con velocità v rispetto all'origine O delle coordinate in K:

$$
\begin{aligned}
x_3' = 0 &= x_3 C - x_0 S, \qquad (5.9)\\
\frac{x_3}{x_0} &= \frac{S}{C}.
\end{aligned}
$$

D'altra parte $x_3/x_0 = x_3/ct = v/c$. Dalla equazione

$$
\frac{v}{c} = \frac{S}{C}
$$

ricordando la (5.6), segue

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (5.10)\\
C &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
\beta &= \frac{v}{c}.
\end{aligned}
$$

Queste relazioni connettono C e S con la velocità della trasformazione. Dalle stesse eqq. (5.10) si controlla che la trasformazione inversa, dalle coordinate in K' a quelle in K, implica le trasformazioni inverse (5.8) perchè $v \to -v$.

È facile scrivere le TL corrispondenti al moto uniforme nella direzione di ciascuna coordinata 1, 2, 3; è più complicato scrivere una TL in direzione generica, ma questa complicazoine è puramente geometrica (grupppo delle rotazioni) e ha poco a che fare con la fisica relativistica. Il formalismo matriciale aiuta.

5.4 Trasformazioni di Lorentz e di Galileo

Le trasformazioni di Galileo costituiscono una approssimazione delle TL quando $\beta \equiv v/c$ è piccolo. Sviluppiamo l'espressione di C e di S data dalle (5.10) in serie di β:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{v}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O(\frac{v}{c})^4\right),\\
C &= 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O(\frac{v}{c})^4\Big)
\end{aligned}
$$

All'ordine più basso in v/c le eqq. (5.5 diventano le trasformazioni di Galileo (5.2). Le TG sono un'approssimazione delle TL per bassa velocità.

5.5 Distanze spaziali e durate temporali *

Un osservatore a riposo su K' osserva una sbarra posta nel sistema K lungo l'asse 3, ferma e ivi di lunghezza l_0. L'osservatore misura le posizioni x'_{3A}, x'_{3B} degli estremi della sbarra lungo il suo asse 3', allo stesso tempo in K', $t'_A = t'_B$. Dalle leggi di trasformazione inverse (5.8) per le coordinate delle estremità si ha

$$
\begin{aligned}
x_{3A} &= x'_{3A} C + x'_{0A} S,\\
x_{3B} &= x'_{3B} C + x'_{0B} S,
\end{aligned}
$$

con $x'_{0A} = x'_{0B}$. Facendo la diffferenza e ricordando che $x_{3A} - x_{3B} = l_0$ si ha

$$
l_0 = (x'_{3A} - x'_{3B})C,
$$

dunque la lunghezza della sbarra misurata nel sistema K', $l' \equiv x'_{3A} - x'_{3B}$, è

$$
l' = \frac{l_0}{C} = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0. \qquad (5.11)
$$

La misura della lunghezza di un corpo in moto, l', si accorcia nella direzione del moto di un fattore

$$
\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.
$$

Supponiamo adesso di misurare, stando fermi in K', i tempi di un orologio fermo in K. Sia x_3 la coordinata fissa dell'orologio in K e consideriamo due tempi in K, t_a, t_b a cui l'orologio viene osservato. A questi due tempi corripondono tempi in K': t'_a, t'_b. Utilizzando le (5.5) si ha

$$
\begin{aligned}
x'_{0a} &= x_{0a} C - x_3 S,\\
x'_{0b} &= x_{0b} C - x_3 S,
\end{aligned}
$$

e, facendo la differenza,

$$
\begin{aligned}
x'_{0a} - x'_{0b} &= (x_{0a} - x_{0b})C\\
&= \frac{x_{0a} - x_{0b}}{\sqrt{1-\beta^2}}\\
&> x_{0a} - x_{0b}.
\end{aligned}
$$

L'orologio, visto in moto dal sistema K'ha un battito più lento[2]:

$$
\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t. \qquad (5.12)
$$

5.6 Aspetti formali *

Definiamo un quadrivettore formato dall'insieme delle coordinate spazial e temporali di un evento:

$$
x \equiv x^\mu \equiv (x_1, x_2, x_3, x_0) \equiv (\mathbf{x}, x_0).
$$

Consideriamo ora i due quadrivettori x e x' che rappresentano le coordinate di un evento nei due diversi sistemi di riferimento in moto relativo K, K' in moto a

[2]Quale deve essere la velocità relativa tra un osservatore e un orologio affinchè il periodo dell'orologio sia raddoppiato?

velocità v lungo l'asse 3. Le coordinate nei due sistemi sono date da

$$\begin{aligned} x &= (\mathbf{x}, x_0), \\ x' &= (\mathbf{x}', x_0'). \end{aligned}$$

La TL (5.5) può essre scritta in forma matriciale:

$$x' = Lx. \tag{5.13}$$

In componenti ($\mu = 1, 2, 3, 0$) si ha

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu.$$

L è una matrice 4×4 che rappresenta l'effetto di una TL sul vettore x. Se supponiamo che si tratti di una TL lungo l'asse 3, essa lascia invariate le componenti 1 e 2 del quadrivettore e opera la trasformazione di Lorentz (5.5) nel sottospazio delle componenti x_3, x_0:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, x_0), \qquad (5.14) \\ Lx &= (x_1, x_2, x_3 C - x_0 S, x_0 C - x_3 S). \end{aligned}$$

La matrice L ha quindi la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & S & C \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

La matrice L^{-1} si ottiene cambiando il segno di S:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & -S & C \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Tutto diventa semplice se ci si limita sempre a TL lungo un solo asse, 3. In tal caso x_1 e x_2 restano invariati sempre, ed è significativa solo la parte di L che è la matrice $\hat{L}$ 2×2 nel sottospazio (x_3, x_0):

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} C & S \\ S & C \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}^{-1} = \begin{pmatrix} C & -S \\ -S & C \end{pmatrix}.$$

Lavorando nel sottospazio 2×2 è facile verificare che le TL nella direzione 3 formano un gruppo ad 1 parametro.

Consideriamo il gradiente quadridimensionale:

$$\partial \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_0}\right). \tag{5.17}$$

Esso si trasforma secondo le matrici L^{-1}:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \left(L^{-1}\right)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{5.18}$$

Per distinguere le quantità che si trasformano con le matrici L (come le coordinate x) da quelle che si trasformano con le matrici L^{-1} si suole scrivere le prime con l'indice in alto: x^μ e le seconde con l'indice in basso: $\partial \equiv (\partial_\mu)$. Un prodotto invariante contrae indici in alto con indici in basso:

$$x \cdot \partial \equiv x^\mu \partial_\mu = x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3 + x_0 \partial_0.$$

Invece per avere un invariante con componenti di vettori covarianti bisogna usare la metrica $\eta_{\mu\nu}$ definita da

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, -1) \tag{5.19}$$

Così definiamo la norma (il "quadrato") invariante di un vettore quadridimensionale x e il prodotto scalare di due vettori x, y come segue[3]:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \equiv \mathbf{x}^2 - x_0^2, \qquad (5.20) \\ x \cdot y &\equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_0 y_0 \equiv \qquad (5.21) \end{aligned}$$

La norma x^2 e il prodotto scalare $x \cdot y$ sono invarianti per TL: si provi ad assoggettare x e y alla trasformazione di Lorentz (5.5) lungo l'asse 3; poiché $C^2 - S^2 = 1$, si ha $x^2 = (LX)^2$, $Lx \cdot Ly = x \cdot y$. Ma la norma non è definita positiva: lo spazio delle coordinate non ha metrica euclidea (η è una "metrica lorenziana"). Corrispondentemente, le matrici L che generano una trasformazione di Lorentz di un quadrivettore non sono unitarie: $L^\dagger = L^{-1}$.[4].

5.7 Ordinamenti di eventi

Le ipotesi relativistiche sono incompatibili con le leggi newtoniane di invarianza delle distanze tridimensionali e delle durate se osservate da sistemi a velocità diversa. Come abbiamo visto, in Relatività speciale sia le distanze spaziali che le durate temporali dipendono dalla velocità dell'osservatore, cioè dal sistema inerziale usato per descrivere i fenomeni. La struttura dello spazio - tempo della Relatività speciale non è newtoniana.

Le coordinate servono a rintracciare un punto nello spazio - tempo, ma le distanze spaziali e quelle temporali tra due eventi non hanno valore indipendente dal sistema di riferimento e non vi è nessuna contraddizione nè paradosso. La nozione fondamentale di carattere fisico che fissa la struttura dello spazio - tempo relativistico è la traiettoria della luce.

Supponiamo che un raggio di luce connetta due eventi nello spazio - tempo. Questo è un fatto fisico e pertanto deve essere vero in ogni sistema di riferimento. La luce stabilisce un ordinamento tra eventi indipendente dallo stato di moto dell'osservatore.

[3] È chiamata anche "distanza quadridimensionale tra l'evento rappresentato dal vettore x e l'evento "origine degli assi all'istante 0".

[4] Se invece si studiassero le rotazioni di un vettore in uno spazio euclideo quadridimensionale, si conserverebbe il quadrato definito con segni positivi, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2$ e le matrici che rappresentano una rotazione sarebbero unitarie: $R^\dagger = R^{-1}$.

Consideriamo due eventi identificati dai quadrivettori x e y. Un raggio di luce può connettere i due eventi se il vettore $x-y$, differenza tra i due, ha norma nulla:

$$\left(x-y\right)^2 \equiv \left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)^2 - \left(x_0-y_0\right)^2 = 0. \qquad (5.22)$$

Infatti secondo la (5.22) la distanza spaziale tra i due eventi, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, divisa per la velocità della luce è uguale alla differenza di tempo:

$$\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c} = |t_x - t_y|. \qquad (5.23)$$

Le eq. (5.22, 5.23) sono quindi la condizione affinchè un raggio di luce partito da uno dei due eventi raggiunga l'altro. Si dice che la distanza tra i due eventi è di tipo luce.

La condizione (5.22, 5.23) è invariante per TL perchè la norma di ogni quadrivettore è invariante come abbiamo visto.

Ogni coppia di eventi nello spazio -tempo può essere classificata su questa base. I casi possibili sono tre:

1. Un raggio di luce partito da uno degli eventi può arrivare all'altro (distanza quadridimensionale tra gli eventi di tipo luce); questo è il caso appena discusso.

2. I due eventi possono essere connessi da segnali che viaggiano a velocità minore della luce, per esempio la partenza e l'arrivo di un viaggio in treno (tra i due eventi vi è un ordinamento temporale e la distanza viene detta di tipo tempo). In questo caso si deve avere

   $$\left(x-y\right)^2 \equiv (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 - (x_0-y_0)^2 < 0 \qquad (5.24)$$

   Cioé
   $$|t_x - t_y| > \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}, \qquad (5.25)$$

   La distanza temporale è maggiore della distanza spaziale divisa per la velocità della luce.

   Esiste sempre un sistema di riferimento in moto lungo la direzione 3 che congiunge i due eventi, da cui i due eventi sono visti come successivi nello stesso punto dello spazio. Invece non esiste alcun sistema inerziale in cui l'ordine temporale degli eventi, partenza ed arrivo, sia invertita.

   Infatti, consideriamo le cosa dal punto di vista di un osservatore K' che si muove con velocità v nella direzione della congiungente i due eventi (stazione di partenza e stazione di arrivo) presa come asse 3. Se $t_x \equiv x_0/c$ e $t_y \equiv y_0/c$ sono i tempi dei due eventi osservati da me, e se x_3 e y_3 sono le posizioni dei due eventi osservati da me (sull'asse 3), nel sistema in moto K' saranno:

   $$\begin{aligned} |(x_3-y_3)'| &= |x_3-y_3|C - c|t_x-t_y|S, \\ c(t_x-t_y)' &= c|t_x-t_y|C - |x_3-y_3|S. \end{aligned}$$

   e poiché

   $$|t_x - t_y| > \frac{|x_3-y_3|}{c}$$

   esiste certo una velocità tale da annullare $x_3'-y_3'$. Essa è data dalla soluzione di

   $$\frac{S}{C} = \frac{|x_3-y_3|}{c|t_x-t_y|} < 1 \qquad (5.26)$$

   Il valore di β ottenuto dalla (5.26) fornisce la velocità alla quale deve muoversi il sistema nella direzione dela congiungente le due stazioni affinchè un osservatore veda i due eventi accadere successivamente nello stesso luogo.

3. Nessuna azione può connettere i due eventi, perché dovrebbe viaggiare a velocità maggiore della luce. La condizione matematica è l'inverso della (5.24):

   $$\left(x-y\right)^2 \equiv (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 - (x_0-y_0)^2 > 0$$

   Infatti
   $$\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c} > |t_x - t_y|$$

   In questo caso nessun segnale può connettere i due eventi perchè dovrebbe viaggiare a velocità maggiore di quella della luce. I due eventi sono disconnessi causalmente. Tali eventi sono detti di tipo spazio.

   Per esempio: tra la Terra e il Sole la luce impiega un po' più di 8 minuti. Consideriamo due eventi, per esempio l'accensione di una lampadina qui e una esplosione sul Sole e supponiamo che la luce dell'esplosione mi giunga meno di 8 minuti dopo che ho visto la mia lampadina accendersi. In tal caso i due segnali non possono essere interconnessi causalmente: con la mia luce non posso modificare l'esplosione e viceversa. I due segnali devono essere considerati "contemporanei" in questo senso. Ma possono essere considerati contemporanei anche perché esiste un sistema di riferimento in moto rispetto alla Terra e al Sole che vede avvenire nello stesso istante i due eventi.

   Infatti, muoviamoci con velocità v nella direzione della congiungente la lampadina e l'esplosione (direzione Terra - Sole) presa cone asse 3. Se t_T e t_S sono i tempi dei due eventi osservati dalla Terra, e se x_{3T} e x_{3S} sono le posizioni sull'asse 3 dei due eventi osservati dalla Terra , nel nuovo sistema definito dall'apice saranno:

   $$x_{3T}'-x_{3S}' = (x_T-x_S)C - c(t_T-t_S)S,$$
   $$c(t_T'-t_S)' = c(t_T-t_S)C - (x_{3T}-x_{3S})S.$$

   e poiché

   $$t_T - t_L < \frac{x_{3T}-x_{3S}}{c}$$

esiste certo una velocità tale da annullare $t'_T - t'_S$. Essa è data dalla soluzione di

$$\frac{S}{C} \equiv \beta = \frac{c(t_T - t_L)}{x_T - x_L} < 1.$$

Questa è la velocità alla quale deve muoversi il sistema nella direzione Terra - Sole affinché un osservatore veda le due lampadine accendersi allo stesso istante.

Tali eventi sono detti di tipo spazio.

La classifica delle distanze tra gli eventi in quattro dimensioni basata sui raggi di luce ha un significato oggettivo. Nel caso (2) vi è un ordinamento temporale tra i due eventi: uno accade prima e l'altro dopo; tutti gli osservatori concorderanno sull'ordinamento temporale anche se osservatori diversi troveranno valori diversi per la distanza temporale. Nel caso (3) non vi è ordinamento temporale e la successione nel tempo tra i due eventi misurata da due osservatori in moto relativo può essere addirittura invertita: nell'esempio alcuni osservatori vedranno prima l'esplosione solare, altri l'accensione della luce sulla Terra. La ragione è che l'assegnazione delle precedenze temporali in questo caso non corrisponde a nessun fatto fisico, è solo una conseguenza dell'assegnazione di certe coordinate (del sistema di riferimento). Il caso (1) è un caso limite che separa le due classi di coppie di eventi.

Non vi è in questo alcuna violazione della causalità, perchè la possibile inversione dell'ordinamento temporale riguarda solo eventi che non possono essere connessi in modo causale mediante alcun segnale. Il principio di causalità diventa molto più interessante nella fisica relativistica che in quella newtoniana per via della velocità limitata di trasmissione di ogni segnale.

Dunque in luogo delle distanze spaziali e delle durate assolute newtoniane la luce definisce una relazione di distanza quadridimensionale nello spazio - tempo della relatività ristretta. Per ogni coppia di eventi il valore della distanza quadridimensionale è un dato oggettivo eguale per tutti i sistemi inerziali.

5.8 TL dei campi elettrici e magnetici

L'operatore di D'Alembert,

$$\sum_{i=1,2,3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$$

è invariante per TL. Questo può essere constatato esplicitamente usando la forma di una TL lungo l'asse 3, (5.5), o può essere ottenuto ricordando che i quadrati sono invarianti per TL.

Ne segue che l'equazione dellle onde EM nel vuoto,

$$[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}]\mathbf{E} = 0, \tag{5.27}$$

$$[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}]\mathbf{B} = 0, \tag{5.28}$$

è invariante per TL se i campi $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ si trasformano in combinazioni lineari di se stessi per TL.

Vogliamo adesso vedere come si trasformano i campi per TL. Daremo prima la regola formale che è più complessa della regola (5.5) con cui si trasformano le coordinate. Dobbiamo definire un tensore con due indici μ, ν (μ, $\nu = 1, 2, 3, 0$) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= E_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ F_{12} &= B_3, \; F_{23} = B_1, \; F_{31} = B_2; \\ F_{\mu\nu} &= -F_{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Le (5.29) chiariscono che $F_{\mu\nu}$ contiene solo 6 quantità indipendenti che sono le componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Detto questo, diamo la legge di trasformazione di $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ nella forma seguente:

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}\, L_{\nu\beta}\, F_{\alpha\beta}. \tag{5.30}$$

Il campo EM si trasforma dunque linearmente ma mescolando $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Se la regola (5.30) appare formale, è interessante ricavare la legge di trasformazione delle componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nel caso particolare (5.5) di una TL lungo l'asse 3:

$$\begin{aligned} E'_1 &= CE_1 - SB_2; \\ E'_2 &= CE_2 + SB_1; \\ E'_3 &= E_3; \\ B'_1 &= CB_1 + SE_2; \\ B'_2 &= CB_2 - SE_1; \\ B'_3 &= B_3 \end{aligned} \tag{5.31}$$

dove C, S e β sono dati dalle (5.10). Queste formule combinano linearmente le componenti di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$ e si riducono all'identità per $v/c \to 0$. Notare che sono le componenti perpendicolari al moto ad essere mescolate mentre quelle nella direzione 3 del moto sono invariate.

(Interessante anche notare che $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2$. Perchè?[5].)

Prima conseguenza: le equazioni delle onde EM nel vuoto, (5.27), sono invariate tra due sistemi inerziali.

Seconda conseguenza. Le equazioni di Maxwell si trasformano una nell'altra per TL. Facciamo un esempio nel caso in cui siamo presenti cariche e correnti. Per questo abbiamo bisogno della legge di trasformazione della densità di carica ρ e di corrente $\mathbf{j}$. Poichè una densità di carica vista da un sistema in moto è una densità di corrente, è naturale fare l'ipotesi che densità di carica e densità di corrente facciano parte di un quadrivettore come le coordinate. Per una TL lungo l'asse 3 la legge di trasformazione sarà quindi la stessa della (5.5):

[5]Risposta: perchè la quantità $F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} \equiv 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ è Lorentz invariante.

$$\begin{aligned} c\rho' &= c\rho\, C - j_3\, S, \\ j_3' &= j_3\, C - c\rho\, S, \\ j_{1,2}' &= j_{1,2}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Poichè la carica è un invariante per TL, ènaturale pensare che la densità carica si trasforma come un volume

Consideriamo un problema statico con soltanto una densità di carica ρ. Avremo un campo elettrico che ubbidisce all'eq. di Maxwell

$$\mathrm{div}\mathbf{E} \equiv \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = 4\pi\rho. \tag{5.33}$$

mentre $\mathbf{B} = 0, \mathbf{j} = 0, \partial_0 \mathbf{E} = 0$. Le altre equazioni di Maxwell sono in questo caso

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} - \partial_0 \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{5.34}$$

(banalmente soddisfatta),

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{5.35}$$

(il campo elettrico ammette potenziale),

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{5.36}$$

(banalmente soddisfatta).

Consideriamo un sistema K' costituito da un osservatore che si muove a velocità v nella direzione dell'asse 3. Cosa vedrà? Secondo le (5.32), nel sistema K' avremo una densità di carica ρ' e una componente nella direzione 3 della densità di corrente, j_3'. Scriviamo le inverse delle trasformazioni (5.32) con $\mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned} c\rho &= C\, c\rho' + S j_3', \\ j_3 = 0 &= S c\rho. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Per le eqq. (5.31) e seguenti, nel sistema in moto avremo anche un campo magnetico $\mathbf{B}'$. Scriviamo le inverse delle (5.31) per il campo elettrico:

$$\begin{aligned} E_1 &= CE_1' + SB_2'; \\ E_2 &= CE_2' - SB_1'; \\ E_3 &= E_3', \\ B_1 &= CB_1' - SE_1', \\ B_2 &= CB_2' + SE_1', \\ B_3 &= B_3'. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Sostituiamo nella (5.33) al posto delle variabili x, $\mathbf{E}$, ρ del sistema K le variabili x', $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$, ρ', $\mathbf{j}'$ del sistema K' usando le trasformazioni delle derivate che si ottengono dalle TL (5.5) e dalle (5.38):

$$\begin{aligned} \big(CE_1' - SB_2'\big)\partial_1' + \big(CE_2' + SB_1'\big)\partial_2' + \\ +\big(C\partial_3' + S\partial_0'\big)E_3' \\ = 4\pi\big(C\rho' - Sj_3'/c\big). \end{aligned}$$

Consideriamo ora le due equazioni di Maxwell nel sistema K':

$$\mathrm{div}'\mathbf{E}' = 4\pi\rho', \tag{5.39}$$

$$\mathrm{rot}'\mathbf{B}' = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}'. \tag{5.40}$$

Nella (5.39) il termine a coefficiente di C è l'eq. (5.39) e il termine a coefficiente di S è la componente 3 dell'eq. (5.40) nel sistema K'. Quindi l'eq. di Maxwell $\mathrm{div}\, E = 4\pi\rho$ si mescola con l'altra equazione inomogenea di Maxwell(5.34). Una analisi simile porta a concludere che l'eq. (5.34) in K conduce alle stesse equazioni (5.34) e (5.40) in K'. Infine si potrebbe controllare nello stesso modo che ognuna delle eq. (5.35, 5.36) porta alle corrispondenti equazioni nel sistema K'.

Ciò permette di toccare con mano che le equazioni di Maxwell in un sistema di riferimento corrispondono a combinazioni lineari (con coefficienti C e S) delle eqq. di Maxwell in un sistema che si muove a velocità relativa uniforme

Il formalismo quadridimensionale che viene insegnato negli abituali corsi di Relatività speciale permette di scrivere le eqq. di Maxwell in forma covariante e di esibire formalmente la proprietà di cui è stato dato un esempio: per una trasformazione di Lorentz le equazioni di Maxwell si trasformano una nell'altra e la velocità della luce è invariante. È più difficile trovare il modo di mostrare questa proprietà sulla forma integrata delle leggi dell'elettrodinamica; ma sarebbe interessante e molto utile per l'insegnamento delle basi della elettrodinamica stessa e della Relatività speciale riuscire ad applicare le trasformazioni di Lorentz a questi casi. Per esempio, il caso di una densità costante e uniforme di carica posta lungo un filo verticale, trattato nella lettura precedente, non è difficile da discutere relativisticamente.

Chapter 6

F- Struttura dello spazio - tempo

Un argomento di interesse notevole nella scuola superiore può essere la concezione dello spazio e del tempo, la sua struttura matematica secondo le diverse teorie (newtoniana, relatività speciale o generale) e le proprietà di equivalenza dei sistemi di riferimento per la descrizione dei sistemi fisici. Questo capitolo è quindi dedicato all'esposizione succinta di questi soggetti.

6.1 Meccanica newtoniana

Come sappiamo, per descrivere i moti dei corpi Newton formulò la teoria delle forze e stabilì l'equazione fondamentale della dinamica che connette la forza applicata ad un corpo all'accelerazione che ne risulta:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{6.1}$$

L'equazione si applica ad ogni sistema fisico, terrestre o celeste, formato da corpi materiali soggetti a forze. Ogni corpo è caratterizzato da una massa m.

Secondo Newton le distanze spaziali e le durate temporali restano invariate per osservatori in moto relativo[1]. Inoltre le forze fisiche non dipendono dallo stato di moto ma solo dalle distanze relative e sono pertanto invariate tra i suddetti osservatori. Anche le accelerazioni sono invariate se osservate da sistemi di riferimento in moto relativo a velocità costante.

Quindi l'equazione fondamentale della meccanica (6.1), se vale in un SR, vale in tutti i sistemi in moto a velocità costante rispetto a quello. I SR in cui vale la (6.1) sono detti sistemi inerziali, tutti equivalenti nel senso che ogni termine che compare nella (6.1) resta invariato.

Sia $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ il vettore posizione di un punto in un SR K e $\mathbf{Y}$ la posizione dello stesso punto in un SR K' che si muove con velocità costante $\mathbf{v}$ rispetto a K. Secondo la visione newtoniana le trasformazioni di coordinate da K a K' che lasciano invariata l'equazione fondamentale (6.1) sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= R\mathbf{X} + \mathbf{v}t - \mathbf{A}, \\ t' &= t + t_0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

[1]Notare che l'invarianza delle distanze permette l'uso del concetto di corpo rigido nella meccanica newtoniana.

dove le quantità R, $\mathbf{v}$, $\mathbf{A}$ e t_0 sono indipendenti dal tempo.

R è una matrice 3×3 che rappresenta una rotazione generica degli assi coordinati. Essa è definita da 3 parametri (la direzione dell'asse di rotazione e l'angolo). Il vettore $\mathbf{v}$ è la velocità relativa tra i due sistemi (definita dai 3 parametri delle componenti della velocità) e definisce le trasformazioni di Galileo a velocità costante [13]. Il vettore $\mathbf{A}$ rappresenta la differenza nella posizione dell'origine dei due sistemi di coordinate (traslazione dell'origine) all'istante $t = 0$ e contiene 3 parametri. Infine, nel passare da un sistema all'altro si può cambiare l'istante in cui è stato posto lo zero del tempo; il parametro t_0 rappresenta appunto questa possibilità.

La trasformazione (6.2) lascia invariate le distanze euclidee tra punti dello spazio, le durate e le derivate rispetto al tempo: le distanze tridimensionali e le durate temporali sono invarianti rispetto a trasformazioni tra sistemi inerziali.

Le trasformazioni (6.2) lasciano invariate in forma le equazioni del moto di ogni sistema isolato. Infatti la definizione di "sistema isolato" implica che tutte le forze si esprimano in termini di distanze relative tra corpi che sono invarianti per le operazioni rappresentate dalle (6.2).

Esse formano un gruppo (nel senso matematico) a 10 parametri: 3 per le rotazioni, 3 per le traslazioni, 3 per le trasformazioni di Galileo, uno per le traslazioni del tempo .

Le invarianze per rotazione, traslazione spaziale e traslazione del tempo sono le proprietà generali dello spazio e del tempo newtoniano. L'invarianza per la trasformazione rappresentata da R ($R\mathbf{X}$ è una rotazione degli assi), è l'espressione dell'isotropia dello spazio: tutte le direzioni sono equivalenti. L'invarianza per traslazione dell'origine degli assi ($\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{A}$ è una traslazione) è l'espressione dell'omogeneità dello spazio: tutti i punti dello spazio sono equivalenti. Quella per traslazione del tempo ($t' = t + t_0$) è l'espressione delll'omogeneità del tempo: gli istanti del tempo sono tutti equivalenti.

L'invarianza per trasformazioni di Galileo ($\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{v}t$) è un po' diversa: rappresenta l'equivalenza, ai fini della descrizione del moto, tra sistemi a velocità relativa costante. È la relatività galileiana. Se un'equazione del moto vale in un SR, varrà anche immutata in tutti i SR in moto a velocità relativa costante [13].

Questi sono dunque i postulati sulla struttura dello spazio - tempo e sul comportamento dei sistemi dinamici nella fisica newtoniana.

6.2 Forze fittizie

Newton osserva che esistono accelerazioni che non sono dovute a forze perché il loro valore dipende solo da parametri geometrici e non da posizioni relative di corpi.

Percorrendo una curva ad alta velocità si è soggetti accelerazioni cui non corrispondono forze effettive: su una giostra un pendolo devia dalla verticale; un recipiente pieno di acqua legato ad una corda e fatto girare in un piano verticale non rovescia l'acqua contenuta. Le accelerazioni sperimentate nei moti circolari dipendono dal raggio e dalla velocità della rotazione, non da agenti fisici: sono dovute al moto. In questi sistemi di riferimento non vale la legge fondamentale della dinamica (6.1), a meno di inventare forze fittizie.

Supponiamo che in un dato SR che chiamiamo K valga l'eq. (6.1) con forze fisiche, cioé che K sia un sistema inerziale. Cosideriamo una rotazione e una traslazione del sistema K' dipendenti dal tempo in modo qualunque. La relazione generale tra le coordinate, che sostituisce la (6.1) è[2]

$$\mathbf{X} = R^{-1}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{b}(t). \tag{6.3}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= R^{-1}\frac{d\mathbf{Y}}{dt} + \frac{dR^{-1}}{dt}\mathbf{Y} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \\ \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} &= R^{-1}\frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} + 2\frac{dR^{-1}}{dt}\frac{d\mathbf{Y}}{dt} + \frac{d^2R^{-1}}{dt^2}\mathbf{Y} + \\ &+ \frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2}, \end{aligned}$$

e quindi consideriamo l'accelerazione nel sistema in moto K':

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} &= \frac{R\mathbf{F}}{m} - 2R\frac{dR^{-1}}{dt}\frac{d\mathbf{Y}}{dt} - \\ &- R\frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2} - R\frac{d^2R^{-1}}{dt^2}\mathbf{Y}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Il primo termine a destra dell'= è la forza scritta nel sistema rotante:

$$\frac{R\mathbf{F}}{m} = R\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}.$$

Il secondo termine,

$$-2R\,\frac{dR^{-1}}{dt}\frac{d\mathbf{Y}}{dt},$$

corrisponde alla forza di Coriolis; il terzo termine,

$$-R\,\frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2},$$

corrisponde alla forza di inerzia sperimentata nel sistema K' per via della accelerazione dovuta alla traslazione rappresentata da $\mathbf{b}(t)$; il quarto termine,

$$-R\,\frac{d^2R^{-1}}{dt^2}\mathbf{Y},$$

è il responsabile della forza centrifuga.

Dunque nel sistema K' esistono forze fittizie, dovute alla rotazione del sistema (ricordiamo la giostra). Diremo che il sistema K' non è inerziale.

Conclusione: Si possono distinguere i sistemi in cui vale la (6.1) con forze fisiche (sistemi inerziali) da quelli, in moto vario rispetto ai precedenti, in cui appaiono forze fittizie. L'accelerazione rispetto ai sistemi inerziali è una grandezza assoluta: essa è la stessa per tutti, non dipende dai parametri del particolare sistema inerziale. L'accelerazione inoltre permette di distinguere un sistema inerziale da uno non inerziale: dato un sistema di riferimento a caso, se una parte dell'accelerazione è descrivibile mediante i termini successivi al primo nella formula (6.4), essa è "apparenté', dovuta all'accelerazione del sistema di riferimento rispetto all'insieme dei sistemi inerziali, e il sistema di riferimento non è inerziale. Si può dunque parlare di, e misurare la, accelerazione assoluta. Si noti che non è impossibile usare un SR non inerziale; è necessario aggiungere le "forze fittizié', cioé utilizzare l'eq. (6.4) in luogo della (6.1).

6.3 Newton e lo spazio assoluto

La meccanica newtoniana ha bisogno di postulare soltanto l'insieme di SR inerziali collegati dalle operazioni di invarianza descritte dalle (6.2). Ma per ragioni che qui non ci interessano, Newton trasferì il carattere essenzialmente assoluto dell'accelerazione, inevitabile e inconfutabile, allo spazio assoluto del quale postulò l'esistenza. In parole moderne, tra tutti i sistemi di riferimento inerziali equivalenti ne esiste uno più fondamentale degli altri, perché coincide con lo "spazio assoluto", che per Newton è il laboratorio privilegiato. Esso giustifica la validità della legge fondamentale della dinamica (6.1) e la definizione assoluta delle distanze tridimensionali.

Anche il tempo newtoniano è assoluto. Distanze tra punti e durate temporali sono indipendenti dallo stato di moto perché identiche a quelle misurate nello spazio e nel tempo assoluti. Osservatori che misurino distanze e durate in diversi sistemi di riferimento misurano sempre le stesse porzioni di spazio e di tempo assoluto.

Riportiamo le parole che Newton scrisse a proposito dello spazio ed il tempo nello Scholium Generale (Commento Generale) della seconda edizione dei Principia [14][3]

[2] Attenzione alle differenze tra la (6.2) e la (6.3) in cui le quantità R e $\mathbf{b}$ sono funzioni del tempo.

[3] Il testo è tradotto da me.

Fin qui ho dato le definizioni delle parole che sono meno note e ho spiegato il senso in cui devono essere comprese nel discorso seguente. Non definisco Tempo, Spazio, Luogo e Moto, che sono ben noti a tutti. Voglio solo osservare che il volgo concepisce queste quantità soltanto sotto il profilo della relazione che hanno con corpi sensibili. Ne segue che nascono certi pregiudizi e per rimuoverli sarà conveniente distinguerle in Assolute e Relative, Vere ed Apparenti, Matematiche e Comuni.

I. Il Tempo Assoluto, Vero e Matematico, fluisce uniformemente in sé e per sua natura senza relazione con alcunché di esterno, e con altro nome viene chiamato Durata: il tempo Relativo, Apparente e Volgare, è una qualche misura (sia essa accurata o no) sensibile ed esterna della Durata per mezzo di movimento, la quale è comunemente usata invece del tempo Vero; come per esempio un'Ora, un Giorno, un Mese, un Anno.

II. Lo Spazio Assoluto, per la sua propria essenza, senza relazione con alcunché di esterno, rimane sempre simile e immobile. Lo Spazio Relativo è qualche dimensione mobile o misura degli spazi assoluti; che i nostri sensi determinano, per la sua posizione relativa a corpi; e che è comunemente scambiato per lo spazio immobile; Tale è la dimensione di uno spazio sotterraneo, aereo o celeste, determinato dalla sua posizione rispetto alla Terra. Lo Spazio Assoluto e quello Relativo, sono identici in forma e grandezza; ma essi non restano sempre numericamente gli stessi. Perché se la Terra, per esempio, si muove; un luogo della nostra Aria, che relativamente e rispetto alla Terra, rimane sempre lo stesso, sarà ad un certo tempo una parte dello spazio assoluto in cui l'Aria passa; ad un altro tempo sarà un'altra parte dello stesso, e così, compreso in modo assoluto sarà mutevole in perpetuo.

III. Il Luogo è una porzione di spazio che un corpo occupa, e, a seconda dello spazio, è assoluto o relativo. Dico, una Porzione di Spazio, non la posizione né la superficie esterna del corpo. Perché i luoghi di solidi eguali sono sempre uguali; mentre le loro superfici, per via delle diverse forme, sono spesso diseguali. Le posizioni, propriamente, non hanno quantità né sono esse stesse propriamente i luoghi, quanto piuttosto sono le proprietà dei luoghi. [...]

IV. Il moto Assoluto, è la traslazione di un corpo da un luogo assoluto ad un altro; e il moto Relativo, la traslazione da un luogo relativo ad un altro. Così in una Nave in navigazione, il luogo relativo di un corpo è quella parte della Nave che il Corpo possiede; o quella parte della sua cavità che il Corpo riempie, e che quindi si muove insieme alla Nave: E la quiete Relativa è la permanenza del Corpo nella stessa parte della Nave o della sua cavità. Ma la quiete Reale, assoluta, é la permanenza del Corpo nello stesso luogo di quello Spazio Immobile in cui la Nave stessa, la sua cavità e tutto ciò che contiene si muovono. Ne segue che, se la Terra è davvero in quiete, il Corpo a riposo relativamente alla Nave si muoverà realmente e assolutamente con la stessa velocità che la Nave ha sulla Terra. Ma se anche la Terra si muove, il moto vero ed assoluto del Corpo risulterà, in parte dal vero moto della Terra nello spazio immobile; in parte dal moto relativo della Nave sulla Terra: e se il corpo si muove anche rispetto alla Nave; il suo vero moto risulterà, in parte dal vero moto della Terra, nello spazio immobile, e in parte dai moti relativi sia della Nave sulla Terra che del Corpo nella Nave; e da questi moti relativi risulterà sul moto relativo del Corpo sulla Terra.[...]

Il tempo Assoluto, in Astronomia, si distingue da quello Relativo, per l'Equazione o correzione del tempo volgare[4]. Perché i giorni naturali sono per natura ineguali, benché comunemente vengano considerati uguali, e usati come misura del tempo: gli Astronomi correggono questa diseguaglianza per poter dedurre più accuratamente i moti celesti. Può darsi che non esista un moto equabile che permetta la misura accurata del tempo. Tutti i moti possono essere accelerati e ritardati, ma la progressione vera, o equabile, del tempo assoluto non ammette alcuna variazione. La durata, o perseveranza dell'esistenza delle cose rimane immutata, sia che il moto sia veloce o lento o inesistente.

Come l'ordine delle parti del Tempo è immutabile, così anche l'ordine delle parti nello Spazio [...] Perché, i tempi e gli spazi sono, come se fossero, i Luoghi sia di se stessi che di tutte le altre cose. Tutte le cose sono poste nel Tempo in ordine di successione; e nello spazio nell'ordine di Posizione. È dalla loro essenza o natura che essi siano Luoghi; e che i luoghi primari delle cose sian in movimento è assurdo. Questi sono quindi i luoghi assoluti; e le traslazioni fuori da quei luoghi sono i soli Moti Assoluti.

Ma poichè le parti dello Spazio non possono essere viste né distinte l'una dall'altra dai sensi, allora al loro posto noi usiamo misure sensibili di quelle [...]. E così invece di luoghi e moti assoluti, usiamo quelli relativi; e ciò senza inconvenienti nelle questioni comuni: ma nelle disquisizioni Filosofiche, dovremmo

[4] Newton si riferisce alla "equazione del tempo", differenza tra il passaggio medio al meridiano e il passaggio effettivo nei diversi giorni dell'anno.

astrarre dai sensi e considerare le cose in sé, distinte da quelle che sono solo misure sensibili di esse. Perché può darsi che non esista alcun corpo realmente in quiete al quale i luoghi e i moti degli altri possano essere riferiti.

Ma noi possiamo distinguere la Quiete dal Moto, assoluti e relativi, uno dall'altro, dalle loro Proprietà, Cause ed Effetti. È una proprietà della Quiete, che i corpi realmente in quiete sono in quiete uno rispetto all'altro. E quindi, siccome è possibile, che nelle regioni remote delle Stelle fisse, o forse molto oltre, vi possa essere qualche corpo in quiete assoluta; ma è impossibile sapere dalla posizione relativa di corpi nelle nostre regioni, se ce n'è qualcuno che mantiene la stessa posizione rispetto a quel corpo remoto; ne segue che la quiete assoluta non può essere determinata a partire dalla posizione di corpi nelle nostre regioni.[...]

Le Cause dalle quali si distinguono i moti veri da quelli relativi, uno dall'altro, sono le forze esercitate sui corpi per generare il moto. Il moto vero non è né generato né alterato se non da qualche forza impressa sul corpo che viene mosso; mentre il moto relativo può venir generato o alterato senza alcuna forza impressa al corpo.[...]

Gli effetti che distinguono il moto assoluto da quello relativo sono le forze di allontanamento dall'asse del moto circolare. Perché, non ci sono queste forze in un moto circolare puramente relativo, mentre nel moto circolare vero e assoluto, esse sono maggiori o minori, a seconda della quantità di moto.

[Segue l'esempio del secchio pieno d'acqua posto in rotazione attorno al proprio asse di simmetria:]

...all'inizio la superficie dell'acqua sarà piana come era prima che il recipiente cominciasse a ruotare; ma il recipiente, comunicando gradualmente il proprio moto all'acqua, comincerà a farla ruotare percettibilmente e ritirarsi poco a poco dal centro, e montare ai lati del recipiente, formando una figura concava, (come ho sperimentato) e più veloce è il moto e più l'acqua salirà, finchè infine, svolgendo le sue rivoluzioni nello stesso tempo che il recipiente, essa diventa in quiete nel suo interno. Questa salita dell'acqua mostra la sua tendenza a recedere dall'asse del moto; e il moto circolare vero e assoluto dell'acqua, che è qui direttamente contrario a quello relativo, si rende manifesto, e può essere misurato da questa tendenza. Dapprima, quando il moto relativo dell'acqua nel secchio era massimo non produceva alcuna tendenza a recedere dall'asse: l'acqua non tendeva ad andare verso la circonferenza né a salire verso il bordo del recipiente, ma restava con superficie piana, e quindi il suo Vero moto circolare non era cominciato. Ma poi, quando il moto relativo dell'acqua era diminuito, la salita verso i bordi del recipiente provava la sua tendenza a recedere dall'asse; e questa tendenza mostrava l'aumento continuo del moto circolare reale dell'acqua, finchè non aveva raggiunto la massima grandezza, quando l'acqua era a riposo relativamente al recipiente. E quindi questa tendenza non dipende in alcun modo dalla traslazione dell'acqua rispetto allo spazio ambiente, né il moto circolare vero può venir definito da traslazioni di questo genere. Esiste un solo moto circolare reale per ogni corpo in rotazione, in corrispondenza di una unica capacità di tendere a recedere dal proprio asse del moto, come suo effetto proprio e corrispondente: mentre i moti relativi in uno stesso corpo sono innumerevoli, a seconda delle varie relazioni che esso ha con i differenti corpi esterni. E altre relazioni simili, sono del tutto sprovviste di qualsiasi effetto reale, a parte il fatto che anche essi possono prender parte a quell'unico vero moto. [...] È molto difficile scoprire, e distinguere effettivamente, i moti Veri dei singoli corpi e distinguerli da quelli Apparenti: poiché le parti di quello spazio immobile in cui quei moti si compiono, non vengono in alcun modo sotto l'osservazione dei nostri sensi.

Postulare l'esistenza dello spazio assoluto non era una necessità della fisica newtoniana: bastava postulare l'esistenza dei sistemi inerziali equivalenti tra i quali nessuna esperienza di meccanica può distinguere lo spazio assoluto (è la relatività galileiana della meccanica [13]). Se Newton pose lo spazio assoluto a garante della accelerazione assoluta, fu per altre ragioni, esterne rispetto alla struttura della sua fisica, che non discuteremo qui.

La meccanica newtoniana, si sa, trionfò, con l'applicazione ai moti celesti e a quelli terrestri e con i successivi sviluppi formali. La questione dell'esistenza di uno spazio assoluto rimase nello sfondo e divenne rilevante con lo sviluppo della conoscenza dei fenomeni elettrici e magnetici.

6.4 Relatività speciale e sistemi inerziali

Alla fine dell'800 due problematiche riguardanti in definitiva la struttura dello spazio - tempo si intersecano. La prima riguarda la critica dello spazio assoluto newtoniano inteso come corpo fisico in qualche senso [15]; la seconda, il comportamento dell'elettromagnetismo rispetto a cambiamenti di sistemi inerziali.

Il programma di revisione critica dei fondamenti della meccanica riprende, con ben maggiore conoscenza, il punto di vista relazionista con l'intento di eliminare gli assoluti: lo spazio assoluto e quindi, stavolta, l'accelerazione assoluta. Mach (1838-1916) propone che la accelerazione e l'inerzia siano in realtà definite relativamente alle grandi masse dell'universo [16]. Ma la proposta non costituisce una alternativa reale alla fisica newtoniana perchè Mach non è in grado di fornire una teoria ma soltanto un programma e una speranza, programma non realizzato e speranza delusa.

Ma in realtà è l'elettromagnetismo, ben più che la indagine critica, a portare cambiamenti nella struttura fisica attribuita allo spazio e al tempo (come sempre, la natura ha più forza critica delle costruzioni critiche).

Con la sistemazione formale dei fenomeni elettromagnetici, nella seconda metà dell'800 , il problema dello spazio assoluto assume un aspetto nuovo. I fenomeni elettromagnetici risiedono nello spazio, implicano localizzazione di energia e vibrazioni che trasportano energia e quantità di moto. Dunque dovrà esistere un entità materiale, l'etere, sede dei fenomeni elettromagnetici. Ma allora lo spazio assoluto di Newton, non rivelabile con esperimenti meccanici, sarà forse il sistema in cui l'etere è fermo? E la equivalenza dei sistemi inerziali sarebbe violata per l'elettromagnetismo? Il dibattito è lungo e complesso.

Sappiamo quale via sia stata presa da Einstein: la Relatività speciale elimina l'etere e ripristina l'insieme dei riferimenti equivalenti richiedendo che le equazioni dell'elettromagnetismo, come quelle della meccanica, siano le stesse nell'insieme di sistemi inerziali in moto uniforme relativo[5]. All'inizio del lavoro del 1905 [8] Einstein dice, (con parole in parte già riportate nel capitolo precedente):

> "... i tentativi falliti di individuare qualche movimento della Terra relativamente al "mezzo luminifero" suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all'idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che [...] per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche. Eleveremo questa congettura (il contenuto della quale verrà detto, in quanto segue, "principio di relatività ") al rango di postulato; supporremo inoltre - un postulato, questo, solo apparentemente incompatibile col precedente - che la luce, nello spazio vuoto, si propaghi sempre con una velocità determinata che non dipende dallo stato di moto del corpo che la emette. Questi due postulati bastano per giungere ad una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento, semplice e coerente, fondata sulla teoria di Maxwell per i corpi stazionari. L'introduzione di un "etere luminifero" si manifesterà superflua, tanto più che la concezione che qui illustreremo non avrà bisogno di uno "spazio assolutamente stazionario" corredato di particolari proprietà nè di un vettore velocità assegnato ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici."

[5]Quindi in particolare la velocità della luce deve essere la stessa in tutti questi sistemi.

Per instaurare la nuova relatività che comprende i fenomeni elettromagnetici le leggi di trasformazione tra sistemi inerziali cambiano (trasformazioni di Lorentz), e richiedono che la misura di distanze e di durate dipenda dal moto dell'osservatore. L'unico invariante spazio - temporale è la traiettoria della luce. In termini formali, nella fisica newtoniana sono invarianti rispetto allo stato di moto dell'osservatore sia le distanze infinitesime tra due punti spaziali che le durate temporali:

$$d\mathbf{x}^2 = \text{costante}; \quad dt^2 = \text{costante}. \tag{6.5}$$

Nella Relatività speciale l'unico invariante è

$$ds^2 \equiv d\mathbf{x}^2 - dx_0^2 = \text{costante}. \tag{6.6}$$

Ein-stein deve modificare la meccanica per adattarla alle nuove trasformazioni che non ammettono né corpi rigidi né distanze e durate assolute: così vengono eliminati lo spazio assoluto e il tempo assoluto newtoniani, che peraltro non giocavano alcun ruolo, se non psicologico, nella meccanica.

Rimandiamo al capitolo sulla Relatività speciale per maggiori particolari. Facciamo qui soltanto alcune osservazioni generali.

La vera differenza tra meccanica newtoniana e relatività speciale non sta nell'affermazione di un principio di relatività (presente, seppure diverso, in ambedue), e neppure nella qualità metodologica della teoria: sta nel fatto che la relatività speciale contiene l'elettromagnetismo e descrive i moti ad alta velocità, mentre la fisica newtoniana no. Nell'analizzare il contenuto concettuale di una teoria appare dunque necessario separarne il contenuto matematico e il valore conoscitivo dagli argomenti di carattere meta scientifico che vennero avanzati per favorire la sua adozione.

Dal punto di vista formale la struttura newtoniana e quella relativistica non sono così profondamente diverse: i cambiamenti sono compendiati nell a differenza tra la (6.5) e la (6.6).

I due gruppi di invarianza, quello della relatività newtoniana e quello della relatività speciale einsteiniana, hanno relazioni interessanti. Il gruppo di invarianza della Relatività speciale ha 10 parametri classificati nello stesso modo del gruppo di invarianza newtoniano: 3 parametri per la rotazione degli assi spaziali, 3 parametri per le traslazioni spaziali, 1 parametro per la traslazione temporale, 3 parametri per le trasformazioni (di Lorentz) delle coordinate spaziali e temporali tra due sistemi in moto relativo a velocità costante. Riscriviamo le due trasformazioni nella direzione 3:

Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x_3' &= x_3 C - ct\, S, \\ ct' &= ct\, C - x_3\, S, \end{aligned} \tag{6.7}$$

con

$$
\begin{aligned}
C = \cosh\varphi &= \big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)^{-1/2}, \\
S = \mathrm{senh}\varphi &= \frac{v}{c}\big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

Trasformazioni di Galileo:

$$
\begin{aligned}
x_3' &= x_3 - vt, \\
t' &= t.
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

La parte delle trasformazioni di invarianza che riguarda le rotazioni spaziali e le traslazioni spaziali e temporale è identica per il gruppo della Relatività speciale e per il gruppo della relatività newtoniana. La parte diversa riguarda le trasformazioni tra due sistemi a velocità relativa costante: le (6.7) confrontate con le (6.8). Questa differenza determina il cambiamento tra la struttura dello spazio - tempo newtoniano e quello della Relatività speciale.

Le proprietà geometriche dello spazio - tempo sono date a priori nella Relatività speciale quanto nella fisica newtoniana, e l'accelerazione rispetto ai sistemi inerziali è altrettanto assoluta quanto lo era per Newton. Tuttavia la differenza tra le (6.7) e le (6.8) conduce ad una fisica profondamente diversa.

La Relatività speciale ha eliminato lo spazio e il tempo assoluti di Newton. Ciò è vero storicamente: fino ad Ein-stein quasi tutti hanno continuato a pensare in termini di spazio assoluto e di tempo assoluto. Ma va ricordato che lo spazio e il tempo assoluti newtoniani non sono un postulato necessario nella fisica newtoniana, ma una estensione concettualmente utile che venne introdotta per ragioni non strettamente necessarie. Per la fisica newtoniana basta postulare l'esistenza degli infiniti sistemi inerziali equivalenti. La stessa cosa avviene per la fisica relativistica: si postulano gli infiniti sistemi inerziali equivalenti. È la relazione tra questi sistemi inerziali che è diversa nei due casi.

Da un punto di vista astratto si può fare la seguente considerazione. Seguendo quanto fece Newton nella sua meccanica, diciamo che nella Relatività speciale esiste uno spazio - tempo assoluto. In esso valgono le equazioni del moto relativistiche; è dotato di metrica minkowskiana determinata dalle proprietà del movimento della luce. Per via dell'invarianza rispetto alle (4.6), le stesse equazioni valgono anche in tutti i sistemi in moto con velocità costante nello spazio - tempo assoluto. Sistemi accelerati rispetto a questo spazio - tempo mostrano forze fittizie.

Stiamo seguendo la traccia di Newton. Chi vuole un assoluto potrebbe essere contento. Ma ciò che andava bene per lo spazio e il tempo del 1687 non va più bene per lo spazio - tempo del 1905. In primo luogo lo spazio assoluto di Newton poteva essere intuitivo mentre quello della Relatività speciale no. In secondo luogo la motivazione di Ein-stein era proprio la rimozione di spazio e tempo assoluti! Questo spunto potrebbe essere interessante per le relazioni tra la descrizione matematica dei sistemi fisici e il meta linguaggio di interpretazione.

Osserviamo infine che in Relatività speciale l'inerzia dei corpi non dipende dalla distribuzione delle masse: nonostante l'ispirazione del pensiero di Mach su Einstein, la relatività speciale non è una teoria machiana.

6.5 Relatività Generale

I limiti della Relatività speciale portarono Einstein a concepire la Relatività generale.

Mentre esiste in Relatività speciale un insieme di sistemi inerziali equivalenti per la descrizione dei corpi materiali e dei campi elettromagnetici, i sistemi di riferimento accelerati rispetto a quelli inerziali sono diversi: possiedono un'accelerazione assoluta e l'equazione del moto espressa in termini delle coordinate di questi sistemi non è la stessa che nel caso dei sistemi inerziali.

Questa differenza e il desiderio di includere la gravità nella descrizione relativistica spinsero Einstein ad andare oltre sviluppando due aspetti di un programma fondamentale: l'introduzione della gravitazione nello schema relativistico e l'estensione del principio di relatività a sistemi in moto qualunque, in modo da svincolarsi dalla distinzione fisica, valida tanto in relatività ristretta quanto in meccanica newtoniana, tra sistemi inerziali e non.

Al contrario di quanto era accaduto per la relatività ristretta, Einstein scrisse, tra il 1907 e il 1915, una quindicina di lavori sulla gravitazione e sul principio di equivalenza correggendosi, cambiando punti di vista e ampliando la portata della teoria. Il 24 novembre 1915 Einstein presentò alla Accademia Prussiana di Berlino la versione finale.

Elenchiamo i varii aspetti di questa teoria:

1. La covarianza generale, ovvero come descrivere la fisica in sistemi accelerati rispetto a sistemi inerziali: equivalenza formale tra tutti i sistemi di riferimento.

2. Il principio di equivalenza, ovvero l'equivalenza locale tra l'accelerazione e il campo gravitazionale: come si cancella il campo gravitazionale cadendo liberamente.

3. La gravità, ovvero come lo spazio - tempo si incurva per effetto delle masse e dell'energia: la struttura dello spazio - tempo non è più assegnata a priori.

4. Il movimento delle masse soggette a gravità avviene lungo le curve geodetiche dello spazio - tempo: visione geometrica del moto gravitazionale.

Ripercorriamo il cammino che portò Einstein a formulare la relatività generale. Cominciamo dalla covarianza generale. Non è difficile introdurre un formalismo che descriva sia i sistemi inerziali che quelli accelerati. Le leggi della fisica sono considerate una codificazione dei risultati di osservazioni le quali consistono, in ultima analisi, nell'osservare coincidenze spazio - temporali (nella fisica non quantistica) mediante l'ausilio di un sistema di coordinate spaziali e di orologi. Si può adottare un principio molto plausibile: il comportamento dei sistemi fisici non dipende dal sistema di coordinate scelto per lo spazio e per il tempo, e pertanto le leggi della fisica devono essere esprimibili in qualsiasi sistema di coordinate, comunque definito, purchè reperiscano in modo non ambiguo ogni evento. Se si usa un sistema non inerziale, basterà fornire la relazione tra questo sistema ed un sistema inerziale e definire il modo di trasformarsi delle quantità fisiche coinvolte.

La scrittura delle eqq. del moto in sistemi qualsiasi non è dunque il contenuto essenziale della Relatività generale: sia nella fisica newtoniana che nella Relatività speciale si possono scrivere equazioni valide in sistemi non inerziali: ricordiamo le eqq. (6.4) che sono scritte in un sistema non inerziale. Il problema è che i sistemi accelerati rispetto a quelli inerziali sono distinguibili perché hanno fisica diversa, sia in Newton che in Relatività speciale.

Ricordiamo che lo spazio - tempo della relatività ristretta è una varietà priva di curvatura con metrica $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Le coordinate spaziali e temporali di un evento in due sistemi inerziali differiscono per le operazioni rappresentate dalle (6.2) che possono essere viste come un cambiamento di coordinate rettilinee nello spazio - tempo quadridimensionale.

L'uso di un sistema di riferimento accelerato rispetto ad un sistema inerziale corrisponde in Relatività speciale all'uso di un sistema di coordinate curvilinee nello spazio - tempo di Minkowski, e la geometria differenziale insegna appunto come passare dalle coordinate rettilinee alle coordinate curvilinee. Quindi la descrizione di un sistema in coordinate accelerate rispetto ad un sistema gravitazionale è possibile, sia nella fisica newtoniana che nella Relatività speciale, se si assegnano le regole per la rappresentazione delle grandezze fisiche in coordinate curvilinee (corrispondenza tra gli eventi e i valori delle coordinate, richieste di continuità etc).

La possibilità di usare sistemi di coordinate qualsiasi (SR in moto qualsiasi) non limita la struttura delle leggi fisiche, né pone di per sé i sistemi accelerati sullo stesso piano dei sistemi inerziali. Nei sistemi accelerati esistono accelerazioni non dovute a forze fisiche ma al loro moto rispetto ai sistemi inerziali, che ci permettono di distinguerli da quelli inerziali. Possiamo scrivere le equazioni dell'elettromagnetismo usando un sistema di coordinate solidale con una giostra in moto, ma ciò non cambia il fatto che nella giostra misureremo accelerazioni che non sono dovute a forze fisiche. Per avere equivalenza tra tutti i sistemi di riferimento non basta scrivere le leggi di trasformazione tra sistemi in moto qualunque: bisogna che le accelerazioni diverse che esistono in questi sistemi siano egualmente attribuibili ad effetti fisici, altrimenti, nonostante il formalismo, la distinzione resta.

Le novità della Relatività generale rispetto alla equivalenza di tutti i sistemi di riferimento sono le seguenti.

- Lo spazio -tempo ammette una metrica generalizzata. Essa serve a scrivere in modo formalmente covariante le equazioni della fisica, cioé che la loro forma sia la stessa per tutti i sistemi di riferimento, cioé la formulazione dei principii fisici in modo formalmente valido per sistemi di riferimento in moto qualunque. Se la metrica descrive uno spazio - tempo di tipo Minkmowski, si tratta soltanto dell'introduzione di un insieme di coordinate curvilinee e non vi è gravitazione. In uno spazio - tempo di Minkowski questo è il modo (di cui si è gia' parlato) di descrivere sistemi non inerziali: coordinate curvilinee in uno spazio - tempo minkowskiano.
- Se la metrica descrive invece una varietà dotata di curvatura, questo è un vero effetto gravitazionale. Le masse incurvano lo spazio - tempo.
- Supponiamo di fare solo misure *locali*, che NON possono rilevare se c'è curvatura nello spazio-tempo intorno al laboratorio. Non e' possibile stabilire solo con queste misure se gli effetti di tipo accelerazione sperimentati in un sistema di riferimento in cui si stanno eseguendo gli esperimenti sono dovuti all'accelerazione rispetto a sistemi inerziali (forze "spurie" dovute a coordinate curvilinee) oppure alla presenza di campo gravitazionale (forza "fisica", curvatura). La distinzione richiede misure di curvatura (forze di marea).

  Cade così la distinzione tra sistemi inerziali (forze fisiche) e sistemi accelerati (quelli dotati di forze spurie). In ambedue i sistemi ogni accelerazione può essere ricondotta ad una forza fisica.

Einstein si basò (principio di equivalenza) sull'identificazione di massa inerziale e massa gravitazionale enunciata da Galileo e incorporata nella meccanica newtoniana: in ogni campo gravitazionale tutti i corpi cadono con la stessa legge del moto, indipendentemente dalla loro massa. Se questo è vero, un campo gravitazionale, nella porzione di spazio e di tempo in cui è uniforme e costante (cioè localmente), ha gli stessi effetti di una accelerazione; i due effetti sono indistinguibili.

Consideriamo un laboratorio contenente persone e strumenti di misura, che sia tenuto fermo in un campo gravitazionale. Tutti i corpi contenuti sentono l'attrazione gravitazionale e se gli oggetti interni vengono liberati dall'appoggio si misura una accelerazione eguale per tutti. Questi effetti sono identici a quelli sperimentati all'interno di un laboratorio accelerato verso "l'alto" in assenza del campo gravitazionale. Le persone chiuse nella camera non sanno se stanno accelerando verso "l'alto" o se una forza gravitazionale le attrae nella direzione opposta.

Ne deduciamo una regola generale. I sistemi accelerati sono localmente indistinguibili da sistemi sottoposti ad una attrazione gravitazionale perchè l'effetto è identico. Pertanto le accelerazioni "spurié' possono essere spiegate con una causa fisica: una attrazione gravitazionale.

Quindi il principio di equivalenza pone tutti gli osservatori sullo stesso piano pur di considerare il campo gravitazionale tra le grandezze esistenti nel mondo fisico. Questo basta per preservare l'idea della relatività di tutti i moti. Anche l'accelerazione ha dunque una sua relatività, a prezzo dell'introduzione del campo gravitazionale. Questo copre una parte del programma di Einstein: è stabilita l'equivalenza di tutti i sistemi.

Inoltre una forza gravitazionale è annullata localmente da una accelerazione opportuna del sistema di riferimento. Consideriamo un laboratorio non soggetto a forze esterne diverse dalla gravità e quindi in caduta libera nel campo gravitazionale. Gli oggetti racchiusi cadono tutti con la stessa accelerazione rispetto ad un osservatore esterno, mentre i loro moti relativi non sono modificati dalla caduta. Si possono includere i sistemi in interazione elettromagnetica e il principio di equivalenza assume la forma più generale: in un laboratorio non soggetto a vincoli esterni (in caduta libera) la fisica locale è descritta dalla relatività ristretta. Per un osservatore esterno esiste accelerazione e gravità; per l'osservatore in caduta libera non esiste gravità e egli ritiene di costituire un sistema inerziale.

Quindi, in ogni punto dello spazio in ogni istante del tempo, siano presenti o no campi gravitazionali, esiste un sistema di riferimento (detto "in caduta libera") in cui localmente non c'è campo gravitazionale e valgono le leggi della relatività ristretta[6].

Per esempio, il Sole attrae ogni materia della Terra. L'accelerazione è la stessa per tutti (se prescindiamo da alcune piccole differenze dovute alle disomogeneità del campo gravitazionale solare sulla scala terrestre che sono tra l'altro la causa del contributo del Sole alle maree). Pertanto la posizione relativa dei corpi non cambia, sono tutti soggetti all'attrazione solare che imprime un'accelerazione molto piccola (0.6 cm/sec^2), sufficiente però a farci giungere sul Sole in 2 mesi e 3 settimane, se non avessimo fortunatamente una velocità tangenziale di circa 30 Km/sec. Poichè cadiamo, non risentiamo di questa attrazione e un laboratorio terrestre (non troppo grande altrimenti diventano evidenti le forze di marea) è approssimativamente un sistema inerziale.

Ma su regioni spazio - temporali estese, tali che il campo gravitazionale sia non costante e/o non omogeneo, l'effetto del campo gravitazionale non può essere annullato da una accelerazione; un esempio chiarirà la questione. Per esempio, le maree terestri sono dovute ll'inomogeneità del campo gravitazionale della Luna e del Sole tra le diverse zone della Terra, e le maree possono essere misurate perfettamente. Esse sono la conseguenza di disomogeneità nel campo gravitazionale in cui la Terra è immersa.

Inoltre, il campo gravitazionale prodotto dalla stessa Terra è non omogeneo: due oggetti in caduta libera, uno sopra Torino e una sopra Sydney, hanno un moto relativo non uniforme ma accelerato , conseguenza dell'inomogeneità della gravit'a. L'accelerazione relativa tra i due sistemi inerziali è l'effetto essenziale della gravità. Il campo gravitazionale può essere sempre annullato localmente mediante una opportuna caduta libera, grazie al principio di equivalenza, ma se non è costante (nello spazio e/o nel tempo) il suo effetto si rivela, su distanze spazio - temporali opportunamente grandi, perchè sistemi di riferimento localmente inerziali hanno una accelerazione relativa.

I sistemi in caduta libera su Torino e su Sydney, essendo localmente inerziali, definiscono localmente coordinate spazio - temporali rettilinee.[7] Ma se prolungassimo le coordinate in caduta a Torino fino a Sydney, vedremmo che non coincidono con quelle del sistema in caduta libera a Sydney e che esiste un'accelerazione relativa tra i due sistemi (basta pensare a come sono dirette le accelerazioni di gravità nelle due città).

Questo implica che lo spazio - tempo è curvo (non è solo lo spazio tridimensionale ad essere curvo, ma l'intero spazio - tempo). Purtroppo ci manca il tempo per chiarire che quanto detto prima sull'effetto del campo gravitazionale implica la curvatura dello spazio - tempo. Diamo solo qualche cenno.

Se lo spazio fosse a due dimensioni tutto ciò potrebbe essere visto in modo intuitivo. Uno spazio a due dimensioni può essere rappresentato come una superficie immersa, per esempio, in uno spazio a tre dimensioni. (Le proprietà della superficie sono intrinseche, non dipendono dalla dimensionalità dello spazio in cui vengono immerse). Anche se la superficie non è piatta, localmente nelle vicinanze di ogni suo punto esiste un sistema approssimato di coordinate rettilinee, quelle del piano tangente alla superficie in quel punto. Ma il piano tangente in un punto non è lo stesso del piano tangente in un altro punto, se la superficie è curva.

Lo spazio - tempo ha quattro dimensioni, e il "piano tangente allo spazio - tempo in un suo punto quadridimensionale (un evento) ha anche esso quattro dimensioni; localmente rappresenta il sistema di riferimento inerziale in caduta libera, dotato di geometria di relatività ristretta, che esiste in quel punto dello spazio - tempo. Questo "piano" tangente in un punto non coincide col "piano" tangente che rappresenta localmente il sistema inerziale in caduta libera in un punto diverso dello spazio - tempo, come abbiamo visto per le cadute libere a Torino e a Sydney.

La curvatura dello spazio - tempo può essere mostrata da un esempio. Supponiamo che a 10 000 Km di distanza dalla superficie della Terra si trovi una grande nube sferica di particelle di sabbia che cominciano a cadere. Il diametro della nube è grande, mettiamo, di 5 000 Km. Cadendo, le particelle non sentono attrazione gravitazionale perchè sono in caduta libera; ciascuna di esse fa i suoi esperimenti (locali) e conclude di essere un sistema inerziale. Ma le particelle più vicine alla Terra sono soggette ad una accelerazione maggiore; di conseguenza la sfera si allunga nella direzione della Terra. Al tempo stesso le particelle laterali convergono verso il centro della Terra e quindi si avvicinano

[6]Ne esistono infiniti, perchè se ne esiste uno, tutti quelli comunque orientati e in moto rettilineo uniforme rispetto a quello sono sistemi di riferimento inerziali.

[7]Se vogliamo dare un significato quantitativo a questa locuzione dobbiamo sapere con quale precisione misuriamo disomogeneità della gravità. "Localmenté" significa "entro i limiti in cui non rileviamo disomogeneità data la sensibilità dei nostri strumenti di misura".

tra loro. Dopo un po' la nube non è più sferica, si è ristretta orizzontalmente e allungata verticalmente e la distribuzione di velocità non è più' uniforme. Osservandosi, le particelle concludono che lo spazio - tempo non è minkowskiano. Infatti ciascuna di esse ritiene a buona ragione di costituire un sistema inerziale flottante nello spazio, eppure posizione e velocità relativa tra questi sistemi inerziali sono cambiate. Questo effetto non dipende dal materiale di cui sono costituite le particelle: è allora una proprietà dello spazio - tempo. Chi distorce lo spazio - tempo? la gravità terrestre.

La struttura della curvatura dello spazio - tempo dipende dalla materia contenuta e si ottiene risolvendo le equazioni di Einstein con contenuto di materia assegnato. Lo spazio - tempo cessa di essere rigido ed è determinato volta per volta dalla materia (e dalle condizioni al contorno). A sua volta la materia si muove in questo spazio - tempo curvo seguendone le linee geodetiche.

La concezione dello spazio - tempo è profondamente cambiata: da spazio rigido euclideo e tempo infinito e assoluto siamo giunti ad uno spazio - tempo la cui struttura è una grandezza dinamica da determinare, caso per caso, partendo dalla distribuzione della materia e risolvendo le equazioni del moto, esercizio che ogni studente di relatività può divertirsi a svolgere in casi semplici. Le richieste a priori sullo spazio - tempo della Relatività generale sono poche. La topologia locale dello spazio deve essere R_4 (3 dimensioni spaziali e 1 dimensione temporale). La struttura metrica è data dalle soluzioni delle eqq. di Einstein e dipende dalla materia

Nasce anche il problema della cosmologia relativistica: la determinazione delle proprietà dello spazio - tempo globale dell'universo in cui viviamo in base alle caratteristiche della materia contenuta.

Chapter 7

G- Cosmologia

7.1 Cosmologia di Einstein

Nel 1916 Einstein scrisse una presentazione completa della nuova teoria che conteneva alcuni effetti fondamentali: il calcolo della variazione indotta nel perielio di Mercurio dagli effetti di relativita‘ generale, l'incurvamento dei raggi di luce nel passare nelle vicinanze del Sole e il rallentamento del periodo di un orologio posto in un campo gravitazionale. La misura dell'incurvamento della luce era ancora da venire (eclisse del 29 maggio 1919), l'unico controllo possibile riguardava il moto del perielio di Mercurio, e il calcolo basato sulla relativita‘ generale spiego‘ esattamente la discrepanza tra le misure e la teoria non relativistica.

In quell'anno Einstein discusse anche altri aspetti della teoria: questioni di principio, l'emissione di onde gravitazionali e l'effetto lente, conseguenza dell'incurvamento della luce intorno ad una stella (anche questo effetto e‘ stato puntualmente verificato) Non male: L'evoluzione della relativita‘ generale nei decenni seguenti riguardera‘ la problematica studiata da Einstein in quell'anno e nell'anno successivo.

Nel 1917 Einstein affronto‘ la cosmologia applicando la relativita‘ generale alla struttura del cosmo. La relativita‘ generale e‘ una teoria molto innovativa: si tratta di determinare la struttura globale dello spazio - tempo in interazione con la materia in esso contenuta. Poiche‘ la materia appare uniformemente distribuita su larga scala, l'ipotesi semplificatrice di ogni cosmologia globale e‘ che la densita‘ di materia sia uniforme, riservandosi di trattare come perturbazioni le disomogeneita‘. Arriviamo cosi‘ alla curiosa storia della cosmologia einsteiniana e dell'introduzione del termine cosmologico.

Einstein cerca una soluzione in cui il volume dello spazio tridimensionale sia finito e quindi anche la quantita‘ di materia. Le ragioni sono concettuli e riguardano una concezione dell'inerzia che Einstein sviluppa ispirandosi alle idee di Mach. Il "principio di Mach" da lui enunciato e‘ il seguente: "il campo inerziale [cioe' la struttura metrica] dell'universo deve essere determinato completamente dalla distribuzione di massa ed energia nell'universo".

Ma se lo spazio fosse infinito, argomenta Einstein, bisognerebbe introdurre anche condizioni all'infinito per risolvere le equazioni della relativita‘ generale. Secondo Einstein, cio‘ violerebbe il principio di Mach: la soluzione non sarebbe determinata soltanto dalla materia. Lo spazio dunque, conclude Einstein, sara‘ finito. E poiche‘ con le ipotesi fatte la struttura spaziale deve essere uniforme, Einstein propone che lo spazio abbia la struttura di una sfera S_3 , spazio tridimensionale a curvatura costante e volume finito.

Un modo di raffigurarsi questo spazio e‘ di pensare ad un globo sferico in uno spazio euclideo a 4 dimensioni: S_3 e‘ il volume a tre dimensioni che circonda il globo. Ma attenzione: lo spazio a 4 dimensioni e‘ fittizio, un puro artificio per rappresentarsi S_3 in analogia a quanto si fa con la superficie a due dimensioni di un globo tridimensionale. Le proprieta‘ metriche di S_3 sono intrinseche, non dipendono dall'immersione in uno spazio di dimensionalita‘ maggiore, cioe‘ dal pensare S_3 come il contorno di una figura di dimensioni maggiori.

S_3 non ha confini ma ha un volume finito. Se il raggio di questa sfera e‘ a, il suo volume (il volume dell'universo) e‘ $V = 2\pi a^3$. Un viandante che camminasse sempre dritto tornerebbe allo stesso luogo dalla direzione opposta. Ne segue che la massa totale dell'universo e‘ finita poiche‘ la densita‘ e‘ finita e costante.

Einstein opta per questo universo chiuso. Ma le sue equazioni non ammettono una soluzione statica; sotto l'azione delle forze attrattive tra le porzioni di materia l'universo si restringerebbe implodendo fino a ridurre a zero il volume e la densita‘ di materia diventerebbe infinita. Per rendere statico il sistema bisogna bilanciare l'attrazione gravitazionale con una nuova forza. Cosi‘ Einstein modifica le sue equazioni generali introducendovi un termine "cosmologico" repulsivo.

La soluzione adesso ha le caratteristiche richieste da Einstein: l'universo e‘ statico e tenuto in piedi dalla materia e la sua curvatura e‘ proporzionale alla densita‘ di materia. Il termine cosmologico ha un effetto trascurabile a piccole distanze e cosi‘ il perielio di Mercurio e il limite newtoniano della gravitazione sono salvi; la correzione modifica solo la gravita‘ a grandi distanze, permettendo di definire un universo chiuso statico che realizza, secondo Einstein, quel "principio di Mach" a lui caro.

Fatale decisione: guidato da principi generali Einstein non da‘ rilevanza a quelle soluzioni non statiche in cui la curvatura dell'universo varia col tempo, che sono alla base della nostra cosmologia, mentre si convince del significato machiano, profondo del termine cosmologico. Anni dopo dichiarera' "La costante cosmologica e' stata la mia peggiore cantonata".

Fatale e' anche la via che Einstein traccia: il termine cosmologico ritornera' puntualmente ad essere proposto tutte le volte che le equazioni richiedono la presenza di un parametro in piu' per spiegare le osservazioni. Se ne discute anche oggi, seppure in termini diversi.

Se ci piace oggi stupirci per l'occasione di concepire un universo non statico, mancata da Einstein, e' pero' necessario sottolineare quanto stravolgente fosse la novita' della cosmologia relativistica: la struttura dello spazio - tempo e' determinata da una equazione che la connette alla densita' di materia; la soluzione descrive un universo uniforme e statico, lo spazio e' curvo, richiuso in se stesso sotto l'effetto della materia, il suo volume e la quantita' di materia contenuta sono finiti.

Per una stima del raggio dell'universo statico di Einstein potremmo usare la stima di Hubble negli anni '30 per la densita' di materia nell'universo, intorno a 1,3 - 1,5 $\times 10^{-30}$ grammi al centimetro cubo. Con questo valore il raggio dell'universo di Einstein sarebbe di 3×10^{28} centimetri. Ma la misura di Hubble era ancora da venire, quando Einstein formulo' il modello.

Non passa molto tempo e la certezza che la costante cosmologica soddisfi la sua interpretazione machiana dell'inerzia e' scossa da un risultato: nel 1917 Willem de Sitter (1872-1934) mantiene il termine cosmologico ma elimina la materia e mostra che esiste una soluzione. L'universo vuoto di de Sitter si espande esponenzialmente per effetto della forza cosmologica. Lo spazio non e'dunque sorretto dalla materia, il modello non soddisfa l'interpretazione einsteiniana del principio di Mach, secondo cui la materia determina lo spazio.

Particelle di prova poste nell'universo di de Sitter partecipano all'espansione: sia la loro distanza che la velocita' relativa aumentano nel tempo. Analogamente, il modello prevede uno spostamento delle frequenze delle onde elettromagnetiche emesse dagli atomi. Se una particella emette una radiazione di data frequenza, l'osservatore nell'universo di de Sitter vede una frequenza minore, tanto piu' piccola quanto maggiore e' la distanza ("spostamento verso il rosso delle righe spettrali"). L'osservazione degli spettri di luce emessi dalle stelle potrebbe quindi decidere se un universo e' di de Sitter.

Nel 1922 il russo Aleksander A. Friedmann (1888-1925), lavorando isolato a Leningrado, compi' il passo giusto, risolvendo le equazioni della relativita' generale (senza termine cosmologico) per un universo con densita' uniforme ed esaminando il comportamento delle soluzioni. Non esistono soluzioni statiche: l'universo deve cambiare nel tempo. Inoltre esiste un punto singolare nel passato al quale la soluzione diventa singolare: il fattore di scala che determina le distanze nell'universo si annulla e la densita' di materia diventa infinita. Per tempi successivi il raggio aumenta, l'universo diventa regolare e a densita' finita. Non si puo' prolungare la soluzione ad un tempo precedente l'istante singolare. Appare per la prima volta il concetto di inizio nel tempo, la Grande Esplosione (Big Bang). E poiche' quello che inizia e' l'universo, quell'istante e' anche l'inizio del tempo e dello spazio.

Einstein e' sorpreso dell'esistenza di soluzioni non statiche, pensa ad un errore di Friedmann, ma si ricrede e scrive:

> In una nota precedente ho criticato il lavoro citato [di Friedmann]. La mia opposizione era basata [...] su un [mio] errore di calcolo. Sono convinto che i risultati del signor Friedmann sono giusti e chiarificatori. Essi dimostrano che, oltre alle soluzioni statiche delle equazioni di campo esistono soluzioni variabili nel tempo con struttura spazialmente simmetrica.

Piu' tardi, nel 1932, Einstein stesso, in collaborazione con de Sitter, studiera' un modello evolutivo di tipo Friedmann con spazio piatto, nascita ad un istante finito nel tempo ed espansione infinita. Questo modello e' una delle possibilita' attualmente in discussione per l'universo.

All'inizio degli anni '30 ebbero un certo interesse anche le cosmologie di Lemaitre e Eddington - Lemaitre. Si trattava di modelli di universi, derivati da quello statico di Einstein, con forza cosmologica e nascita ad un istante finito, che passano un lungo periodo intorno alle condizioni dell'universo statico di Einstein o vi tendono per un lasso infinito di tempo. Questi modelli mostravano anche che l'universo statico di Einstein non e' stabile: ogni sua perturbazione conduce o al crollo o a una dilatazione senza fine. La prima proposta di Einstein, l'universo reso statico dalla presenza della forza cosmologica, non e' accettabile teoricamente.

7.2 Principii delle cosmologie relativistiche

Dopo la scoperta di Friedmann, Hermann Weyl (1885 - 1955) pose nel 1923 le basi per la teoria generale dei modelli cosmologici enunciando un insieme di regole che, tradotte in prosa, possono essere enunciate come segue.

Come principio iniziale Weyl dichiara che si devono usare teorie verificate nelle regioni da noi conosciute: quindi si applichera' la relativita' generale. Ora, l'osservazione dei nostri dintorni nel cosmo (il gruppo locale di galassie che comprende tra l'altro Andromeda) mostra che la distribuzione delle galassie e' in media uniforme, e che le galassie vicine hanno differenze di velocita' piccole e casuali. Anche nei gruppi lontani accade la stessa cosa: galassie vicine tra loro hanno velocita' relative piccole. E' dunque sensato supporre che lo spazio intorno a noi non abbia proprieta' diverse dalla media dell'universo (per lo meno di quello osservato). E' il cosiddetto Principio Cosmologico.

Pertanto, a parte piccoli moti locali e diversita' locali nella distribuzione, le galassie costituiscono un sistema omogeneo di corpi in caduta libera nel cosmo, come le particelle di sabbia che abbiamo visto poc'anzi. Esse stanno navigando nell'universo, non si scontrano continuamente come le molecole di un gas. I loro cammini si possono essere incontrati soltanto ad un tempo nel passato in cui la struttura dell'universo relativistico era singolare (o nel futuro, o forse in ambedue i casi). Questa deve essere la base della cosmologia.

Da questa uniformita' spaziale dell'universo discende una importante conseguenza sul tempo. In generale in relativita' il ritmo del tempo e' diverso da punto a punto e da istante a istante nello spazio - tempo, poiche' dipende dai campi gravitazionali e dal moto dell'osservatore. Nei modelli retti dai principi di Weyl l'uniformita' dell'universo implica l'esistenza di un tempo cosmico identico per tutti gli osservatori in caduta libera che vedono l'universo come un sistema omogeneo e isotropo di galassie (in sostanza quelli solidali con la media delle galassie vicine). Ciascuno di questi vede l'universo in media identico e misura lo stesso ritmo di successione dei fenomeni (per esempio, le frequenze atomiche emesse dagli atomi delle galassie). Questo insieme di osservatori ha un tempo comune, detto tempo cosmico. L'esistenza di un tempo cosmico e' una proprieta' della classe di soluzioni che descrivono un cosmo spazialmente omogeneo e isotropo.

Usando questi principii si possono ottenere i varii modelli di cosmologia relativistica senza altre difficolta' che quelle degli sviluppi matematici. I particolari di questi modelli verranno discussi nel quadro della esposizione del modello di riferimento di cui formano la base.

L'era della cosmologia di osservazione e del controllo delle previsioni teoriche stava per cominciare.

7.3 Le distanze astronomiche

L'astronomo non puo' percorrere ne' ricoprire con un lungo metro le distanze galattiche o intergalattiche. Dalla Terra le misure di posizione dei corpi celesti sono puramente angolari. L'unica base per misurare le distanze come in topografia e' data dal moto annuo della Terra intorno al Sole. Per assegnare le distanze dei corpi che formano l'universo e' necessario impiegare varie tecniche, spesso dipendenti l'una dall'altra in scala. L'errore nella valutazione di una di queste scale comporta un errore a tutte le scale successive.

Aristarco di Samo (circa 310 - 230 a.C.) aveva ottenuto per la distanza Terra - Luna il valore di 10 diametri terrestri (il valore moderno e' 30) e aveva stimato la distanza Terra - Sole eguale a circa 20 distanze Terra - Luna, 200 diametri terrestri. Ma per conoscere il valore del diametro terrestre bisogna attendere la misura di Eratostene (276 - 195 a.C.): 250 000 stadii, valutazione abbastanza precisa se lo stadio corrisponde a 167 metri, ma del 20 % maggiore del valore esatto se si usa la dimensione dello stadio di Olimpia. Cio' portava la stima di Aristarco della distanza Terra - Sole a circa 2,4 milioni di chilometri.

Ipparco (attivo 160 - 130 a.C.) corresse la valutazione portandola a 630 diametri terrestri (circa 8 milioni di chilometri). La misura corrisponde al 5,4 % del valore moderno (11700 diametri, circa 150 milioni di chilometri); l'errore degli astronomi antichi era dovuto alla grande difficolta' della misura delll'angolo sotto cui il Sole vede la distanza Terra - Luna, circa 8,5 minuti di arco.

Aristarco, che riteneva che la Terra girasse intorno al Sole, aveva dedotto che la sfera delle stelle era a distanza incommensurabile. Ma successivamente la concezione che la Terra fosse al centro dell'universo tolse l'unica base topografica che rendesse possibile valutare le distanze dei pianeti. Si ricorreva ad altre considerazioni, come i contatti tra gli strati sferici che portavano i pianeti, per valutarne le distanze.

Copernico, riprendendo la concezione di Aristarco del Sole al centro dell'universo, uso' l'orbita della Terra come base e valuto' che le distanze dal Sole di Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, in unita' di distanza Terra - Sole, fossero rispettivamente 0,38; 0.72; 1.52; 5,22; 9,17; valori molto vicini a quelli attuali. (Copernico usava per la distanza Terra - Sole il valore stimato dagli antichi, ma questa e' una questione diversa.)

La scala delle distanze somiglia al finale della filastrocca "Petruccio va a prendere il cavoluccio per il tuo pa' che ha male": si tratta di una successione di concatenazioni. Dalla distanza Alessandria - Assuan si ottenne la dimensione della Terra, da cui la distanza Terra - Luna, da cui quella Terra - Sole, da cui quelle dei pianeti e delle stelle piu' vicine; da queste si ottenne la luminosita' assolute di alcuni tipi di stelle, che permise di calibrare la relazione periodo - luminosita' delle Cefeidi, che permise di misurare la distanza delle galassie vicine, la cui conoscenza permise di calibrare la luminosita' delle stelle piu' brillanti e poi degli ammassi globulari nelle galassie, da cui si ottenne la calibrazione delle luminosita' delle galassie a spirale ed ellittiche che permise di stabilire la proporzionalita' tra lo spostamento verso il rosso e la distanza per galassie che oggi viene usato come indicatore della distanza per i corpi piu' lontani.

Se molto tempo era passato da Copernico, il cosmo degli astronomi nel 1917 era ancora piuttosto ridotto, composto, a parte astri vaganti come i pianeti e le comete, di stelle e nebulose. La distanza delle stelle piu' vicine, la forma della Via Lattea (la nostra galassia) erano note, ma non cosi' le sue dimensioni globali ne' la distanza delle nebulose a spirale.

Le valutazioni delle dimensioni della Via Lattea oscillavano tra due modelli. L'astronomo olandese Jacobus Kapteyn (1851-1922) valutava la scala della distribuzione delle stelle usando il metodo del parallasse delle stelle piu' vicine e i moti propri rilevabili nelle stelle; osservando che la densita' stellare decresce allontanandosi dal Sole, aveva proposto nel 1901 che la Via Lattea fosse un disco spesso circa 10 000 anni luce, dal diametro di 30 000 anni luce, e che il Sole stesse vicino al centro. (Esistevano poche prove della presenza di polvere stellare, causa reale del diradarsi apparente delle stelle allontanandosi dal Sole.) Harlow Shapley (1885 - 1972) misuro' invece la distribuzione degli ammassi globulari, da cui dedusse correttamente la posizione del centro della Via Lattea. La sua stima del diametro era

10 volte piu' grande di quella di Kapteyn: 300 000 anni luce. (La verita' sta tra i due modelli: il diametro e' di circa 100 000 anni luce.)

Un altro capitolo della questione riguarda le nebulose. Con i progressi dei telescopi e soprattutto con i metodi della spettroscopia si era trovato che molte delle nebulose catalogate dalla fine del '700 sono distribuzioni di materia interne alla Via Lattea. Nel 1917 restavano irrisolte le cosiddette nebulose a spirale, per le quali vi erano due proposte molto diverse: per Shapley e alcuni si trattava di corpi interni alla Via Lattea, mentre per Heber Curtis (1872 - 1942) e altri si trattava di sistemi di stelle esterni e analoghi alla Via Lattea. Se a sostenere questi ultimi andarono alcune misure, come quella di Ernst Öpik che stimo' in 1,3 milioni di anni luce la distanza della nebulosa di Andromeda, in favore dei primi andavano altre osservazioni, come quella di un bravo astronomo olandese che ritenne di aver misurato la rotazione di Andromeda, per cui concluse che la nebulosa stava all'interno della Via Lattea (si trattava di analisi ai limiti dei mezzi sperimentali e l'evidenza sperimentale risulto' poi sbagliata).

Nessuno di costoro era superficiale ne' sbagliava in modo evidente: il dibattito rispecchia la difficolta' di fare l'astronomia con un solo universo osservato da un solo punto di vista, la Terra, con la visibilita' parzialmente ostruita dalla stessa Via Lattea e dalla polvere interstellare. Questi erano i termini del dibattito sul cosmo al tempo in cui Einstein fece il primo modello cosmologico.

Il quadro cambio' il 1 gennaio 1925, quando l'astronomo Edwin Hubble (1889 - 1953) che lavorava a Mount Wilson, presso Los Angeles, invio' un messaggio al convegno di capo d'anno della American Astronomic Society a New York, riferendo il suo lavoro degli ultimi 14 mesi che gli aveva permesso di determinare la distanza della nebulosa di Andromeda e di una nebulosa vicina, M33.

Hubble aveva scoperto alcune stelle variabili Cefeidi in Andromeda. Per queste stelle esiste una relazione fissa tra periodo e luminosita' determinata da Henrietta Swan Leavitt (1868-1921) nel 1912: misurando il periodo si conosce la quantita' di luce emessa). Hubble aveva trovato 12 Cefeidi in Andromeda e 22 nella nebulosa compagna M33. Dalla misura della luce raccolta, conoscendo la luminosita' assoluta, aveva potuto determinare la distanza di queste stelle. Secondo la calibrazione delle Cefeidi, Hubble concluse che Andromeda distava 900 000 anni luce (vedremo che la calibrazione era sbagliata: Andromeda dista 2,2 milioni di anni luce). Hubble aveva risolto la questione: le nebulose a spirale non stanno nella Via Lattea, sono "universi" (come si diceva allora) simili alla Via Lattea; galassie (come si disse poi). La disputa era risolta.

7.4 L'espansione dell'universo

L'effetto Doppler acustico e' ben noto dalla vita quotidiana: il tono della sirena di un'auto e' piu' alto quando si avvicina che quando si allontana. Un effettto simile avviene per un'onda luminosa che viene emessa con una definita frequenza (analoga al tono delle onde acustiche). Noi vediamo una luce di frequenza maggiore (tono piu' acuto) se la sorgente si muove verso di noi, o di frequenza minore se la sorgente si allontana. Lo spostamento percentuale di frequenza e' (a meno di correzioni relativistiche) proporzionale alla velocita' con cui la sorgente si allontana da noi.

Se una sorgente si allontana diciamo che la sua luce e' "spostata verso il rosso" perche' il rosso e' una frequenza bassa, tra quelle visibili; inversamente, se una sorgente si avvicina, parleremo di "spostamento verso il blu" perche' il blu e' una frequenza alta nello spettro delle frequenze visibili. Il linguaggio e' rimasto anche se lo spettro delle frequenze esaminate non e' necessariamente quello visibile.

Gia' nel secondo decennio del secolo l'astronomo Vesto Slipher del Lowell Observatory, osservando gli spettri emessi dalle galassie, aveva notato che mostrano uno spostamento verso il rosso e quindi si allontanano. Hubble lavoro' sistematicamente al problema e il 17 gennaio 1929 invio' ai Proceedings della National Academy of Sciences un lavoro dal titolo "una relazione tra la distanza e la velocita' radiale delle nebulose extra galattiche" il cui contenuto cambio' la visione del cosmo.

Esaminando gli spettri di 18 galassie Hubble mostro' che la velocita' di allontanamento, misurata dallo spostamento verso il rosso, e' proporzionale alla distanza. La relazione trovata e'

$$v = H_0 d \tag{7.1}$$

dove v e' la velocita' di allontanamento, d la distanza e la costante H_0 si chiama oggi costante di Hubble.

La relazione di Hubble non privilegia la Terra, la stessa considerazione varrebbe per ogni galassia: secondo la relazione di Hubble ogni galassia vede le altre allontanari con la stessa legge della proporzionalita' tra velocita' e distanza. La relazione trovata da Hubble rappresenta l'espansione dell'intero spazio intergalattico. Nella conclusione Hubble dice:

> L'aspetto piu' importante e' la possibilita' che la relazione velocita' - distanza rappresenti l'effetto de Sitter, e quindi che si possano introdurre dati numerici nella discussione generale sulla curvatura dello spazio.

Il valore di H_0 misurato da Hubble era di circa 500 Km al secondo per milione di parsec. (Agli astronomi e' comodo dare il valore in queste unita' perche' le velocita' misurate per le galassie vicine sono dell'ordine del centinaio di chilometri al secondo e le distanze dell'ordine del milione di parsec. 1 milione di parsec =3,26 milioni di anni luce). Vedremo che la stima di Hubble era troppo alta; le misure recenti attribuiscono ad H_0 un valore di circa 6-10 volte minore.

La costante di Hubble ha un significato fisico immediato: misura il ritmo con cui l'universo si espande oggi.

Un breve inciso sulla dilatazione dell'universo. La considerazione che lo spazio si dilata non deve far concludere che si dilatano anche i nostri metri, gli oggetti che ci circondano, il sistema solare e magari noi stessi. Se cosi' fosse la dilatazione sarebbe irrilevante. I metri e gli altri oggetti non si dilatano; la loro dimensione e' determinata da forze elettromagnetiche che contengono costanti che ne determinano le dimensioni. Inoltre i sistemi gravitazionali "piccoli", come il sistema solare, le singole galassie e i gruppi locali, non si dilatano. Se la distanza Terra - Sole si dilatasse, noi ci allontaneremmo dal Sole di circa 10 metri all'anno; ma la distanza Terra - Sole non si dilata. Si dilata lo spazio intergalattico compreso tra i grandi sistemi galattici i quali determinano la struttura globale dello spazio.

L'inverso della costante di Hubble e' un tempo, chiamato il tempo di Hubble:

$$t_H = 1/H_0$$

Dalla misura di Hubble, il tempo di Hubble risultava essere 1,8 miliardi di anni; ma la valutazione attuale e' tra 6 e 10 volte maggiore.

Supponiamo per un momento che nel passato ogni galassia avesse la stessa velocita' di allontanamento v che ha adesso. Consideriamo una durata nel passato eguale al tempo di Hubble. Durante questo tempo ogni galassia ha percorso una distanza D eguale alla velocita' v per il tempo di Hubble, cioe' $D = vt_H = v/H_0$. Dalla relazione (7.1) si vede che D e' proprio la distanza d che la separa da noi. Dunque, se le velocita' fossero costanti, andando all'indietro di un tempo t_H tutte le galassie si troverebbero nello stesso punto e la densita' di materia sarebbe infinita proprio come prevedono i modelli alla Friedmann. Anche gli abitanti delle altre galassie arriverebbero a questa conclusione. Nessun punto dell'universo e' privilegiato, e' l'intero universo a diventare singolare, con densita' infinita mentre la scala delle distanze si annulla (la grande esplosione). Quindi il tempo di Hubble sarebbe la durata attuale dell'universo se la velocita' con cui ogni galassia si e' allontanata nel passato fosse sempre stata quella di oggi.

Ma (se non c'e' forza repulsiva cosmologica) nel passato le galassie avevano velocita' maggiori di adesso (perche' col passare del tempo l'espansione e' frenata dall'attrazione gravitazionale delle masse che si espandono) e cosi' il tempo effettivamente impiegato dall'inizio e' minore del tempo di Hubble. Ne segue che l 'eta' dell'universo e' minore del tempo di Hubble (a meno che sia presente una forza cosmologica).

7.5 Distanze galattiche ed eta' dell'universo

Dalla misura di Hubble seguiva che l'eta' dell'universo doveva essere minore di 1,8 miliardi di anni. Questa limitazione causo' molte perplessita' negli anni '30 e '40 poiche' altre stime attribuivano a sistemi interni all'universo un'eta' maggiore del tempo di Hubble. Verso la fine degli anni '40, studiando la dinamica degli ammassi di galassie e di ammassi stellari e la statistica di stelle binarie, si concluse che i sistemi stellari e le galassie esistevano da almeno 3 o 5 miliardi di anni. La durata di questi sistemi sarebbe stata dunque superiore al limite di Hubble. Altre prove venivano dalla datazione di rocce terrestri. Le valutazioni dell'eta' della Terra basate sulla radioattivita' erano all'inizio compatibili col tempo di Hubble, ma successivamente dati piu' precisi portarono alla stima di almeno 3,3 miliardi di anni di esistenza della Terra come corpo separato e sufficientemente freddo da sviluppare radioattivita' in condizioni normali; la stima fu poi portata a 4,3 miliardi di anni. Tempi troppo lunghi rispetto al tempo di Hubble.

Conseguentemente, la situazione divenne confusa. Le soluzioni cosmologiche alla Friedmann, basate sulla relativita' generale senza termine cosmologico, erano in disaccordo con i dati sulla durata della Terra e delle galassie. In genere, mentre l'ipotesi dell'espansione attuale dello spazio intergalattico era generalmente accettata, l'estrema conseguenza della cosmologia, la singnolarita' iniziale, era in dubbio.

Si cercarono altre soluzioni, con l'aiuto del termine cosmologico: un universo oscillante che non raggiungesse mai il valore singolare, o un universo alla de Sitter che cominciava ad un tempo infinito nel passato. P. Jordan (1938), H. Bondi e T. Gold (1948) e F. Hoyle (1948) proposero in varie forme che l'universo, benche' in espansione, fosse reso stazionario nel tempo dalla creazione continua di materia. Puo'interessare riportare il valore della materia che deve essere creata per mantenerne costante la densita' nonostante l'espansione: la stima di allora fu che dovesse apparire all'incirca un atomo per metro cubo ogni 500 000 anni. Questa creazione compenserebbe il calo di densita' dovuto all'espansione dell'universo (stima degli anni '40); sperimentalmente il ritmo di materia creata era accettabile perche' era inferiore ai limiti sulla conservazione della materia posti dagli esperimenti.

Si dubito' anche che l'esistenza di un'eta' finita per l'universo fosse legata alla particolare simmetria spaziale delle soluzioni. La risposta finale si ebbe alla fine degli anni '60 quando Steve Hawking e Roger Penrose dimostrarono che la singolarita' iniziale non si evita neppure per universi asimmetrici.

Alcuni fisici misero in discussione i principii stessi della relativita' generale, aprendo la strada alle congetture piu' varie. Cosi' fu proposto che le galassie fossero ferme, e che lo spostamento verso il rosso fosse dovuto a qualche altra causa. Fu proposta una diversa definizione del tempo (Milne 1935), o la variazione nel tempo delle costanti della natura (Dirac 1938, Jordan 1949).

La proposta piu' interessante fu avanzata anni dopo, quando il problema dell'eta' dell'universo era stato risolto. La teoria di Brans - Dicke (1961) sostituisce la costante di Newton con un campo dinamico. Gli esperimenti di questi ultimi decennni, confermando la relativita' generale einsteiniana entro i limiti degli errori, pongono limiti superiori alla presenza di queste modifiche.

Nessuna di queste proposte convinse, anche per la loro arbitrarieta', mentre la relativita' generale era una teoria ormai provata.

La soluzione alla contraddizione era altrove. Nel '47 K. Lundmark evidenzio' un problema nella stima della distanza di Andromeda. Nel 1952 un lavoro di Walter Baade (1893-1960) risolse le contraddizioni, mostrando che la scala delle distanze e di conseguenza il valore della costante di Hubble dovevano essere cambiati. Baade aveva trovato che esistono due diverse specie di stelle variabili Cefeidi in Andromeda e in altre galassie: quelle nei dischi delle galassie a spirale sono parecchio piu' luminose di quelle degli ammassi globulari negli aloni galattici. La confusione tra queste due classi aveva indotto a sottostimare le distanze intergalattiche. Se la distanza reale e' maggiore di quella stimata prima, a parita' di misura della velocita' (spostamento verso il rosso) diminuisce la costante di Hubble. L'universo quindi era piu' grande e anche piu' vecchio di quanto aveva valutato Hubble

Un ulteriore passo nell'aumento della stima delle distanze si ebbe quando Allan Sandage dimostro' nel 1956 che corpi luminosi nelle galassie vicine, che erano stati ritenuti singole stelle, erano in realta' gruppi di stelle. La luce raccolta da stelle singole sarebbe stata meno intensa di quanto osservato. Cosi' le galassie erano piu' lontane. Il valore che Sandage ottenne nel 1956 fu $H_0 = 75$ Km/sec per milione di parsec e rappresento' un aumento nella stima delle dimensioni dell'universo di circa 6 volte rispetto alla prima stima di Hubble. Corrispondentemente il tempo di Hubble sali' a 13 miliardi di anni, compatibile con l'eta' della Terra e delle galassie.

Le misure attuali della costante di Hubble non si discostano molto da questo valore. Ne parleremo piu' avanti.

7.6 La sintesi dei nuclei

Come abbiamo detto, la cosmologia relativistica implica l'esistenza di un istante iniziale a distanza finita nel passato in cui la struttura dell'universo e' singolare mentre la temperatura e la densita' della materia sono infinite (grande esplosione). Nel corso dell'evoluzione a partire da questo istante l'universo si raffredda mentre la densita' di materia diminuisce e le distanze medie tra particelle aumentano.

Prima di seguire nei particolari la storia dell'universo parliamo di due prove che, insieme all'espansione delle galassie, costituiscono i pilastri della cosmologia della grande esplosione. Si tratta della formazione degli elementi (nucleosintesi) e della presenza di una radiazione elettromagnetica di fondo nell'universo.

Alle alte temperature iniziali i nuclei non possono essere presenti perche' la temperatura ne romperebbe i legami. La condensazione dei nuclei a partire da un plasma di nucleoni diventa possibile quando la temperatura si abbassa fino a consentire che i protoni e i neutroni formino legami nucleari stabili. Cio' avviene durante il periodo compreso tra circa 1/10 di secondo e un paio di minuti dopo l'inizio.

L'idea della sintesi primordiale dei nuclei come conseguenza della nascita di un universo caldo fu esposta da George Gamow (1904-1968) nel 1946 e fu sviluppata in una serie di lavori di Gamow, R.A. Alpher, H. Bethe, e R.C. Herman.

La proposta originale di Gamow e colleghi prevedeva che tutti gli elementi della tavola periodica si fossero formati nella nucleosintesi successiva alla Grande Esplosione. Naturalmente oggi sappiamo che la sintesi iniziale riguarda soltanto gli elementi leggeri. E' una occasione per ricordare che, nello stesso giornale scientifico (Physical Review, volume 73, 1948) che conteneva un articolo di Alpher, Bethe e Gamow sulla nucleosintesi, apparve una lettera di Gleb Wataghin che argomentava che i nuclei degli elementi pesanti si formano nelle stelle in condizioni speciali e non nel plasma nucleare primitivo. La congettura di Wataghin era giusta. (Gleb Wataghin, 1899 - 1986, di scuola torinese, rientro' dal Brasile nel 1949 per dirigere l'Istituto di Fisica Generale dell'Universita' di Torino.)

Il calcolo preciso delle percentuali di elementi leggeri formati nell'universo primitivo e' complicato. Dopo le prime ricerche degli anni '40 una serie di lavori ha successivamente affinato le previsioni numeriche. Negli anni '70 e primi anni '80 sono stati approntati complessi programmi per calcolare l'evoluzione delle reazioni che hanno prodotto i nuclei leggeri. Il calcolo mostra che Deuterio, Elio 3 e 4, e Litio 7 sono gli unici nuclei prodotti in quantita' significativa. Le percentuali di questi elementi rispetto all'idrogeno primitivo si accordano perfettamente con le osservazioni (corrette per l'effetto della combustione nucleare nelle stelle durante la vita dell'universo, che ha cambiato i rapporti). Tra l'altro il confronto ha permesso di fissare a 3 il numero di tipi di neutrini leggeri prima che questo fosse determinato direttamente da esperienze di fisica delle particelle (agli acceleratori LEP del CERN, Ginevra e SLC, di Stanford, California nel 1989).

L'accordo tra le percentuali dei nuclei leggeri calcolate teoricamente e i valori osservati prova che l'universo nel passato era piu' caldo e denso.

7.7 La radiazione cosmica di fondo

Un'altra prova fondamentale della grande esplosione, ancora piu' ricca di informazioni con l'affinarsi delle tecniche di misura, e' costituita dalla radiazione di fondo cosmico.

Tra il 1948 e il 1950 Alpher, Herman e Gamow avevano proposto un'altra conseguenza del raffreddamento di un universo caldo: una radiazione elettromagnetica che pervaderebbe tutto l'universo proveniendo uniformemente da ogni direzione, con una temperatura di radiazione intorno a 3-5 gradi assoluti (lo zero assoluto si trova a –273 gradi centigradi). Questa radiazione si forma ad un istante ben preciso della vita dell'universo con una temperatura calcolabile. Vediamo perche'.

Nell'universo primordiale caldo tutta la radiazione viene continuamente assorbita, riemessa e diffusa dalla materia perche' le cariche elettriche libere nel plasma ad alta temperatura interagiscono fortemente con la radiazione elettromagnetica; ma, con il raffreddamento dell'universo per via del'espansione, si giunge ad una temperatura sufficientemente bassa da permettere che elettroni carichi negativamente e nuclei positivi si combinino a formare atomi che non si dissociano piu' perche' la temperatura e' troppo bassa per scomporli. Poiche' le cariche elettriche si sono ricombinate, la materia e' diventata neutra e non interagisce con la radiazione; cosi' l'universo improvvisamente diventa trasparente alla radiazone elettromagnetica.

La teoria permette di calcolare la data in cui questo processo e' avvenuto sulla base della densita' di radiazione attualmente osservata: l'universo aveva alcune centinaia di migliaia anni. L'incertezza nella data precisa dipende dalla incertezza nella densita' di materia nell'universo e nella costante di Hubble, non ancora conosciute con precisione. La temperatura della radiazione era allora di circa 3000 gradi assoluti. Questa radiazione dovrebbe essersi raffreddata durante l'espansione fino ad una temperatura odierna di qualche grado assoluto. Tuttavia i primi autori temevano che la radiazione fosse stata assorbita successivamente dalla materia.

La questione, accantonata, fu risollevata piu' tardi. Nei primi anni '60 un gruppo di fisici e di astronomi di Princeton, nel New Jersey, (R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roy e D.T. Wilkinson) progettarono un esperimento per misurare questa radiazione, un problema tutt'altro che banale.

Nel 1964 due russi bene informati, Igor Novikov e Andrei Doroshkevich, avevano pubblicato un lavoro su una rivista sovietica segnalando che la radiazione cosmica di fondo avrebbe dovuto esser evidenziata da una grande antenna che era stata costruita nei laboratori della Bell Telephone Company nel New Jersey per osservare il satellite Echo. Se i sovietici erano assai bene informati sulle caratteristiche dell'antenna, non altrettanto informati sulla teoria della radiazione cosmica erano i due scienziati, Arno Penzias e Robert Wilson, che gestivano quell'antenna a forma di enorme cornetta acustica per ricerche di radio astronomia. Pero' conoscevano molto bene il loro mestiere e rilevarono un segnale molto debole che proveniva da ogni direzione uniformemente e produceva nell'antenna una temperatura di circa 3 gradi assoluti (riuscirono a stimare l'indeterminazione della misura in piu' o meno un grado).

Altri nel passato avevano visto eccesso di radiazione, o molecole di cianogeno nello spazio interstellare che si comportavano come se fossero immerse in un bagno di temperatura di qualche grado, ma non avevano tratto la conclusione finale. Penzias e Wilson dettero importanza al segnale raccolto: la loro era una misura assoluta. Esclusero ogni causa terrestre o galattica e conclusero che si trattava di un segnale proveniente dalle profondita' del cosmo. Parlando con un amico di Washington seppero del gruppo di Princeton a loro vicinissimo, con cui allora si consultarono. Il lavoro di Penzias e Wilson apparve con un titolo dimesso, "Una misura di un eccesso di temperatura di antenna a 4080 Mhz". L'articolo usci' su Astrophysics Journal accompagnato dall'articolo dei quattro di Princeton che interpretava l'effetto. Penzias e Wilson ebbero il premio Nobel nel 1978.

Misure recenti con oltre una decina di esperimenti hanno aumentato le nostre conoscenze. In particolare il satellite COBE (Cosmic Background Explorer) all'inizio degli anni '90 ha misurato la distribuzione in lunghezze d'onda con grande precisione. La radiazione cosmica costituisce un esempio di radiazione, emessa da un corpo nero (radiatore matematico perfetto) misurata su una grande regione di lunghezze d'onda, piu' precisa dei radiatori costruiti in laboratorio. Nessuna altra sorgente, terrestre, galattica o cosmica, puo' aver emesso una radiazione con queste caratteristiche; essa costituisce una prova decisiva dell'espansione dell'universo a partire da uno stato denso e caldo.

La radiazione di fondo piove uniformemente su di noi da ogni parte da una distanza dell'ordine di circa 10^{28} centimetri (circa 10 miliardi di anni luce) a cui si trova oggi intorno a noi in ogni direzione l'evento del distacco; essa ha oggi una densita' di circa 410 fotoni al centimetro cubo e una temperatura di corpo nero di 2,73 gradi assoluti.

COBE ha misurato piccole variazioni nella temperatura (dell'ordine di trenta milionesimi di grado) di estremo interesse. Esse indicano l'esistenza di disomogeneita' nella densita' dell'universo di allora che corrispondono alle grandi strutture nella distribuzione delle galassie. E' stata misurata anche la velocita' del sistema locale cui appartiene la nostra galassia rispetto alla radiazione: e' di circa 600 chilometri al secondo.

La radiazione di fondo fornisce in definitiva una veduta dell'universo primordiale datata a 300 - 500 mila anni dall'inizio (cosi' come l'osservazione ottica fornisce una veduta dei tempi recenti) e comincia a rivelarci le strutture primordiali su larga scala. Le misure future, piu' precise, porteranno informazioni piu' specifiche su scale piu' piccole. Davvero quella ottenuta con la radiazione di fondo e' una nostra foto di gruppo di molti, molti anni fa.

La teoria prevede anche l'esistenza di un'altra radiazione fossile nell'universo, composta da neutrini. Con il raffreddamento dell'universo si giunse ad una temperatura (un po' maggiore di quella del distacco della radiazione elettromagnetica) in cui l'interazione (debole) dei neutrini leggeri con la materia divento' trascurabile. I neutrini da allora costituiscono una radiazione non interagente con la materia e con la radiazione elettromagnetica, dotata di temperatura propria, che si raffredda indipendentemente dal resto durante l'ulteriore espansione. La temperatura media attuale di questa radiazione di fondo di neutrini e' calcolata in 1,96 gradi assoluti. Vi sono oggi alcune centinaia di neutrini al centimetro cubo (il numero esatto dipende da alcune caratteristiche ancora non note dei neutrini) in ogni parte dell'universo. La loro osservazione non e' ancora possibile per via della bassissima intensita' delle loro interazioni a queste energie.

Chapter 8

H- I dati dell'universo attuale

Per ricostruire la storia passata e la sorte dell'universo la teoria ha bisogno di alcuni dati: la densita' e la temperatura della radiazione di fondo elettromagnetica e neutrinica, la densita' della materia, la misura della costante di Hubble e possibilmente della decelerazione dell'espansione, la conoscenza del tipo di universo spaziale. Esaminiamo da vicino la conoscenza attuale di questi parametri.

8.1 La costante di Hubble

La conoscenza esatta della costante di Hubble e' indispensabile perche' misura il ritmo attuale di espansione ed appare in molte quantita' importanti. Conviene introdurre la costante di Hubble ridotta h definita dalla relazione

$$H_0 = h \times 100 \text{ Km al secondo per milione di parsec.}$$

La conoscenza di h non e' ancora molto precisa. Il suo valore, ricavato da varii tipi di osservazioni, e' compreso tra 0,5 e 0,8; il valore piu' probabile e' intorno a 0,67. Questi valori sono ottenuti con determinazioni diverse, ciascuna con varie ipotesi interpretative. In queste condizioni l'accordo e' soddisfacente. Con i dati a disposizione tra pochi anni la conoscenza del ritmo attuale di espansione dell'universo sara' molto piu' precisa.

In termini di h il tempo di Hubble e' dato da

$$t_H = \frac{1}{h} \times 9,8 \text{ miliardi di anni.}$$

Dal'incertezza sul valore di h segue che il tempo di Hubble e' compreso tra 12,5 e 20 miliardi di anni (il valore corrispondente ad $h = 0,67$ e' circa 15 miliardi di anni).

8.2 La densita' di radiazione

La densita' di massa della radiazione elettromagnetica e' nota e il suo valore e' dato da

$$\rho_{\text{rad}} = 4,7 \times 10^{-34} \text{gr/cm}^3.$$

Per i neutrini la valutazione dipende dalla loro massa e il problema e' aperto. Se, come i fotoni della radiazione elettromagnetica, i neutrini non hanno massa, il loro contributo alla densita' di materia dell'universo e' 0,68 volte quello della radiazione elettromagnetica. Se invece sono dotati di massa, il loro contributo puo' diventare una frazione importante della materia totale. Questo punto attende chiarificazioni dagli esperimenti in corso per determinare le masse dei neutrini per le quali finora esistono solo limiti superiori.

8.3 La densita' di materia

I dati sulla densita' di materia nell'universo osservato non sono ancora molto precisi. La densita' della materia visibile nelle galassie e' data da

$$\rho_{vis} \simeq 10^{-31} \text{grammi al centimetro cubo}$$

corrispondente a circa un protone ogni qualche metro cubo.

La densita' di materia totale, ρ_0, e' certamente maggiore della densita' di materia visibile. Osservazioni sul moto delle stelle nelle regioni periferiche delle galassie e negli aloni galattici e sul moto relativo di galassie e sistemi galattici mostrano che la densita' totale di materia e' del'ordine di $10^{-30} - 10^{-29}$ grammi al centimetro cubo o maggiore. Esiste dunque, ed e' quantitativamente dominante, una materia oscura, non rilevabile mediante luce o altra radiazione elettromagnetica emessa. La composizione e la quantita' di materia oscura sono questioni ancora aperte su cui fisici delle particelle e cosmologi stanno lavorando.

8.4 La densita' critica

Un parametro fondamentale per conoscere la sorte dell'universo e' la densita' critica, una quantita' che dipende dalla costante di Hubble ridotta h e dalla costante di Newton della gravitazione G. La densita' critica e' definita da

$$\rho_c \;=\; \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \; 1,88\, h^2 \;\times 10^{-29} \text{ gr/cm}^3.$$

Se usiamo il valore $h = 0,67$ si ottiene

$$\rho_c \;=\; 0,84 \;\times 10^{-29} \text{ gr/cm}^3.$$

Il valore della densita' critica e' vicino a quello della densita' totale ρ_0, e questo e' uno dei problemi piu' profondi che l'universo ci presenta perche' il tipo di spazio che costituisce l'universo e' diverso a seconda che ρ_0 sia minore o eguale o maggiore della densita' critica.

8.5 Densita' e futuro dell'univer–so

La struttura dello spazio tridimensionale puo' essere di tre tipi (vedere l'appendice A per i dettagli):

1. Spazio H_3: aperto, curvo con geometria iperbolica e volume infinito.
2. Spazio E_3: aperto, con geometria euclidea, curvatura nulla, volume infinito.
3. Spazio S_3: chiuso, curvo con geometria ellittica e volume finito.

In assenza di termine cosmologico esiste una relazione precisa tra il tipo di spazio, la densita' e la densita' critica(vedere l'appendice C).

Nel caso 1 la densita' ρ_0 e' minore di quella critica; nel caso 2 la densita' e' uguale a quella critica. In questi due casi l'espansione continuera' all'infinito e l'universo continuera' a raffreddarsi (futuro freddo).

Nel caso 3 la densita' ρ_0 e' maggiore di quella critica. La fase di espansione continuera' fino a raggiungere un volume massimo, poi l'espansione si trasformera' in contrazione, le galassie invertiranno il loro moto riavvicinandosi (spostamento verso il blu) e sara' il grande crollo fino ad uno stato singolare di temperatura e densita' infinite e volume nullo. La durata totale dell'universo sara' finita.

Poiche' lo spazio oggi ha comunque una curvatura piccola (se non nulla), non e' facile fare misure dirette che determinino il tipo di spazio e quindi ci si deve basare sul rapporto tra ρ_0 e ρ_c. Ricapitoliamo la situazione.

I movimenti di strutture fino a distanze di circa 150 milioni di anni luce portano ad un valore $\rho_0 \simeq 0,2\,\rho_c$; le osservazioni su scale maggiori, pur con errori grandi, sembrano indicare $\rho_0 \simeq 0,4 - 0,8\,\rho_c$. Considerazioni teoriche farebbero preferire il valore $\rho_0 = \rho_c$ e un universo euclideo. Possiamo riassumere la conoscenza attuale del valore di ρ_c nel modo seguente:

$$0.2\,\rho_c \leq \rho_0 \leq \rho_c.$$

Cosi' i dati attualmente disponibili indicano un universo aperto di tipo iperbolico o euclideo e un finale freddo. Dovremo frenare la nostra curiosita' fino a quando saranno disponibili osservazioni piu' precise della densita' di materia e della costante di Hubble. Molte osservazioni sono in corso o in progetto e tra alcuni anni ne sapremo molto di piu'.

Una determinazione indipendente della sorte dell'universo puo' essere ottenuta misurando la decelerazione dell'espansione dell'universo. Anche per questa determinazione bisogna attendere una misura precisa dello spostamento verso il rosso di un grande numero di galassie lontane.

8.6 L'eta' dell'universo

L'eta' dell'universo t_0 dipende dal valore del rapporto tra la densita' dell'universo e la densita' critica. Diamo una tabella del valore di t_0 per diversi valori di ρ_0/ρ_c e di h. t_0 e' espresso in miliardi di anni. $\rho_0 = \rho_c$ corrisponde all'universo di Einstein - de Sitter. Se $\rho_0 < \rho_c$ lo spazio e' aperto.

Eta' dell'universo (in miliardi di anni)

ρ_0/ρ_c	h=0.7	h=0.55
0.1	13	16
0.2	12	15
0.4	11	14
1.0	9	12

Le misure dell'eta' attribuita a componenti dell'universo (in miliardi di anni) danno i risultati seguenti:
1– stelle piu' vecchie: 12 ± 4;
2– dalla radioattivita': maggiore di 10;
3– dallo studio del disco della Via Lattea: circa 10;
4– dallo studio del sistema solare: 4,6 ± 0,1.

Naturalmente l'eta' dell'universo e' maggiore dell'eta' di ogni componente. Potrebbero nascere problemi per la cosmologia standard se fossero confermate datazioni alte per qualche componente per valori alti di h: 0,7 o maggiori. Per il momento non vi e' alcuna contraddizione. In caso di discrepanza si potrebbe ricorrere alla presenza di un termine cosmologico nelle equazioni ma senza altre conferme la procedura non sarebbe molto giustificata. Bisogna attendere misure piu' precise di h e migliori determinazioni dell'eta' delle stelle e di altre componenti dell'universo.

8.7 Dimensioni dell'universo osservabile

Per via dell'eta' finita e dell'espansione, la luce che riceviamo proviene, in linea di principio, da una regione limitata dell'universo. La porzione che possiamo osservare oggi ha una dimensione lineare L_0 limitata approssimativamente come segue (c è la velocità della luce e abbiamo usato h=0,67):

$$L_0 < ct_0 < ct_H = c/H \simeq 1,4 \times 10^{28} \text{ centimetri.}$$

8.8 Date importanti

La ricostruzione delle condizioni locali nel passato dipende dalle interazioni tra le diverse componenti di materia presenti ad ogni dato istante. Queste interazioni sono note dalle conoscenze della fisica delle particelle, dei nuclei e degli atomi; gli esperimenti sistematici sono stati condotti fino ad un'energia dell'ordine di circa 100 GeV, corrispondenti alla temperatura di circa 10^{15} gradi. (Un GeV e' l'energia che un elettrone acquista attraverso la differenza di potenziale di 1 miliardo di elettron - volt; corrisponde a 1,6 $\times 10^{-10}$ Joule.

Quindi a partire dall'istante del tempo in cui l'universo si e' raffreddato fino a 10^{15} gradi (circa 10^{-11} secondi dopo l'inizio) la ricostruzione delle vicende medie dell'universo e' abbastanza sicura. Da quel tempo abbiamo i seguenti eventi importanti:

1. Tempo a partire dal quale sono ben note le interazioni della materia:

   $$t \simeq 10^{-11}\,\text{sec.}$$

   La materia e' un gas di particelle relativistiche (leptoni, quarks e radiazione).

2. Tempo della condensazione dei quark in adroni:

   $$t \simeq 10^{-6}\,\text{sec.}$$

   Raffreddandosi, i quark si condensano a formare protoni e neutroni.

3. Tempo della sintesi dei nuclei:

   $$t \simeq 0.01\,\text{sec} - 3\,\text{minuti.}$$

   Questo e' il tempo piu' antico del quale abbiamo un riscontro diretto per mezzo delle percentuali attuali di nuclei leggeri. In questo periodo i neutrini cessano di interagire con le altre componenti della materia e da allora in poi costituiscono una radiazione che si raffredda separatamente.

4. Tempo dell'equilibrio tra radiazione e materia:

   $$t \simeq 1000\,\text{anni.}$$

   La densita' di energia della radiazione (elettromagnetica, neutrini) e' eguale alla densita' di energia della materia non relativistica (nuclei, elettroni). Da ora in poi la densita' sara' essenzialmente dovuta alla materia invece che alla radiazione.

5. La materia si distacca dalla radiazione elettromagnetica:

   $$t \simeq 300\ 000\,\text{anni.}$$

   A questa temperatura l'universo diventa trasparente e si forma la radiazione di fondo cosmico.

Temperature, densita' e fattori di scala di questi tempi sono mostrati in Appendice B.

Nel quadro del modello uniforme la storia successiva non offre piu' eventi. Naturalmente l'universo reale non e' cosi' semplice: si sono formate le galassie, le stelle etc. Lo studio della formazione delle strutture a diverse scale (dalle stelle ai super ammassi di galassie, grandi attrattori e grandi vuoti) a partire da perturbazioni primordiali dell'uniformita' sta progredendo rapidamente. Ma questa è un'altra storia.

8.9 Preistoria

La storia dei tempi primordiali (precedenti a 10^{-11} secondi) dipende dai fenomeni fisici che avvengono a temperature maggiori di 10^{15} gradi, sui quali abbiamo parecchie idee teoriche abbastanza plausibili ma nessuna sperimentazione sistematica.

Si puo' ritenere che le interazioni fondamentali diventino tutte egualmente intense (unificazione delle interazioni) intorno ad una temperatura di 10^{30} gradi; una teoria della unificazione delle forze permetterebbe la ricostruzione della storia primordiale fino a quella temperatura, corrispondente grosso modo ad un tempo dell'ordine di 10^{-36} secondi dall'inizio.

Nel lasso di tempo tra 10^{-11} secondi e il tempo dell'unificazione puo' trovarsi la risposta a un problema di grande importanza, la prevalenza di protoni rispetto ad antiprotoni (e corrispondentemente di elettroni rispetto a positroni). Nell'universo attuale l'antimateria e' molto rara. Si cerca di spiegare questa asimmetria con l'azione di interazioni, attive a temperature esistenti in tempi precedenti 10^{-11} secondi, secondo l'ipotesi formulata nel 1967 da Andrei Sakharov (1921-1989).

Ma i piu' grandi problemi si trovano a tempi ancora precedenti l'unificazione delle interazioni. La costante di tempo caratteristica dei fenomeni gravitazionali e' il cosiddetto tempo di Planck, funzione della costante di Newton G, della velocità della luce c e della costante di Planck $\hbar$, definito da

$$t_{\rm p} = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} \;=\; 5,39\ \times 10^{-44}\,\text{secondi.}$$

Il tempo caratteristico di Planck e' molto piccolo paragonato a qualsiasi nostra unita' di misura, ma e' particolarmente piccolo rispetto all'eta' t_0 dell'universo che e' dell'ordine di 10 miliardi di anni: $t_0 \simeq 10^{60}\, t_{\rm p}$. In questo tempo la luce percorre una lunghezza di Planck, definitata da

$$l_{\rm p} = ct_{\rm p} = 1,62 \times 10^{-33}\text{centimetri.}$$

Appare poco naturale dal punto di vista fisico che, dopo un tempo cosi' grande se paragonato alla costante di tempo caratteristica $t_{\rm p}$, l'universo oggi sia ancora in evoluzione non asintotica; in termini della figura A 2 siamo ancora nella parte centrale della curva $a(t)$, non in fondo al ramo asintotico dell'universo aperto (dove la densita' sarebbe zero) ne', nel caso l'universo fosse chiuso, il ciclo e' terminato, anzi e' a meno di meta'. Ne segue che, per ottenere la densita' attuale, il valore della densita' al tempo di Planck deve essere aggiustato con una precisione assurda di una parte su 10^{60}.

Un'altra faccia dello stesso problema e' data dalla dimensione che l'universo attualmente osservabile aveva al tempo di Planck. Prendendo per L_0 il valore 10^{28} centimetri si ottiene la dimensione che l'universo attualmente osservabile aveva al tempo di Planck:

$$L(t_{\rm p}) \simeq 10^{-3}\,\text{millimetri}, \simeq 10^{29}\, l_{\rm p},$$

una dimensione enorme per quel tempo. Infatti un segnale luminoso che alla nascita dell'universo parte da un punto percorre nel tempo di Planck la lunghezza di Planck l_p. Poiche' la velocita' della luce e' il limite massimo della velocita' di ogni effetto fisico, e' evidente che punti dell'universo che al tempo di Planck erano distanti tra loro piu' di una lunghezza di Planck non hanno mai potuto scambiarsi nessun segnale. Come mai l'universo visibile era omogeneo al tempo di Planck in regioni che non erano mai state in contatto causale? La situazione appare poco soddisfacente dal punto di vista fisico.

Per queste ragioni, e per altre piu' sottili, e' stata proposta la teoria "dell'inflazione": un breve periodo primordiale in cui l'evoluzione del cosmo e' modificata dalla presenza di energia di vuoto che per un tempo limitato agisce come un termine cosmologico cambiando drasticamente il ritmo dell'espansione. Durante un periodo abbastanza breve la scala dell'universo aumenta esponenzialmente (inflazione!). Una crescita lineare di un fattore 10^{30} o piu' sembra appropriata. In tal modo la parte dell'universo attualmente osservabile poteva essere molto piccola al tempo di Planck, $L(t_\mathrm{p}) \simeq l_\mathrm{p}$ ed essersi espansa fino alla dimensione di 10^{-3} millimetri in un tempo dell'ordine di qualche t_p.

I dettagli di questa idea non sono assestati. Nello scenario generale dell'inflazione si accomodano diversi contenuti e non c'e' ancora una ragionevole certezza sulla scelta della teoria.

8.10 L'inizio

Il punto effettivo di inizio della soluzione classica, la singolarita', e' al di fuori della portata delle leggi della fisica attualmente conosciute.

Per tempi inferiori al tempo di Planck non si possono adoperare le equazioni classiche di Einstein perche' la gravita' stessa deve essere descritta in modo quantistico, come le altre interazioni. Le nozioni di spazio, di tempo, e di localita' degli eventi fisici, legate alla formulazione non quantistica della relativita' generale, perderebbero significato a tempi e distanze di quell'ordine.

Ma attualmente non esiste una formulazione quantistica che permetta di paragonarne eventuali calcoli con risultati sperimentali. Abbiamo solo modelli, affascinanti ma non ancora completi, sulla teoria in grado di prolungare le nostre conoscenze al di sotto del tempo di Planck. Diamo un'idea delle concezioni piu' interessanti.

A distanze dell'ordine della lunghezza di Planck lo spazio - tempo perde la struttura classica. Steve Hawking e Alex Vilenkin nel 1983 hanno avanzato due proposte diverse per definire la probabilita' di formazione quantistica dell'universo dal nulla. Andrei Linde ha usato la teoria di Vilenkin per formulare un modello di formazione caotica di universi. Universi macroscopici si formano continuamente, emanati dalla schiuma quantistica esistente a distanze di Planck o da parti di universi stessi, perche' la probabilita' di enucleazione di universi in stato inflazionario e' massima. Il nostro universo sarebbe uno di questi, in cui ormai l'inflazione si e' spenta; a sua volta puo' darsi che da un suo cantuccio si stia sviluppando un nuovo universo inflazionario.

Un punto di vista diverso e' stato sviluppato da Gabriele Veneziano e Maurizio Gasperini. E' basato sull'idea che gli enti fisici appropriati alla fisica delle piccole distanze non siano particelle ma stringhe, la cui dimensione dovrebbe essere dell'ordine della lunghezza di Planck.

La teoria delle stringhe costituisce uno schema di unificazione delle interazioni fondamentali elegante e molto potente. Qui ci interessa solo l'aspetto cosmologico. In breve il quadro dell'inizio proposto della cosmologia di stringa e' che non c'e' inizio: il tempo cosmico si prolunga fino all'infinito nel passato. L' istante iniziale della teoria classica sarebbe in realta' il periodo di tempo in cui l'universo diventa quantistico e cambia regime; prima esisteva un universo di dimensionalita' maggiore di 4, privo di materia e di interazioni, piatto e freddo; intorno al tempo iniziale tradizionale (Grande Esplosione) questo universo diventa quantistico, subisce un cambiamento, il numero di dimensioni macroscopiche si fissa a 4 (3 spaziali e 1 temporale), diventa caldissimo e si raccorda con la descrizione non quantistica della cosmologia tradizionale.

Lasciamo alla ricerca presente il tempo di maturare le idee. Certo e' che al momento attuale il prolungamento all'indietro del modello standard con spazio e tempo classici descritti dalla relativita' generale trova una barriera naturale di credibilita' al tempo di Planck. Prima di questo tempo le leggi della fisica attualmente note non sono applicabili.

8.11 Conclusione

La cosmologia e' una scienza con una lunga tradizione ma pochi dati. Nei prossimi anni la situazione cambiera' drasticamente perche' stanno iniziando grossi programmi di cooperazione internazionale per la raccolta di osservazioni cosmologiche.

Si attendono molte informazioni nuove. Un elenco delle piu' importanti e' il seguente: una mappa della temperatura della radiazione di fondo con una risoluzione angolare dell'ordine del grado o inferiore, fondamentale per studiare la formazione di strutture a partire dall'universo primitivo; la misura della velocita' di allontanamento di qualche milione di galassie, con determinazione precisa della costante di Hubble e del parametro di decelerazione; la misura del numero di galassie in funzione della distanza; le caratteristiche dei neutrini; la ricerca di antimateria nel cosmo; una misura piu' precisa della densita' di materia e della sua distribuzione, con la determinazione della densita' di materia oscura; la composizione della materia oscura; l'eventuale presenza di termine cosmologico. Infine ci aspettiamo anche la osservazione di onde gravitazionali, previste dalla teoria ma difficili da osservare, adesso che molti apparati sperimentali sono in fase di approntamento.

Queste misure intendono chiarire due tipi di problemi: sia la conoscenza dell'universo iniziale che la capacita' del modello cosmologico di accomodare nella sua cornice la formazione delle disomogeneita' (strutture dell'universo attuale), nel quadro della fisica delle particelle e della teoria quantistica delle loro interazioni estesa ad una trattazione che contenga la gravita'.

8.12 Appendici

8.12.1 Lo spazio tridimensionale

Poiche' il modello cosmologico iniziale prevede densita' uniforme spazialmente, la teoria globale restringe la considerazione a spazii tridimensionali omogenei e isotropi (cioe' tutti i punti e tutte le direzioni sono equivalenti).

Secondo la relativita' generale lo spazio e' curvato dalla presenza della materia. E' dunque necessario usare concetti di geometria non euclidea, la cui formulazione e' dovuta a tre matematici dell'800 che vogliamo ricordare: J. Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856) e Janos Bolyai (1802 - 1860). Per conoscere la struttura dello spazio tridimensionale bisogna classificare gli spazi tridimensionali omogenei ed isotropi e quindi a curvatura costante.

Rivolgiamoci prima agli spazi a due dimensioni, piu' facili da visualizzare. Classifichiamo gli spazi omogenei e isotropi a due dimensioni (superfici). Si pensa subito al piano; ma esistono superfici omogenee ed isotrope curve la cui curvatura e' la stessa in tutti i punti.

Consideriamo la varieta' a due dimensioni chiamata sfera S_2; puo' essere immaginata come la superficie di raggio costante che racchiude un globo in uno spazio euclideo a tre dimensioni. Su S_2 la curvatura e' costante, tutti i punti e tutte le direzioni sono equivalenti: la superficie e' omogenea e isotropa. La grandezza di ogni superficie di questo tipo e' caratterizzata dal suo raggio a che possiamo chiamare fattore di scala perche' in due di queste sfere con diversi valori di a le distanze tra due punti con stessa latitudine e longitudine sono proporzionali ai rispettivi fattori di scala.

La superficie S_2 ha un'area finita, $A = 4\pi a^2$, ma non ha un confine. Nessuna superficie omogenea e isotropa puo' avere un confine, altrimenti i punti di confine sarebbero diversi dagli altri.

Dal punto di vista geometrico la superficie della Terra e' approssimativamente una S_2. La curvatura della superficie terrestre e' una proprieta' intrinseca della geometria della superficie terrestre, non dipende dal fatto che la Terra e' immersa in uno spazio piu' grande a tre dimensioni. Se non avessimo prove sperimentali della terza direzione potremmo pensare qualsiasi cosa (o anche niente) sulla immersione della superficie terrestre in altri spazi piu' grandi, ma determineremmo egualmente il fattore di scala della superficie terrestre (con misure topografiche).

Ad un essere di dimensione 2 che viva confinato su una varieta' S_2 non importa molto di sapere se e dove può essere immerso. Posto che non può uscire dalle 2 dimensioni, la discussione dell'immersione in uno spazio piu' grande e' puramente matematica. Egli può pensare di essere immerso in qualsiasi spazio di dimensione maggiore che consenta matematicamente l'immersione; questo pensiero potrà forse cambiare la sua metafisica, ma non la sua fisica. Questo punto e' essenziale.

Sulla varieta' S_2 non vale la geometria euclidea; per esempio la somma degli angoli interni di un triangolo e' maggiore di 180 gradi. Si dice che la sua curvatura e' positiva.

Esiste un'altra superficie definita dalla proprietà di avere una curvatura costante, chiamata H_2. Essa ha curvatura negativa: se si disegna un triangolo sulla superficie, la somma degli angoli interni e' minore di 180 gradi (la sua geometria e' di tipo iperbolico). Intorno ad ogni suo punto la superficie H_2 e' a forma di sella. H_2 ha un'area infinita.

A differenza della sfera S_2, questo spazio a curvatura negativa non puo' essere immerso completamente in uno spazio a tre dimensioni euclideo; solo sue porzioni ammettono l'immersione (vedi figura A 1.).

Infine, il piano a due dimensioni con geometria euclidea e' omogeneo e isotropo; lo chiameremo E_2. La somma degli angoli interni di un triangolo e' 180 gradi.

S_2, H_2 ed E_2 sono i soli tipi di superfici omogenee ed isotrope a due dimensioni (se escludiamo topologie globali piu' complicate; in ogni caso cio' e' vero per le proprieta' locali). Una caratteristica di queste tre superfici e' mostrata nella figura A 1.

Passiamo ora a spazi tridimensionali. Possiamo definire varie curvature bidimensionali in uno spazio tridimensionale ritagliando triangoli geodetici a due dimensioni nello spazio tridimensionale; nel caso di spazi omogenei e isotropi, la curvatura e' la stessa per qualsiasi triangolo comunque orientato. Potremmo anche ricavare la curvatura costruendo tetraedri geodetici (volumi ottenuti unendo 4 punti con 6 lati costruiti lungo le geodetiche di uno spazio) invece che triangoli; in un volume tridimensionale a curvatura positiva i tetraedri costruiti con le geodetiche che uniscono 4 punti sono piu' gonfi che nello spazio tridimensionale euclideo (piatto), mentre in un volume a curvatura negativa i tetraedri geodetici sono piu' smunti.

Lasciando da parte la possibilità di topologie globali complicate gli spazi tridimensionali a curvatura costante sono soltanto tre: la sfera S_3, lo spazio iperbolico a tre dimensioni H_3 e lo spazio euclideo a tre dimensioni E_3.

S_3 (sfera tridimensionale) puo' essere visualizzato come la superficie tridimensionale di un iperglobo costruito in uno spazio euclideo a 4 dimensioni. Ma questo spazio a 4 dimensioni e' un puro ausilio matematico. Forse lo spazio dell'universo e' di tipo S_3, ma non esiste alcuno spazio fisico a 4 dimensioni. S_3 e' uno spazio chiuso, naturalmente privo di confini. Il primo modello cosmologico di Einstein era proprio una sfera di questo genere.

H_3 e' uno spazio tridimensionale iperbolico, il suo volume e' infinito e per questo viene detto aperto.

Infine E_3 e' lo spazio piatto a tre dimensioni in cui vale la geometria euclidea dello spazio. Ha chiaramente volume infinito ed e' quindi aperto.

All'esperienza quotidiana lo spazio in cui le nostre azioni si svolgono appare privo di curvatura e infinito, cioe' E_3; questo significa soltanto che la curvatura (positiva o negativa) eventualmente presente nel nostro spazio tridimensionale e' troppo piccola per essere osservata localmente. E' nei problemi a grande scala che la curvatura dello spazio tridimensionale diventa importante.

Si introduce un fattore di scala a che ha la dimensione di lunghezza sia per S_3 che per H_3; nel caso di S_3 corrisponde al raggio della sfera immersa nello spazio fittizio a quattro dimensioni. Il volume di S_3, finito, e' $V = 2\pi a^3$. Il fattore di scala fornisce una misura dell'incurvamento della varieta'; la sua relazione con la curvatura C e' data da:

$$C = \frac{6k}{a^2} \tag{8.1}$$

$k = +1$ per S_3 a curvatura positiva, $k = -1$ per H_3 a curvatura negativa. Nel caso dello spazio euclideo a tre dimensioni E_3, k=0 e la curvatura e' nulla. Anche in questo caso pero' si puo' introdurre un fattore di scala a definendo un sistema di coordinate adimensionali in modo che le distanze tra punti siano proporzionali al fattore di scala.

L'introduzione di un fattore di scala a per tutti tre i tipi di spazii a curvatura costante e' essenziale nella discussione cosmologica in cui la scala delle distanze varia col tempo (espansione dell'universo) indipendentemente dal tipo di universo. Si pone allora $a = a(t)$, funzione del tempo.

8.12.2 Evoluzione nel tempo del fattore di scala, della densita' e della temperatura

Usando l'equazione di stato della materia e la prima legge della termodinamica si ottiene la relazione tra la densita' $\rho(t)$ ad un tempo generico t e il fattore di scala $a(t)$. La relazione e' diversa a seconda che la materia sia in maggior parte composta da radiazione o da materia lenta:

$$\rho_{\rm rad}(t) \sim a(t)^{-4}, \qquad \rho_{\rm mat}(t) \sim a(t)^{-3}.$$

Andando indietro verso tempi iniziali il fattore di scala dell'universo decresce e quindi la densita' della radiazione cresce piu' di quella della materia. Per tempi iniziali (piccoli $a(t)$) predomina la radiazione. Oggi la densita' di materia e' molto maggiore di quella della radiazione e i loro valori permettono di valutare l'istante in cui le due componenti avevano la stessa densita': 1000 anni o poco piu' dall'inizio.

Una regola molto importante segue dal fatto che l'espansione avviene senza variazioni nella quantita' di calore nell'universo: la temperatura e' connessa al fattore di scala da

$$a(t)T(t) \simeq \text{costante}.$$

(questa legge e' approssimata; la formula esatta ammette una piccola variazione di $a(t)T(t)$, del tutto trascurabile in questa sede).

Durante l'evoluzione dell'universo il tipo di spazio non puo' cambiare. L'unica variabile che caratterizza la sua geometria e' il fattore di scala $a(t)$ la cui evoluzione nel tempo cosmico e' determinata dalle equazioni di Einstein.

In tutti i casi nell'ambito della cosmologia classica l'evoluzione comincia ad un istante in cui $a = 0$, la densita' e' infinita e lo spazio e' una varieta' singolare. E' l'istante della Grande Esplosione, a partire dal quale si conta l'eta' dell'universo. La singolarita' della soluzione impedisce che il modello venga continuato a tempi precedenti.

L'evoluzione e' diversa a seconda del tipo di spazio. Se lo spazio e' chiuso l'universo raggiunge un volume massimo e poi si contrae fino a volume nullo (singolarita' finale) in un tempo finito (la durata totale dell'universo). Negli altri due casi di spazi aperti l'evoluzione procede indefinitamente con fattore di scala sempre crescente (finale freddo).

In figura A 2 e' mostrato l'andamento del fattore di scala $a(t)$ nel tempo. Le tre diverse curve con diversi andamenti si riferiscono ai tre diversi tipi di spazi tridimensionali ammessi: chiuso, aperto e iperbolico, aperto euclideo.

La relazione tra la costante di Hubble e il fattore di scala e'

$$H_0 = \left(\frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt}\right)_{\rm oggi}.$$

Da questa relazione si vede anche il significato geometrico del tempo di Hubble t_H: e' la distanza tra il punto T_d, incrocio della tangente alla curva e l'asse dei tempi, e il punto T_0 che rappresenta il momento attuale. Poiche' la curva ha la concavita' verso il basso, il tempo di Hubble e' maggiore dell'eta' dell'universo, qualsiasi sia il tipo di spazio (tranne in presenza di termine cosmologico). Avevamo gia' ottenuto questo risultato con ragionamenti fisici.

Nella figura la differenza tra l'evoluzione del fattore di scala a per i tre tipi di spazi, per tempi precedenti quello attuale, e' stata esagerata per chiarezza; in realta', data la configurazione attuale, il tipo di spazio (chiuso o aperto) ha poca influenza sull'andamento di a per il passato (a parte il volume finito o infinito, che pero' non e' misurabile direttamente). Ad un osservatore che ripercorra all'indietro l'evoluzione a partire da oggi le osservazioni locali non permettono facilmente di capire quale e' il tipo di spazio. Tornando verso la Grande Esplosione l'osservatore vede un aumento sempre maggiore sia della temperatura che della densita', praticamente indipendenti dalla struttura dello spazio.

Le equazioni sono particolarmente semplici nel caso di spazio euclideo ($\rho_0 = \rho_c$) e questa approssimazione fornisce una precisione sufficiente ai fini della nostra ricostruzione del passato. Ci porremo dunque in questo caso. La relazione tra il fattore di scala $a(t)$ e il tempo t e' diversa a seconda che domini la radiazione (tempi iniziali) o la materia. Per il tempo iniziale una buona approssimazione e' data dagli andamenti seguenti:

Dominanza di radiazione:

$$a(t) \sim t^{1/2}, \quad T \sim t^{-1/2}, \quad \rho \sim t^{-2}.$$

Dominanza di materia lenta:

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad T \sim t^{-2/3}, \quad \rho \sim t^{-2}.$$

In figura A 3 e' mostrato il comportamento della densita', temperatura e del fattore di scala per tempi iniziali, praticamente indipendente dal tipo di spazio.

Riportiamo in una tabella i parametri dell'universo in corrispondenza alle date citate nel testo. Le colonne contengono la data, la temperatura (in gradi), la densita' (in unita' di grammi al centimetro cubo), il rapporto tra il fattore di scala di allora e di oggi. Come date abbiamo scelto il tempo di Planck, il tempo dal quale sono note le interazioni, il tempo della condensazione degli adroni, il tempo della sintesi dei nuclei, il tempo dell'equilibrio, il tempo del distacco della radiazione elettromagnetica.

Parametri dell'universo a varie epoche

t	T	ρ	$a(t)/a_0$
10^{-43} s	10^{32}	10^{94}	10^{-32}
10^{-11} s	10^{15}	10^{26}	10^{-14}
10^{-6} s	10^{13}	10^{18}	10^{-12}
0.01 s-3 min	10-0.1	10^{10}-10^{2}	10^{-10}-10^{-8}
1000 anni	20 000	10^{-18}	10^{-4}
300 000 anni	3000	10^{-20}	10^{-3}
oggi	2,73	10^{-30}	1

8.12.3 Densita' di materia e struttura dello spazio

Dalle equazioni di Einstein segue la relazione tra la densita' ρ_0, la densita' critica ρ_c, la costante di Hubble H e il fattore di scala a_0:

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} - 1 = k \frac{c^2}{a_0^2 H_0^2}. \tag{8.2}$$

In questa equazione il parametro k puo' assumere uno dei tre valori $\pm 1, 0$ e dipende dal tipo di spazio. Se $k = -1$ lo spazio e' aperto di tipo H_3; se $k = 0$ lo spazio e' euclideo; se $k = +1$ lo spazio e' chiuso di tipo S_3 (vedere la discussione dopo l'equazione (8.1).

Poiche' $1/a_0^2 H_0^2$ e' sempre positivo, seguono i tre casi:

1. Se $\rho_0 < \rho_c$ deve essere $k = -1$; lo spazio e' aperto e curvo.
2. Se $\rho_0 = \rho_c$ deve essere $k = 0$; lo spazio e' aperto euclideo. In questo caso l'equazione (8.2) non determina il fattore di scala.
3. Se $\rho_0 > \rho_c$ deve essere $k = +1$; lo spazio e' finito.

Queste relazioni chiariscono l'importanza del rapporto tra la densita' media dell'universo e la densita' critica e permettono di determinare il valore del fattore di scala a_0 in funzione della densita' di materia e della costante di Hubble se l'universo e' S_3 o H_3 (se $\rho_0 = \rho_c$ la densita' non determina a_0, come si vede dalla (8.2)). I valori numerici sono riportati nella tabella. Il valore del fattore di scala a_0 e' espresso in unita' 10^{28} centimetri e si e' usato il valore 0,67 per la costante di Hubble ridotta h:

Fattore di scala a_0 in funzione di ρ_c/ρ_0

ρ_0/ρ_c	a_0	tipo di spazio
0,2	1,6	H_3
0,4	1,8	H_3
0,6	2,2	H_3
0,8	3,1	H_3
1,1	4,4	S_3
1,2	3,1	S_3
1,3	2,5	S_3
1,4	2,2	S_3

8.12.4 Unita' di misura e costanti fisiche

1 anno luce = 0,95 $\times 10^{18}$ cm = 0,307 parsec.
1 parsec = 3,26 anni luce = 3,09 $\times 10^{18}$ centimetri.
1 milione di parsec = 3,09 $\times 10^{24}$ centimetri.
1 anno = 3,15 $\times 10^{7}$ secondi.
Corrispondenza tra energia e temperatura: 1 GeV = 1,60 $\times 10^{-10}$ joules $\Leftrightarrow$ 1.16$\times 10^{13}$ gradi.
Velocità della luce: $c = 2,998 \times 10^{10}$ centimetri al secondo.
Costante di Planck: $\hbar = 1,055 \times 10^{-27}$ centimetri^2 grammi secondi^{-1}.
Costante di Newton: $G = 6,67 \times 10^{-8}$ centimetri^3 grammi^{-1} secondi^{-2}.
Tempo di Planck: $t_p = 5,39 \times 10^{-44}$ secondi.
Lunghezza di Planck: $l_p = ct_p = 1,62 \times 10^{-33}$ centimetri.
Distanza Terra - Sole: d=150 milioni di chilometri (1 parsec = 2,06 $\times 10^{5}$ d).
Costante di Hubble: $H_0 = 100\,h$ chilometri al secondo per mega parsec; $0,5 \leq h \leq 0,8$.
Tempo di Hubble: $t_H = 1/H_0 = 3.09\,h^{-1} \times 10^{17}$ secondi = 9,8 h^{-1} miliardi di anni.
Dimensione lineare dell'universo osservabile oggi: $L_0 \leq 10^{28}$ centimetri.
Densità critica: $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1,88\,h^2 \times 10^{-29}$ grammi al centimetro cubo.
Temperatura odierna della radiazione di fondo elettromagnetica: $T_\gamma = 2,73$ gradi.
Densità di fotoni della radiazione di fondo: n_γ=413 fotoni al centimetro cubo; $\rho_\gamma = 4,7 \times 10^{-34}$ grammi al centimetro cubo.

8.12.5 Didascalie delle figure

1. Figura A 1: Tre tipi di spazi a due dimensioni a curvatura costante: (a) S_2; (b) una porzione di

E_2; (c) una porzione di H_2. Le linee rappresentate sono geodetiche inizialmente parallele.

2. figura A 2: Rappresentazione dell'andamento del fattore $a(t)$ in funzione del tempo a seconda del tipo di universo.
   (a) universo chiuso S_3;
   (b) universo aperto E_3;
   (c) universo aperto H_3.

   L'inevitabilita' della singolarita' iniziale ($a = 0$) e' espressa dal fatto che le curve hanno la concavita' diretta verso il basso e quindi incontrano l'asse dei tempi. Le curve sono normalizzate in modo da avere valore e tangente eguali oggi (il valore T_0 del tempo). La retta (d) e' la tangente alla curva in T_0. Le distanze temporali $T_0 - T_a$, $T_0 - T_b$, $T_0 - T_c$ rappresentano l'eta' dell'universo t_0 a seconda dei tre tipi di spazio.

   La distanza $T_0 - T_d$ e' il tempo di Hubble t_H. Si nota che il tempo di Hubble e' maggiore dell'eta' dell'universo per ogni tipo di spazio e che un universo chiuso (eta' $T_0 - T_a$) e' piu' giovane di uno aperto.

3. Figura A 3: Rappresentazione qualitativa dell'andamento dei parametri piú importanti in funzione del tempo per il periodo iniziale. Le unita' sono arbitrarie.
   (a) il fattore di scala $a(t)$;
   (b) la temperatura $T(t)$;
   (c) la densita' $\rho(t)$.

Chapter 9

I- La geometria del mondo fisico è una convenzione?

9.1 Introduzione

Alla fine dell'800 le geometrie non euclidee erano ben note ed accettate nella matematica. Si pose allora il problema della metrica dello spazio fisico: è euclidea? Henri Poincaré concluse intorno al 1900 che la metrica dello spazio non è un dato sperimentale ma una convenzione: nell'ambito di questa convenzione (e di altre), dice Poincaré, si interpretano i fenomeni fisici.

Pochi anni dopo fu sviluppata la Relatività generale che rappresenta lo spazio - tempo 4D come una varietà 4D dotata di curvatura. Le osservazioni di Poincarè si possono applicare anche allo spazio - tempo della relatività generale e la questione si ripropone. Queste posizioni di Poincaré interessano anche per il loro contenuto critico verso una interpretazione realista dei dati sperimentali.

In questo capitolo vogliamo riassumere brevemente la questione e comprendere perché i fisici non si curano della convenzionalità della metrica e a tutti gli effetti si comportano come se la metrica curva della relatività generale descrivesse la realtà del mondo esterno.

9.2 Le geometria di Euclide

Due parole sulla storia antica. Secondo Erodoto, la geometria (euclidea) comincia con le misurazioni agrarie (come dice la parola greca geometria) in Egitto, per via delle piene del Nilo. Le definizioni vennero astratte dalla pratica quotidiana. Per quel che ne sappiamo fu Talete (640-546 a.C.) ad introdurre lo studio della geometria come scienza. Con Pitagora (circa 580-500 a.C.) la geometria diviene una scienza metrica, proseguita dai pitagorici e platonisti. Parecchi geometri concepirono una presentazione logica della scienza (tra di loro Ippocrate di Chio, già intorno al 430 a.C.).

Il monumentale trattato di Euclide, scritto intorno al 300 a.C., costituì la migliore e più famosa sistemazione delle conoscenze teoriche accumulate in centinaia di anni.

Il trattato, in 13 volumi, contiene i risultati fondamentali della geometria allora nota. Euclide non rivendica alcuno dei risultati e appare come un compilatore; ma, considerando la organicità della trattazione e la sistemazione logica della materia, appare evidente che Euclide stesso ha contribuito a sistemare teoremi e sviluppare dimostrazioni.

Il titolo "Elementi" non significa trattazione elementare, ma "fondamenti". I primi 4 libri sono relativamente semplici mentre alcuni altri sono molto complessi e trattano matematica astratta, in particolare aritmetica e teoria dei numeri. Della vita di Euclide si sa poco. Era attivo in Alessandria intorno al 300 a.C.[1].

Il trattato, ricopiato moltissime volte, ci è pervenuto in buona parte. È un modello di sistema deduttivo. Euclide si propose di ottenere tutti i teoremi noti della geometria da un certo numero di ipotesi. È formato da 13 libri che trattano, tra le altre cose, la geometria piana, la teoria delle proporzioni, le proprietà dei numeri interi e la geometria solida.

Nel libro I Euclide introduce le Definizioni delle figure geometriche, le Nozioni Comuni o Assiomi (regole per operare, i Greci intendevano) e i Postulati (proposizioni che definiscono la geometria).

Le 23 Definizioni presentano in maniera intuitiva gli enti di cui tratta la geometria. Per esempio, il punto viene definito "ciò che non ha parti" e la linea "una lunghezza priva di spessore". La presentazione della retta è particolarmente interessante: "Una linea retta è una linea i cui punti giacciono equamente sulla stessa". Le linee parallele sono linee rette che, stando nello stesso piano e continuate indefinitamente in ambedue le direzioni, non si incontrano in nessuna delle due direzioni.

Euclide poi enuncia 5 "Nozioni Comuni" o Assiomi, riguardanti eguaglianze e diseguaglianze considerate proposizioni così evidenti da non aver bisogno di una dimostrazione. Essi sono evidenti perché su di essi si basa la natura stessa del nostro pensiero. Si tratta di definizioni di operazioni sugli enti che non riguardano soltanto la geometria euclidea ma sono comuni a diverse branche della matematica. Costituiscono regole

[1] Si dice che il Re Tolomeo, dopo aver ascoltato una delle sue lezioni, gli avesse chiesto se ci fosse un modo più semplice di studiare la geometria che non ascoltare le sue lezioni o leggere il suo trattato, e si dice che Euclide avesse risposto "Ci sono nel Paese strade per la gente comune e strade per i Reali, ma per la geometria c'è una sola strada".

per operare. Assiomi:

1. Cose uguali ad un'altra sono uguali fra loro;
2. Aggiungendo uguali ad uguali i risultati sono uguali;
3. Sottraendo eguali da uguali i risultati sono uguali;
4. Cose che coincidono con un'altra sono uguali tra loro;
5. L'intero è maggiore della parte.

Anche i postulati sono 5 e hanno carattere geometrico. A differenza dellle nozioni comuni, sono proposizioni che, anche se non evidenti, non possono essere provate mediante una proposizione più semplice. Essi definiscono l'intera geometria. I primi 3 riguardano rette e cerchi, il quarto riguarda gli angoli retti e il quinto è il postulato delle parallele.

Postulati: È evidente che

1. è sempre possibile tirare una retta che congiunge due punti assegnati;
2. un segmento puo' essere prolungato in ambedue le direzioni indefinitamente costituendo una retta;
3. dato un punto esiste un cerchio di raggio assegnato con centro in quel punto;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta che incontra altre due rette forma dalla stessa parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, le due linee rette, se continuate indefinitamente, si incontrano dalla parte in cui stanno gli angoli minori di due angoli retti. (Segue dal postulato che per un punto di un piano si può tracciare solo una parallela ad una retta assegnata nel piano.)

(Due commenti. Il quarto assioma è di natura geometrica: definizione di eguaglianza in senso geometrico. Definisce uguali due figure che si possono sovrapporre in modo che ogni elemento corrispondente sia uguale. Il primo postulato è incompleto e va completato dalla richiesta che la retta sia unica. Così è stato sempre interpretato.)

Le altre proposizioni si ricavano dai postulati mediante le regole stabilite con le "nozioni comuni" e sono di due tipi: costruzioni e teoremi. Esempio del primo tipo è la definizione di triangolo; del secondo tipo, il teorema di Pitagora.

Per quasi 2000 anni il libro di Euclide fu il modello dell'organizzazione del ragionamento e il culmine delle scienze matematiche. Aristotele prese la geometria di Euclide a modello generale di classificazione scientifica [2]. Nei Principia Newton organizza l'esposizione in Definizioni, Assiomi e Postulati. Il libro era considerato l'esposizione perfetta della scienza matematica fondamentale: la geometria unica ad esistere e vera indipendentemente dalla realizzazione nello spazio.

Ma adesso ci interessa la fine di questo predominio assoluto: la formulazione delle geometrie non euclidee.

9.3 Geometrie non euclidee

Il lungo dibattito sulla necessità del quinto postulato si concluse nella prima metà dell'800. Tre persone formularono indipendentemente geometrie non euclidee: Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), János Bolyai (1802 - 1860), Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856).

Gauss intorno al 1820 aveva formulato un modello di geometria non euclidea ottenendo parecchi teoremi ; probabilmente attese il momento per mettere la teoria in forma elegante e forse fu preoccupato dell'accoglienza di una tale novità; non pubblicò niente. Ricevette nel 1832 il lavoro di Bolyai che stampò in quell'anno la propria formulazione della geometria non euclidea in un'appendice al trattato elementare di matematica del padre Farkas, amico di Gauss. Lobachevsky preparò un trattato nel 1823 ma la prima comunicazione pubblica, un discorso alla sezione fisico - matematica dell'università di Kazan, avvenne nel 1826. Queste geometrie sono di carattere iperbolico, esistono cioé infinite parallele ad una retta data passanti per un punto e la somma degli angoli interni di ogni triangolo è minore di π.

Fu Bernhard Riemann (1826 - 1866) a trattare il caso in cui la somma degli angoli interni di un triangoli è maggiore di un angolo piatto e ogni linea retta è finita (geometria ellittica). Il ritardo fu probabilmente dovuto alla difficoltà di ammettere il concetto di una retta illimitata ma di lunghezza finita. Alla fine dell'800 esistevano dunque due geometrie non euclidee. La prima è quella sviluppata da Riemann. La seconda è quella di Bolyai e Lobachevsky, in cui la somma degli angoli interni èminore di π.

David Hilbert alla fine dell'800 chiarì il carattere puramente matematico delle geometrie come sistema logico svincolato dalle proprietà dello spazio fisico. La geometria euclidea tratta le proprietà di entità indefinite chiamate punti, linee etc ed è costituita dall'insieme delle proposizioni riguardanti queste entità che si ottengono a partire dai postulati di Euclide; altre geometrie hanno postulati diversi e in numero diverso e quindi proposizioni diverse. La geometria, euclidea o non euclidea, è un sistema matematico valido e consistente indipendentemente dalle proprietà delllo spazio fisico. La realizzazione delle entità geometriche mediante grandezze definite e misurate nello spazio fisico tridimensionale è irrilevante alla validità matematica delle varie geometrie.

[2]Come i teoremi della geometria si classificano sulla base della realizzazione degli assiomi e postulati, così le altre scienze classificano i loro soggetti a seconda del modo di realizzare i prinncipii, p. es. in zoologia gli animali sono classificati in base alle realizzazioni dei principi generali – respirazione, alimentazione, deambulazione, riptoduzione sono l'analogo dei postulati della geometria.

9.4 La geometria dello spazio fisico

Apparentemente spetta alle misure eseguite nello spazio fisico di decidere se lo spazio fisico sia euclideo o no. Per applicare la geometria allo spazio fisico dobbiamo definiire la corrrispondenza tra le entità matematiche e le grandezze fisiche. Il programma è dunque il seguente. Bisogna definire una realizzazione fisica del punto, della retta etc. Poi, usando questa realizzazione, controlleremo le proposizioni geometriche mediante misure di distanze e di angoli (entro gli errori sperimentali) per verificare se i postulati e i teoremi della geometria sono validi.

Si possono per esempio misurare gli angoli di triangoli costruiti mediante segmenti di retta che nello spazio fisico congiungono 3 punti fisici: se la loro somma è un angolo piatto entro la precisione degli strumenti, la geometria può essere euclidea; e si possono immaginare altre verifiche.

Lobachevsky per primo tentò di rilevare una possibile non euclidicità dello spazio 3D considerando il triangolo definito da due punti diametralmente opposti sull'orbita terrestre e dalla posizione di Sirio, senza trovare alcun effetto.[3]

Ma supponiamo che le misure spaziali provino che la somma degli angoli di un triangolo non è π e che tutte le altre misure confermino caratteristiche non euclidee. Siamo portati a concludere che lo spazio 3D ubbidisce ad una geometria non euclidea di cui le misure determinano il tipo (ellittica, iperbolica) e i valori delle curvature.

Henri Poincaré all'inizio del '900 (La Science et l'Hypothèse, 1902, Cap. V) osservò che la situazione è più sottile. Ogni insieme di misure può essere egualmente organizzato in una geometria euclidea o non euclidea. Poincaré conclude che la definizione della geometria è una convenzione.

La critica di Poincaré riguarda l'associazione degli oggetti del mondo fisico con gli enti indefiniti della geometria euclidea e in particolare l'identificazione fisica della linea retta.

Per verificare la geometria occorre definire le rette nello spazio fisico. Possiamo pensare ad aste fisiche o a corde ben tese. Ma andiamo a controllare se un'asta è retta: la guarderemo per così dire di profilo, vedendo se, come dice Euclide, "giace in se stessa", cioé il resto della retta non si discosta, nella linea visuale, dalla direzione iniziale formando curve. Per questo usiamo le traiettorie dei raggi luminosi e si giunge alla conclusione che un lato di un oggetto è diritto se la luce uscente da tutti i punti si sovrappone percorrendo lo stesso cammino. Quindi ogni verifica della geometria dello spazio è fatta identificando le linee rette con i cammini della luce.

Supponiamo per un momento che le misure dei cammini della luce siano tutte concordi nel definire una geometria non euclidea dei raggi di luce, fornendo una determinazione del tipo di geometria e la misura delle curvature. Concluderemo che la geometria dello spazio non è euclidea?

Poincaré sottolinea che l'identificazione dei raggi luminosi con le rette non è necessaria. Si possono descrivere gli stessi dati sperimentali supponendo ad esempio che la geometria sia euclidea e che i raggi di luce non siano le traiettorie di minor distanza tra due punti nello spazio, per esempio i raggi di luce sono soggetti a forze che ne fanno deviare il percorso dalle "vere" linee rette. Descrizioni con geometrie diverse sono equivalentemente in grado di parametrizzare i fenomeni. Quindi la geometria dello spazio fisico è una convenzione che viene stipulata prima di sistemare i dati percettivi grezzi, non una conseguenza delle misure.

Ne consegue un atteggiamento di critica verso la concezione realista della geometria dello spazio.

Pochi anni dopo queste osservazioni di Poincarè fu enunciata (1915) la relatività generale che introduce il concetto di spazio-tempo curvo. I fisici sono soliti affermare che gli esperimenti confermano la struttura della relatività generale che lo spazio - tempo è proprio fatto così, e via di seguito. Come mai non viene sottolineato il carattere convenzionale e il cammino dei raggi luminosi è preso come definizione di linea di minor cammino?

Se la questione riguardasse solo la convenzione, avrebbe ragione Poincaré. Ma la teoria fisica non è interpretata soltanto come una convenzione. Poincare' separa la considerazione della geometria dello spazio dal comportamento dei corpi fisici. Ma non esiste alcun ente fisico in grado di definire diversamente le linee di distanza minima nello spazio (o nello spazio - tempo). Se ogni ente fisico, dalle particelle agli elastici tesi e ai raggi di luce, si comporta come se lo spazio o lo spazio - tempo fosse curvo, se ogni possibile modello fisico di linea di minor distanza segue le proprietà di una geometria, allora il fisico conclude che lo spazio (o lo spazio - tempo) è curvo. è molto più naturale supporre che questa proprietà sia una caratteristica dello spazio (o dello spazio - tempo).

Vediamo la situazione della fisica classica e della relatività generale.

9.5 Spazio euclideo in fisica classica

La fisica classica e la gravità newtoniana sono basate sull'ipotesi che lo spazio 3D sia euclideo. A parte il fatto che la geometria euclidea era l'unica geometria concepita e che è più semplice delle altre, non c'è nessuna indicazione di deviazione dall'euclicità da parte di nessun triangolo costruito con enti fisici. I triangoli che

[3]Secondo il modello standard cosmologico attuale, lo spazio tridimensionale può essere curvo ma il raggio di curvatura sarebbe certo maggiore di 10^{28} centimetri. Naturalmente non c'è nessuna possibilità che il triangolo misurato da Lobachevsky mostrasse una deviazione dall'euclidicità allora come oggi. Nel quadro del modello cosmologico standard la questione della geometria dello spazio 3D è aperta ancora oggi e gli argomenti usati per determinarla sono indiretti. Anche oggi nessuna misura diretta ha provato che lo spazio 3D è curvo né ha stabilito il tipo di geometria dello spazio 3D (iperbolica, euclidea, ellittica).

hanno per lati raggi di luce o traiettorie di corpi materiali non soggetti a forze seguono le leggi della geometria euclidea.

In meccanica classica definiamo quindi come rette dello spazio i raggi luminosi e le traiettorie di corpi non soggetti a forze.[4]

A questo punto identifichiamo queste traiettorie con le geodetiche dello spazio 3D. Esse soddisfano i postulati e teoremi della geometria euclidea e concluderemo che lo spazio è euclideo. Il fatto che un corpo non soggetto a forze, o un ratggio di luce, percorre la linea di minore distanza tra due punti costituisce un comportamento generale che lega la dinamica di un corpo materiale libero e della luce alla struttura della geometria. Le distanze tra oggetti non dipendono (almeno così sembra) dallo stato di moto dell'osservatore. è naturale quindi definire la misura euclidea delle distanze e concludere che lo spazio è euclideo.

Inoltre lo scorrere del tempo non ha relazione evidente con la posizione di un corpo nello spazio né con la sua velocità. Ne segue la geometria classica dello spazio - tempo: il continuo temporale ha la topologia di una retta (l'"asse del tempo") su cui si stabilisce una relazione di distanza mediante una misura invariante per traslazioni. Il valore degli intervalli di tempo è indipendente (almeno così sembra) dalla posizione dell'osservatore e dal suo stato di moto.

Consideriamo un grave che si muova in presenza di altre masse. Esso non si muove più lungo una geodetica dello spazio e ne deduciamo l'esistenza di una forza, la gravità, che ubbidisce a principii generali. Così Newton cerca e stabilisce la legge dell'attrazione universale. Si noti che il moto gravitazionale non puo' essere rappresentato una deviazione della geometria dello spazio 3D rispetto al caso euclideo. Infatti il moto in presenza di masse non segue sempre le stesse traiettorie. è vero che le traiettorie di un grave in un campo gravitazionale assegnato non dipendono dalla massa del grave (principio di equivalenza), ma dipendono dalla velocità iniziale e non hanno carattere di generalità. Vedere il sistema solare classico.

Per queste ragioni l'introduzione di una metrica non euclidea dello spazio 3D sarebbe una convenzione priva di ragioni e viene ritenuta non corrispondente alla realta' fisica nell'ambito della fisica classica, dove per "realtà" si intende il carattere di permanenza delle caratteristiche e di indipendenza delle misure dall'osservatore.

[4]Forse questo asserto sembra una tautologia perché definiamo le forze in base alla deviazione dal moto rettilineo uniforme dei corpi materiali. Esaminiamo la quuestione più da vicino. Il concetto di forza proviene dalla statica che stabilisce il principio del loro equilibrio con la legge di composizione. Poi si passa a studiare le forze elastiche e le leggi delle collisioni e si deduce che le forze fanno deviare dal moto rettilineo uniforme.

9.6 Spazio - tempo curvo in Relatività generale

In Relatività generale si introduce la curvatura non del solo spazio 3D, si badi bene, ma del continuo spazio - temporale[5]. La curvatura dello spazio - tempo è dovuta alla presenza delle masse. Nello spazio - tempo curvo la traiettoria delle particella materiale o dei raggi di luce soggett a sole forze gravitazionali è una geodetica dello spazio - tempo, cioé una curva di minimo cammino tra due punti - eventi spazio - temporali. Questa proprietà è di tale generalità da costituire la base dell'identificazione della geometria spazio - temporale con la realtà fisica.

Poichè ogni corpo fisico (dalla luce alle particelle) soggetto a sole forze gravitazionali e non vincolato[6] si muove lungo una geodetica dello spazio - tempo incurvato dalle masse, non esiste alcun ente fisico che in presenza di masse serva a determinare nello spazio - tempo una geometria minkowskiana. Concludiamo con realismo implicito che lo spazio - tempo è curvo e la sua geometria è definita fisicamente dalle traiettorie universali di tutti i coprpi fisici non soggetti a forze (a parte la gravità).

Potremmo introdurre la convenzione che lo spazio - tempo sia di Minkowski? Sì potremmo, ma perderemmo in generalità, dovremmo di nuovo introdurre forze per spiegare il moto gravitazionale e si ritornerebbe a Newton (ritrovando le difficoltà concettuali dovute all'incompatibilità tra la descrizione newtoniana della gravità e i principii della relatività ristretta, a meno di complicare terribilmente la descrizione).

Ma la "convenzione" di uno spazio - tempo privo di curvatura limiterebbe fortemente gli sviluppi successivi. La rappresentazione della gravità come incurvamento dello spazio - tempo ha un ruolo essenziale per gli sviluppi, per esempio per concepire la geometria dei buchi neri o la storia dell'universo. Non esiste oggi alcuna rappresentazione dela fisica dei sistemi gravitazionali per mezzo di convenzioni diverse. Le altre convenzioni sono scomparse. La trattazione newtoniana è considerata un'approssimazione per piccole curvature. Inevitabilmente si ritiene con realismo che la struttura dell'universo sia quella della relatività generale.

[5]Si noti che sistemi con campi gravitazionali non molto intensi, come il sistema solare o la Galassia (lontano dal centro galattico) generano una curvatura percettibile solo nelle sezioni di tipo spazio - tempo, mentre la curvatura nelle sezioni dello spazio 3D è troppo piccola per essere rilevata. Questo è in accordo con l'ipotesi -approssimata- della fisica classica secondo la quale lo spazio 3D è euclideo

[6]Siete attirati verso la Terra ma non potete andare in quella direzione perchè la superficie terrestre ve lo impedisce? Siete quindi schacciati verso il terreno dal peso? La ragione è semplice: il terreno vi impedisce di percorrere una geodetica nello spazio - tempo.

9.7 Il Sole al centro del sistema planetario è una convenzione?

Talvolta si dice che, poiché il moto è relativo, la descrizione tolemaica o quella copernicana o quella alla Tycho Brahe[7] sono equivalenti. L'affermazione che il Sole si trova al centro del sistema planetario sarebbe un esempio di convenzione.

Naturalmente è così per quanto riguarda la descrizione dei moti: sappiamo oggi che possiamo porre dove vogliamo i nostri assi coordinati (magari pagando un prezzo di complicazione). In questo senso Copernico e Brahe sono equivalenti, salvo le complicazioni. Ma con Tolomeo la questione è diversa. L'interpretazione copernicana permette di collegare dati dell'orbita apparente di ogni pianeta (epicicli dei pianeti esterni e deferenti dei pianeti interni) con il moto relativo tra la Terra ed il Sole, e quindi dalle misure puramente angolari dell'astronomia copernicana si possono ottenere i rapporti tra le distanze dei pianeti.[8] Si ottengono dunque, con l'interpretazione copernicana, alcune conseguenze caratteristiche del processo di evoluzione scientifica: maggiore generalità, collegamento tra fenomeni prima indipendenti e la capacità di suscitare nuovi problemi prima inesistenti (le dimensioni del sistema solare): tratti caratteristici dell'innovazione nella teoria scientifica, come diremo tra poco.

Così nell'affare di Galileo bisogna far bene attenzione: le argomentazioni critiche di Bellarmino[9] interpretano, diciamo, "come convenzione" la teoria copernicana e gli sviluppi galileiani, in modo apparentemente ineccepibile dal punto di vista metodologico, in opposizione alle credenze realiste di Galileo che ritiene che la Terra si muova e non il Sole. Gli scienziati hanno creduto nella realtà: questa certezza è stata una componente fondamentale del loro impegno e ha spesso disturbato altri che vorrebbero essere i soli a dire l'ultima parola sulla realtà, vera o presunta.

9.8 Fisica e convenzione

L'approccio convenzionalista può essere esteso al di là della questione specifica della struttura dello spazio e può diventare il punto di partenza per interpretare tutta la fisica come una costruzione arbitraria, o perlomeno una descrizione possibile tra tante equivalenti, negando il legame diretto tra la descrizione matematica e la struttura del mondo reale. Il convenzionalismo, preoccupato del contenuto ontologico delle teorie, suppone che l'insieme dei dati ammetta l'inquadramento in teorie diverse e che la scelta sia una questione puramente pragmatica; risolve così il problema epistemologico della scelta tra descrizioni teoriche alternative.

Ma nella scienza recente il corpo della teoria fisica si sviluppa diventando molto complesso e tecnico. In più, l'interpretazione del dato osservazionale richiede la teoria: è proprio la teoria a determinare quali effetti sono significativi da osservare e ne costituiscono una prova o disprova, e le osservazioni stesse sono basate sulla teoria.

C'è ancora di più: stabilire un confine tra teoria ed osservazione nella fisica odierna è arduo. Consideriamo un fronte avanzato de4lla fisica attuale: lo studio delle particelle e delle interazioni a distanze dell'ordine di 10^{-18} cm (cioé con energie per grado di libertà intorno a 100 GeV, circa 10^{-8} Joule). La teoria è molto complessa, soltanto certe configurazioni limite della teoria possono essere confrontate con gli esperimenti e il percorso dai fondamenti teorici al dato osservativo è un tragitto tecnicamente lungo che richiede anni di sviluppi e usa pesantemente sia calcolo numerico che calcolo simbolico.

A loro volta la progettazione e la realizzazione di un esperimento esigono parecchi anni di lavoro di gruppi di centinaia di persone e sono fondati sulla teoria. La selezione stessa degli effetti sperimentali attesi avviene usando la teoria sia per quanto riguarda i segnali da rilevare che per la stima dei cosiddetti rumori di fondo, cioé di quei segnali considerati non interessanti perché complicati e già noti. La stima precisa del fondo è indispensabile per estrarre il segnale cercato dall'immensa quantità di segnali di ogni genere che lo oscurano.

(Per un paragone che non rende l'idea delle difficoltà incontrate pensiamo alle difficoltà di stabilire, in un mondo pieno di attrito, la legge dell'inerzia galileiana - newtoniana. Siete su un carretto di campagna, con ruote e mozzi di legno unti con grasso di montone, e un cavallo stanco tira il carretto lungo una carrozzabile mal sterrata. Solo nella discesa, quando, se gli attriti lo permettono, il carretto spinge il cavallo che frena, potrete porvi qualche domanda sull'inerzia. Non per nulla i testi antichi iniziavano le loro considerazioni sull'inerzia dal moto delle frecce.)

I numeri risultanti dagli esperimenti costituiscono sempre più la fase finale di un insieme immensamente complesso di attività teoriche e sperimentali. Così la separazione tra dati percettivi e interpretazione teorica, cara al dibattito convenzionalista, diventa più vaga col crescere della complessità della teoria. E con lo sviluppo della teoria non c'è posto per convenzioni alternative che non vengono neppure formulate.

Coloro che sostengono in generale che le teorie scientifiche sono arbitrarie, che esistono descrizioni equivalenti dei fatti e che la loro scelta è una convenzione non sono in grado di costruire descrizioni alternative

[7] Brahe descrive il sistema solare ponendo tutti i pianeti in rotazione intorno al Sole che a sua volta ruota intorno alla Terra.

[8] Passo già compiuto nell'antichità ma poi trascurato. Secondo Archimede (-287 – -212) Aristarco (intorno al -280) aveva descritto il sistema eliocentrico. Sappiamo anche che Aristarco aveva ottenuto una stima della distanza Terra - Sole, tra 18 e 20 distanze Terra Luna (si tratta in realtà di un rapporto di circa 395).

[9] Lettera del Cardinale Roberto Bellarmino al p. P.A. Foscarini, 12 aprile 1615. Si vedano anche le argomentazioni contenute nella prefazione di Osiander al libro di Copernico: il curatore della stampa del libro in Norimberga, teologo protestante Andrea Osiander, preoccupato del contenuto, antepose al testo una cauta prefazione non firmata: "Al lettore, sulle ipotesi di quest'opera".

in grado di fornire previsioni del comportamento del reale. Gli scienziati si comportano come se la teoria fosse unica: la teoria è quindi unica, dato che non esiste altro criterio di giudizio.

Naturalmente le teorie cambiano, ma i cambiamenti nella loro formulazione non sono dovuti all'uso di diverse convenzioni bensì all'accumulo di nuovi fatti sperimentali e allo sviluppo di nuove concezioni che, dotate di maggiore generalità, inquadrano un insieme più vasto di fenomeni in modo più elegante.[10]

9.9 Fisica ed epistemologia

Nel tentativo apparentemente lodevole di astrarre un comportamento generale nel metodo della fisica senza penetrarne il lavorío interno si parlò spesso dei criteri che guidano la descrizione fisica sostenendo, come fece il criticismo del '900, che la scelta della teoria è guidata da criteri di utilità e di economia di concetti; per esempio, le leggi della fisica classica sono la convenzione più "utile", più "economica"; per esempio, la legge di Newton viene accettata perchè costituisce un riassunto economico del comportamento dei pianeti del sistema solare.

Ma l'epistemologia è una strada lastricata da buone intenzioni che volge verso direzioni esterne alla scienza. Il tentativo di spiegare il lavorío della scienza mediante criteri esterni è vano. La complessità dello sviluppo della fisica sfugge alla classificazione dall'esterno. La forza della conoscenza scientifica non sta nell'ubbidire a categorie di generalizzazione esterna (l'"utile", l'"economia di concetti" etc) ma nel suo potere di generalizzazione che permette di comprendere un insieme vasto di fenomeni naturali e di costruire un ulteriore edificio di conoscenze.

In generale l'atteggiamento dei fisici non è convenzionalista e neanche "economicista": tra le diverse stipulazioni ve n'è una che viene scelta e considerata reale. Abbiamo visto le ragioni della geometria dello spazio - tempo: una delle "convenzioni" è fruttuosa, ha carattere generale ed è ritenuta "vera" cioé una proprieta' del "reale". Come mai gli scienziati non condividono il carattere di pura stipulazione per la descrizione del mondo fisico in genere? Cerchiamo di capire le ragioni di questa scelta.

La fisica considera la natura come una realizzazione degli enti matematici mediante grandezze fisiche. Agli enti fisici si associano enti matematici. Così alle forze fisiche si associano vettori, alle particelle traiettorie, ai campi elettromagnetici ancora vettori, alla luce onde matematiche vettoriali etc.

Nei suoi aspetti fondamentali la fisica è interessata ad alcune caratteristiche indispensabili delle descrizioni adottate: massima generalità (capacita' di organizzare e unificare varii fenomeni), innovazione (capacità di suscitare nuovi problemi al di là dell'insieme dei fenomeni già noti) coerenza (assenza di elementi ridondanti o ad hoc per la spiegazione del mondo), efficacia (buona approssimazione dei risultati delle misure sperimentali), bellezza (semplicità ed eleganza matematica). Si attribuisce carattere fondamentale a una teoria (nel nostro caso particolare la geometria spazio - temporale) che abbia queste caratteristiche di generalità, innovazione, semplicità, efficacia, bellezza e su questa si costruisce la descrizione del mondo fisico.

Si parla abitualmente di "bellezza" di una teoria, non di economicità. È difficile rendere pienamente questo senso di bellezza il cui apprezzamento dipende da una sensibilità (quasi artistica) di carattere matematico e fisico che apprezza la generalità della struttura matematica, l'uso (o l'invenzione) di concetti ed enti matematici più elevati e più generali, ad esempio aspetti geometrici o algebrici o topologici, la semplicità che deriva dal vedere fatti e teorie da un punto di vista più generale e matematicamente più elevato, ma non necessariamente più complicato, anzi talvolta più intuitivo. Il potere di previsione deve essere stringente, la teoria deve dare risposte precise. Una descrizione piena di regole arbitrarie, con un gran numero di parametri liberi, non sintetica, che puo' essere aggiustata ad accomodare ogni insieme di dati grezzi, una specie di elenco telefonico insomma, è l'opposto di una teoria bella e seducente.

(Considerando i "criteri" che abbiamo tentato di delineare si dovrebbe parlare piuttosto di riconoscimenti a posteriori. Nessuno si siede al tavolo annunciando il desiderio di costruire una teoria generale, potente ed elegante.)

Inoltre il processo di conoscenza è dinamico: l'effetto incompreso ieri diventa oggi la teoria e le deviazioni da questa teoria domani permettono di comprendere ancora altre cose. La conoscenza si sviluppa lungo le linee di una scelta mentre le altre "scelte equivalenti" non sono altrettanto fruttifere. La costruzione si rafforza e prosegue se la teoria, oltre a spiegare l'insieme dei nuovi fatti per cui è stata concepita, diviene la base di ulteriori teorie e sviluppi.

A questo punto l'asserzione dell'equivalenza di altre scelte diventa irrilevante perché non esistono. Tra le opzioni pensate equivalenti dalle formalizzazioni convenzionaliste ne esiste una sola nella sistematizzazione delle osservazioni. Essa è indispensabile e unica, nel senso che le teorie convenzionalmente equivalenti non esistono o sono meno generali e meno fertili di innovazioni, si isteriliscono e non vengono adoperate perché poco maneggevoli o non adatte a nuove generalizzazioni ed ampliamenti, come abbiamo visto nel caso della relatività generale.

Le prove accumulate, la generalità, la profondità di una teoria convincono che essa descrive la realtà dei fenomeni in un vastissimo ambito spazio - temporale e di energie coinvolti. Così la teoria viene interpretata come una descrizione unica ed accurata della realtà (entro le approssimazioni e nella regione di fenomeni considerati) e non come una costruzione convenzionale.

La teoria verrà superata quando nuovi fatti sperimentali e sviluppi teorici faranno comprendere per quali

[10]Sulla continuità nel cambiamento delle teorie abbiamo già detto in altra parte di queste letture.

fenomeni va modificata, in quale direzione va generalizzata e quale è la teoria di cui essa costituisce una espressione approssimata. Infatti non ci stancheremo mai di ripetere che questa visione realista del mondo non costituisce una visione rigida della realtà fisica ma un atteggiamento di fiducia nel valore di permanenza e unicità della rappresentazione fisica al livello di approssimazione a cui ci si trova ad un dato istante dello sviluppo delle conoscenze. I fisici non sono così ingenui oggi da pensare che ogni teoria attualmente in uso (come lo spazio - tempo curvo della relatività generale) costituisca la verità definitiva per tutte le regioni dello spazio e del tempo, per tutte le energie e per tutti i fenomeni. [11] Si ritiene piuttosto che la teoria scientifica in atto ad un dato momento sia la più appropriata per descrivere e prevedere i fenomeni in un certo ambito, e che l'estensione comporterà teorie diverse, più generali, che contengono quelle attuali come caso limite. Ciò è garantito dalla permanenza e indipendenza della natura (sperimentalmente provate) e dalla capacità della teoria in atto a spiegare e prevedere i fenomeni.

L'esperienza del secolo appena scorso ci insegna che i limiti di una teoria non derivano dal suo carattere convenzionale, ma da sviluppi futuri che ne modificheranno, magari essenzialmente, le strutture. Ma poichè il mondo fisico è uno solo e la descrizione è stata valida entro certe approssimazioni, gli sviluppi futuri ne manterranno la validità e l'unicità *come approssimazione* nella regione di fenomeni in cui è nota oggi la sua validità: questo è lo schema che vediamo in azione nel passaggio tra la gravità newtoniana e quella di relatività generale, tra la meccanica classica e quella quantistica, tra questa e la teoria quantistica dei campi e così via.

La permanenza della natura indipendente e‘ alla base della validita‘ della scienza del passato come approssimazione anche quando sia stata formulata una teoria nuova. Ma d'altro lato il giudizio degli scienziati e i risultati pratici delle loro conoscenze, che sono l'unico criterio di validita‘ scientifica, sono soggetti ad evoluzione storica. Dobbiamo quindi considerare come valide approssimativamente le teorie esistenti, riconoscendone i limiti, invece di finir per considerare tutte le teorie come descrizioni alternative, monche o addirittura arbitrarie e quindi svuotate di contenuto gnoseologico. Non mi pare che ci sia altra scelta. La difesa del contenuto gnoseologico passa attraverso un compromesso tra le conoscenze di certe regioni della natura, approssimate ma sicure entro l'approssimazione (perche' provate mediante risultati pratici, consenso, indipendenza e permanenza), e l'enunciazione (storicamente cangiabile) delle leggi generali.

Si tratta di una sana e robusta professione di realismo nella prassi, non diversa da (ma anzi più sostenibile di) quell'elementare realismo che il buon senso adopera nell'interpretazione delle vicende quotidiane di ciascun essere umano sano di mente; e tanto basta per parlare di concezione realistica e non convenzionale.

[11] Per dirne una, l'attuale difficoltà nel formulare una teoria quantistica che comprenda la relatività generale fa ritenere che anche essa debba costituire una descrizione limitata che potrà essere superata.

Bibliography

[1] A. Koiré, "La rivoluzione astronomica: Copernico, Keplero, Borelli", Feltrinelli, Milano 1966.

[2] T.S. Kuhn. "La rivoluzione copernicana", Einaudi Torino 1972.

[3] Seguo la traduzione in Inglese di A. Motte della II edizione (1713) dei Principia: "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book III, General Scholium. Fac - simile by Dawsons of Pall Mall, London 1968, p.392 e seguenti.

[4] Internet sito http:/www.astro.ku.dk/~lars_c/btp /solar/eng/data.htm

[5] Anderson et al., Phys. Rep. 295, 93 (1998); P. Havas, Gen. Rel. Grav. 19, 435 (1987); Zazaletdinov, Tavakol, Ellis, Gen. Rel. Grav. 28, 1251 (1996); P. Bergmann, Rev. Mod. Phys. 33, 510 (1961).

[6] V. de Alfaro, "Lo spazio e il tempo nelle teorie fisiche", L'Ateneo, anno XIV n.5, Torino, gennaio / febbraio 1998.

[7] I. Newton, Op. Cit. Vedere Vol. II, Book III, "Of the System of the World" e in particolare Proposition VII.

[8] A. Einstein, Ann. der Physik ser. 4, XVII 891 (1905). Vedere A. Einstein, "Opere Scelte" a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino 1988, p. 330.

[9] R. Sexl e H.K. Schmidt, "Spaziotempo", Boringhieri, Torino 1980, p. 276.

[10] E. Whittaker, "A Story of the Theories of Aether and Electricity", Am. Inst. of Physics Reprint 1987.

[11] A. Pais, "Sottile è il Signore", Bollati Boringhieri, Torino; sez. 6a.

[12] R. Sexl e H.K. Schmidt, Op. Cit.

[13] Galileo, "Dialogo sui Massimi Sistemi," Giornata 2a, Esperienza con la qual sola si mostra la nullità di tutte le prove prodotte contro al moto della Terra.

[14] I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book I, p.9 e seguenti.

[15] E. Whittaker, Op. Cit. vedere la parte sul corpo α.

[16] E. Mach, "La meccanica nel suo sviluppo storico - critico", Boringhieri, Torino 1968.

[17] Leggi della dipendenza dalle distanze in Newton: I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book ...

[18] I. Newton, "The Mathematical Principles of Natural Philosophy, By Sir Isaac Newton, transl. by Andrew Motte, London 1727"; Book II, p.261 e seguenti.

[19] A.Einstein, L. Infeld, L'evoluzione della fisica, Einaudi Torino 1948

[20] G.Galilei, "Dialogo dei massimi sistemi", Ed. Studio Tesi Pordenone 1988

[21] Aristotele, "La Fisica", ed. Laterza Bari 1968

[22] W.D.Ross, "Aristotele" Feltrinelli Milano 1971

[23] N.Copernico, "De Revolutionibus Orbium Caelestium" libro I, a cura di A.Koyré, Einaudi Torino 1975

[24] N.Copernico, "On the Revolutions of Heavenly Spheres", Prometheus Books Amherst, New York 1995

[25] M.Jammer, "Storia del concetto di forza", Feltrinelli Milano 1971

[26] E.J. Dijksterhuis "Il meccanicismo e l'immagine del mondo" Feltrinelli Milano 1971

[27] L.N. Cooper, Introduction to the meaning and structure of physics. Harper, New York 1968

[28] G.O. Abell, "Exploration of the Universe", 3rd Ed., Holt, Rinehart, and Winston, New York 1975.

[29] H. Bondy, "Cosmology", Cambridge University Press 1961.

[30] N. Calder, "L'universo di Einstein", Zanichelli, Bologna 1981.

[31] "COBE Measures Anisotropy in Cosmic Microwave Background Radiation", Physics Today, June 1992, p. 17.

[32] A. Einstein, Opere scelte, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino 1988.

[33] M. Friedmann, “Foundations of Space - Time Theories”, Princeton University Press, 1983.

[34] S. Hawking, G.F. Ellis, “The Large Scale Structure of Space - Time”, Cambridge University Press 1973.

[35] E. Hubble, ristampato in G.B. Field, H. Arp, J.N. Bahcall “The Redshift Controversy”, Benjamin, Reading, MA 1973.

[36] E.W. Kolb, M.S. Turner, “The Early Universe”, Addison - Wesley Publ. Co. 1990.

[37] Rocky Kolb, “Blind Watchers of the Sky”, Helix Books 1996.

[38] L.M. Lederman, D.N. Schramm, “Dai quark al cosmo”, Zanichelli, Bologna 1991.

[39] E. Mach, “La meccanica nel suo sviluppo storico - critico”, Boringhieri, Torino 1968.

[40] J.C. Maxwell, “Trattato di Elettricita‘ e Magnetismo”, UTET, Torino 1973.

[41] E.A. Milne, “Relativity, Gravitation and World Structure”, Oxford 1935.

[42] C.W. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler, “Gravitation”, Freeman and Co. New York 1970.

[43] I. Newton, “The Mathematical Principles of Natural Philosophy”, translated into English by Andrew Motte, London 1727, reprinted by Dawsons of Pall Mall, 1968.

[44] A. Pais, “Sottile e‘ il Signore”, Boringhieri, Torino 1986.

[45] W. Pauli, “Teoria della relativita‘”, Boringhieri Torino 1958.

[46] M. Pauri, voce “Spazio e Tempo”, Enciclopedia delle Scienze Fisiche, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1995.

[47] A.A. Penzias, R. Wilson, Astroph. Journal 142, 419 (1965).

[48] M. Rowan-Robinson, “The Cosmological Distance Ladder”, W.H. Freeman and Company, New York 1985.

[49] R. Sexl e H.K. Schmidt, “Spaziotempo”, Boringhieri, Torino 1980.

[50] R.C. Tolman, “Relativity, Thermodynamics and Cosmology”. Clarendon Press, Oxford 1934.

[51] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, J.Wiley and Sons, 1972.

[52] S. Weinberg, “I primi tre minuti”, Mondadori, Milano 1977.

[53] J.A. Wheeler, “Gravita‘ e spaziotempo”, Zanichelli, Bologna 1993.

[54] G.J. Whitrow, “Time in History”, Oxford University Press 1988.

[55] E. Witten, “Reflections on the Fate of Spacetime”, Physics Today 49, n.4 (April 1996) 24.

[56] R. Alpher, H. Bethe, G. Gamow, Phys. Rev. 73, ...(1948).

[57] C. Brans, R.H. Dicke, Phys. Review 124, 925 (1961).

[58] W. de Sitter, Mon. Not. R. Astr. Soc. 78, 3 (1917).

[59] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A, 165, 199 (1938).

[60] G.B. Field, H. Arp, J.N. Bahcall, “The Redshift Controversy”, Benjamin 1973.

[61] A. Friedmann, Zeitschr. Phys. 10, 377 (1922) e 21, 326 (1924).

[62] G. Gamow, Phys. Rev. 74, 505 (1948).

[63] P. Jordan, Nature 139, 323 (1937) e 164, 637 (1949).

[64] G.F. Smoot, D. Scott “Cosmic Background Radiation” astro-ph/9711069 8 Nov. 1997.

[65] G. Wataghin, Phys. Rev. 73, ... (1948).

[66] H. Weyl, Phys. Z. 24, 230 (1923).