# Teorie efficaci per un plasma di quark e gluoni a $T$ e $\mu$ finiti

Andrea Beraudo

9 luglio 2002

# Indice

**Introduzione** **6**

## I Strumenti utilizzati 8

**1 Meccanica quantistica e path integral** **9**
1.1 Meccanica quantistica di una particella in un mondo unidimensionale . . . 9
1.2 Approccio con la matrice di trasferimento . . . 13

**2 Teoria dei campi a temperatura zero: il campo scalare** **19**
2.1 Campo scalare libero su reticolo . . . 19
2.2 Campo scalare: approccio meccanico statistico . . . 21
2.2.1 Il caso con una singola variabile . . . 21
2.2.2 Il Teorema di Wick . . . 22
2.2.3 Campo scalare nello spazio continuo . . . 23
2.2.4 Calcolo perturbativo di $G^{(2)}(x,y)$ . . . 25
2.2.5 Rinormalizzazione della massa a un loop . . . 26

**3 Bag model e transizione di fase** **30**
3.1 Gas di particelle identiche nell'ensemble grancanonico . . . 30
3.2 Transizione di fase nel caso $\mu = 0$ . . . 33

**4 Teoria dei campi a temperatura finita** **39**
4.1 Meccanica quantistica a temperatura finita. Il caso dell'oscillatore armonico . . . 39
4.1.1 Il propagatore a tempi immaginari . . . 40
4.1.2 Il propagatore a tempi reali . . . 42
4.2 Il campo scalare a temperatura finita . . . 48
4.2.1 Approccio funzionale . . . 48
4.2.2 La somma sulle frequenze . . . 50

4.2.3 Formalismo operatoriale . . . 53
4.2.4 Propagate libero e funzione spettrale . . . 55
4.2.5 Proprietà di analiticità e propagatore a tempi reali . . 56
4.2.6 Rappresentazioni spettrali per il propagatore e la self-energia . . . 58
4.2.7 Il limite $\beta \to 0$ . . . 63
4.2.8 Modi hard e modi soft . . . 66

**5 Teoria della risposta lineare** **71**

## II Il plasma di quark e gluoni 75

**6 La lagrangiana e la costante di accoppiamento di QCD** **76**

**7 Scale e gradi di libertà nel QGP** **78**

**8 Equazioni cinetiche per le particelle del plasma** **81**
8.1 Equazioni cinetiche in meccanica classica . . . 82
8.2 Equazioni cinetiche in meccanica quantistica . . . 86
8.3 Equazioni cinetiche in QCD . . . 91
8.3.1 Equazioni di trasporto classiche in QCD . . . 91
8.3.2 Teoria cinetica quantistica in QCD . . . 95
8.4 Effetti abeliani e non-abeliani . . . 95

**9 Modi collettivi nel QGP** **99**
9.1 Il tensore di polarizzazione per un gluon soft in approssimazione di HTL . . . 99
9.2 Il propagatore efficace di un gluone soft . . . 101
9.3 Debye screening e Landau damping . . . 104

## III Transizioni di fase nel modello NJL 108

**10 Il modello di Nambu Jona-Lasinio** **109**
10.1 La lagrangiana di NJL e le sue simmetrie . . . 110
10.1.1 La simmetria $U_V(1)$ . . . 110
10.1.2 La simmetria $U_A(1)$ . . . 111
10.1.3 La simmetria $SU_C(3)$ . . . 112
10.2 Equazioni del moto e loro linearizzazione . . . 113
10.3 Il condensato chirale nel vuoto a $T = 0$ . . . 114
10.3.1 Studio del caso $m = 0$ . . . 116

10.4 Il condensato chirale nel mezzo a $T = 0$ . . . . . . . . . . . . . . 118
10.4.1 Il caso $m = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120
10.5 Il condensato chirale a temperatura e densità finita . . . . . . 120
10.6 Risultati numerici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
10.6.1 Risultati numerici a $T = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
10.6.2 Risultati numerici a $T \neq 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131

**Conclusioni** **137**

# Elenco delle figure


2.1 Diagrammi all'ordine $g$ per $G(x-y)$ . . . . . . . . . . . . . . . 27
2.2 Rinormalizzazione della massa a un loop . . . . . . . . . . . . 29

3.1 Diagramma delle fasi nel piano $(\mu_B, T)$ . . . . . . . . . . . . . 34
3.2 Pressione di un gas di pioni confrontata con quella del QGP . 38

4.1 La somma sulle frequenze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
4.2 Il propagatore efficace dei modi soft in una teoria $\phi^4$ . . . . . . 70

9.1 Il propagatore di polarizzazione in approssimazione di HTL . . 100
9.2 Determinazione della parte immaginaria della funzione $Q(\omega/p)$ 104

10.1 Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione dell'impulso di Fermi a $T=0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
10.2 Andamento del potenziale chimico $\mu$ in funzione di $p_F$ a $T=0$. 126
10.3 Densità di energia in funzione di $p_F$ a $T=0$. . . . . . . . . . . 128
10.4 Energia per particella in funzione di $p_F$ a $T=0$. . . . . . . . . 128
10.5 Densità di energia in funzione di $p_F$ a $T=0$ dopo aver sottratto il contributo del vuoto. . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
10.6 Energia per particella in funzione di $p_F$ a $T=0$ dopo aver sottratto il contributo del vuoto. . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
10.7 Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu=0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
10.8 Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu=100$ MeV. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
10.9 Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu=200$ MeV. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132
10.10 Ricerca della massa efficace $m^\star$ a $\mu=200$ MeV. . . . . . . . . 133
10.11 Densità barionica al variare di $T$ a $\mu=200$ MeV. . . . . . . . 133
10.12 Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu=300$ MeV. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 134
10.13 Ricerca della massa efficace $m^\star$ a $\mu=300$ MeV. . . . . . . . . 135

10.14 Linea di transizione di fase nel piano $(\mu, T)$. . . . . . . . . . . 136

# Introduzione

La tesi verte sulla fisica del quark gluon plasma (QGP) che è la fase della materia in cui quark e gluoni sono deconfinati. I principali argomenti a favore di questa transizione di fase, che si pensa possa avvenire in QCD ad alta temperatura, giungono dai calcoli su reticolo.
Ci siamo preoccupati di esporre sinteticamente gli strumenti necessari per affrontare tale tema e cioè la teoria dei campi a temperatura zero e a temperatura finita; ci siamo limitati ad illustrare la teoria nel caso del campo scalare. Abbiamo anche brevemente esposto la teoria della risposta lineare ad una perturbazione esterna, che è indispensabile nell'affrontare il problema del QGP.
È innanzitutto necessario avere a disposizione un modello per il nucleone: in questa tesi abbiamo considerato il bag model del MIT che, pur nella sua semplicità, consente di ricavare una stima ragionevole della temperatura a cui si verifica la transizione di fase.
Sono state quindi discusse le scale e i gradi di libertà caratterizzanti il QGP, distinguendo tra modi *hard* e modi *soft*, con lo scopo di evidenziare la scala di impulsi a cui emergono i fenomeni collettivi. Per quanto concerne i moti collettivi del QGP, che corrispondono ai gradi di libertà *soft*, essi sono stati studiati nell'ambito delle equazioni cinetiche, estendendo i risultati ottenuti per un plasma elettromagnetico al caso del QGP e mettendo in luce le condizioni molto più ristrettive in cui per quest'ultimo la teoria della risposta lineare fornisce dei risultati corretti. Abbiamo quindi illustrato la fisica dei moti collettivi discutendo lo screening di Debye ed il damping di Landau. Il nostro interesse verso i modi collettivi è giustificato dal fatto che essi sono caratteristici della fase di QGP e ci si aspetta che possano influenzare i segnali rivelati sperimentalmente, fornendo così un indizio indiretto dell'avvenuta transizione di fase.
Per quanto concerne infine la transizione di fase chirale, essa è stata affrontata nell'ambito del modello di Nambu Jona-Lasinio. Tale modello, in realtà, non ammette una fase confinata, tuttavia consente di studiare in modo abbastanza semplice la transizione di fase chirale che si pensa coincida con la

transizione di deconfinamento: questo tuttavia è un argomento di ricerca ancora aperto. Nell'ambito del modello NJL abbiamo conseguito dei risultati in parte originali, specialmente quelli implicanti l'utilizzo del propagatore fermionico relativistico nel mezzo a temperatura finita. Abbiamo in particolare messo in luce come il modello NJL ammetta due tipi diversi di transizione di fase (del primo e del secondo ordine).

# Parte I

# Strumenti utilizzati

# Capitolo 1

# Meccanica quantistica e path integral

## 1.1 Meccanica quantistica di una particella in un mondo unidimensionale

Iniziamo a studiare il problema unidimensionale di una particella di massa $m$ soggetta ad un potenziale $V(q)$ dipendente quindi solo dalla posizione. L'hamiltonina che descrive questo semplice sistema è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{1.1}$$

La sua lagrangiana è invece:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q) \tag{1.2}$$

Siamo interessati a sapere qual è l'ampiezza di probabilità che la particella, che all'istante $t_1$ si trova in $q_1$, venga a trovarsi in $q_2$ al tempo $t_2$. Una particella che al tempo $t_1$ si trova in $q_1$ è decritta dal vettore di stato in descrizione di Heisenberg $\mid q_1, t_1 >_H$, dove $t_1$ non indica una dipendenza temporale del *ket*, ma è un semplice *label*. Tale vettore di stato è autovettore dell'operatore posizione al tempo $t_1$ corrispondente all'autovalore $q_1$. Valgono quindi le equazioni agli autovalori:

$$Q(t_1) \mid q_1, t_1 >_H = q_1 \mid q_1, t_1 > \tag{1.3}$$

$$Q(t_2) \mid q_2, t_2 >_H = q_2 \mid q_2, t_2 > \tag{1.4}$$

Le corrispondenti equazioni in rappresentazione di Schrödinger sono invece:

$$Q \mid q_1(t_1) >_S = q_1 \mid q_1(t_1) >_S \tag{1.5}$$
$$Q \mid q_2(t_2) >_S = q_2 \mid q_2(t_2) >_S \,. \tag{1.6}$$

E' utile ricordare la relazione che lega i vettori di stato nelle rappresentazioni di Heisenberg e di Schrödinger[1]:

$$\mid \Psi >_H \equiv \mid \Psi(0) >_S = e^{i\widehat{H}t} \mid \Psi(t) >_S \,.$$

Definendo $\Delta t = t_2 - t_1$ possiamo calcolare questa ampiezza di probabilità che sara' data dal prodotto scalare dei vettori di stato in rappressentazione di Heisenberg:

$${}_H < q_2, t_2 \mid q_1, t_1 >_H = {}_S < q_2 \mid e^{-i\widehat{H}\Delta t} \mid q_1 >_S \,. \tag{1.7}$$

Iniziamo ad esaminare il caso semplice di un intervallo temporale infinitesimo che battezziamo allora $\delta t$. Questa assunzione semplifica il trattamento dell'esponenziale che compare tra il *bra* e il *ket* in cui ad argomento ho la somma di due operatori non commutanti.E' sufficiente quindi inserire una relazione di completezza sugli impulsi ed effettuare l'integrazione riconducendosi ad un integrale gaussiano. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}
{}_H < q_2, t_2 \mid q_1, t_1 >_H &= < q_2 \mid e^{-i[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})]\delta t} \mid q_1 > \\
&= < q_2 \mid e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} e^{-iV(\hat{q})\delta t} \mid q_1 > \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp < q_2 \mid e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} \mid p >< p \mid e^{-iV(\hat{q})\delta t} \mid q_1 > \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-i\frac{p^2}{2m}\delta t} e^{-iV(q_1)\delta t} < q_2 \mid p >< p \mid q_1 > \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-i\frac{p^2}{2m}\delta t} e^{-iV(q_1)\delta t} e^{ip\delta q} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\frac{i\delta t}{2m}\left(p - \frac{\delta q}{\delta t}\right)^2} e^{i\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\delta q}{\delta t}\right)^2 - V(q_1)\right]\delta t}
\end{aligned}$$

[1]in tutta la nostra trattazione supporremo $\hbar = 1$

dove $\delta q = q_2 - q_1$. Ottengo quindi l'equazione valida nel caso $\delta t = t_2 - t_1$ infinitesimo[2]:

$$< q_2, t_2 \mid q_1, t_1 >= \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{1/2} e^{i \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\delta q}{\delta t}\right)^2 - V(q_1)\right] \delta t}. \tag{1.8}$$

Supponiamo ora che l'intervallo temporale $\Delta t$ non sia infinitesimo. Lo divideremo allora in $N$ intervallini $\delta t$ e faremo quindi il limite $N \to \infty$ in modo da poter applicare a questi intervallini il risultato ottenuto nel caso infinitesimo. Per dividere in $N$ parti uguali il nostro intervallo temporale si devono inserire $N - 1$ relazioni di completezza sulle coordinate. Vediamolo con un esempio per il caso $N = 3$:

$$\begin{aligned} < q_f, t_f \mid q_i, t_i >= \int dq_1 dq_2 < q_f, t_f \mid q_2, t_2 > \times \\ < q_2, t_2 \mid q_1, t_1 >< q_1, t_1 \mid q_i, t_i > \end{aligned}$$

Se definisco:

$$\alpha = \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

ottengo l'espressione per l'ampiezza di probabilità:

$$< q_f, t_f \mid q_i, t_i >= \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \alpha^N e^{i \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\delta q_i}{\delta t}\right)^2 - V(q_i)\right] \delta t}. \tag{1.10}$$

Nel limite $N \to \infty$ la sommatoria si trasforma in un integrale e se definisco la seguente misura di integrazione

$$[Dq(t)] = \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{N/2} \tag{1.11}$$

posso allora scrivere l'ampiezza di probabilità come:

$$< q_f, t_f \mid q_i, t_i >= \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} [Dq(t)] e^{i \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt}. \tag{1.12}$$

Cerchiamo ora di capire meglio il significato di integrale di cammino. Consideriamo un cammino percorso dalla particella con la legge oraria $q(t)$. Se inseriamo questa legge oraria nella lagrangiana troviamo l'azione associata

[2]si utilizza il noto risultato $\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

a questo particolare cammino. Per trovare l'ampiezza di probabilità che cerchiamo dobbiamo sommare (o meglio integrare) su *tutti* i possibili cammini che la particella puo' percorrere tenendo fissi gli estremi $(q_i, t_i)$ e $(q_f, t_f)$. Questa integrazione la facciamo nel momento in cui inseriamo le relazioni di completezza tra il *bra* e il *ket*. È importante notare che il contributo di tutti i cammini, anche di quelli molto diversi dalla traiettoria classica, è lo stesso in modulo: ciò che li differenzia è la fase. Si trova allora che quelli vicini alla traiettoria classica si compongono in fase, mentre quelli che si discostano molto da essa tendono a cancellarsi. La definizione della misura di integrazione 1.11 e la convergenza dell'integrale 1.12 sono questioni molto delicate. Si preferisce quindi effettuare una *rotazione di Wick*, cioè una continuazione analitica a tempi immaginari: questo assicura la convergenza dell'integrale e consente di fare un interessante confronto con la meccanica statistica. Avremo infatti:

$$t = -i\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = it \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{\delta q}{\delta t}\right)^2 = \left(\frac{\delta q}{-i\delta\tau}\right)^2 = -\left(\frac{\delta q}{\delta\tau}\right)^2 \tag{1.14}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q) \tag{1.15}$$

$$< q_f, \tau_f \mid q_i, \tau_i > = < q_f \mid e^{-H\Delta\tau} \mid q_i > \tag{1.16}$$

$$< q_f, \tau_f \mid q_i, \tau_i > = \int_{q(\tau_i)=q_i}^{q(\tau_f)=q_f} [Dq(\tau)] e^{-\int_{\tau_i}^{\tau_f} \mathcal{H}(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau}. \tag{1.17}$$

A questo punto imponiamo condizioni al contorno periodiche ponendo $q_i = q_f = q$ e integriamo su q la nostra ampiezza di probabilità. Se battezziamo $\Delta\tau = \beta$ notiamo che l'oggetto così ottenuto può essere visto come la *funzione di partizione* del nostro sistema:

$$Z = \int dq < q, \tau_f \mid q, \tau_i >= \int dq < q \mid e^{-\beta H} \mid q > \equiv Tr(e^{-\beta H}). \tag{1.18}$$

Espressa attraverso l'integrale di cammino la nostra funzione di partizione diventa:

$$Z = \int_{q(0)=q(\beta)} [Dq(\tau)] e^{-\int_0^\beta \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] d\tau}. \tag{1.19}$$

La misura di integrazione, se poniamo $\delta\tau = a$, diventa:

$$[Dq(\tau)] = \prod_{j=1}^{N} dq_j \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{N/2}. \tag{1.20}$$

Notiamo che l'imporre condizioni al contorno periodiche conduce a una perfetta corrispondenza tra numero di suddivisioni dell'intervallo temporale e numero di variabili di integrazione. La lunghezza del periodo temporale, come si vede dall'equazione (1.18) che definisce la funzione di partizione, può essere identificata con l'inverso della temperatura del sistema. Questa osservazione ci tornerà utile per lo studio della teoria dei campi a temperatura finita.

## 1.2 Approccio con la matrice di trasferimento

Consideriamo ora un approccio alternativo al problema di prima. Per semplicità supponiamo di aver già effettuato la rotazione di Wick e quindi:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) \tag{1.21}$$

$$S = \int d\tau \mathcal{H}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) \tag{1.22}$$

$$Z' = \int [dx(\tau)] e^{-S}. \tag{1.23}$$

Come prima per ogni traiettoria seguita dalla particella si ha un diverso valore dell'azione; la traiettoria classica è quella per cui $\delta S = 0$. Cerchiamo ora di dare un significato alla misura di integrazione che compare nell'equazione (1.23). Poniamo la nostra teoria su un reticolo temporale costituito da $N+1$ *siti* e da $N$ *link* con passo reticolare $a$. La lunghezza della nostra scatola temporale in cui studiamo il sistema è quindi $A = Na$. Se inoltre imponiamo condizioni al contorno periodiche il sito $N+1$ coinciderà con il sito 1 e avremo che $x_1 = x_{N+1}$. L'azione e la funzione di partizione con un reticolo temporale periodico con $N$ *siti* e $N$ *link* si scriveranno pertanto:

$$S = a\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{a}\right)^2 + V(x_i)\right] \tag{1.24}$$

$$Z' = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i e^{-S} \;. \tag{1.25}$$

È interessante a questo punto introdurre la *matrice di trasferimento* che definiamo inizialmente attraverso i suoi elementi di matrice nella base delle coordinate nel seguente modo:

$$T_{x'x} =< x' \mid T \mid x >= exp\left[-\frac{m}{2a}(x'-x)^2 - \frac{a}{2}(V(x') + V(x))\right]. \tag{1.26}$$

È possibile quindi riscrivere la funzione di partizione del sistema come:

$$Z' = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i T_{x_{i+1},x_i} = Tr\left(T^N\right). \tag{1.27}$$

Dimostriamo quest'ultimo risultato nel caso $N = 4$:

$$\begin{aligned} Z' = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 < x_4 \mid T \mid x_3 >< x_3 \mid T \mid x_2 > \times \\ \times < x_2 \mid T \mid x_1 >< x_1 \mid T \mid x_4 > \\ = \int dx_4 < x_4 \mid T^4 \mid x_4 >= Tr\left(T^4\right). \end{aligned}$$

Introduciamo ora gli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ per cui valgono le equazioni:

$$\hat{x} \mid x >= x \mid x > \tag{1.28}$$

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -\imath \tag{1.29}$$

$$e^{-\imath\Delta\hat{p}} \mid x >=\mid x + \Delta > . \tag{1.30}$$

Quindi l'operatore $\hat{p}$ è il generatore delle traslazioni. A questo punto possiamo riscrivere in modo equivalente la matrice di trasferimento.

$$T = \int d\Delta e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-\frac{\Delta^2 m}{2a} - i\hat{p}\Delta} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})}. \tag{1.31}$$

Possiamo verificare l'equivalenza della (1.31) con la (1.26) valutando gli elementi di matrice fra gli autostati della posizione, e cioè:

$$\begin{aligned} < x' \mid T \mid x >= e^{-\frac{a}{2}V(x')} \int d\Delta e^{-\frac{\Delta^2 m}{2a}} < x' \mid e^{-i\hat{p}\Delta} \mid x > e^{\frac{a}{2}V(x)} \\ = e^{-\frac{a}{2}V(x')} \int d\Delta e^{-\frac{\Delta^2 m}{2a}} < x' \mid x + \Delta > e^{-\frac{a}{2}V(x)} \\ = e^{-\frac{a}{2}V(x')} \int d\Delta e^{-\frac{\Delta^2 m}{2a}} \delta[\Delta - (x' - x)] e^{-\frac{a}{2}V(x)} \\ = e^{-\frac{a}{2}V(x')} e^{-\frac{m(x-x')^2}{2a}} e^{-\frac{a}{2}V(x)} \\ = exp\left[-\frac{m}{2a}(x'-x)^2 - \frac{a}{2}(V(x') + V(x))\right], \end{aligned}$$

che coincidono con la definizione data in equazione (1.26). A questo punto per ottenere la definitiva definizione operatoriale di $T$ occorre eseguire l'integrale gaussiano su $\Delta$ della (1.31) completando il quadrato:

$$T = e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} \int d\Delta e^{-\frac{m}{2a}\left(\Delta + i\frac{a\hat{p}}{m}\right)^2} e^{-a\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} \tag{1.32}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi a}{m}} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-a\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})}. \tag{1.33}$$

È importante sottolineare che l'ordinamento degli operatori va mantenuto in quanto essi non commutano. Tuttavia se prendiamo $a$ molto piccolo (come dobbiamo se vogliamo effettuare il limite continuo) è lecito scrivere:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi a}{m}} e^{-a\widehat{H}+O(a^3)}. \tag{1.34}$$

Dimostriamo questo importante risultato ricordando che:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}. \tag{1.35}$$

Nel nostro caso avremo quindi:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-a\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} &= e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x}) - a\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{a^2}{8m}[V(\hat{x}),\hat{p}^2] + O(a^3)} \times \\ &\quad \times \quad e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} \\ &= e^{-a\widehat{H} + \frac{a^2}{8m}[V(\hat{x}),\hat{p}^2] + \frac{a^2}{8m}[\hat{p}^2, V(\hat{x})] + O(a^3)} \\ &= e^{-a\widehat{H} + O(a^3)}. \end{aligned}$$

In questo limite la nostra funzione di partizione diventa:

$$Z' = Tr\left(T^N\right) = \left(\frac{2\pi a}{m}\right)^{N/2} Tr\left(e^{-aN\widehat{H}}\right). \tag{1.36}$$

A questo punto possiamo nuovamente identificare con $\beta$ la lunghezza del periodo temporale e scrivere:

$$\beta = aN \tag{1.37}$$

$$Z' = \left(\frac{2\pi a}{m}\right)^{N/2} Tr\left(e^{-\beta\widehat{H}}\right). \tag{1.38}$$

Il risultato ottenuto differisce per un fattore moltiplicativo dalla definizione di funzione di partizione data nel paragrafo (1.1): ciò dipende dalla diversa definizione di misura di integrazione usata nei due casi. Stabiliamo allora un legame tra i due approcci osservando che:

$$Z = \int_{q(0)=q(\beta)} [Dq(\tau)] e^{-\int_0^\beta [\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)] d\tau}$$

$$= \int_{q(0)=q(\beta)} \prod_{j=1}^{N} dq_j \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{N/2} e^{-\int_0^\beta [\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)] d\tau}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{N/2} \int_{q(0)=q(\beta)} \prod_{j=1}^{N} dq_j e^{-\int_0^\beta [\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)] d\tau}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{N/2} \int_{q(0)=q(\beta)} [dq(\tau)] e^{-\int_0^\beta [\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)] d\tau}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{N/2} Z'.$$

Vediamo ora come possiamo calcolare funzioni di correlazione con questo formalismo[3]. Allo scopo osserviamo che vale:

$$< x_i x_j >= \frac{1}{Z'} \int \prod_{k=1}^{N} dx_k x_i x_j T_{x_{k+1}, x_k} \tag{1.39}$$

$$= \frac{1}{Z'} Tr \left(T^{N-(i-j)} \hat{x} T^{i-j} \hat{x}\right). \tag{1.40}$$

Dimostriamo il risultato (1.40) in un caso concreto ($N = 5$):

$$\begin{aligned} < x_4 x_2 >= \frac{1}{Z'} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 < x_5 \mid T \mid x_4 > x_4 \times \\ \times < x_4 \mid T \mid x_3 >< x_3 \mid T \mid x_2 > x_2 < x_2 \mid T \mid x_1 >< x_1 \mid T \mid x_5 > \\ = \frac{1}{Z'} \int dx_2 dx_4 < x_2 \mid T^3 \hat{x} \mid x_4 >< x_4 \mid T^2 \hat{x} \mid x_2 > \\ = \frac{1}{Z'} \int dx_2 < x_2 \mid T^3 \hat{x} T^2 \hat{x} \mid x_2 > \\ = \frac{1}{Z'} Tr \left(T^{N-(i-j)} \hat{x} T^{i-j} \hat{x}\right) \end{aligned}$$

dove in questo caso $i - j = 2$.
Valutiamo ora la traccia nella base degli autostati di $T$, indicando con $\lambda_n$ i

[3]Poichè $Z$ compare sempre anche a denominatore come fattore di normalizzazione non è importante quale delle due definizioni di $Z$ usiamo: otterremo comunque gli stessi risultati.

suoi autovalori:

$$< x_i x_j >= \frac{1}{Z'} \sum_n < n \mid T^{N-(i-j)} \hat{x} T^{i-j} \hat{x} \mid n > \tag{1.41}$$

$$= \frac{1}{Z'} \sum_n \lambda_n^{N-(i-j)} < n \mid \hat{x} T^{i-j} \hat{x} \mid n > \tag{1.42}$$

$$= \frac{1}{Z'} \lambda_0^{N-(i-j)} \sum_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)^{N-(i-j)} < n \mid \hat{x} T^{i-j} \hat{x} \mid n > . \tag{1.43}$$

L'aver messo in evidenza $\lambda_0$, l'autovalore più grande di $T$, ci consente di studiare il limite $N \to \infty$. Infatti avremo:

$$\lim_{N \to \infty} < x_i x_j >= \frac{1}{(\lambda_0)^{i-j}} < 0 \mid \hat{x} T^{i-j} \hat{x} \mid 0 > . \tag{1.44}$$

Risulta interessante calcolare, sempre con questo approccio, la quantità:

$$< (x_{i+1} - x_i)^2 > .$$

Per semplicità studieremo il caso libero e troveremo il noto risultato che i cammini che contribuiscono al *path integral* non sono differenziabili. Infatti:

$$< (x_{i+1} - x_i)^2 >= \frac{\int \prod_k dx_k (x_{i+1} - x_i)^2 e^{-\sum_j \frac{m}{2a}(x_{j+1} - x_j)^2}}{\int \prod_k dx_k e^{-\sum_j \frac{m}{2a}(x_{j+1} - x_j)^2}} \tag{1.45}$$

$$\alpha_i = \frac{m}{2a} \tag{1.46}$$

$$< (x_{i+1} - x_i)^2 >= \frac{-\frac{d}{d\alpha_i} \int \prod_k dx_k e^{-\sum_j \alpha_j (x_{j+1} - x_j)^2}}{\int \prod_k dx_k e^{-\sum_j \alpha_j (x_{j+1} - x_j)^2}} \tag{1.47}$$

$$= \frac{-\frac{d}{d\alpha_i}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i}}}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i}}} = \frac{1}{2\alpha_i} = \frac{a}{m}. \tag{1.48}$$

Pertanto:

$$\lim_{a \to 0} < \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{a^2} >= \infty \tag{1.49}$$

che implica la non differenziabilità del cammino.
È utile ricordare che avendo fin dall'inizio supposto $\hbar = 1$:

$$
\begin{aligned}
[E] = [\hbar\omega] = [mc^2] \Rightarrow [E] = [T^{-1}] \\
\Rightarrow [m] = \left[\frac{T^{-1}}{L^2T^{-2}}\right] = \left[TL^{-2}\right] \\
\left[\frac{a}{m}\right] = \left[\frac{T}{TL^{-2}}\right] = [L^2].
\end{aligned}
$$

Pertanto il risultato ottenuto in equazione (1.48) è dimensionalmente corretto.

# Capitolo 2

# Teoria dei campi a temperatura zero: il campo scalare

Passiamo ora a trattare una teoria di campo scalare nel caso libero e nel caso di un potenziale del tipo $\phi^4$. La trattazione sarà fatta con il metodo dell'integrazione funzionale (generalizzazione dei path integral di QM) e dei funzionali generatori. Ricaveremo le regole di Feynman per il propagatore partendo dai diagrammi di ordine più basso. Arriveremo a discutere come l'interazione rinormalizzi la massa. Tutto questo insieme di conoscenze ci tornerà utile quando passeremo a trattare il caso della temperatura finita.
Anche se in seguito non seguiremo questo approccio, ci pare utile iniziare studiando molto brevemente come si scrive la funzione di partizione di una teoria di campo scalare libera su reticolo in quanto ci fa capire immediatamente il significato di integrale funzionale.

## 2.1 Campo scalare libero su reticolo

Consideriamo, in uno spazio-tempo quadridimensionale con segnatura euclidea, la seguente densità di lagrangiana di un campo scalare libero:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{2.1}$$

A ogni configurazione del campo $\phi = \phi(x)$[1] corrisponde un diverso valore dell'azione:

$$S = S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right). \tag{2.2}$$

[1] $x$ ovviamente è inteso come quadrivettore.

L'azione è quindi un *funzionale* del campo $\phi$. La funzione di partizione del sistema sara' invece, in analogia a quanto visto nel capitolo precedente,

$$Z = \int [d\phi(x)] e^{-S}. \tag{2.3}$$

Questa rimane solo una scrittura formale finchè non diamo un significato alla nostra misura di integrazione. Per fare questo poniamo la nostra teoria su un reticolo ipercubico quadridimensionale con passo reticolare $a$. Un sito del nostro reticolo sarà individuato dalle coordinate:

$$x_\mu = a n_\mu \qquad -N/2 < n_\mu < N/2 \qquad \text{con } N \text{ pari.}$$

Inoltre il reticolo è assunto periodico ovvero:

$$\phi(x_\mu + N) = \phi(x_\mu).$$

In fisica dello stato solido queste sono note come *condizioni di Born Von Karman.*
Valore finito del passo reticolare e periodicità del reticolo forniscono un naturale *cut-off* ultravioletto ed infrarosso (infatti la regolarizzazione su reticolo è uno strumento molto utilizzato in QFT). Con le condizioni di periodicità poste il nostro reticolo risulta formato da $N^4$ siti. Vediamo ora cosa diventano le derivate parziali e l'azione sul reticolo:

$$\partial_\mu \phi(x_\nu) = \frac{\phi_{n_\nu + \delta_{\mu\nu}} - \phi_{n_\nu}}{a} \tag{2.4}$$

$$S = a^4 [\sum_{\{m,n\}} \frac{(\phi_m - \phi_n)^2}{2a^2} + \sum_n \frac{m^2}{2} \phi_n^2]. \tag{2.5}$$

Con la notazione $\sum_{\{m,n\}}$ intendiamo la somma su tutte le coppie di primi vicini. A questo punto è chiaro il significato dell'integrale funzionale che esprime la funzione di partizione:

$$Z = \int \prod_n d\phi_n e^{-S} \tag{2.6}$$

nel senso che i valori del campo sugli $N^4$ siti del reticolo diventano le variabili di integrazione su cui integriamo. La misura di integrazione $[d\phi(x)]$ è quindi il prodotto di $N^4$ differenziali. Possiamo qui apprezzare il grande salto concettuale compiuto nel passaggio da un problema di meccanica quantistica in una dimensione a una teoria di campo.

## 2.2 Campo scalare: approccio meccanico statistico

Passiamo ora ad esaminare un approccio meccanico statistico alla teoria di campo scalare. In particolare dimostreremo il teorema di Wick che ci servirà a calcolare funzioni di correlazione ed esamineremo lo sviluppo perturbativo della funzione di correlazione a due punti (altrimenti detta propagatore).

### 2.2.1 Il caso con una singola variabile

Sia $P(\phi)$ una *distribuzione di probabilità* della variabile $\phi$, pertanto $P(\phi) \geq 0 \quad \forall \phi \in \Re$. Per ottenere i *momenti* $< \phi^n >$ della distribuzione di probabilità è utile introdurre un *funzionale generatore* definito come:

$$Z(j) = \int d\phi P(\phi) e^{j\phi}. \tag{2.7}$$

Derivando rispetto alla sorgente $j$ e ponendola successivamente uguale a zero otteniamo:

$$< \phi^n >= \frac{\int d\phi P(\phi) \phi^n}{\int d\phi P(\phi)} = \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial^n Z}{\partial j^n}|_{j=0}. \tag{2.8}$$

Consideriamo ora il caso fondamentale di una distribuzione di probabilità *gaussiana* che scriviamo nella forma:

$$P(\phi) = exp\left(-\frac{1}{2}\phi\frac{1}{A}\phi\right). \tag{2.9}$$

Il funzionale generatore in questo caso si calcola facilmente completando il quadrato e si ottiene:

$$Z(j) = Z(0) exp\left(\frac{1}{2} j A j\right). \tag{2.10}$$

Vale pertanto l'importante risultato:

$$\begin{aligned} < \phi^{2n} >_0 = \frac{\partial^{2n}}{\partial j^{2n}} exp\left(\frac{1}{2} j A j\right)|_{j=0} = \frac{\partial^{2n}}{\partial j^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2} j A j\right)^m |_{j=0} = \\ = \frac{\partial^{2n}}{\partial j^{2n}} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2} j A j\right)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!} A^n = (2n-1)!! A^n. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si verifica inoltre immediatamente che:

$$< \phi^{2n+1} >_0 \;=\; 0 \tag{2.12}$$

$$< \phi^{2n} >_0 \;=\; (2n-1)!! < \phi^2 >_0^n . \tag{2.13}$$

In questo contesto $\phi$ è una semplice *variabile aleatoria*. Quando in seguito tratteremo $\phi$ come un campo in *seconda quantizzazione*, ovvero espresso attraverso operatori di creazione e annichilazione, il risultato in equazione (2.12) acquisterà una nuova luce. Il propagatore di particella singola ci darà l'*ampiezza di probabilità* che una particella creata in un punto $\vec{x}$ all'istante $t$ venga annichilata nel punto $\vec{x'}$ all'istante $t'$. Il valor medio nel vuoto del prodotto di un numero dispari di campi sarà quindi necessariamente nullo in quanto presenterebbe tra due stati di vuoto un numero diverso di operatori di creazione e annichilazione.

### 2.2.2 Il Teorema di Wick

Avviciniamoci progressivamente a una teoria di campo considerando una distribuzione di probabilità gaussiana di $N$ variabili. Vediamo come si generalizzano i risultati ottenuti in precedenza[2]:

$$P(\phi_1, \dots, \phi_n) = exp\left(-\frac{1}{2}\phi^T A^{-1}\phi\right) = exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\phi_i A^{-1}_{i,j}\phi_j\right) \tag{2.14}$$

$$Z(j) = \int \prod_{i=1}^{N} d\phi_i exp\left(-\frac{1}{2}\phi^T A^{-1}\phi + j^T\phi\right) = Z(0) exp\left(\frac{1}{2}j^T A j\right) \tag{2.15}$$

$$< \phi_1 \dots \phi_{2n} >_0 = \frac{\partial^{2n}}{\partial j_1 \dots \partial j_n}\frac{1}{n! 2^n}\left(j^T A j\right)^n \tag{2.16}$$

$$< \phi_1 \phi_2 >_0 = \frac{\partial^2}{\partial j_1 \partial j_2}\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l} j_k A_{k,l} j_l\right) = A_{1,2} = \phi_1^\bullet \phi_2^\bullet. \tag{2.17}$$

La quantità presente in equazione (2.17) è detta *contrazione* di $\phi_1$ e $\phi_2$. Come si può verificare eseguendo le derivate in equazione (2.16) $< \phi_1 \dots \phi_{2n} >_0$ puo' essere espresso come somma su tutte le permutazioni possibili dei prodotti di contrazioni $\phi_i^\bullet \phi_j^\bullet$. La somma contiene quindi $(2n-1)!!$ termini: la prima variabile può infatti essere contratta con $(2n-1)$ variabili, ne restato qindi libere $(2n-2)$ la prima delle quali puo' essere contratta in $(2n-3)$ modi diversi e così via. Possiamo sintetizzare il risultato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} < \phi_1 \dots \phi_{2n} >_0 = \phi_1^\bullet \phi_2^\bullet \phi_3^{\bullet\bullet} \phi_4^{\bullet\bullet} \dots \phi_{2n-1}^\circ \phi_{2n}^\circ + \\ + permutazioni. \end{aligned} \tag{2.18}$$

[2]Con $T$ intendiamo il vettore trasposto.

Cerchiamo di capire meglio il precedente argomento attraverso un esempio concreto nel caso in cui $2n = 4$:

$$< \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 >_0 = \frac{1}{2^2 2!}\frac{\partial^4}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3 \partial j_4}\left(\sum_{k,l} j_k A_{k,l} j_l\right)\left(\sum_{m,n} j_m A_{m,n} j_n\right). \quad (2.19)$$

Ottengo un risultato non nullo se e solo se $\{k, l, m, n\}$ è una permutazione di $\{1, 2, 3, 4\}$. Le permutazioni possibili sono $4!$ che vanno però divise per $2^2 2!$. Il risultato è quindi la somma di 3 termini:

$$< \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 >_0 = \phi_1^{\bullet}\phi_2^{\bullet}\phi_3^{\bullet\bullet}\phi_4^{\bullet\bullet} + \phi_1^{\bullet}\phi_3^{\bullet}\phi_2^{\bullet\bullet}\phi_4^{\bullet\bullet} + \phi_1^{\bullet}\phi_4^{\bullet}\phi_2^{\bullet\bullet}\phi_3^{\bullet\bullet}. \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Campo scalare nello spazio continuo

Consideriamo ora il caso di un campo scalare $\phi = \phi(x)$ definito su uno spazio-tempo euclideo D-dimensionale: possiamo vederlo come il limite continuo della corrispondente teoria definita su reticolo. Coerentemente con l'impostazione data fino a questo punto possiamo pensare l'esponenziale dell'*azione euclidea* come una distribuzione di probabilità. Vediamo cosa diventano le nostre formule se come azione euclidea scegliamo un'hamiltoniana di *Landau-Ginzburg*:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (2.21)$$

$$H = \int d^D x \mathcal{H}(x). \quad (2.22)$$

La corrispondente distribuzione di probabilità diventa in questo caso:

$$P[\phi] = exp(-H_{LG}) = exp\left(-\int d^D x \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4\right)\right) \quad (2.23)$$

e il funzionale generatore:

$$Z[j] = \int [D\phi(x)] exp\left(-H + \int d^D x j(x)\phi(x)\right). \quad (2.24)$$

Il modello di Landau-Ginzburg è stato uno dei primi proposti per lo studio dell'$^4He$ superfluido. Particolare importanza riveste la *funzione di correlazione a 2 punti* definita come:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = < \phi(x_1)\phi(x_2) > \quad (2.25)$$

Per il calcolo delle funzioni di correlazione nel caso continuo dobbiamo derivare *funzionalmente* rispetto alle sorgenti:

$$G^{(2n)}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \frac{1}{Z(0)}\frac{\delta^{(2n)} Z(J)}{\delta j(x_1) \ldots \delta j(x_{2n})}|_{j=0}. \quad (2.26)$$

Conviene, in vista di uno sviluppo perturbativo, dividere l'hamiltoniana in una parte libera e in un termine di interazione

$$H = H_0 + V \tag{2.27}$$

e quindi riscrivere il funzionale generatore come segue:

$$H_0 = \int d^D x \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi\right) \tag{2.28}$$

$$V = \int d^D x \mathcal{V}(\phi) = \frac{g}{4!}\int d^D x \phi^4(x) \tag{2.29}$$

$$Z[j] = exp\left(-\int d^D x \mathcal{V}(\frac{\delta}{\delta j(x)})\right) \times$$

$$\times \int [D\phi(x)] exp\left(-H_0 + \int d^D x j(x)\phi(x)\right). \tag{2.30}$$

Cerchiamo ora di esprimere il funzionale generatore libero in termini della funzione di correlazione a due punti. A questo scopo effettuiamo un'integrazione per parti:

$$Z_0[j] = \int [D\phi(x)] exp\left(-\int d^D x \left(-\frac{1}{2}\phi\Delta\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - j(x)\phi(x)\right)\right). \tag{2.31}$$

Definisco ora la *funzione di Green* $\mathcal{G}(x-y)$ come soluzione dell'equazione:

$$\left(\Delta_x - m^2\right)\mathcal{G}(x-y) = -\delta(x-y). \tag{2.32}$$

Si trova che:

$$\mathcal{G}(x-y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+m^2}. \tag{2.33}$$

Come si verifica a posteriori tale funzione di Green si può identificare con la funzione di correlazione a due punti libera. Vediamo ora dettagliatamente i passaggi che ci consentono di scrivere il funzionale generatore in una forma particolarmente utile. Partiamo da:

$$Z_0[j] = \int [D\phi(x)] exp\left(\int d^D x \left(\frac{1}{2}\phi(x)[\Delta_x - m^2]\phi(x) + j(x)\phi(x)\right)\right) \tag{2.34}$$

e poniamo:

$$\phi(x) = \phi'(x) + \int d^D y \mathcal{G}(x-y) j(y). \tag{2.35}$$

Effettuando la sostituzione in equazione (2.34) e tenendo conto dell'equazione (2.32) si ottiene:

$$Z_0[j] = \int [D\phi'(x)] exp\left(\int d^D x \frac{1}{2}\phi'(x)[\Delta_x - m^2]\phi'(x)\right) \times$$

$$\times\, exp\left(\frac{1}{2}\int d^Dxd^Dyj(x)\mathcal{G}(x-y)j(y)\right)\times$$

$$\times\, exp\left(\frac{1}{2}\int d^Dx\phi'(x)j(x)+\frac{1}{2}\int d^Dxd^Dy\mathcal{G}(x-y)j(y)[\Delta_x-m^2]\phi'(x)\right).\tag{2.36}$$

L'argomento dell'ultimo esponenziale è identicamente nullo come si vede integrando il secondo termine due volte per parti e applicando nuovamente l'equazione (2.32). Otteniamo così due importanti risultati:

$$Z_0[j]=Z_0[0]exp\left(\frac{1}{2}\int d^Dxd^Dyj(x)\mathcal{G}(x-y)j(y)\right)\tag{2.37}$$

$$Z[j]=Z_0[0]exp\left(-\int d^Dx\mathcal{V}(\frac{\delta}{\delta j(x)})\right)\times$$

$$\times\, exp\left(\frac{1}{2}\int d^Dxd^Dyj(x)\mathcal{G}(x-y)j(y)\right).\tag{2.38}$$

Calcoliamo ora la funzione di correlazione a due punti nel caso libero:

$$<\phi(x)\phi(y)>_0=\frac{1}{Z_0[0]}\frac{\delta^2}{\delta j(x)\delta j(y)}\times$$

$$Z_0[0]exp\left(\frac{1}{2}\int d^Dzd^Dz'j(z)\mathcal{G}(z-z')j(z')\right)|_{j=0}=$$

$$=\mathcal{G}(x-y)\equiv G_0^{(2)}(x-y).\tag{2.39}$$

Vediamo così esplicitamente come la funzione di correlazione a due punti libera concida con la funzione di Green soluzione dell'equazione (2.32).

### 2.2.4 Calcolo perturbativo di $G^{(2)}(x,y)$

Passiamo ora a calcolare perturbativamente nel caso di un potenziale $\phi^4$ la funzione di correlazione $G^{(2)}(x,y)$. Eseguiremo il calcolo all'ordine $g$ arrivando a calcolare esplicitamente i fattori moltiplicativi associati ai diversi diagrammi di Feynman e facendo vedere come il denominatore $Z[0]$ sia responsabile della cancellazione dei diagrammi disconnessi. Abbiamo, utilizzando l'equazione (2.26) con $n=1$:

$$<\phi(x)\phi(y)>=\frac{\int[D\phi(z)]\phi(x)\phi(y)e^{-H}}{\int[D\phi(z)]e^{-H}}\tag{2.40}$$

$$=\frac{\int[D\phi(z)]\phi(x)\phi(y)e^{-H_0-\frac{g}{4!}\int d^Dz\phi^4(z)}}{\int[D\phi(z)]e^{-H_0-\frac{g}{4!}\int d^Dz\phi^4(z)}}\tag{2.41}$$

$$= \frac{\int [D\phi(z)]\phi(x)\phi(y)e^{-H_0}[1 - \frac{g}{4!}\int d^D z\phi^4(z) + \ldots]}{\int [D\phi(z)]e^{-H_0}[1 - \frac{g}{4!}\int d^D z\phi^4(z) + \ldots]}. \tag{2.42}$$

Iniziamo a valutare il numeratore all'ordine $g$ applicando il teorema di Wick. Otteniamo:

$$\int [D\phi(z)]\phi(x)\phi(y)e^{-H_0} = Z_0[0] < \phi(x)\phi(y) >_0 \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\int [D\phi(z)]\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)e^{-H_0} &= Z_0[0] < \phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) >_0 = \\ = 12 Z_0[0] < \phi(x)\phi(z) >_0 &< \phi(z)\phi(z) >_0 < \phi(z)\phi(y) >_0 + \\ + 3 Z_0[0] < \phi(x)\phi(y) >_0 &< \phi(z)\phi(z) >_0 < \phi(z)\phi(z) >_0\end{aligned} \tag{2.44}$$

e quindi per il numeratore $N(x, y)$ si ha:

$$\begin{aligned}N(x,y) = Z_0[0]\Big(G_0(x-y) - \frac{g}{2}\int d^D z G_0(x-z)G_0(0)G_0(z-y)\Big) - \\ -Z_0[0]\left(\frac{g}{8}\int d^D z G_0(x-y)[G_0(0)]^2\right).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Calcoliamo ora il denominatore all'ordine $g$. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\int [D\phi(z)]\phi(z)^4 e^{-H_0} &= Z_0[0] < \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) >_0 = \\ = 3Z_0[0] < \phi(z)\phi(z) >_0 &< \phi(z)\phi(z) >_0 = 3Z_0[0][G_0(0)]^2\end{aligned} \tag{2.46}$$

e quindi il denominatore $D(x, y)$ sarà:

$$D(x,y) = Z_0[0]\left(1 - \frac{g}{8}\int d^D z[G_0(0)]^2\right). \tag{2.47}$$

È così evidente che se trascuro i termini di ordine $g^2$ il denominatore cancella il secondo pezzo del numeratore che corrisponde a un diagramma disconnesso. La funzione di correlazione a due punti calcolata all'ordine g è quindi:

$$G(x-y) = G_0(x-y) - \frac{g}{2}\int d^D z G_0(x-y)G_0(0)G_0(x-y) + O(g^2). \tag{2.48}$$

### 2.2.5 Rinormalizzazione della massa a un loop

Passiamo ora ad esaminare sempre nel caso di una teoria $\phi^4$ in $D = 4$ dimensioni la rinormalizzazione della massa all'ordine più basso. In particolare faremo vedere qual è il diagramma che veste la massa, che è lo stesso che

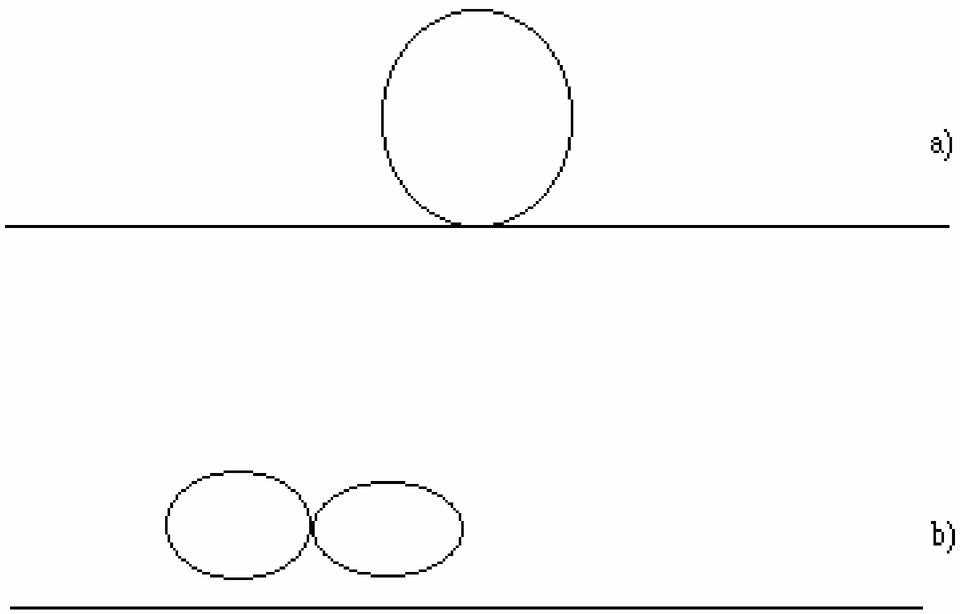


Figura 2.1: Il diagramma a è il diagramma connesso mentre il diagramma disconnesso b è cancellato dal denominatore.

studieremo nel caso della temperatura finita. La strategia che seguiamo è quella di supporre che l'hamiltoniana dipenda dalle quantità *nude* (non osservabili fisicamente) $m_0$ e $g_0$ e da un *cutoff* $\Lambda$. È opportuno precisare che, nel contesto puramente meccanico statistico in cui ci siamo mossi fino a questo momento, $m_0$ e $g_0$ sono in realtà due semplici parametri del modello, ma per la profonda analogia con la teoria quantistica dei campi viene naturale identificarli con la massa e con la costante di accoppiamento di una particella scalare.
Scriviamo l'*equazione di Dyson* per il *propagatore* (funzione di correlazione a due punti) nello spazio degli impulsi:

$$G(k) = G_0(k) + G_0(k)\Sigma^*(k)G(k) \tag{2.49}$$

dove in base all'equazione (2.33):

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + m_0^2}. \tag{2.50}$$

Dalla (2.49) segue:

$$G(k) = \frac{G_0(k)}{1 - G_0(k)\Sigma^*(k)} = \frac{1}{[G_0(k)]^{-1} - \Sigma^*(k)} \tag{2.51}$$

$$G(k) = \frac{1}{k^2 + m_0^2 - \Sigma^*(k)}. \tag{2.52}$$

A questo punto al posto della *self-energia propria* esatta sostituiamo la sua espressione al primo ordine in $g_0$ che comprende il semplice diagramma ad un loop già studiato in dettaglio nel capitolo precedente. Dalla equazione (2.48) trasformando secondo Fourier:

$$\Sigma_1^*(k) = -\frac{g_0}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_0^2}. \tag{2.53}$$

L'integrale in equazione (2.53) presenta una chiara divergenza *ultravioletta*[3]. Per *regolarizzare* l'integrale introduciamo allora un cutoff $\Lambda$ che elimina la divergenza. Chiaramente le quantità fisiche dovranno essere indipendenti dal cutoff. In questa approssimazione il propagatore diventa allora:

$$G(k) = \frac{1}{k^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \int_\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_0^2}}. \tag{2.54}$$

[3]Il suo comportamento è del tipo $\int \frac{q^3 dq}{q^2}$.

Appare evidente che la self-energia all'ordine $g$ aggiunge al denominatore un contributo indipendente da $k$ che può essere letto come una correzione che veste la massa nuda. Poniamo infatti la richiesta che:

$$G(k)|_{k=0} = \frac{1}{m^2} \tag{2.55}$$

il che equivale a definire una *massa fisica* come:

$$m^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{2} \int_\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_0^2}. \tag{2.56}$$

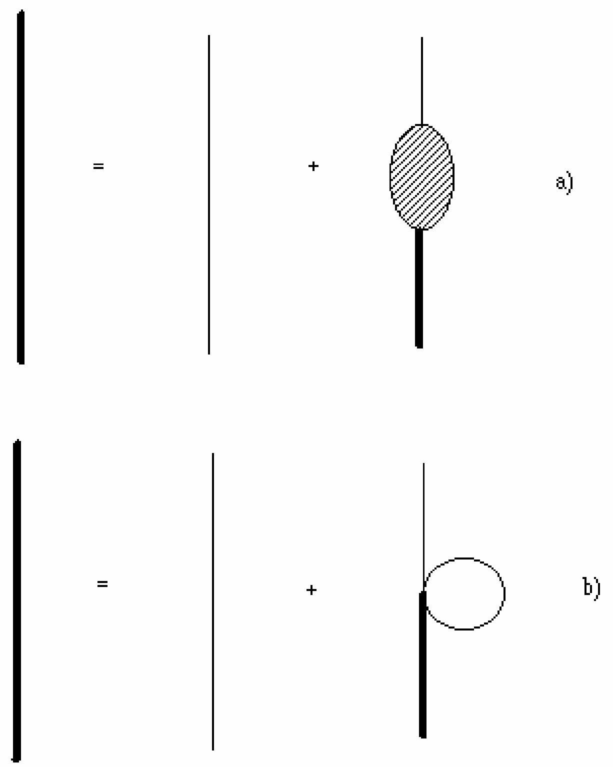


Figura 2.2: Equazione di Dyson con la self-energia propria esatta (a) e sua espressione dopo avervi sostituito la self-energia al primo ordine (b).

# Capitolo 3

# Bag model e transizione di fase

In questo capitolo studieremo un modello molto semplice del nucleone: il *bag model* del MIT. Vedremo come questo modello sia adatto a descrivere la transizione di fase tra *materia adronica* e *quark gluon plasma*, almeno nel caso di potenziale chimico nullo, fornendoci una stima abbastanza realistica della *temperatura critica* a cui si verifica la transizione. È opportuno partire da un breve ripasso di meccanica statistica.

## 3.1 Gas di particelle identiche nell'ensemble grancanonico

La funzione di partizione grancanonica di un gas di fermioni o bosoni non interagenti è data da:

$$Z = \prod_{\alpha} (1 \pm x_{\alpha})^{\pm 1} \tag{3.1}$$

$$\text{con } x_{\alpha} = e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} \tag{3.2}$$

dove il $+$ si riferisce ai fermioni e il $-$ ai bosoni. L'energia di una particella relativistica libera è data dalla nota relazione:

$$\epsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}. \tag{3.3}$$

Nel caso di una particella ultrarelativistica, in cui trascuriamo la massa, la relazione tra energia ed impulso[1] si riduce a:

$$\epsilon_k = k, \tag{3.4}$$

[1]ovviamente consideriamo $\hbar = c = 1$.

pertanto in queste unità $\epsilon_k$ ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Scriviamo ora le funzioni di distribuzione di Bose-Einstein e di Fermi Dirac ultrarelativistiche, considerando il potenziale chimico nullo:

$$n_{Bose}(k) = \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \tag{3.5}$$

$$n_{Fermi}(k) = \frac{1}{e^{\beta k} + 1}. \tag{3.6}$$

Calcoliamo quindi la densità di energia di un gas di bosoni di spin zero:

$$E = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{k}{e^{\beta k} - 1} = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{e^{\beta k} - 1}.$$

Se effettuiamo la sostituzione $\beta k = x$ otteniamo:

$$\begin{aligned} E &= \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty dx\, x^3 \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty dx\, x^3 \sum_{n=1}^\infty \left(e^{-x}\right)^n = \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dx\, x^3 e^{-nx} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty dy\, y^3 e^{-y} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \Gamma(4) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il risultato ottenuto è dimensionalmente correto, infatti nelle nostre unità:

$$[\beta] = \left[\frac{1}{E}\right] \quad = [L] \tag{3.8}$$

$$\left[\frac{V}{\beta^4}\right] = \left[\frac{L^3}{L^4}\right] = [L^{-1}] = [E]. \tag{3.9}$$

Otteniamo quindi nel caso bosonico[2]

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{\pi^2}{30} T^4, \tag{3.10}$$

che esprime la legge di Stephan-Boltzmann e in cui abbiamo posto la *costante di Boltzmann* $K = 1$.
Nel caso fermionico si procede analogamente ottenendo:

$$\begin{aligned} E &= (2s+1) \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty dx\, x^3 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \\ &= (2s+1) \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty dx\, x^3 \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} e^{-nx} \\ &= (2s+1) \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \Gamma(4) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = (2s+1) \frac{7}{8} \frac{V\pi^2}{30} T^4. \end{aligned} \tag{3.11}$$

[2]Tenendo conto che $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

A questo punto possiamo facilmente ottenere l'equazione di stato per un gas di particelle ultrarelativistiche. Indicando con $\Omega$ il *potenziale termodinamico* e ricordando dalla meccanica statistica che:

$$PV = KT \ln Z, \tag{3.12}$$

otteniamo la relazione:

$$\Omega = -KT \ln Z = -PV \;\Rightarrow P = \frac{1}{\beta V} \ln Z. \tag{3.13}$$

Iniziamo a considerare il caso bosonico:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{\beta} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta k}) = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 dk \ln(1 - e^{-\beta k}) \\ &= -\frac{1}{\beta^4} \frac{1}{2\pi^2} \int x^2 dx \ln(1 - e^{-x}) = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{2\pi^2} \int dx x^3 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Confrontando con la (3.7) otteniamo l'equazione di stato:

$$P = \frac{1}{3} \varepsilon. \tag{3.15}$$

Nel caso fermionico otteniamo invece:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\beta} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta k}) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 dk \ln(1 + e^{-\beta k}) \\ & \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{2\pi^2} \int x^2 dx \ln(1 + e^{-x}) = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{2\pi^2} \int dx x^3 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Confrontando questo risultato con la (3.11) otteniamo anche in questo caso:

$$P = \frac{1}{3} \varepsilon. \tag{3.17}$$

Pertanto nel caso ultrarelativistico libero l'equazione di stato non distingue tra bosoni e fermioni. Passiamo ora a ricavare l'equazione che ci dà la *densità di entropia*, grandezza che ci sarà utile per valutare l'ordine della transizione di fase. Ricordiamo qui che l'ordine di una transizione di fase è stabilito dall'ordine della derivata di una grandezza fisica, in genere l'energia libera, discontinua quando si verifica la transizione.
Partiamo dalla relazione[3]:

$$d\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} dV + \beta\, d < E > + \beta' d < N > \tag{3.18}$$

$$d\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} dV + \beta\, d < E > - \beta \mu d < N > . \tag{3.19}$$

[3]Per definizione $\mu = -\frac{\beta'}{\beta}$.

Vediamo quindi che l'entropia è una *funzione di stato* del sistema cioè $S = S(V, < E >, < N >)$. Possiamo quindi scrivere la densità di entropia come derivata totale rispetto al volume nel modo seguente:

$$\frac{dS}{dV} = K\frac{\partial \ln Z}{\partial V} + K\beta\frac{\partial < E >}{\partial V} - K\beta\mu\frac{\partial < N >}{\partial V}. \tag{3.20}$$

Ricordiamo ora alcune utili formule di meccanica statistica:

$$< E > = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \tag{3.21}$$

$$< N > = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta'} \tag{3.22}$$

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z(\beta, \beta', V)}{\partial V}. \tag{3.23}$$

Calcoliamo ora la derivata della pressione rispetto alla temperatura a potenziale chimico costante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial T}|_{\mu} = \frac{\partial P}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial T}|_{\mu} = -\frac{1}{KT^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right) \\ = \frac{1}{KT^2}\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial \ln Z}{\partial V} - \frac{1}{KT^2}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta'}\frac{\partial \beta'}{\partial \beta}\right) \\ = K\frac{\partial \ln Z}{\partial V} + K\beta\frac{\partial < E >}{\partial V} - K\beta\mu\frac{\partial < N >}{\partial V}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Confrontando la (3.24) con l'equazione (3.20) giungiamo all'importante risultato:

$$s = \frac{dS}{dV} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu}. \tag{3.25}$$

## 3.2 Transizione di fase nel caso $\mu = 0$

Il diagramma delle fasi della materia adronica può essere rappresentato graficamente nel piano $(\mu_B, T)$ dove con $\mu_B$ intendiamo il potenziale chimico *barionico* . I calcoli sul reticolo indicano l'esistenza di una line di transizione di fase tra una fase adronica, in cui i quark sono confinati all'interno di barioni e mesoni, e una fase di Quark-Gluon Plasma in cui quark e gluoni sono descritti in prima approssimazione come particelle libere.
La transizione di fase può essere descritta in modo abbastanza semplice nel caso di $\mu_B = 0$. Analizziamo prima di tutto il significato di questa condizione. Esprimiamo la *densità barionica* del sistema attraverso le funzioni di

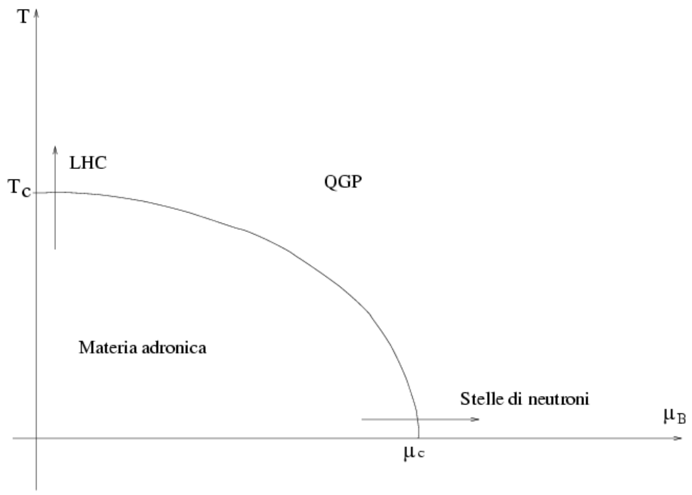


Figura 3.1: Diagramma delle fasi nel piano $(\mu_B, T)$ in cui è indicata la linea di transizione tra materia adronica e QGP.

distribuzione di quark e antiquark (che supponiamo massless) tenendo conto che il potenziale chimico dei quark vale $\mu = \mu_B/3$ e che i potenziali chimici di quark e antiquark hanno segno opposto. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_B &= \gamma_Q \frac{1}{3} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) \\ &= \gamma_Q \frac{1}{6\pi^2} \int k^2 dk \left( \frac{1}{e^{\beta(k - \frac{\mu_B}{3})} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(k + \frac{\mu_B}{3})} + 1} \right), \end{aligned} \tag{3.26}$$

dove il fattore di degenerazione vale:

$$\gamma_Q = (3\text{colori}) \times (2\text{sapori}) \times (2\text{elicità}) = 12. \tag{3.27}$$

È quindi evidente che $\mu_B = 0 \Rightarrow \rho_B = 0$: stiamo quindi studiando il caso di densità barionica nulla. Possiamo domandarci se questa è una condizione fisicamente plausibile e quali limitazioni pone alla validità del nostro modello. La situazione in cui ci si aspetta di realizzare e verificare sperimentalmente la transizione di fase è nell'urto di ioni pesanti ultrarelativistici. Possiamo descrivere il processo nel modo seguente. Inizialmente abbiamo due nuclei che si muovono con velocità $v \approx c$ e quindi non hanno simmetria sferica ma sono contratti nella direzione del moto. Se indichiamo con $R$ il raggio trasverso dei nuclei, l'estensione longitudinale dei due nuclei è pari a $d_L \approx \frac{2Rm_N}{E_{cm}}$ dove con $m_N$ si intende la massa a riposo di un nucleone e con $E_{cm}$ l'energia cinetica per nucleone misurata nel sistema del centro di massa[4]. I due nuclei collidono per un intervallo di tempo $t \approx d_L/c$ e dall'urto emergono due sistemi adronici che trasportano via essenzialmente tutto il numero barionico iniziale lasciandosi alle spalle materia altamente eccitata ma corrispondente a *densità barionica praticamente nulla*. Quest'ultima è il candidato per il quark gluon plasma. La nostra ipotesi di supporre nullo il potenziale chimico si presta quindi bene per studiare il processo in queste condizioni sperimentali. Per avere un'idea degli ordini di grandezza, nel caso degli urti Pb-Pb a LHC (Large Hadron Collider, l'acceleratore attualmente in costruzione al CERN) $E_{cm} \approx 2TeV$ e l'intervallo di tempo impiegato dai nuclei per attraversarsi è pari a $\frac{d_L}{c} \approx 7 \times 10^{-3} fm/c$ corrispondenti a circa $2 \cdot 10^{-26}s$.

Quello appena descritto non è tuttavia l'unico caso in cui si pensa possa avvenire la transizione dalla materia nucleare al quark gluon plasma in natura. Ad esempio negli esperimenti con bersaglio fisso effettuati al CERN all'acceleratore SPS (Super Proton Sincrotron) il fenomeno è stato osservato a densità barionica non nulla. Si suppone inoltre che il cosidetto *core* delle *stelle di neutroni* sia costituito da un plasma di quark e gluoni: questo in un oggetto che è caratterizzato da $T = 0$ (al punto da venire descritto come un sistema quantistico macroscopico) e da densità barionica elevatissima (ed è proprio tale desità a causare la transizione). Questo basta per convincerci che se si vuole descrivere in modo esauriente il fenomeno è necessario sviluppare strumenti che ci consentano di studiare anche il caso di potenziale chimico non nullo.

Vediamo ora quali sono le caratteristiche principali del *bag model*. Gli adroni vengono descritti come delle bolle di vuoto all'interno di un mezzo confinante. All'interno di queste bolle quark e gluoni si muovono liberamente mentre all'esterno di esse non possono esistere come particelle libere. Il confinamento è risulta dal fatto che per creare una bolla è necessario spendere una *densità di energia* costante $B$. L'energia di un adrone (supposto per semplicità sferico) riceve quindi contributo dall'energia del vuoto e dall'energia cinetica di quark e gluoni:

$$E_H = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C}{R}, \tag{3.28}$$

dove per ora $C$ è un parametro del modello.

Il fatto che il contributo del termine cinetico sia inversamente proporzionale

[4]Abbiamo ricavato il fattore di contrazione dalla formula $E_{cm} = \frac{m_N}{\sqrt{1-\beta^2}}$ avendo posto $c = 1$.

al raggio discende dal principio di indeterminazione per cui $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$. Possiamo determinare il raggio per cui l'energia dell'adrone è minima:

$$\frac{\partial E_H}{\partial R} = 0 \Rightarrow R = \left(\frac{C}{4\pi B}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.29}$$

Calcoliamo tale valore minimo dell'energia dell'adrone:

$$\begin{aligned} E_H &= \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C}{\frac{4\pi}{3} R^4} \frac{4\pi}{3} R^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C}{\frac{4\pi}{3} \frac{C}{4\pi B}} \frac{4\pi}{3} R^3 \\ E_H &= 4 \frac{4\pi}{3} R_0^3 B. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Tale valore minimo di energia viene identificato con la massa dell'adrone: notiamo che questa massa non è data dalla somma delle masse dei quark e dei gluoni che sono supposti massless, ma nasce in parte dall'energia del vuoto racchiuso dalla bag, in parte dall'energia cinetica dei quark e dei gluoni contenuti nella bag. Quest'ultimo contributo è quello più importante, come vediamo dall'equazione (3.30). Se applichiamo la formula al caso di un protone per cui $E \approx 1\ GeV$ e $R_0 \approx 0,7\ fm$ otteniamo una stima del valore della densità di energia del vuoto[5]:

$$B \approx 175\ MeV/fm^3 \qquad B^{\frac{1}{4}} \approx 192\ MeV.$$

Calcoliamo ora la pressione di questa bolla:

$$\begin{aligned} P = -\frac{\partial E_H}{\partial V} &= -B - \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{C}{R}\right)\frac{\partial R}{\partial V} \\ P &= -B + \frac{C}{4\pi R^4}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

La pressione riceve quindi un contributo negativo dalla densità di energia del vuoto che fa sì che la bolla rimanga in equilibrio. La condizione di equilibrio (3.29) equivale a richiedere che sia $P = 0$, cioè che la bag nè si espanda nè si contragga. Infatti:

$$\frac{\partial E_H}{\partial R} = 0 \Rightarrow P = -\frac{\partial E_H}{\partial V} = -\frac{\partial E_H}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial V} = 0. \tag{3.32}$$

Vediamo ora come giustificare in base a questo modello la transizione tra fase adronica, che supponiamo costituita da un gas di pioni, e quark-gluon

[5]Se consideriamo che $1 = \hbar c \approx 200\ MeV \cdot fm$ allora $B^{\frac{1}{4}} = [B(\hbar c)^3]^{1/4}$.

plasma. La pressione esercitata da un gas di pioni (bosoni di spin zero) vale:

$$P = 3\frac{\pi^2}{90}T^4. \tag{3.33}$$

dove il fattore 3 tiene conto dei 3 tipi di pioni ($\pi^+$, $\pi^-$, $\pi^0$) esistenti.
Se ci limitiamo a considerare i sapori $u$ e $d$ la pressione di un plasma di quark e gluoni vale invece:

$$P = 37\frac{\pi^2}{90}T^4 - B. \tag{3.34}$$

Nel bag model del MIT quark e gluoni possono infatti esistere come particelle libere solo in un *falso* vuoto a cui è associata una densità di energia $B$ e una pressione negativa $-B$. Il fattore 37 va così interpretato:

$$37 = \underbrace{2 \times 8}_{\text{gluoni}} \qquad + \qquad \frac{7}{8} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 3}_{\text{quark}}. \tag{3.35}$$

Nel fattore di degenerazione dei gluoni 8 sono i generatori del gruppo $SU(3)$ con 2 elicità possibili. Il fattore $\frac{7}{8}$ è dovuto alla natura fermionica dei quark il cui fattore di degenerazione comprende: $q$ e $\bar{q}$, 2 spin, 2 sapori, 3 colori.
Confrontando le equazioni (3.33) e (3.34) vediamo che esiste un temperatura critica $T_c$ a partire dalla quale la fase di plasma è termodinamicamente favorita in quanto esercita pressione maggiore. Tale temperatura vale:

$$T_c = \left(\frac{45}{17\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} B^{\frac{1}{4}} \approx 150\ MeV. \tag{3.36}$$

Siamo così riusciti a ottenere con questo semplice modello una stima ragionevole della temperatura a cui avviene la transizione di fase.
Come sappiamo ogni transizione di fase è caratterizzata dalla discontinuità di qualche grandezza termodinamica. In questo caso a presentare una discontinuità è la densità di entropia e ciò ci fa dire che siamo in presenza di una transizione di fase del primo ordine. Infatti utilizzando l'equazione (3.25) otteniamo per il gas di pioni:

$$s = 3\frac{\pi^2}{90}4T^3, \tag{3.37}$$

mentre per il plasma di quark e gluoni:

$$s = 37\frac{\pi^2}{90}4T^3. \tag{3.38}$$

L'improvviso aumento di densità di entropia alla temperatura critica corrisponde all'emergere di un gran numero di gradi di libertà. Se la transizione

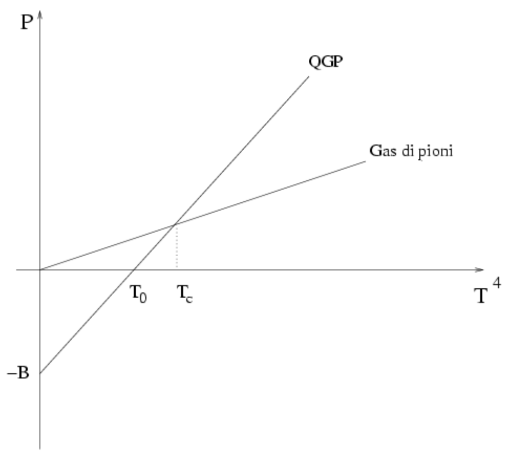


Figura 3.2: Confronto tra la pressione di un gas di pioni massless e quella di un plasma di quark e gluoni in cui è stata messa in evidenza la temperatura critica $T_c$.

di fase è del primo ordine allora le due fasi della materia possono coesistere intorno alla temperatura critica. Possiamo immaginare allora di avere delle bolle di gas di pioni immerse in un plasma di quark e gluoni. La fase che a una data temperatura esercita la pressione maggiore tende pertanto ad espandersi sopprimendo l'altra. Detta $T_0$ la temperatura a cui corrisponde $P = 0$ per il QGP, è possibile pertanto avere bolle di QGP all'interno di un gas di pioni anche nell'intervallo di temperature compreso tra $T_0$ e $T_c$; tali bolle tenderanno tuttavia immediatamente a collassare sotto la pressione esercitata dai pioni.

# Capitolo 4

# Teoria dei campi a temperatura finita

Abbiamo ormai acquisito tutti gli elementi che ci consentono di passare a studiare la teoria quantistica dei campi a temperatura finita. Inizieremo a trattare il caso dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica e passeremo successivamente a studiare il caso del campo scalare.

## 4.1 Meccanica quantistica a temperatura finita. Il caso dell'oscillatore armonico

Come ampiamente discusso nel capitolo (1.1) studiare la meccanica quantistica a temperatura finita equivale ad effettuare una rotazione di Wick del tempo e cioè a porre $t = -i\tau$ e quindi ad imporre condizioni al contorno periodiche sulle coordinate $q(0) = q(\beta)$. Ricordiamo come si scrive la funzione di partizione nello spazio delle coordinate:

$$Z = Tr\left(e^{-\beta\widehat{H}}\right) = \int dq < q \mid e^{-\beta\widehat{H}} \mid q > . \tag{4.1}$$

Il risultato espresso dall' eq.(1.19) ci consente quindi di scrivere:

$$\begin{aligned} Z = \int_{q(0)=q(\beta)} [Dq(\tau)] e^{-\int_0^\beta \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] d\tau} \\ = \int_{q(0)=q(\beta)} [Dq(\tau)] e^{-S_E(\beta)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Introduciamo ora la sorgente esterna $j(\tau)$ che ci consente di definire un funzionale generatore che useremo per calcolare il propagatore:

$$Z[j] = \int_{q(0)=q(\beta)} [Dq(\tau)] exp \left( -S_E(\beta) + \int_0^\beta j(\tau) q(\tau) d\tau \right). \tag{4.3}$$

Ricordiamo anche che la *media sull'ensemble* di un operatore vale:

$$< \widehat{A} >_\beta = \frac{1}{Z} Tr \left( \widehat{A} e^{-\beta \widehat{H}} \right), \tag{4.4}$$

dove al denominatore si deve intendere $Z = Z[0]$.

### 4.1.1 Il propagatore a tempi immaginari

Concentriamoci ora sul calcolo del valor medio del T-prodotto di due operatori. Siamo in particolare interessati a calcolare:

$$< T\left(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\right) >_\beta = \frac{1}{Z} Tr[e^{-\beta \widehat{H}} T\left(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\right)]. \tag{4.5}$$

Poichè $\tau \in \Re$, la quantità in equazione (4.5) è detta *propagatore a tempi immaginari*. Vediamo qual è il link con il funzionale generatore.
La dipendenza dal tempo di un operatore in rappresentazione di Heisenberg è data da:

$$\hat{q}(t) = e^{i\widehat{H}t} \hat{q} e^{-i\widehat{H}t}$$

$$\text{ovvero} \qquad \hat{q}(-i\tau) = e^{\widehat{H}\tau} \hat{q} e^{-\widehat{H}\tau}. \tag{4.6}$$

Il T-prodotto è definito come:

$$T\left(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\right) = \begin{cases} \hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2) & \text{se } \tau_1 > \tau_2 \\ \hat{q}(-i\tau_2)\hat{q}(-i\tau_1) & \text{se } \tau_2 > \tau_1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Considerando ad esempio il caso $\tau_1 > \tau_2$, esplicitando la dipendenza dal tempo degli operatori e valutando la traccia nella base delle coordinate, possiamo scrivere:

$$< T\left(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\right) >_\beta = \frac{1}{Z} \int dq < q \mid e^{-\beta\widehat{H}} e^{\tau_1 \widehat{H}} \hat{q} e^{-(\tau_1-\tau_2)\widehat{H}} \hat{q} e^{-\tau_2 \widehat{H}} \mid q > . \tag{4.8}$$

A questo punto inserendo le relazioni di completezza degli autostati delle coordinate agli istanti $\tau_1$ e $\tau_2$ e ripetendo la solita procedura che conduce alla definizione di path integral otteniamo:

$$< T\left(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\right) >_\beta = \frac{1}{Z[0]} \int_{q(0)=q(\beta)} [Dq(\tau)] q(\tau_1) q(\tau_2) e^{-S_E(\beta)} \tag{4.9}$$

$$= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} |_{j=0}. \tag{4.10}$$

È importante notare che se si fosse considerato il caso $\tau_2 > \tau_1$ si sarebbe ottenuto lo stesso risultato semplicemente con $q(\tau_2)$ a sinistra di $q(\tau_1)$, ma non essendo le $q$ operatori il loro ordinamento è ininfluente.

Consideriamo il caso di un potenziale di oscillatore armonico $V = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ (si è posto $m = 1$). Dopo un'integrazione per parti il funzionale generatore diventa:

$$Z[j] = \int [Dq(\tau)] exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{1}{2} q(\tau) \left( \frac{d^2}{d\tau^2} - \omega^2 \right) q(\tau) + j(\tau) q(\tau) \right] \right\} \quad (4.11)$$

$$= Z[0] exp \left( \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) \Delta(\tau, \tau') j(\tau') \right), \quad (4.12)$$

dove $\Delta(\tau, \tau')$ è soluzione dell'equazione:

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} - \omega^2 \right) \Delta(\tau, \tau') = -\delta(\tau - \tau'). \quad (4.13)$$

Tale equazione, data la periodicità $q(0) = q(\beta)$ della funzione $q$, può essere risolta *sviluppando in serie di Fourier* ottenendosi

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} - \omega^2 \right) \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n(\tau-\tau')} \Delta(i\omega_n) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n(\tau-\tau')}$$

$$\Rightarrow \Delta(i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} \quad (4.14)$$

dove appaiono le *frequenze di Matsubara*:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\beta} 2n \quad (4.15)$$

e valgono le relazioni:

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n \tau} \Delta(i\omega_n) \quad (4.16)$$

$$\Delta(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta(\tau) \quad (4.17)$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n \tau}. \quad (4.18)$$

È quindi immediato in questo caso identificare $\Delta(\tau)$ come il propagatore a tempi immaginari:

$$< T\left( \hat{q}(-i\tau_1) \hat{q}(-i\tau_2) \right) >_\beta = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} |_{j=0} = \Delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (4.19)$$

Appare quindi evidente come il problema dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica (anche a temperatura finita) sia l'analogo di una teoria di campo libera. Infatti le formule (4.12),(4.13) e (4.19) richiamano immediatamente quelle analoghe ottenute nello studio del campo scalare libero.
Resta da evidenziare l'importante proprietà di periodicità del propagatore:

$$\Delta(\tau) = \Delta(\tau - \beta), \tag{4.20}$$

che discende immediatamente dalle relazioni:

$$\begin{aligned} q(0) &= q(\beta) \\ \Delta(\tau) &=< T\left(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(0)\right) >_\beta . \end{aligned}$$

### 4.1.2 Il propagatore a tempi reali

In meccanica quantistica (e quindi in teoria dei campi) a temperatura finita incontriamo però anche un altro propagatore, che sarà utilizzato per studiare la risposta lineare del sistema a una perturbazione esterna: il *propagatore a tempi reali*.
Iniziamo col definire le quantità:

$$D^>(t,t') =< \hat{q}(t)\hat{q}(t') >_\beta \tag{4.21}$$

$$D^<(t,t') =< \hat{q}(t')\hat{q}(t) >_\beta , \tag{4.22}$$

dove $t$ e $t' \in \Re$. Che cosa assicura la convergenza degli oggetti appena definiti? Iniziamo a valutare esplicitamente la quantità definita nell'equazione (4.21):

$$\begin{aligned} D^>(t,t') &= \frac{1}{Z[0]} Tr\left(e^{i\widehat{H}t}\hat{q}e^{-i\widehat{H}(t-t')}\hat{q}e^{-i\widehat{H}t'}e^{-\beta\widehat{H}}\right) \\ &= \frac{1}{Z[0]}\sum_n e^{-\beta E_n}e^{iE_nt} <n|\,\hat{q}e^{-i\widehat{H}(t-t')}\hat{q}e^{-i\widehat{H}t'}\,|\,n> \\ &= \frac{1}{Z[0]}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n}e^{iE_n(t-t')} <n|\,\hat{q}e^{-i\widehat{H}(t-t')}\,|\,m><m|\,\hat{q}\,|\,n> \\ &= \frac{1}{Z[0]}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n}e^{iE_n(t-t')}e^{-iE_m(t-t')}|<n\,|\,\hat{q}\,|\,m>|^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Analogamente otteniamo:

$$D^<(t,t') = \frac{1}{Z[0]}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n}e^{-iE_n(t-t')}e^{iE_m(t-t')}|<n\,|\,\hat{q}\,|\,m>|^2. \tag{4.24}$$

Si noti come il fattore $e^{-\beta E_n}$ assicuri la convergenza dello sviluppo.
Vale ora l'importante proprietà:

$$
\begin{aligned}
e^{-\beta\widehat{H}}\hat{q}(t)e^{\beta\widehat{H}} &= e^{-\beta\widehat{H}}e^{i\widehat{H}t}\hat{q}e^{-i\widehat{H}t}e^{\beta\widehat{H}} \\
&= e^{i\widehat{H}(t+i\beta)}\hat{q}e^{-i\widehat{H}(t+i\beta)} = \hat{q}(t+i\beta)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

utilizzando la quale riusciamo a dimostrare la relazione di *Kubo-Martin-Schwinger*:

$$
D^{>}(t,t') = D^{<}(t+i\beta,t'). \tag{4.26}
$$

Infatti:

$$
\begin{aligned}
D^{>}(t,t') = Tr\left(e^{-\beta\widehat{H}}\hat{q}(t)\hat{q}(t')\right) &= Tr\left(\hat{q}(t+i\beta)e^{-\beta\widehat{H}}\hat{q}(t')\right) \\
&= Tr\left(e^{-\beta\widehat{H}}\hat{q}(t')\hat{q}(t+i\beta)\right) = D^{<}(t+i\beta,t').
\end{aligned}
$$

Siamo a questo punto in grado di dare la definizione rigorosa del propagatore a tempi reali come:

$$
D(t,t') =< T\left(\hat{q}(t)\hat{q}(t')\right) >_{\beta} = \theta(t-t')D^{>}(t,t') + \theta(t'-t)D^{>}(t',t). \tag{4.27}
$$

Poichè il propagatore dipende solo dalla differenza dei tempi nel seguito della discussione supporremo per semplicità $t' = 0$. È utile inoltre lavorare nello spazio delle frequenze, che in questo caso non sono vincolate ad assumere solo valori discreti a differenza di quanto accade quando studiamo il problema a tempi immaginari. Infatti nel formalismo qui esposto non è stata effettuata nè una rotazione di Wick, nè è stata posta una periodicità sulla variabile $q$.
Valgono le relazioni:

$$
D^{>}(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} D^{>}(t) \tag{4.28}
$$

$$
D^{<}(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} D^{<}(t). \tag{4.29}
$$

Siamo ora interessati a trovare una relazione tra $D^{>}(k_0)$ e $D^{<}(k_0)$. Per la relazione KMS:

$$
D^{<}(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} D^{>}(t-i\beta), \tag{4.30}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
D^{>}(t-i\beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0'}{2\pi} e^{-ik_0'(t-i\beta)} D^{>}(k_0') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0'}{2\pi} e^{-ik_0' t}\left(e^{-\beta k_0'} D^{>}(k_0')\right).
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Pertanto otteniamo:

$$\begin{aligned} D^{<}(k_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{ik_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0'}{2\pi} e^{-ik_0' t} \left( e^{-\beta k_0'} D^{>}(k_0') \right) \\ &= e^{-\beta k_0} D^{>}(k_0). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Siamo ora in grado di definire la *funzione spettrale* come:

$$\rho(k_0) \equiv D^{>}(k_0) - D^{<}(k_0), \tag{4.33}$$

e quindi:

$$\rho(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{ik_0 t} < [\hat{q}(t), \hat{q}(0)] >_\beta . \tag{4.34}$$

Utilizzando la relazione KMS otteniamo che in realtà la funzione spettrale dipende solo da $D^{>}(k_0)$. Possiamo infatti scrivere:

$$\rho(k_0) = D^{>}(k_0) \left[ 1 - e^{-\beta k_0} \right]. \tag{4.35}$$

La dipendenza di $D^{>}(k_0)$ dalla funzione spettrale può quindi essere fattorizzata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} D^{>}(k_0) = \rho(k_0) + D^{<}(k_0) &= (1 + f(k_0)) \rho(k_0) \\ &= (1 + f(k_0)) D^{>}(k_0) \left[ 1 - e^{-\beta k_0} \right], \end{aligned}$$

ottenendo così gli importanti risultati:

$$\rho(k_0) = \frac{D^{>}(k_0)}{1 + f(k_0)} \tag{4.36}$$

$$f(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}. \tag{4.37}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$\rho(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{ik_0 t} \left( D^{>}(t) - D^{<}(t) \right) \tag{4.38}$$

i risultati ottenuti in (4.23) e (4.24) otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho(k_0) = \frac{2\pi}{Z[0]} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \left[ \delta\left(k_0 + (E_n - E_m)\right) - \delta\left(k_0 - (E_n - E_m)\right) \right] \times \\ \times | < n \mid \hat{q} \mid m > |^2. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Oppure, tenendo conto della (4.35), otteniamo l'espressione equivalente:

$$\begin{aligned} \rho(k_0) = \frac{2\pi}{Z[0]} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \left[ 1 - e^{-\beta k_0} \right] \delta\left(k_0 + (E_n - E_m)\right) \times \\ \times | < n \mid \hat{q} \mid m > |^2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

È pertanto immediato verificare le proprietà:

$$\rho(k_0) = -\rho(-k_0) \tag{4.41}$$
$$\rho(k_0) sgn(k_0) > 0. \tag{4.42}$$

Siamo ora interessati a ricavare una regola di somma per la funzione spettrale, ovvero a calcolare la quantità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k_0).$$

Una strategia che possiamo seguire è la seguente. Scriviamo la quantità precedente come:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k_0) &= i \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 t} \left(D^{>}(k_0) - D^{<}(k_0)\right) \\ &= i \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} \left(D^{>}(t) - D^{<}(t)\right) = i \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} <[\hat{q}(t), \hat{q}(0)]>_\beta .\end{aligned} \tag{4.43}$$

Se ora esplicitiamo la dipendenza temporale dell'operatore $\hat{q}(t)$ e identifichiamo $\hat{q}(0) = \hat{q}$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt} <[\hat{q}(t), \hat{q}(0)]>_\beta &= i\frac{d}{dt} <[e^{i\widehat{H}t}\hat{q}e^{-i\widehat{H}t}, \hat{q}]>_\beta \\ = i <[i\widehat{H}\hat{q}(t) - i\hat{q}(t)\widehat{H}, \hat{q}]>_\beta &= <[\hat{q}(t)\widehat{H}, \hat{q}]>_\beta - <[\widehat{H}\hat{q}(t), \hat{q}]>_\beta .\end{aligned} \tag{4.44}$$

Otteniamo pertanto, facendo il limite $t \to 0$:

$$\begin{aligned} i \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} <[\hat{q}(t), \hat{q}(0)]>_\beta &= <[\hat{q}\widehat{H}, \hat{q}]>_\beta - <[\widehat{H}\hat{q}, \hat{q}]>_\beta \\ &= <\hat{q}[\widehat{H}, \hat{q}]>_\beta - <[\widehat{H}, \hat{q}]\hat{q}>_\beta .\end{aligned} \tag{4.45}$$

Nel caso specifico dell'oscillatore armonico

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 \hat{q}^2 \tag{4.46}$$

e utilizzando l'anticommutatore:

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i \tag{4.47}$$

otteniamo:

$$[\widehat{H}, \hat{q}] = -i\hat{p}. \tag{4.48}$$

Sostituendo la (4.48) nell'equazione (4.45) otteniamo:

$$i \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} <[\hat{q}(t), \hat{q}(0)]>_\beta = -i <[\hat{q}, \hat{p}]>_\beta = 1. \tag{4.49}$$

L'equazione (4.43) ci conduce pertanto alla seguente regola di somma per la funzione spettrale, qui dedotta nel caso dell'oscillatore armonico:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k_0) = 1. \tag{4.50}$$

Si osservi tuttavia che la validità della (4.50) è generale, purchè il potenziale dipenda solo dalle coordinate. Se ora esprimiamo $\hat{q}(t)$ attraverso gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ come:

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( \hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \right), \tag{4.51}$$

dove valgono le relazioni:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{4.52}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = 0 \tag{4.53}$$

$$\left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\right] = 0, \tag{4.54}$$

possiamo calcolare l'espressione esplicita della funzione spettrale per l'oscillatore armonico:

$$\begin{aligned} \rho(k_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} < [\hat{q}(t), \hat{q}(0)] >_\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} \frac{1}{2\omega} < [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] e^{-i\omega t} + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] e^{i\omega t} >_\beta \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(k_0 - \omega)t} - \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(k_0 + \omega)t}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Giungiamo pertanto al risultato:

$$\rho(k_0) = 2\pi \frac{1}{2\omega} \left[ \delta(k_0 - \omega) - \delta(k_0 + \omega) \right], \tag{4.56}$$

che possiamo anche scrivere nel modo seguente:

$$\rho(k_0) = 2\pi sgn(k_0) \delta\left(k_0^2 - \omega^2\right). \tag{4.57}$$

Notiamo pertanto che la funzione spettrale *non dipende dalla temperatura.* Possiamo ora calcolare esplicitamente il propagatore a tempi reali. Allo scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned} & D(t) = \theta(t) < \hat{q}(t)\hat{q}(0) >_\beta + \theta(-t) < \hat{q}(0)\hat{q}(t) >_\beta \\ \text{e} \qquad & D(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} \left[ \theta(t) D^{>}(t) + \theta(-t) D^{<}(t) \right]. \end{aligned} \tag{4.58}$$

È utile ricordare a questo punto le seguenti rappresentazioni integrali:

$$\theta(t) = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{e^{-ik'_0 t}}{k'_0 + i\eta} \tag{4.59}$$

$$\theta(-t) = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{e^{ik'_0 t}}{k'_0 + i\eta}. \tag{4.60}$$

Sostituendo queste ultime all'interno della (4.58) otteniamo:

$$\begin{aligned} D(k_0) &= i\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{e^{-ik'_0 t}}{k'_0 + i\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0 t} D^{>}(q_0) + \\ &+ i\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ik_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{e^{+ik'_0 t}}{k'_0 + i\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0 t} D^{<}(q_0) \\ &= i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{D^{>}(q_0)}{k_0 - q_0 + i\eta} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{D^{<}(q_0)}{q_0 - k_0 + i\eta}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Tenendo ora conto che:

$$D^{>}(q_0) = \rho(q_0) + D^{<}(q_0) \tag{4.62}$$

$$D^{<}(q_0) = f(q_0)\rho(q_0) \tag{4.63}$$

e quindi:

$$D^{>}(q_0) = \rho(q_0) + f(q_0)\rho(q_0) \tag{4.64}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} D(k_0) &= i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\rho(q_0)}{k_0 - q_0 + i\eta} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} f(q_0)\rho(q_0) \times \\ &\times \left[\frac{1}{k_0 - q_0 + i\eta} + \frac{1}{q_0 - k_0 + i\eta}\right] \\ &= i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\rho(q_0)}{k_0 - q_0 + i\eta} + f(k_0)\rho(k_0). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Il propagatore a tempi reali risulta pertando composto da due termini: uno a $T = 0$ e uno dipendente dalla temperatura. Se sostituiamo nella (4.65) la forma esplicita della funzione spettrale e definiamo

$$n(k_0) = \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1} \tag{4.66}$$

otteniamo infine:

$$D_F(k_0) = \frac{i}{k_0^2 - \omega^2 + i\eta} + 2\pi n(k_0)\delta\left(k_0^2 - \omega^2\right). \tag{4.67}$$

Osserviamo che $D_F(k_0)$ è diverso da $D(k_0)$ calcolato in equazione (4.65). Infatti, per $k_0 < 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{sgn(k_0)}{e^{\beta k_0}-1} &= -\frac{1}{e^{-\beta|k_0|}-1} \\ &= \frac{e^{\beta|k_0|}}{e^{\beta|k_0|}-1} = 1+n(k_0).\end{aligned}$$

## 4.2 Il campo scalare a temperatura finita

Affronteremo ora lo studio di una teoria di campo scalare a temperatura finita mettendo a confronto i due possibili approcci: quello funzionale e quello operatoriale. L'introduzione delle frequenze di Matsubara permetterà di separare quelli che chiameremo modi *hard* e modi *sof* e vedere in un caso semplice cosa si intende quando si parla di una teoria efficace.

### 4.2.1 Approccio funzionale

Consideriamo la seguente densità di lagrangiana di campo scalare nello spazio-tempo di Minkowsky:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_0\phi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi).\end{aligned} \tag{4.68}$$

Per passare a temperatura finita effettuiamo una rotazione di Wick ponendo $t = -i\tau$ e, nel caso di un campo *bosonico*, imponiamo condizioni al contorno periodiche[1]:

$$\phi(0) = \phi(\beta). \tag{4.69}$$

La funzione di partizione del sistema si scrive quindi nel seguente modo:

$$\begin{aligned}Z &= \int_{\phi(0)=\phi(\beta)} [D\phi(\vec{x},\tau)] \times \\ &\times exp\left[-\int_0^\beta \, d\tau \int d\vec{x}\left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + V(\phi)\right)\right].\end{aligned} \tag{4.70}$$

Iniziamo ad esaminare la teoria libera scrivendo il funzionale generatore:

$$\begin{aligned}Z_0[j] = \int [D\phi(x)] exp\Bigg[&-\int_0^\beta d^4x\left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2\right) + \\ &+ \int_0^\beta d^4x\, j(x)\phi(x)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.71}$$

[1]Per un campo fermionico avremo invece $\phi(0) = -\phi(\beta)$

Come al solito è conveniente esprimere tale funzionale nella forma

$$Z_0[j] = Z_0[0] exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\beta d^4x d^4y j(x)\Delta_F(x-y)j(y)\right) \tag{4.72}$$

dove intendiamo $d^4x = d\tau d\vec{x}$, $\phi(x) = \phi(\vec{x},\tau)$ e inoltre $\Delta_F(x-y)$ è soluzione dell'equazione:

$$\left(-\partial^2_{\tau_x} - \nabla^2_{\vec{x}} + m^2\right)\Delta_F(\tau_x - \tau_y, \vec{x}-\vec{y}) = \delta(\tau_x-\tau_y)\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.73}$$

Poichè si ha dipendenza solo dalla differenza delle coordinate l'equazione (4.73) si risolve nello spazio degli impulsi e delle frequenze di Matsubara. Infatti tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \Delta_F(\tau,\vec{x}) &= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\omega_n\tau}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\Delta_F(\vec{k},i\omega_n) && (4.74)\\ \delta(\tau) &= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega_n\tau} && (4.75)\\ \delta(\vec{x}) &= \int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, && (4.76) \end{aligned}$$

si ottiene immediatamente il risultato:

$$\Delta_F(\vec{k},i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2} = \frac{1}{\omega_n^2+\epsilon_k^2}. \tag{4.77}$$

Il propagatore libero compare spesso in *rappresentazione mista*. Quest'ultima, eseguendo la somma sulle frequenze:

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega_n\tau}\frac{1}{\omega_n^2+\epsilon_k^2}, \tag{4.78}$$

è data da:

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[(1+n_k)e^{-\epsilon_k|\tau|} + n_k e^{\epsilon_k|\tau|}\right], \tag{4.79}$$

dove $n_k$, trattandosi di un campo bosonico, è la funzione di distribuzione di Bose-Einstein:

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1}. \tag{4.80}$$

### 4.2.2 La somma sulle frequenze

Dimostriamo ora come si ottiene il risultato espresso dalla (4.79) attraverso una tecnica di somma sulle frequenze tipica della teoria dei campi a temperatura finita. Iniziamo a scrivere il propagatore nel modo più utile, e cioè:

$$\Delta_F(\vec{k}, i\omega_n) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[\frac{1}{\epsilon_k + i\omega_n} + \frac{1}{\epsilon_k - i\omega_n}\right]. \tag{4.81}$$

Consideriamo prima il caso $\tau > 0$. Occorre riuscire a valutare le quantità:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k + i\omega_n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k - i\omega_n}.$$

Ponendoci nel piano complesso della variabile $z$ e indicando con $C$ il cammino di integrazione che avvolge l'asse $Im\, z$ in senso antiorario valutiamo la quantità:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{e^{\beta z} - 1}\frac{\beta e^{\tau z}}{x - z}. \tag{4.82}$$

L'integrando è una funzione meromorfa che ha poli sull'asse immaginario per $z = -i\frac{2\pi}{\beta}n = -i\omega_n$ e un polo sull'asse reale positivo per $z = x$ (nel seguito identificheremo $x$ con $\epsilon_k$). Calcoliamo ora il residuo nel polo $z = -i\omega_n$, ovvero il coefficiente del termine in $\frac{1}{z+i\omega_n}$ dello sviluppo in serie intorno al polo. Otteniamo:

$$\frac{\beta}{e^{\beta z} - 1} = \frac{\beta}{1 + \beta(z + i\omega_n) + \ldots - 1} \tag{4.83}$$

$$Res\left[\frac{\beta}{e^{\beta z} - 1}\frac{e^{\tau z}}{\epsilon_k - z}\right] = \frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k + i\omega_n}. \tag{4.84}$$

A questo punto possiamo facilmente valutare l'integrale in equazione (4.82) con il metodo dei residui ottenendo:

$$\frac{1}{\beta 2\pi i}\int_C \frac{dz}{e^{\beta z} - 1}\frac{\beta e^{\tau z}}{\epsilon_k - z} = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k + i\omega_n}. \tag{4.85}$$

Ora che abbiamo trasformato la sommatoria sulle frequenze in un integrale nel piano complesso possiamo valutare quest'ultimo modificando in modo opportuno il cammino di integrazione. Ciò che conviene fare è porre:

$$\int_C \ldots = \int_\Gamma \ldots + \int_{C'} \ldots \qquad . \tag{4.86}$$

L'eguaglianza sussinte in quanto i due cammini di integrazione racchiudono gli stessi poli. Osserviamo ora che il contributo del cammino $\Gamma$ all'integrale è nullo in quanto l'integrando è ivi soppresso dall'esponenziale:

$$\frac{e^{\tau z}}{e^{\beta z}-1} \sim_{z\to\infty} e^{-(\beta-\tau)z}$$
$$\frac{e^{\tau z}}{e^{\beta z}-1} \sim_{z\to-\infty} -e^{-\tau|z|}.$$

Il cammino $C'$ che viene percorso in senso orario racchiude il solo polo $z=\epsilon_k$ e pertanto otteniamo il risultato:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k+i\omega_n} = \frac{1}{\beta 2\pi i}\int_{C'}\frac{dz}{e^{\beta z}-1}\frac{\beta e^{\tau z}}{\epsilon_k - z} \tag{4.87}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k+i\omega_n} = \frac{e^{\epsilon_k\tau}}{e^{\beta\epsilon_k}-1}. \tag{4.88}$$

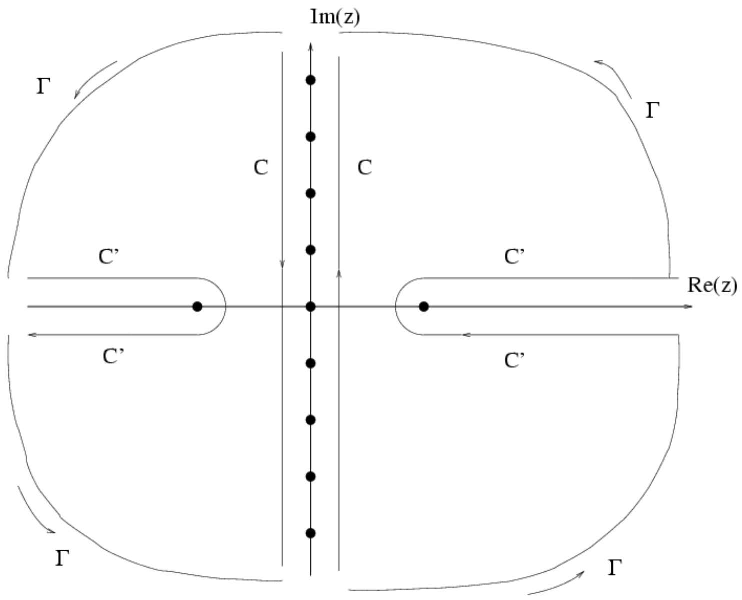


Figura 4.1: Modificazione del cammino di integrazione nel piano complesso.

Per valutare il secondo termine del propagatore possiamo invece utilizzare l'analoga identità:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k-i\omega_n} = \frac{1}{\beta 2\pi i}\int_{C}\frac{dz}{e^{\beta z}-1}\frac{\beta e^{\tau z}}{\epsilon_k + z} \tag{4.89}$$

dove l'integrando ha poli per $z = -i\omega_n$ e per $z = -\epsilon_k$. Deformando il cammino come prima otteniamo:

$$\int_C \cdots = \int_{C'} \cdots \qquad , \tag{4.90}$$

dove $C'$ avvolge solo il polo $z = -\epsilon_k$ in senso orario. Giungiamo pertanto al risultato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k - i\omega_n} &= -\frac{1}{e^{-\beta\epsilon_k}-1}e^{-\epsilon_k\tau} \\ = \frac{e^{\beta\epsilon_k}}{e^{\beta\epsilon_k}-1}e^{-\epsilon_k\tau} &= \left(1+\frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1}\right)e^{-\epsilon_k\tau}. \end{aligned} \tag{4.91}$$

In base ai risultati delle equazioni (4.88) e (4.91) otteniamo per $\tau > 0$:

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[(1+n_k)e^{-\epsilon_k\tau} + n_k e^{\epsilon_k\tau}\right]. \tag{4.92}$$

Allo stesso modo possiamo trattare il caso $\tau < 0$. Avremo:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k + i\omega_n} = \frac{1}{\beta 2\pi i}\int_C \frac{dz}{e^{\beta z}-1}\frac{\beta e^{-\tau z}}{\epsilon_k + z}\,, \tag{4.93}$$

dove l'integrando ha poli semplici in $z = i\omega_n$ e in $z = -\epsilon_k$. Integrando intorno al polo $z = -\epsilon_k$:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k + i\omega_n} = \left(1+\frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1}\right)e^{\tau\epsilon_k}. \tag{4.94}$$

Consideriamo ora il secondo termine del propagatore:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k - i\omega_n} = \frac{1}{\beta 2\pi i}\int_C \frac{dz}{e^{\beta z}-1}\frac{\beta e^{-\tau z}}{\epsilon_k - z}\,, \tag{4.95}$$

dove l'integrando ha poli semplici in $z = i\omega_n$ e in $z = \epsilon_k$. Integrando intorno al polo $z = \epsilon_k$ otteniamo:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{\epsilon_k - i\omega_n} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1}e^{-\tau\epsilon_k}. \tag{4.96}$$

Riassumendo i risultati ottenuti possiamo finalmente scrivere l'espressione compatta per il propagatore libero in rappresentazione mista:

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[(1+n_k)e^{-\epsilon_k|\tau|} + n_k e^{\epsilon_k|\tau|}\right]. \tag{4.97}$$

### 4.2.3 Formalismo operatoriale

Consideriamo ora il campo scalare come un operatore in *seconda quantizzazione* e scriviamo il suo sviluppo in operatori di *creazione* e *distruzione* in rappresentazione di Schrödinger (in cui gli operatori non evolvono nel tempo):

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}} \left[ \hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right], \tag{4.98}$$

dove abbiamo adottato la normalizzazione in un volume finito $V$, $\epsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ e valgono le relazioni di commutazione:

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \tag{4.99}$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}\right] = 0 \tag{4.100}$$

$$\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = 0. \tag{4.101}$$

L'hamiltoniana di un campo scalare reale non interagente diventa pertanto:

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \epsilon_k \left( \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \right) \tag{4.102}$$

$$= \sum_{\vec{k}} \epsilon_k \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \epsilon_k, \tag{4.103}$$

dove per mettere in evidenza il contributo divergente delle energie di punto zero degli infiniti modi di oscillazione abbiamo evidentemente utilizzato la (4.99). Per eliminare tale termine divergente possiamo effettuare l'*ordinamento normale* degli operatori ottenendo:

$$: \widehat{H}_0 := \sum_{\vec{k}} \epsilon_k \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}. \tag{4.104}$$

Consideriamo ora l'evoluzione temporale degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ in rappresentazione di *interazione* (che per un sistema non interagente coincide con quella di Heisenberg):

$$\hat{a}_{\vec{k}}(t) = e^{i\widehat{H}_0 t} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\widehat{H}_0 t} \tag{4.105}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_{\vec{k}}(t) = i e^{i\widehat{H}_0 t} [\widehat{H}_0, \hat{a}_{\vec{k}}] e^{-i\widehat{H}_0 t} = -i\epsilon_k \hat{a}_{\vec{k}}(t) \tag{4.106}$$

$$\hat{a}_{\vec{k}}(t) = e^{-i\epsilon_k t} \hat{a}_{\vec{k}}. \tag{4.107}$$

Analogamente otteniamo:

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}(t) = e^{i\epsilon_k t} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}. \tag{4.108}$$

Passando a temperatura finita otteniamo i seguenti risultati:

$$\hat{a}_{\vec{k}}(\tau) = e^{-\epsilon_k \tau} \hat{a}_{\vec{k}} \tag{4.109}$$
$$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}(\tau) = e^{\epsilon_k \tau} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \tag{4.110}$$

e vale inoltre la condizione:

$$< \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'} >_\beta = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} n_k = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}. \tag{4.111}$$

Possiamo ora scrivere il campo scalare libero in rappresentazione di interazione a tempi immaginari come:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}} \left[ \hat{a}_{\vec{k}} e^{-\epsilon_k \tau} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} e^{\epsilon_k \tau} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]. \tag{4.112}$$

Siamo ora in grado di definire il propagatore libero a tempi immaginari come:

$$\begin{aligned} < T\left(\phi(\vec{x}, \tau_1)\phi(\vec{y}, \tau_2)\right) >_\beta = \theta(\tau_1 - \tau_2) < \phi(\vec{x}, \tau_1)\phi(\vec{y}, \tau_2) >_\beta + \\ + \theta(\tau_2 - \tau_1) < \phi(\vec{y}, \tau_2)\phi(\vec{x}, \tau_1) >_\beta . \end{aligned} \tag{4.113}$$

Avendo posto $\tau = \tau_1 - \tau_2$, iniziamo a considerare il caso $\tau > 0$. Sviluppando i campi e tenendo conto che:

$$< \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'} >_\beta = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} (1 + n_k), \tag{4.114}$$

otteniamo:

$$< \phi(\vec{x}, \tau_1)\phi(\vec{y}, \tau_2) >_\beta = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\epsilon_k} \left[ (1 + n_k) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-\epsilon_k \tau} + n_k e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} e^{\epsilon_k \tau} \right]. \tag{4.115}$$

Se ora convertiamo la somma in integrale secondo la prescrizione:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \to \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \tag{4.116}$$

otteniamo:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau > 0) = \frac{1}{2\epsilon_k} \left[ (1 + n_k) e^{-\epsilon_k \tau} + n_k e^{\epsilon_k \tau} \right]. \tag{4.117}$$

Procedendo analogamente per il caso $\tau < 0$ giungiamo al risultato:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau < 0) = \frac{1}{2\epsilon_k} \left[ (1 + n_k) e^{\epsilon_k \tau} + n_k e^{-\epsilon_k \tau} \right]. \tag{4.118}$$

Ritroviamo pertanto il risultato ottenuto con l'approccio funzionale.
Possiamo ora verificare la proprietà di periodicità del propagatore:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau - \beta) = \Delta_F(\vec{k}, \tau) \qquad (0 \leq \tau \leq \beta). \tag{4.119}$$

Tenendo infatti conto del fatto che $\tau - \beta < 0$ e della relazione

$$1 + n_k = 1 + \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k} - 1} = \frac{e^{\beta\epsilon_k}}{e^{\beta\epsilon_k} - 1} = e^{\beta\epsilon_k} n_k \tag{4.120}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta_F(\vec{k}, \tau - \beta) &= \left[(1 + n_k)e^{-\beta\epsilon_k} e^{\epsilon_k\tau} + n_k e^{\beta\epsilon_k} e^{-\epsilon_k\tau}\right] \\ &= \left[n_k e^{\epsilon_k\tau} + (1 + n_k)e^{-\epsilon_k\tau}\right] \\ &= \Delta_F(\vec{k}, \tau). \end{aligned} \tag{4.121}$$

### 4.2.4 Propagate libero e funzione spettrale

In analogia a quanto fatto nello studio dell'oscillatore armonico definiamo la *funzione spettrale* di una particella scalare libera relativistica di massa $m$ nel modo seguente:

$$\rho_0(k) = 2\pi sgn(k_0)\delta\left(k^2 - m^2\right) = \frac{\pi}{\epsilon_k}\left(\delta(k_0 - \epsilon_k) - \delta(k_0 + \epsilon_k)\right). \tag{4.122}$$

Possiamo allora esprimere il propagatore libero a tempi immaginari attraverso la funzione spettrale come:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} \rho_0(k)\left(\theta(\tau) + N(k_0)\right). \tag{4.123}$$

Infatti sostituendo la (4.122) abbiamo:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-\epsilon_k\tau}\left(\theta(\tau) + N(\epsilon_k)\right) - e^{\epsilon_k\tau}\left(\theta(\tau) + N(-\epsilon_k)\right)\right]. \tag{4.124}$$

Tenendo ora conto che:

$$N(-\epsilon_k) = \frac{1}{e^{-\beta\epsilon_k} - 1} = \frac{-e^{\beta\epsilon_k}}{e^{\beta\epsilon_k} - 1} = -\left(1 + N(\epsilon_k)\right) \tag{4.125}$$

$$1 + N(-\epsilon_k) = -N(\epsilon_k), \tag{4.126}$$

abbiamo, nel caso $\tau > 0$:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau > 0) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-\epsilon_k\tau}\left(1 + N(\epsilon_k)\right) + e^{\epsilon_k\tau} N(\epsilon_k)\right], \tag{4.127}$$

mentre, nel caso $\tau < 0$:

$$\Delta_F(\vec{k}, \tau < 0) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-\epsilon_k\tau} N(\epsilon_k) + e^{\epsilon_k\tau}\left(1 + N(\epsilon_k)\right)\right]. \tag{4.128}$$

### 4.2.5 Proprietà di analiticità e propagatore a tempi reali

Indichiamo con:

$$\mathcal{D} = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \tag{4.129}$$

l'operatore statistico del nostro sistema. Il propagatore a tempi immaginari esatto, esplicitando unicamente la dipendenza temporale degli operatori, è definito nel modo seguente:

$$G(\tau) = < T_\tau \left(\phi(-i\tau)\phi(0)\right) > = Tr\left\{\mathcal{D} T_\tau \left(\phi(-i\tau)\phi(0)\right)\right\}, \tag{4.130}$$

dove i campi sono in descrizione di Heisenberg e la loro evoluzione temporale è data da:

$$\phi(-i\tau) = e^{H\tau}\phi(0)e^{-H\tau}. \tag{4.131}$$

Tale propagatore può pertanto essere scritto nel modo seguente:

$$G(\tau) = \theta(\tau)G^{>}(\tau) + \theta(-\tau)G^{<}(\tau). \tag{4.132}$$

Cerchiamo ora di estendere questa scrittura per definire *funzioni di Green a tempi reali* nel modo seguente:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \theta(x_0 - y_0)G^{>}(x,y) + \theta(y_0 - x_0)G^{<}(x,y) && (4.133)\\ G_R(x,y) &= i\theta(x_0 - y_0)\left[G^{>}(x,y) - G^{<}(x,y)\right] && (4.134)\\ G_A(x,y) &= -i\theta(y_0 - x_0)\left[G^{>}(x,y) - G^{<}(x,y)\right], && (4.135) \end{aligned}$$

dove si intende:

$$\begin{aligned} G^{>}(x,y) &\equiv Tr\left\{\mathcal{D}\phi(x)\phi(y)\right\} \\ G^{<}(x,y) &\equiv Tr\left\{\mathcal{D}\phi(y)\phi(x)\right\}. \end{aligned} \tag{4.136}$$

La procedura che mostra l'analiticità delle funzioni sopra definite è la stessa vista nel caso dell'oscillatore armonico. Utilizzando la definizione (4.136) abbiamo:

$$G^{>}(t) = Tr\left\{\mathcal{D}\phi(t)\phi(0)\right\} = \frac{1}{Z} Tr\left\{e^{-H(\beta - it)}\phi e^{-iHt}\phi\right\}, \tag{4.137}$$

che, valutando la traccia nella base degli autostati di $H$ ed inserendo una relazione di completezza su questi stessi autostati, conduce alla formula:

$$G^{>}(t) = \frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} | < n|\phi|m > |^2 e^{it(E_n - E_m)}, \tag{4.138}$$

che può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-(\beta-it)E_n} <n|\phi|m> |^2 e^{-itE_m}. \tag{4.139}$$

La convergenza della sommatoria è garantita dagli esponenziali a patto che $-\beta < Im\, t < 0$.
Analogamente otteniamo:

$$G^<(t) = \frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} | <n|\phi|m> |^2 e^{-it(E_n - E_m)}, \tag{4.140}$$

che esiste come funzione analitica nella regione $0 < Imt < \beta$. Il dominio delle funzioni $G^>(t)$ e $G^<(t)$ può essere esteso a includere valori reali di t.
Volendo dare una rappresentazione che tenga conto anche della dipendenza spaziale possiamo scrivere:

$$G^>(t,\vec{x}) = \frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} | <n|\phi|m> |^2 e^{it(E_n - E_m)} e^{-i(\vec{P}_n - \vec{P}_m)\cdot\vec{x}} \tag{4.141}$$

e analogamente per $G^<(t,\vec{x})$.
In modo del tutto analogo a quanto visto nel caso dell'oscillatore armonico si dimostra la relazione KMS:

$$G^<(t) = G^>(t - i\beta). \tag{4.142}$$

Utilizzando le equazioni (4.138) e (4.140) è immediato dimostrare la proprietà:

$$[G^>(y,x)]^\star = [G^<(x,y)]^\star = G^>(x,y). \tag{4.143}$$

Tale proprietà assicura che $G_R(x,y)$ e $G_A(x,y)$, definite nelle equazioni (4.134) e (4.135), sono funzioni reali. Vogliamo ora trovare un'espressione esplicita per il propagatore a tempi reali nel caso non interagente. Partiamo dalle funzioni:

$$\begin{aligned} G_0^>(\tau,\vec{k}) = \Delta_F(\tau > 0,\vec{k}) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-\epsilon_k\tau}\left(1 + N(\epsilon_k)\right) + e^{\epsilon_k\tau}N(\epsilon_k)\right] \\ G_0^<(\tau,\vec{k}) = \Delta_F(\tau < 0,\vec{k}) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-\epsilon_k\tau}N(\epsilon_k) + e^{\epsilon_k\tau}\left(1 + N(\epsilon_k)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.144}$$

Valutandole a tempi reali ($t = -i\tau$ con $\tau$ puramente immaginario) otteniamo:

$$\begin{aligned} G_0^>(t,\vec{k}) &= \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-i\epsilon_k t}\left(1 + N(\epsilon_k)\right) + e^{i\epsilon_k t}N(\epsilon_k)\right] \\ G_0^<(t,\vec{k}) &= \frac{1}{2\epsilon_k}\left[e^{-i\epsilon_k t}N(\epsilon_k) + e^{i\epsilon_k t}\left(1 + N(\epsilon_k)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.145}$$

Giungiamo pertanto ai seguenti risultati:

$$G_0(t,\vec{k}) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left\{\theta(t)e^{-i\epsilon_k t} + \theta(-t)e^{i\epsilon_k t} + 2N_k \cos\epsilon_k t\right\} \quad (4.146)$$

$$G_0^R(t,\vec{k}) = \theta(t)\frac{\sin\epsilon_k t}{\epsilon_k} \quad (4.147)$$

$$G_0^A(t,\vec{k}) = -\theta(-t)\frac{\sin\epsilon_k t}{\epsilon_k}. \quad (4.148)$$

### 4.2.6 Rappresentazioni spettrali per il propagatore e la self-energia

Consideriamo la trasformata di Fourier della funzione a tempi reali $G^>(x)$:

$$\begin{aligned} G^>(k) &= \int d^4x e^{ik\cdot x} G^>(x) = \int d^4x e^{-ik\cdot x} G^>(-x) = \int d^4x e^{-ik\cdot x}\left[G^>(x)\right]^\star \\ &= \left[\int d^4x e^{ik\cdot x} G^>(x)\right]^\star = \left[G^>(k)\right]^\star . \end{aligned} \quad (4.149)$$

Pertanto $G^>(k)$ e $G^<(k)$ sono funzioni reali e, per la relazione KMS, sono legate nel seguente modo:

$$G^>(k_0,\vec{k}) = e^{\beta k_0} G^<(k_0,\vec{k}). \quad (4.150)$$

Possiamo ora definire la densità spettrale come:

$$\rho(k) \equiv G^>(k) - G^<(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x} < [\phi(x),\phi(0)] > . \quad (4.151)$$

Pertanto, evidenziando la dipendenza da $k_0$:

$$\rho(k) = \frac{2\pi}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} | < n|\phi|m > |^2 \left(\delta(k_0 + E_n - E_m) - \delta(k_0 - E_n + E_m)\right). \quad (4.152)$$

Per un sistema rotazionalmente invariante $\rho(k)$ è funzione solo di $k_0$ e di $|\vec{k}|$. Notiamo inoltre che, come per l'oscillatore armonico, $\rho(-k_0) = -\rho(k_0)$ e $k_0\rho(k_0) \geq 0$.
Ricaviamo ora la *regola di somma* per la funzione spettrale partendo da una densità di lagrangiana di campo scalare con un termine di interazione dipendente dal campo $\phi$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi). \quad (4.153)$$

Valgono le seguenti relazioni di commutazione *a tempi uguali*:

$$
\begin{aligned}
&[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)] = [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)] = 0,
\end{aligned}
\tag{4.154}
$$

dove il momento coniugato al campo è definito come:

$$
\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial_t \phi. \tag{4.155}
$$

Notiamo ora che:

$$
\begin{aligned}
\left[i\partial_t\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{0},0)\right]_{t=0} &= \int dt \left[i\partial_t\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{0},0)\right]\delta(t) \\
= i\left[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{0},0)\right]\delta(t) &- i\int dt\left[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{0},0)\right]\frac{d}{dt}\delta(t) \\
&= \int dt \int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \left[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{0},0)\right] e^{ik_0 t}.
\end{aligned}
\tag{4.156}
$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
\int d\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} < \left[i\partial_t\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{0},0)\right]_{t=0} > &= \int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \int d^4x e^{ik\cdot x} < [\phi(x),\phi(0)] > \\
&= \int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k).
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

Utilizzando le relazioni di commutazione a tempi uguali (4.154) otteniamo pertanto la regola di somma per la funzione spettrale valida sia nel caso libero sia in quello interagente:

$$
\int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k) = 1. \tag{4.158}
$$

Utilizzando la proprietà (4.150) e la definizione di funzione spettrale otteniamo le relazioni:

$$
G^{>}(k) = \rho(k)\left[1+N(k_0)\right], \qquad G^{<}(k) = \rho(k)N(k_0). \tag{4.159}
$$

Possiamo pertanto dare un significato fisico alle funzioni $G^{>}(k)$ e $G^{<}(k)$: per valori positivi di $k_0$ $G^{<}(k)$ è proporzionale alla densità media di particelle con impulso $\vec{k}$ ed energia $k_0$, mentre $G^{>}(k)$ è proporzionale alla densità di stati disponibili per l'aggiunta di una particella con quadrimpulso $K^{\mu}$.
Utilizzando la (4.159) possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
G^{>}(t,\vec{k}) &= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 t} G^{>}(k) = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 t}\rho(k)\left[1+N(k_0)\right] \\
&= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 t} \rho(k) \frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}-1},
\end{aligned}
\tag{4.160}
$$

che, prolungata a tempi immaginari $t = -i\tau$, conduce a:

$$G^{>}(\tau,\vec{k}) = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} \rho(k) \frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}-1}. \tag{4.161}$$

Questa espressione, sostituita all'interno della formula:

$$G(i\omega_n,\vec{k}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} G^{>}(\tau,\vec{k}), \tag{4.162}$$

tenendo conto che:

$$\int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n - k_0)\tau} = \frac{1-e^{-\beta k_0}}{k_0 - i\omega_n}, \tag{4.163}$$

conduce al risultato:

$$G(i\omega_n,\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\rho(k_0,k)}{k_0 - i\omega_n}, \tag{4.164}$$

dove si deve intendere $k = |\vec{k}|$. Il coefficiente di Fourier $G(i\omega_n,\vec{k})$ espresso nell'equazione (4.164) può essere visto come il valore della funzione:

$$G(\omega,\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\rho(k_0,k)}{k_0 - \omega}, \tag{4.165}$$

normalmente detta *rappresentazione spettrale del propagatore*. Notiamo che per $|\omega| \to \infty$ $G(\omega,\vec{k})$ va come $1/\omega$. $G(\omega,\vec{k})$ così definito è anche detto *propagatore analitico*, in quanto rappresenta l'unica continuazione analitica fuori dell'asse reale delle frequenze del propagatore di Matsubara.
Notiamo ora che:

$$G(\omega+i\eta,\vec{k}) - G(\omega-i\eta,\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \left[\frac{\rho(k_0,k)}{k_0-\omega-i\eta} - \frac{\rho(k_0,k)}{k_0-\omega+i\eta}\right] e^{ik_0\eta}, \tag{4.166}$$

pertanto, chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore ($\eta \to 0^+$), abbiamo che:

$$i\rho(\omega,\vec{k}) = G(\omega+i\eta,\vec{k}) - G(\omega-i\eta,\vec{k}). \tag{4.167}$$

Cerchiamo ora di dare una rappresentazione spettrale delle funzioni di Green *causali*. Dalla definizione di propagatore ritardato data nell'equazione (4.134) abbiamo che:

$$G_R(x) = i\theta(t) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x} \left[G^{>}(k) - G^{<}(k)\right] = i\theta(t) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x} \rho(k). \tag{4.168}$$

Notiamo ora che:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x} \int \frac{dk_0'}{2\pi} \frac{\rho(k_0', k)}{k_0' - k_0 - i\eta} = -\int \frac{dk_0' d\vec{k}}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rho(k_0', k) \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 t}}{k_0 - k_0' + i\eta}$$
$$= i\theta(t) \int \frac{dk_0' d\vec{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik_0' t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rho(k_0', k). \quad (4.169)$$

Giungiamo pertanto al risultato:

$$G_R(k_0, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0'}{2\pi} \frac{\rho(k_0', k)}{k_0' - k_0 - i\eta}, \quad (4.170)$$

ovvero:

$$G_R(k_0, \vec{k}) = G(k_0 + i\eta, \vec{k}). \quad (4.171)$$

Analogamente abbiamo che:

$$G_A(k_0, \vec{k}) = G(k_0 - i\eta, \vec{k}) = G_R^\star(k_0, \vec{k}). \quad (4.172)$$

Dall'equazione (4.170) ricaviamo che $G_R(k_0, \vec{k})$ è una funzione analitica nel semipiano superiore, mentre $G_A(k_0, \vec{k})$ è analitica nel semipiano inferiore. Notiamo ora che, attraverso i risultati ottenuti, l'equazione (4.167) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\rho(k) = 2ImG_R(k). \quad (4.173)$$

Estendiamo i ragionamenti finora fatti al caso della self-energia $\Sigma$ che compare nell'equazione di Dyson:

$$G^{-1} = G_0^{-1} + \Sigma. \quad (4.174)$$

Anche la self-energia può essere scritta nel modo seguente:

$$\Sigma(\tau) = \theta(\tau)\Sigma^>(\tau) + \theta(-\tau)\Sigma^<(\tau). \quad (4.175)$$

Continua a valere la relazione KMS per cui:

$$\Sigma^<(t) = \Sigma^>(t - i\beta) \qquad \text{con} \qquad 0 \leq Imt \leq \beta. \quad (4.176)$$

Valgono pertanto le seguenti rappresentazioni nello spazio dei quadrimpulsi:

$$\Sigma^>(k) = -\Gamma(k)\left[1 + N(k_0)\right], \qquad \Sigma^<(k) = -\Gamma(k)N(k_0), \quad (4.177)$$

dove abbiamo definito:

$$-\Gamma(k) \equiv \Sigma^>(k) - \Sigma^<(k). \quad (4.178)$$

In analogia a quanto visto in precedenza per il propagatore possiamo definire una *self-energia analitica* attraverso la seguente rappresentazione spettrale:

$$\Sigma(\omega, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{-\Gamma(k_0, k)}{k_0 - \omega}. \tag{4.179}$$

La self-energia ritardata sarà ovviamente data da:

$$\Sigma_R(\omega, \vec{k}) = \Sigma(\omega + i\eta, \vec{k}), \tag{4.180}$$

ed è legata a $\Gamma$ attraverso la relazione:

$$\Gamma(\omega, \vec{k}) = -2Im\Sigma_R(\omega, \vec{k}). \tag{4.181}$$

Poichè il propagatore ritardato libero, sostituendo l'espressione esplicita della funzione spettrale libera, è dato da:

$$\begin{aligned} G_R^0(k_0, \vec{k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0'}{2\pi} \frac{\rho_0(k_0', k)}{k_0' - k_0 - i\eta} = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[\frac{1}{\epsilon_k - k_0 - i\eta} + \frac{1}{\epsilon_k + k_0 + i\eta}\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_k^2 - (k_0 + i\eta)^2}, \end{aligned} \tag{4.182}$$

otteniamo allora per il propagatore ritardato l'espressione:

$$G_R(k_0, \vec{k}) = \frac{-1}{(k_0 + i\eta)^2 - \epsilon_k^2 - \Sigma_R(k_0, \vec{k})}, \tag{4.183}$$

che, separando parte reale e parte immaginaria della self energia diventa:

$$G_R(k_0, \vec{k}) = \frac{-1}{k_0^2 - \epsilon_k^2 - Re\Sigma_R(k_0, \vec{k}) - i\,Im\Sigma_R(k_0, \vec{k})}. \tag{4.184}$$

Utilizzando l'equazione (4.173) otteniamo pertanto:

$$\rho(k_0, \vec{k}) = \frac{\Gamma(k_0, \vec{k})}{\left(k_0^2 - \epsilon_k^2 - Re\Sigma_R(k_0, \vec{k})\right)^2 + \left(\Gamma(k_0, \vec{k})/2\right)^2}. \tag{4.185}$$

Nel caso di una particella libera $\Sigma = \Gamma = 0$ e pertanto la funzione spettrale è una somma di delta di Dirac[2].
Nel caso in cui $\Gamma$ sia piccolo e dipenda solo debolmente da $k_0$ la densità spettrale non si discosta troppo dal caso di particella libera. A questo tipo di

[2]Ricordiamo infatti che: $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi\delta(x)$.

eccitazioni si dà il nome di *quasiparticelle*. In particolare sia $E_k$ la soluzione ad energia positiva dell'equazione:

$$E_k^2 = \epsilon_k^2 + Re\Sigma_R(E_k, \vec{k}). \tag{4.186}$$

Possiamo allora sviluppare i risultati ottenuti per $k_0 \approx E_k$; in particolare tenendo conto che:

$$\begin{aligned} k_0^2 - \epsilon_k^2 - Re\Sigma_R(k_0, \vec{k}) &\approx k_0^2 - \epsilon_k^2 - Re\Sigma_R(E_k, \vec{k}) - \frac{\partial Re\Sigma_R}{\partial k_0}(k_0 - E_k) \\ &\approx k_0^2 - E_k^2 - \frac{\partial Re\Sigma_R}{\partial k_0}(k_0 - E_k \approx (k_0 - E_k)\left[2E_k - \frac{\partial Re\Sigma_R}{\partial k_0}\right] \\ &\approx 2E_k(k_0 - E_k)\left[1 - \frac{1}{2E_k}\frac{\partial Re\Sigma_R}{\partial k_0}\right] \end{aligned} \tag{4.187}$$

giungiamo alle seguenti espressioni per il propagatore e la funzione spettrale della quasiparticella:

$$G_R(k_0 \simeq E_k, k) \simeq \frac{z_k}{2E_k}\frac{-1}{k_0 - E_k + i\gamma_k} \tag{4.188}$$

$$\rho(k_0 \simeq E_k, k) \simeq \frac{z_k}{2E_k}\frac{2\gamma_k}{(k_0 - E_k)^2 + \gamma_k^2}, \tag{4.189}$$

dove abbiamo definito:

$$\begin{aligned} z_k^{-1} &\equiv 1 - \frac{1}{2E_k}\frac{\partial Re\Sigma_R}{\partial k_0}\,|_{k_0=E_k}\,, \\ \gamma_k &\equiv \frac{z_k}{4E_k}\Gamma(E_k, k). \end{aligned} \tag{4.190}$$

Osserviamo che la quantità $\gamma_k$ controlla la vita media delle quasiparticelle. Infatti abbiamo:

$$G_R(t, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0t}G_R(k_0, k) \sim e^{-iE_kt}e^{-\gamma_kt}, \tag{4.191}$$

per cui $|G_R(t, \vec{k})|^2 \propto \exp[-2\gamma_k t]$. Pertanto definiamo la *vita media* delle eccitazioni come $\tau(k) = 1/2\gamma_k$, dove $\gamma_k$ è il *damping rate* delle quasiparticelle.

### 4.2.7 Il limite $\beta \rightarrow 0$

Studiare il regime di alte temperature equivale ad effettuare il limite $\beta \rightarrow 0$. In questo caso a causa della condizione di periodicità $\phi(0) = \phi(\beta)$ la dipendenza temporale dei campi diventa trascurabile, almeno in prima approssimazione, per cui siamo autorizzati a ignorare il termine $(\partial_\tau)^2$. La funzione di partizione:

$$Z = \int_{\phi(0)=\phi(\beta)} [D\phi(\vec{x},\tau)] \times$$
$$\times\, exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d\vec{x}\left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + V(\phi)\right)\right] \quad (4.192)$$

diventa pertanto in questo limite:

$$Z \approx_{\beta\to 0} \mathcal{N}\int [D\phi(\vec{x})] exp\left(-\beta \int d\vec{x}\mathcal{H}[\phi(\vec{x})]\right), \quad (4.193)$$

dove:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + V(\phi). \quad (4.194)$$

Ignorare la dipendenza temporale dei campi equivale, nello sviluppo in serie in frequenze di Matsubara

$$\phi(\vec{x},\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n\tau}\phi(\vec{x}, i\omega_n), \quad (4.195)$$

a considerare solo la componente a frequenza nulla. Nel limite di alte temperature la funzione di distribuzione diventa:

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1} = \frac{1}{1+\beta\epsilon_k+\ldots-1} \approx_{\beta\to 0} \frac{T}{\epsilon_k}. \quad (4.196)$$

Tale forma asintotica è valida solo per quei modi per cui $\epsilon_k \ll T$.

Il propagatore a tempi immaginari

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) = \frac{1}{2\epsilon_k}\left[(1+n_k)e^{-\epsilon_k|\tau|} + n_k e^{\epsilon_k|\tau|}\right], \quad (4.197)$$

sostituendo il risultato di equazione (4.196) e tenendo conto che $\epsilon_k|\tau| \leq \beta\epsilon_k \ll 1$, si trasforma invece nel modo seguente:

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) \approx \frac{1}{2\epsilon_k}\left[(1+\frac{T}{\epsilon_k})(1-\epsilon_k|\tau|) + \frac{T}{\epsilon_k}(1+\epsilon_k|\tau|)\right]$$
$$\approx \frac{1}{2\epsilon_k}\left[1-\epsilon_k|\tau| + 2\frac{T}{\epsilon_k}\right]. \quad (4.198)$$

Poichè $\frac{T}{\epsilon_k} \gg 1 \gg \epsilon_k|\tau|$ si ottiene per il propagatore libero l'espressione:

$$\Delta_F(\vec{k},\tau) \approx_{\beta\to 0} \Delta_0(\vec{k}) = \frac{T}{\epsilon_k^2} \quad (4.199)$$

dove l'indice 0 ci ricorda che stiamo trascurando la dipendenza temporale, ovvero che consideriamo solo la frequenza di Matsubara nulla. In genere il limite $\beta \to 0$ appena studiato viene chiamato *approssimazione di campo classico*. Anche dalla meccanica statistica ci aspettiamo che per $T \to \infty$ gli effetti quantistici diventino trascurabili.

Tornando alla situazione sperimentale che siamo interessati a studiare, il QGP, notiamo che in questo caso gli effetti quantistici continuano invece ad essere importanti anche ad alte temperature. A temperature molto elevate quark (descritti da un campo fermionico) e gluoni (descritti da un campo di gauge) possono essere trattati in prima approssimazione come un gas di particelle massless non interagenti (ad energie molto elevate la costante di accoppiamento dell'interazione forte diventa piccola) e a potenziale chimico nullo. La densità di particelle è data in questo caso dalla formula:

$$\rho = \frac{N}{V} \propto \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} \pm 1}. \tag{4.200}$$

Nel caso di particelle massless $\epsilon_k = k$ e ponendo $\beta k = x$ nella (4.200) otteniamo che $\rho \propto T^3$ e quindi la distanza media tra le particelle sarà

$$d \propto \frac{1}{T}. \tag{4.201}$$

Proviamo ora a confrontare tale valore con la lunghezza d'onda termica di una particella massless confinata in una buca di larghezza $a$. Per la condizione di quantizzazione:

$$k_n = n\frac{\pi}{a}$$

la funzione di partizione è data da:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta k_n} = \sum_n e^{-\beta \frac{\pi}{a} n} = \sum_n e^{-\frac{\lambda}{a} n}$$

dove abbiamo definito la *lunghezza d'onda termica* di de Broglie (che ci dà una misura della distanza a cui sono avvertibili gli effetti quantistici) come:

$$\lambda = \frac{\pi}{T}. \tag{4.202}$$

Nel caso di una particella massiva non relativistica avremmo invece ottenuto:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mKT}}. \tag{4.203}$$

Pertanto confrontando le equazioni (4.201) e (4.202) vediamo come la distanza media tra le particelle anche a temperature molto elevate sia confrontabile con la loro lunghezza d'onda termica e quindi gli effetti quantistici siano da tenere in considerazione. Ciò è dovuto al fatto di aver posto il potenziale chimico uguale a zero, il che consente di creare un numero sempre maggiore di particelle all'aumentare della temperatura.
È opportuno sottolineare che la densità qui calcolata (numero di particelle per unità di volume) non è da confondersi con la densità barionica definita dall'equazione (3.26) e che abbiamo visto essere nulla nel caso $\mu = 0$. Ad essa infatti i gluoni non contribuiscono, mentre al contributo dei quark va sottratto quello degli antiquark.

### 4.2.8 Modi hard e modi soft

Introduciamo ora un parametro $\Lambda$ che soddisfi la condizione:

$$\Lambda \ll T \tag{4.204}$$

e studiamo il caso di una particella scalare massless, per la quale pertanto avremo $\epsilon_k = k$. In generale il campo scalare può essere sviluppato nello spazio degli impulsi e delle frequenze di Matsubara nel modo seguente:

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\omega_n \tau} \phi(\vec{k}, i\omega_n), \tag{4.205}$$

dove come al solito per un campo bosonico:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\beta} 2n. \tag{4.206}$$

Avendo definito la quantità:

$$K^2 = \omega_n^2 + k^2 \tag{4.207}$$

siamo in grado di distinguere i *modi soft*, per i quali $K < \Lambda$, dai *modi hard*, per i quali invece $K > \Lambda$.
Tutti i modi con $\omega_n \neq 0$ sono hard, infatti, in vitù della (4.204), avremo:

$$K^2 = (2\pi n)^2 T^2 + k^2 \gg \Lambda^2. \tag{4.208}$$

Tuttavia anche i modi con $\omega_n = 0$ e $k > \Lambda$ sono modi hard, infatti in questo caso:

$$K^2 = k^2 > \Lambda^2. \tag{4.209}$$

I modi con $\omega_n = 0$ e $k < \Lambda$ sono invece modi soft in quanto soddisfano la relazione:

$$K^2 = k^2 < \Lambda^2. \tag{4.210}$$

Siamo quindi in grado di scrivere il campo $\phi$ nel modo seguente:

$$\phi(\vec{x},\tau) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_h(\vec{x}) + \phi_{h'}(\vec{x},\tau), \tag{4.211}$$

dove abbiamo definito:

$$\phi_0(\vec{x}) = \frac{1}{\beta}\int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}\phi(\vec{k}, i\omega_0) \tag{4.212}$$

$$\phi_h(\vec{x}) = \frac{1}{\beta}\int_{\Lambda}^{+\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}\phi(\vec{k}, i\omega_0) \tag{4.213}$$

$$\phi_{h'}(\vec{x},\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{n\neq 0}\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}e^{-i\omega_n\tau}\phi(\vec{k}, i\omega_n). \tag{4.214}$$

A questo punto la strategia che seguiremo sarà quella di eliminare i modi hard cercando di integrarli funzionalmente e ottenere così una *teoria efficace* per i modi soft. Il vantaggio è che per i modi soft vale la condizione $\beta\epsilon_k \ll T$ e quindi, come visto nel capitolo (4.2.7), è lecita l'approssimazione (4.196). Infatti:

$$\epsilon_k = k < \Lambda \ll T. \tag{4.215}$$

Iniziamo a vedere cosa ciò significhi a livello della funzione di partizione, prendendo come termine di interazione il consueto potenziale:

$$V(\phi) = \frac{g}{4!}\phi^4. \tag{4.216}$$

Considerando il campo $\phi = \phi(\vec{x},\tau)$ la funzione di partizione sarà data da

$$Z = \int [D\phi(\vec{x},\tau)] exp\left[-\int_0^{\beta} d\tau \int d\vec{x}\left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{g}{4!}\phi^4\right)\right], \tag{4.217}$$

e, sostituendo al posto dei campi i loro sviluppi nello spazio degli impulsi e delle frequenze, si ottiene:

$$Z = \mathcal{N}\int [D\phi(\vec{k}, i\omega_\nu)] exp\left[\frac{1}{\beta}\sum_\nu \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}(\omega_\nu^2 + k^2)\phi(\vec{k},\nu)\phi(-\vec{k},-\nu) \right.$$
$$\left. -\frac{1}{\beta^3}\sum_{\nu_1\nu_2\nu_3}\int\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3}\right)\frac{g}{4!}\phi(\vec{k}_1,\nu_1)\phi(\vec{k}_2,\nu_2)\phi(\vec{k}_3,\nu_3)\phi(-\sum_i \vec{k}_i, -\sum_i \nu_i)\right], \tag{4.218}$$

che si può scrivere come:

$$Z = \mathcal{N} \int [D\phi(\vec{k} < \Lambda, i\omega_0)][D\phi(\vec{k} > \Lambda, i\omega_0)][D\phi(\vec{k}, i\omega_\nu \neq 0)]exp[\ldots]. \quad (4.219)$$

Integrando i modi hard si ottiene pertanto:

$$Z = \mathcal{N} \int [D\phi(\vec{k} < \Lambda, i\omega_0)]e^{-S[\phi_0]}, \quad (4.220)$$

dove $S[\phi_0]$ rappresenta l'*azione efficace* per i modi soft.
Vediamo ora come scrivere il propagatore libero *efficace* per i modi soft mettendo in evidenza come la particella scalare acquisti una massa dipendente dalla temperatura. Iniziamo con lo scrivere l'equazione di Dyson per il propagatore libero efficace:

$$\begin{aligned} \Delta_0^{eff}(\vec{k}, \omega_0) &= \Delta_0(\vec{k}, \omega_0) + \Delta_0(\vec{k}, \omega_0)\Sigma^\star(\vec{k}, \omega_0)\Delta_0^{eff}(\vec{k}, \omega_0) && (4.221) \\ \Delta_0^{eff}(\vec{k}, \omega_0) &= \frac{1}{[\Delta_0(\vec{k}, \omega_0)]^{-1} - \Sigma^\star(\vec{k}, \omega_0)} && (4.222) \\ \Delta_0^{eff}(\vec{k}, \omega_0) &= \frac{1}{k^2 - \Sigma^\star(\vec{k}, \omega_0)}. && (4.223) \end{aligned}$$

Come messo in evidenza nel capitolo (2.2.5) il diagramma che veste la massa è il loop che ha come linee interne modi hard e il suo coefficiente vale $-1/2$. Otteniamo pertanto:

$$\Delta_0^{eff}(\vec{k}, \omega_0) = \frac{1}{k^2 + M^2(T)}, \quad (4.224)$$

dove:

$$M^2(T) = \frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\sum_{\nu\neq 0}\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2 + \omega_\nu^2} + \frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\int_\Lambda^{+\infty} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2}. \quad (4.225)$$

Iniziamo col valutare il primo integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\sum_{\nu\neq 0}\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2 + \omega_\nu^2} &= \frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\, 2\sum_{\nu=1}^{+\infty}\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2 + \omega_\nu^2} \\ = \frac{g}{\beta}\frac{4\pi}{8\pi^3 +}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} dq \frac{q^2}{q^2 + \omega_\nu^2} &= \frac{g}{2\pi^2}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\omega_\nu \int_0^{+\infty} dx \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ = \frac{g}{2\pi^2}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\omega_\nu \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} &= \frac{gT}{2\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)2\pi T\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu \\ = \frac{gT}{2\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)2\pi T\left(-\frac{1}{12}\right) &= \frac{g}{24}T^2, \quad (4.226) \end{aligned}$$

dove, avendo effettuato la sostituzione $\frac{q}{\omega_\nu} = x$ abbiamo potuto adottare la regolarizzazione di 't Hooft e Veltman che utilizza la relazione:

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{x^\beta}{(x^2+1)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{4.227}$$

Inoltre la somma sulle frequenze è stata regolarizzata nel modo seguente:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \tag{4.228}$$

dove abbiamo esteso la rappresentazione della funzione $\zeta$ di Riemann:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \tag{4.229}$$

valida esclusivamente nel semipiano $Re(z) > 1$ fino al punto $z = -1$. Passiamo ora a valutare il secondo integrale:

$$\frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\int_\Lambda^{+\infty} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\left[\int_0^{+\infty} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2} - \int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2}\right]. \tag{4.230}$$

Il primo termine è divergente, ma è indipendente dalla temperatura e viene eliminato dalla ordinaria procedura di rinormalizzazione a T=0. Il secondo termine conduce invece al risultato:

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{\beta}\int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2} = -\frac{g}{4\pi^2}\Lambda T. \tag{4.231}$$

Giungiamo pertanto al risultato che la particella inizialmente massless acquista una massa dipendente da $T$ e da $\Lambda$ data da:

$$M^2(\Lambda) = \frac{g}{24}T^2 - \frac{g}{4\pi^2}\Lambda T = \widehat{M}^2 - \frac{g}{4\pi^2}\Lambda T, \tag{4.232}$$

dove, avendo scelto $\Lambda \ll T$, il secondo termine è trascurabile rispetto al primo.

Il loop con modi hard come linee interne, che dà massa alla particella scalare, è un esempio di quello che in letteratura è chiamato *hard thermal loop*.

A questo punto, avendo a disposizione un propagatore libero efficace per i modi soft, è possibile studiare la teoria efficace per questi ultimi. In particolare è possibile definire un propagatore efficace che tenga conto dell'accoppiamento $\phi^4$. Considerando lo stesso loop di prima, dove questa volta alla linea interna corrisponde il propagatore massivo:

$$\Delta_0^{eff}(\vec{k}, \omega_0) = \frac{1}{k^2 + M^2(T, \Lambda)}, \tag{4.233}$$

riusciamo a trovare una nuova correzione alla massa termica che cancellerà la dipendenza di quest'ultima dall'arbitrario cutoff $\Lambda$. Dal momento che, per la (4.232), $M \sim \widehat{M} \sim \sqrt{g}T$ è opportuno scegliere $\sqrt{g}T \ll \Lambda \ll T$. La correzione alla massa è data pertanto dall'integrale:

$$\begin{aligned}\delta M^2(\Lambda) &= \frac{g}{2\beta}\int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+M^2(\Lambda)} = \frac{g}{2\beta}M(\Lambda)\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\Lambda}{M(\Lambda)}} dx\frac{x^2}{1+x^2} \\ &= \frac{g}{2\beta}M(\Lambda)\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\Lambda}{M(\Lambda)} - \arctan\frac{\Lambda}{M(\Lambda)}\right] \approx \frac{g}{4\pi^2}\Lambda T - \frac{g}{4\pi^2}\widehat{M}T\frac{\pi}{2}. \quad (4.234)\end{aligned}$$

Giungiamo quindi al risultato:

$$M^2 = M^2(\Lambda) + \delta M^2(\Lambda) = \frac{g}{24}T^2 - \frac{g}{8\pi}\widehat{M}T, \quad (4.235)$$

in cui la dipendenza dal cutoff è scomparsa.

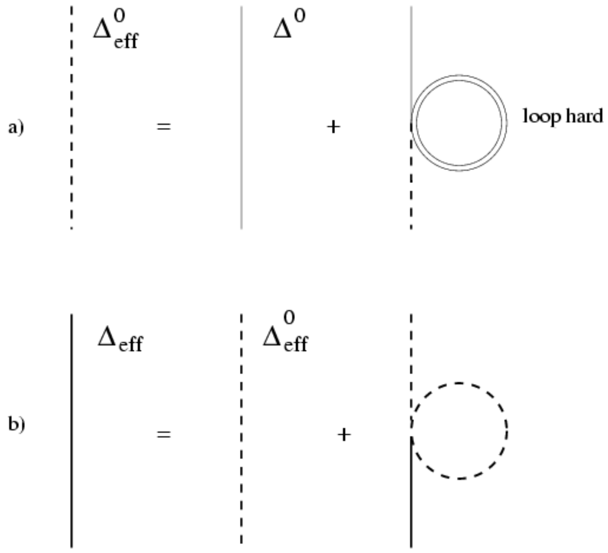


Figura 4.2: Equazione di Dyson per il propagatore *soft* efficace non interagente (a) e per il propagatore *soft* efficace che tiene conto dell'autointerazione dei modi soft (b).

# Capitolo 5

# Teoria della risposta lineare

Esaminiamo ora il caso il cui il sistema, inizialmente in equilibrio e descritto da un'hamiltoniana di campo scalare del tipo

$$H = \int d\vec{x} \left( \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + V(\phi) \right), \tag{5.1}$$

sia perturbato da una sorgente esterna che inizia ad agire ad un certo istante $t_0$. Supponiamo che l'accoppiamento sia del tipo corrente-campo. Otteniamo pertanto la nuova hamiltoniana, dipendente dal tempo attraverso la sorgente esterna:

$$\begin{aligned} H_j(t) &= H + \int d\vec{x} j(t, \vec{x})\phi(\vec{x}) \\ &= H + V_j(t). \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'operatore statistico del sistema in equilibrio, espresso attraverso gli autostati di $H$ sarà dato da:

$$\mathcal{D} = \sum_n |n\!> p_n <\!n|. \tag{5.3}$$

In seguito all'azione della perturbazione esterna il sistema evolverà fuori dall'equilibrio e il nuovo operatore statistico, supponendo che i $p_n$ rimangano indipendenti dal tempo, sarà data da:

$$\mathcal{D}_j(t) = \sum_n |n; t\!> p_n <\!n; t|. \tag{5.4}$$

Notiamo che sotto tale ipotesi l'entropia, che è definita come $S = -K_B \sum_n p_n \ln p_n$, rimane costante.

Tenendo ora conto che gli stati soddisfano le seguenti equazioni di evoluzione temporale:

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}|n;t> &= H_j(t)|n;t> \\
i\frac{\partial}{\partial t} <n;t| &= -H_j(t) <n;t|,
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

otteniamo, per l'operatore statistico, l'equazione del moto:

$$
i\partial_t \mathcal{D}_j(t) = [H_j(t), \mathcal{D}_j(t)] \,. \tag{5.6}
$$

Consideriamo ora dettagliatamente l'operatore di evoluzione temporale di uno stato in rappresentazione di Schrödinger in seguito ad una perturbazione che inizi ad agire all'istante $t_0$:

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)>_S &= U_j(t,t_0)|\psi(t_0)>_S \\
&= U_0(t,t_0)U_1(t,t_0)|\psi(t_0)>_S \,,
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

dove:

$$
U_0(t,t_0) = \exp\left(-iH(t-t_0)\right). \tag{5.8}
$$

Abbiamo pertanto che:

$$
\begin{aligned}
i\partial_t U_j(t,t_0) &= \left(i\partial_t U_0(t,t_0)\right) U_1(t,t_0) + U_0(t,t_0)\left(i\partial_t U_1(t,t_0)\right) \\
&= HU_0(t,t_0)U_1(t,t_0) + U_0(t,t_0)\left(i\partial_t U_1(t,t_0)\right).
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Tenendo ora conto che:

$$
i\partial_t|\psi(t)>_S = \left(H + V_j(t)\right)|\psi(t)>_S \,, \tag{5.10}
$$

abbiamo allora:

$$
i\partial_t U_j(t,t_0) = \left(H + V_j(t)\right) U_j(t,t_0), \tag{5.11}
$$

che, inserita nella (5.9), conduce al risultato:

$$
U_0(t,t_0)\left(i\partial_t U_1(t,t_0)\right) = V_j(t)U_0(t,t_0)U_1(t,t_0). \tag{5.12}
$$

Esprimendo ora la perturbazione esterna in rappresentazione di interazione come:

$$
V_I(t) = U_0^\dagger(t,t_0)V_j(t)U_0(t,t_0), \tag{5.13}
$$

giungiamo alla seguente equazione di evoluzione temporale:

$$
\begin{aligned}
i\partial_t U_1(t,t_0) &= V_I(t)U_1(t,t_0) \\
U_1(t_0,t_0) &= 1,
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

che può essere risolta iterativamente e, fermandosi al termine lineare nella perturbazione esterna, dà:

$$U_1(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t') + \ldots . \qquad (5.15)$$

Consideriamo ora un operatore $O$ indipendente dal tempo e poniamoci il problema di valutare il suo valor medio sull'ensemble all'istante $t$ in seguito all'azione di una perturbazione esterna. Esso sarà dato da:

$$\begin{aligned} Tr\left(\mathcal{D}_j(t)O\right) &= Tr\left(U_j(t,t_0)\mathcal{D}U_j^{-1}(t,t_0)O\right) = Tr\left(\mathcal{D}U_j^{-1}(t,t_0)OU_j(t,t_0)\right) \\ &= Tr\left(\mathcal{D}O_j(t)\right) = <O_j(t)> , \qquad (5.16) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà ciclica della traccia e abbiamo definito $O_j(t) = U_j^{-1}(t,t_0)OU_j(t,t_0)$.
Calcoliamo ora la fluttuazione del valor medio dell'operatore $O$ in seguito alla perturbazione definita come:

$$\delta <O_j(t)> \equiv <O_j(t)> - <O> . \qquad (5.17)$$

Consideriamo innanzitutto il campo $\phi(x)$ e l'operatore $O(t)$ come operatori in descrizione di Heisenberg *senza la sorgente esterna*, ovvero:

$$\begin{aligned} \phi_H(x) &= e^{iH(t-t_0)}\phi(\vec{x})e^{-iH(t-t_0)} \qquad (5.18) \\ O_H(t) &= e^{iH(t-t_0)}Oe^{-iH(t-t_0)}. \qquad (5.19) \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} O_j(t) &= U_j^{-1}(t,t_0)OU_j(t,t_0) = U_1^{-1}(t,t_0)O_H(t)U_1(t,t_0) \\ &= \left(1 + i\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t') + \ldots\right)O_H(t)\left(1 - i\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t') + \ldots\right) . (5.20) \end{aligned}$$

Dal momento che all'equilibrio i valori medi delle osservabili non evolvono nel tempo abbiamo che $<O_H(t)> = <O>$ e pertanto:

$$\delta <O_j(t)> = i\int_{t_0}^{t} dt' <[V_I(t'), O_H(t)]> . \qquad (5.21)$$

Esplicitando ora l'accoppiamento tra la sorgente esterna e il campo $\phi$ dato da:

$$V_I(t') = U_0^\dagger(t',t_0)V_j(t')U_0(t',t_0) = \int d^3x' j(x')\phi_H(x'), \qquad (5.22)$$

otteniamo l'equazione:

$$\delta <O_j(t)> = -i\theta(t-t')\int d^4x' <[O_H(t), \phi_H(x')]> j(x'). \qquad (5.23)$$

In particolare in questo modo possiamo valutare il *campo medio* che si sviluppa in seguito alla perturbazione esterna ottenendo:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -i\theta(x_0 - y_0)\int d^4y < [\phi_H(x), \phi_H(y)] > j(y) \\ &= -\int d^4y G_R(x-y) j(y). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Abbiamo pertanto illustrato come sia possibile studiare la risposta del sistemad una perturbazione esterna attraverso il calcolo di funzioni di Green all'equilibrio. Ovviamente, nel caso che la perturbazione non sia debole, dovremo considerare anche termini non lineari nella sorgente esterna.

# Parte II

# Il plasma di quark e gluoni

# Capitolo 6

# La lagrangiana e la costante di accoppiamento di QCD

In questo breve capitolo ricordiamo i punti salienti alla base della teoria QCD. Consideriamo la densità di lagrangiana di QCD:

$$\mathcal{L} = \bar{q}_{i,c}\left(i\gamma^{\mu}(D_{\mu})_{cd} - m_i\right)q_{i,d} - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{a}, \tag{6.1}$$

in cui $q$ è il campo dei quark. L'indice $i = 1, 2, \ldots N_f$ si riferisce agli $N_f$ sapori *attivi* a una data scala di energia $(u, d, s, \ldots)$. Gli indici $c, d = 1, 2, 3$ corrono sui 3 colori dei quark (R, G, B). L'indice $a = 1, 2, \ldots 8$ corre sui generatori del gruppo $SU(3)$. La *field strenght* $F^{a}_{\mu\nu}$ è definita come:

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} - gf^{a}_{\ bc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}. \tag{6.2}$$

I coefficienti totalmente antisimmetrici $f^{a}_{\ bc}$ sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie del gruppo $SU(3)$ (di colore) per i cui generatori valgono le relazioni di commutazione:

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^{\ \ c}T_c. \tag{6.3}$$

Ponendo $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ si ottiene la rappresentazione dell'algebra attraverso le matrici hermitiane tridimensionali $\lambda_a$ di Gell-Mann. L'accoppiamento tra quark e gluoni è contenuto nella derivata covariante:

$$(D_{\mu})_{cd} = \partial_{\mu}\delta^{cd} + ig\frac{1}{2}(\lambda_a)^{cd}A^{a}_{\mu}, \tag{6.4}$$

in cui $g$ è la costante di accoppiamento. L'introduzione di tanti campi di gauge quanti sono i generatori del gruppo $SU(3)$ assicura l'invarianza della densità di lagrangiana (6.1) per trasformazioni di gauge locali di $SU(3)$

così definite:

$$q_{i,c} \to \exp\left[i\frac{1}{2}\theta^a(x)(\lambda_a)_{cd}\right] q_{i,d} \tag{6.5}$$

$$A^a_\mu \to A^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) - f_{abc}\theta^b(x)A^c_\mu, \tag{6.6}$$

in cui, come evidenziato, i coefficienti della trasformazione dipendono dal punto dello spazio-tempo.
Il punto fondamentale alla base della transizione alla fase deconfinata è che la costante di accoppiamento della QCD (come anche quella della QED) è in realtà una *running coupling constant*. Se con $q$ indichiamo il quadrimpulso trasportato da un gluone di tipo spazio scambiato da due quark in un processo di scattering abbiamo che $Q^2 = -q^2$ è una quantità definita positiva. Teoricamente si prevede il seguente andamento con $Q^2$ della costante di accoppiamento:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln(Q^2/\Lambda^2_{QCD})}, \tag{6.7}$$

dove la costante $\Lambda_{QCD} \approx 200MeV$ definisce la scala della QCD stessa. Come si osserva la costante di accoppiamento diminuisce (anche se solo logaritmicamente) all'aumentare dell'energia del processo. Questo comportamento è differente da quanto avviene in QED in cui la costante di accoppiamente cresce all'aumentare dell'energia: all'acceleratore LEP 1 al CERN si sono misurati infatti sperimentalmente valori di $\alpha_{QED} \approx 1/128 > 1/137$.
Il diminuire della costante di accoppiamento nei processi di alta energia è pertanto alla base della trattazione perturbativa della QCD e del fenomeno della *libertà asintotica*, per cui ad altissimi quadrimpulsi quark e gluoni si comportano essenzialmente come particelle libere.

# Capitolo 7

# Scale e gradi di libertà nel QGP

In assenza di interazioni le particelle del plasma si distibuiscono nello spazio degli impulsi seguendo le distribuzioni di Fermi-Dirac (quark) e Bose-Einstein (gluoni). Come messo in evidenza nei paragrafi (3.1) e (4.2.7) la dipendenza dell'energia e del numero di particelle del sistema dalla temperatura è la seguente:

$$E \propto T^4 \tag{7.1}$$

$$N \propto T^3, \tag{7.2}$$

pertanto l'energia per particella risulterà proporzionale a $T$. In un plasma ultrarelativistico l'impulso tipico di una particella sarà quindi $k = \epsilon_k \sim T$. Le particelle del plasma pertanto, coerentemente con la distinzione effettuata nel paragrafo (4.2.8), verranno considerate nel seguito come corrispondenti a gradi di libertà *hard*.
Introduciamo ora una debole interazione ($g \ll 1$) tra le particelle del plasma. L'accoppiamento con i campi di gauge, come già visto nel capitolo precedente, avviene attraverso la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x). \tag{7.3}$$

Dal momento che $\partial_\mu \sim k \sim T$ gli effetti dell'interazione sul moto delle particelle del plasma possono essere trattati come una piccola perturbazione finchè il campo gluonico soddisfa alla disuguaglianza $A < T/g$. Quando invece $A \sim T/g$ i due termini nella derivata covariante diventano confrontabili.
Iniziamo a valutare le fluttuazioni termiche del campo di gauge $\bar{A} = \sqrt{<A^2(t,\vec{x})>}$. Per un sistema omogeneo infinito le fluttuazioni non dipendono da $t$ e $\vec{x}$ e possono essere calcolate attraverso il propagatore del campo di gauge secondo la relazione:

$$<A^2>=<A^a_\mu(t,\vec{x})A^\mu_a(t,\vec{x})>= Tr\left(G(0,\vec{0})\right), \tag{7.4}$$

dove la traccia è presa su tutti gli indici (di Lorentz e di colore).
Utilizzando la rappresentazione mista del propagatore otteniamo nel caso non interagente (in cui $\epsilon_k = k$):

$$< A^2 > \propto \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k}(1 + 2N_k), \tag{7.5}$$

in cui $N_k$ è la funzione di distribuzione di Bose-Einstein.
Utilizzeremo questa formula anche nel caso interagente supponendo che gli effetti dell'interazione possano essere assorbiti in una ridefinizione di $\epsilon_k$: ciò può essere ottenuto introducendo il concetto di *quasiparticella*. Le fluttuazioni del vuoto, contenute nel termine indipendente da $T$ in equazione (7.5), danno un contributo divergente che però interessa solo la rinormalizzazione della teoria: essendo tale quantità indipendente dalla temperatura, non ci occuperemo di essa.
Iniziamo ad esaminare le particelle del plasma, per le quali $\epsilon_k = k \sim T$. Valutiamo la fluttuazione termica del campo di gauge:

$$\bar{A}^2 = < A^2 >_T \sim \int k^2 dk \frac{1}{k} \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \sim T^2. \tag{7.6}$$

Pertanto $\bar{A} \sim T$ e quindi le fluttuazioni del campo di gauge producono solo una piccola perturbazione al moto delle particelle del plasma. Infatti avremo:

$$D_x = \partial_x + ig\bar{A} \sim k + igT \sim T + igT \qquad \text{con} \qquad g \ll 1. \tag{7.7}$$

Tuttavia le fluttuazioni termiche dei campi elettrici (o magnetici) di colore danno un contributo importante alla densità di energia del plasma. Infatti:

$$< E^2 >_T \sim < (\partial A)^2 >_T \sim k^2 < A^2 >_T \sim T^4, \tag{7.8}$$

che è dello stesso ordine di grandezza del contributo dato dall'equazione (7.1).
Esaminiamo ora le eccitazioni del plasma alla scala di impulsi $k \sim gT \ll T$. Queste eccitazioni corrispondono ai *modi soft*. Esse ricevono un contributo significativo dalle fluttuazioni termiche dei campi di gauge hard (cioè alla scala $\epsilon_k = k \sim T$). Infatti i due termini nella derivata covariante sono in questo caso confrontabili:

$$D_x = \partial_x + ig\bar{A}_T \sim k + igT \sim gT + igT. \tag{7.9}$$

La scala $gT$ è proprio quella a cui emergono i fenomeni collettivi come il *Landau damping* e la massa di screening di Debye $m_D \sim gT$. I modi soft, per i quali $\epsilon_k \sim gT \ll T$, possono essere trattati in approssimazione di campo

classico per cui possiamo approssimare $N_k \approx T/\epsilon_k$.
Valutiamo ora, usando questa approssimazione, la fluttuazione dei campi di gauge soft introducendo un cutoff $gT$ nell'integrazione sugli impulsi:

$$< A^2 >_{gT} \sim \int^{gT} k^2 dk \frac{T}{\epsilon_k^2} \sim gT^2. \tag{7.10}$$

Infatti, anche tenendo conto della massa di Debye presente nelle fluttuazioni elettriche, abbiamo che $\epsilon_k^2 = k^2 + m_D^2 \sim g^2T^2$.
Dall'equazione (7.10) ricaviamo che la self-interazione dei modi soft può essere trascurata in prima approssimazione. Infatti:

$$D_x = \partial_x + ig\bar{A}_{gT} \sim k + ig^{3/2}T \sim gT + ig^{3/2}T. \tag{7.11}$$

Consideriamo infine le eccitazioni alla scala di impulsi $k \sim g^2T$ dette *modi ultrasoft*. A questa scala occorre distinguere le fluttuazioni elettriche da quelle magnetiche. Le prime infatti sono soppresse dalla masssa di Debye e per esse:

$$\frac{N_k}{\epsilon_k} \approx \frac{T}{k^2 + m_D^2} \approx \frac{T}{m_D^2} \tag{7.12}$$

$$\Rightarrow < A^2 >^{el}_{g^2T} \sim \int^{g^2T} k^2 dk \frac{T}{g^2T^2} \sim g^4T^2. \tag{7.13}$$

Il contributo delle fluttuazioni magnetiche invece è quello dominante. Abbiamo infatti:

$$\Rightarrow < A^2 >^{magn}_{g^2T} \sim \int^{g^2T} k^2 dk \frac{T}{k^2} \sim g^2T^2. \tag{7.14}$$

Le fluttuazioni dei modi ultrasoft non possono più essere trattate in modo perturbativo, in quanto i due termini nella derivata covariante sono confrontabili. Si ha infatti:

$$D_x = \partial_x + ig\bar{A}_{g^2T} \sim k + ig^2T \sim g^2T + ig^2T. \tag{7.15}$$

L'assenza di una massa di screening nel settore magnetico provoca divergenze infrarosse che sono alla base del fallimento della teoria perturbativa in QCD ad alta temperatura.
In conclusione l'aver identificato le principali scale e i gradi di libertà associati ci consente di costruire teorie effettive alle varie scale integrando i gradi di libertà delle scale superiori. È ciò che è stato fatto nel paragrafo (4.2.8) nel caso della teoria di campo scalare $\phi^4$: partendo da un campo massless e integrando l'*hard thermal loop* siamo giunti ad una massa termica proporzionale alla temperatura (proprio come la massa di Debye).

# Capitolo 8

# Equazioni cinetiche per le particelle del plasma

Consideriamo un plasma di QED. Per esso valgono le equazioni di Maxwell che scriviamo nella forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu_{ind} + j^\nu_{ext}, \tag{8.1}$$

dove abbiamo separato il termine di sorgente in una perturbazione esterna $j^\nu_{ext}$ e in una *corrente indotta* $j^\nu_{ind}$ che è originata dal *moto collettivo* delle particelle cariche del plasma. In QED la corrente indotta può essere calcolata nell'ambito della *teoria della risposta lineare*. Si ha:

$$j^{ind}_\mu(x) = \int d^4y \Pi^R_{\mu\nu}(x-y)A^\nu(y), \tag{8.2}$$

dove abbiamo definito il *propagatore di polarizzazione ritardato* come:

$$\Pi^R_{\mu\nu}(x-y) = -i\,\theta(x_0-y_0) < [j_\mu(x), j_\nu(y)] >_\beta . \tag{8.3}$$

Evidentemente nell'equazione (8.3) il valore di aspettazione sull'ensemble è preso all'equilibrio. La corrente indotta risulta quindi per la (8.2) un funzionale lineare del campo di gauge $A^\nu(y)$.
Per un plasma di QCD, che è una teoria non abeliana, la risposta lineare non è più sufficiente per calcolare la corrente indotta.
La strategia che seguiremo in questo capitolo sarà quella di calcolare la corrente indotta utilizzando le equazioni cinetiche. Partiremo dal loro studio in meccanica classica, quindi, attraverso la *trasformata di Wigner* scriveremo il loro corrispettivo in meccanica quantistica e infine, senza pretese di rigore matematico, generalizzeremo i risultati ottenuti al caso di un plasma di QCD.

## 8.1 Equazioni cinetiche in meccanica classica

Consideriamo un plasma elettromagnetico e supponiamo per il momento di poter descrivere le sue particelle cariche in termini di una *funzione di distribuzione* classica:

$$f_q(\vec{p}, \vec{x}, t), \tag{8.4}$$

dove l'indice $q = \pm e$ indica la carica della particella. Tale funzione, moltiplicata per l'elemento di volume $d\vec{p}d\vec{x}$ ci darà la probabilità di trovare una particella di carica $q$ all'istante $t$ nel volumetto infinitesimo $d\vec{p}d\vec{x}$ intorno al punto dello *spazio delle fasi* $(\vec{p}, \vec{x})$. L'evoluzione temporale di questa funzione è data da:

$$\frac{df_q(\vec{p}, \vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f_q}{\partial t} + \frac{\partial f_q}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f_q}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{8.5}$$

Nel caso in cui le collisioni tra le particelle del plasma possano essere trascurate e le uniche interazioni rilevanti siano quelle delle particelle cariche con i *campi medi* $\vec{E}$ e $\vec{B}$, vale il *teorema di Liouville* secondo cui, all'equilibrio, il numero di particelle nell'intorno di un punto dello spazio delle fasi è costante nel tempo. Tale teorema è espresso dall'equazione:

$$\frac{df_q}{dt} = 0. \tag{8.6}$$

Questo risultato, insieme alle equazioni

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\epsilon_p}{d\vec{p}} \tag{8.7}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{B}\right), \tag{8.8}$$

conduce all'*equazione di Vlasov*

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_q}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f_q}{\partial \vec{p}} = 0 \tag{8.9}$$

per la funzione di distribuzione. Si noti che nella (8.7) $\epsilon_p$ è l'energia di una quasiparticella di impulso $\vec{p}$, mentre la (8.8) non è altro che la forza di Lorentz.
È opportuno sottolineare i limiti di questo approccio che trascura le collisioni tra le particelle e dà un risultato valido solo all'equilibrio: purtroppo l'unico modo che un sistema ha per raggiungere l'equilibrio è appunto attraverso le collisioni tra i suoi costituenti!
Come in tutti i problemi di campo medio occorre soddisfare una condizione

di *self-consistenza*. I campi medi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che compaiono attraverso $\vec{F}$ nell'equazione (8.9) dipendono essi stessi dalle funzioni di distribuzione. Infatti $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono soluzioni delle equazioni di Maxwell (qui scritte nel sistema di Gauss):

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{8.10}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{8.11}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{8.12}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{8.13}$$

dove le densità di carica e di corrente dipendono dalle funzioni di distribuzione nel modo seguente:

$$\rho(x) = e\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(f_+(\vec{p},x) - f_-(\vec{p},x)\right) \tag{8.14}$$

$$\vec{j}(x) = e\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(f_+(\vec{p},x) - f_-(\vec{p},x)\right)\vec{v}, \tag{8.15}$$

intendendo $x \equiv (t,\vec{x})$. Usando una notazione quadrivettoriale possiamo scrivere sinteticamente:

$$j^\mu_{ind}(x) = e\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}v^\mu\left(f_+(\vec{p},x) - f_-(\vec{p},x)\right), \tag{8.16}$$

dove $v^\mu = (1,\vec{v})$.
All'equilibrio la funzione di distribuzione sarà indipendente da $x$ e, per un sistema isotropo, dipenderà solo dal modulo di $\vec{p}$. Scriveremo pertanto:

$$f^0_q = f^0_q(p) = f^0_q(\epsilon_p) \tag{8.17}$$

In seguito a una piccola perturbazione avremo:

$$f_q(\vec{p},x) = f^0_q(\epsilon_p) + \delta f_q(\vec{p},x). \tag{8.18}$$

Se sostituiamo quest'ultima espressione all'interno dell'equazione di Vlasov (8.9) tenendo conto che:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} = v^\mu\partial_\mu$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial\vec{p}} = \frac{\partial f_q}{\partial\epsilon_p}\frac{\partial\epsilon_p}{\partial\vec{p}} = \vec{v}\frac{\partial f_q}{\partial\epsilon_p}$$

e in approssimazione lineare otteniamo:

$$(v^{\mu}\partial_{\mu})\,\delta f_q(\vec{p},x) = -q\vec{v}\cdot\vec{E}\frac{df^0}{d\epsilon_p}. \tag{8.19}$$

È conveniente per il seguito della discussione esprimere la fluttuazione nel modo seguente:

$$\delta f_q(\vec{p},x) \equiv -qW(x,\vec{v})\frac{df^0}{d\epsilon_p}. \tag{8.20}$$

Possiamo in questo modo scrivere:

$$f_q(\vec{p},x) = f^0(\epsilon_p) - qW(x,\vec{v})\frac{df^0}{d\epsilon_p} \approx f^0(\epsilon_p - qW(x,\vec{v})). \tag{8.21}$$

Possiamo interpretare $W(x,\vec{v})$ come una distorsione locale della distribuzione di impulsi e, sostituendo la definizione (8.20) all'interno della (8.19), otteniamo l'equazione che descrive la sua evoluzione temporale. Si trova:

$$(v^{\mu}\partial_{\mu})\,W(x,\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{E}(x). \tag{8.22}$$

Notiamo che l'equazione a cui siamo giunti, a differenza dell'equazione di Vlasov (8.9), non dipende dalle derivate rispetto agli impulsi.
Supponiamo ora che la perturbazione sia introdotta adiabaticamente in modo che le fluttuazioni e i campi si comportino come $e^{\eta t_0}$ (con $\eta \to 0^+$) per $t_0 \to -\infty$: supponiamo cioè di partire da una situazione iniziale di equilibrio corrispondente a un tempo asintotico $t_0 = -\infty$. In questo caso la soluzione ritardata dell'equazione (8.22) è data da:

$$W(x,\vec{v}) = \int_{-\infty}^{t} dt'\vec{v}\cdot\vec{E}\left(\vec{x}-\vec{v}(t-t'),t'\right), \tag{8.23}$$

che evidentemente soddisfa la condizione iniziale $W(t=-\infty)=0$.
Calcoliamo ora la corrente indotta originata da questa fluttuazione della funzione di distribuzione. Otteniamo:

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{ind}(x) &= 2e\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}v^{\mu}\delta f_q(\vec{p},x) \\ &= -2e^2\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}v^{\mu}W(x,\vec{v})\frac{df^0}{d\epsilon_p} \\ &= -2e^2\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}v^{\mu}\frac{df^0}{d\epsilon_p}\int_{-\infty}^{t}dt'\vec{v}\cdot\vec{E}\left(\vec{x}-\vec{v}(t-t'),t'\right). \end{aligned} \tag{8.24}$$

Se ora effettuiamo la sostituzione $t - t' = \tau$ otteniamo per la corrente indotta:

$$j^{\mu}_{ind}(x) = -2e^2 \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} v^{\mu} \frac{df^0}{d\epsilon_p} \int_0^{+\infty} d\tau \vec{v} \cdot \vec{E}(x - v\tau). \tag{8.25}$$

Poichè

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

giungiamo alla conclusione che $j^{\mu}_{ind}$ è un funzionale lineare di $A^{\nu}$.
Calcoliamo ora la trasformata di Fourier quadridimensionale della funzione

$$\int_0^{+\infty} d\tau e^{-\eta\tau} g(x - v\tau).$$

Avendo definito il quadrivettore $Q^{\mu} = (\omega, \vec{q})$, essa sarà data da:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{iQx} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-\eta\tau} g(x - v\tau) &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{-\eta\tau} \int d^4x e^{iQx} g(x - v\tau) \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{i(Qv + i\eta)\tau} g(Q) = \frac{ig(Q)}{vQ + i\eta}, \end{aligned} \tag{8.26}$$

dove è stata effettuata la sostituzione $y = x - v\tau$ e si è indicato:

$$g(Q) = \int d^4y e^{iQy} g(y). \tag{8.27}$$

Supponiamo ora che le particelle del plasma siano massless: in questo caso, ponendo $c = 1$, scegliendo l'asse $z$ lungo la direzione di $\vec{q}$ (con $v^{\mu} = (1, \vec{v})$) e tenendo presente i risultati delle equazioni (8.2) e (8.26) giungiamo alla seguente espressione per il propagatore di polarizzazione:

$$\Pi_{\mu\nu}(\omega, \vec{q}) = m_D^2 \left[ -\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} + \omega \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v_{\mu} v_{\nu}}{\omega - \vec{v} \cdot \vec{q} + i\eta} \right], \tag{8.28}$$

dove compare la *massa di screening di Debye*

$$m_D^2 = -\frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dp p^2 \frac{df^0}{d\epsilon_p}. \tag{8.29}$$

Se ora a $f^0(p)$ sostituiamo la distribuzione di Fermi per particelle massless a potenziale chimico nullo otteniamo:

$$m_D^2 = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dp p^2 \frac{\beta e^{\beta p}}{(e^{\beta p} + 1)^2},$$

che, effettuta la sostituzione $\beta p = x$, conduce al risultato:

$$m_D^2 = \frac{2e^2}{\pi^2} T^2 \int_0^{+\infty} dx x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{3} e^2 T^2. \tag{8.30}$$

Si è utilizzato il termine massa di screening in quanto la quantità $\frac{1}{m_D}$ determina la distanza a cui il potenziale coulombiano di una particella del plasma è schermato. Il fenomeno per cui il potenziale coulombiano diventa di range finito nasce da un moto collettivo delle particelle cariche ed è un effetto caratteristico non solo della fisica dei plasmi di elettroni e ioni, ma anche di un plasma di QCD quale il quark gluon plasma. Tale massa di screening, che schermerebbe il potenziale tra quark pesanti, è proprio uno dei segnali che rivelerebbero la formazione del QGP.

## 8.2 Equazioni cinetiche in meccanica quantistica

Consideriamo ora un sistema di fermioni non relativistici, non interagenti tra loro, e accoppiati a campi di gauge classici (non quantizzati). Poichè si tratta di studiare il comportamento di particelle immerse in un campo esterno, tutta l'informazione su questo *sistema a molti corpi* è contenuta nella *matrice densità ad un corpo*

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}', t) = <\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)\hat{\psi}(\vec{r}, t)>_\beta . \tag{8.31}$$

I campi possono essere sviluppati nel seguente modo:

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_\alpha \phi_\alpha(\vec{r})\hat{a}_\alpha(t) \tag{8.32}$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_\alpha \phi_\alpha^\dagger(\vec{r})\hat{a}_\alpha^\dagger(t), \tag{8.33}$$

dove $\alpha$ indica un set completo di numeri quantici, le $\phi_\alpha(\vec{r})$ sono autofunzioni di particella singola e $\hat{a}_\alpha$ e $\hat{a}_\alpha^\dagger$ sono rispettivamente operatori di annichilazione e creazione fermionici.
Definiamo ora la trasformata di Wigner della one body density matrix come:

$$f(\vec{p}, \vec{R}, t) = \int d\vec{s} e^{-i\vec{p}\vec{s}} \rho\left(\vec{R} + \frac{\vec{s}}{2}, \vec{R} - \frac{\vec{s}}{2}, t\right). \tag{8.34}$$

La trasformata di Wigner ci consente di calcolare i valori medi sull'ensemble delle osservabili.

Notiamo infatti che:

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} f(\vec{p},\vec{R},t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int d\vec{s} e^{-i\vec{p}\vec{s}} \rho \left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2}, \vec{R}-\frac{\vec{s}}{2}, t\right)$$
$$= \int d\vec{s}\delta(\vec{s}) \rho \left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2}, \vec{R}-\frac{\vec{s}}{2}, t\right) = \rho\left(\vec{R},\vec{R},t\right).$$

Pertanto il valor medio della densità di particelle espresso attaverso la trasformata di Wigner è dato da:

$$<\hat{n}\left(\vec{R},t\right)>= \rho\left(\vec{R},\vec{R},t\right) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} f(\vec{p},\vec{R},t). \tag{8.35}$$

Calcoliamo ora il valor medio della densità di corrente:

$$<\hat{\vec{j}}(\vec{x},t)>= \frac{1}{2mi} < \left[\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\vec{\nabla}\hat{\psi}(\vec{x},t) - \left(\vec{\nabla}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\right)\hat{\psi}(\vec{x},t)\right]>$$
$$= \frac{1}{2mi} \lim_{|\vec{x}-\vec{y}|\to 0} \left(\vec{\nabla}_{\vec{y}} - \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) <\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{y},t)>. \tag{8.36}$$

Valutiamo ora l'espressione:

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} f(\vec{p},\vec{R},t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} \int d\vec{s} e^{-i\vec{p}\vec{s}} \rho \left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2}, \vec{R}-\frac{\vec{s}}{2}, t\right)$$
$$= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} \int d\vec{s} e^{-i\vec{p}\vec{s}} <\hat{\psi}^\dagger\left(\vec{R}-\frac{\vec{s}}{2},t\right)\hat{\psi}\left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2},t\right)>,$$

dove, effettuando la sostituzione:

$$\vec{R}-\frac{\vec{s}}{2} = \vec{x} \qquad\qquad \vec{R}+\frac{\vec{s}}{2} = \vec{y}$$

otteniamo:

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} f(\vec{p},\vec{R},t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} \int d(\vec{y}-\vec{x}) e^{-i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})} <\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{y},t)>$$
$$= \int d(\vec{y}-\vec{x}) <\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{y},t)> \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} e^{-i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})}$$
$$= \int d(\vec{y}-\vec{x}) <\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{y},t)> \frac{1}{2mi}(\vec{\nabla}_{\vec{x}}-\vec{\nabla}_{\vec{y}})\delta(\vec{y}-\vec{x})$$
$$= \frac{1}{2mi} \lim_{|\vec{x}-\vec{y}|\to 0} \left(\vec{\nabla}_{\vec{y}} - \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) <\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{y},t)>. \tag{8.37}$$

Confrontando le equazioni (8.36) e (8.37) otteniamo pertanto:

$$<\hat{\vec{j}}(\vec{R},t)>= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}}{m} f(\vec{p},\vec{R},t). \tag{8.38}$$

Notiamo che i risultati espressi dalle equazioni (8.35) e (8.38) sono gli stessi che avremmo ottenuto considerando la $f(\vec{p},\vec{R},t)$ come la densità di probabilità di trovare una particella nel punto $\vec{x}$ con impulso $\vec{p}$ all'istante $t$. Detta $\lambda$ la scala di distanze su cui la $f$ varia in modo significativo ad essa corrisponderà un impulso caratteristico $1/\lambda$. Nel caso in cui $p \gg 1/\lambda$, ed è quindi soddisfatta la condizione $p\lambda \gg 1$, la $f$ può essere allora interpretata come una distribuzione classica nel calcolo di osservabili a un corpo. Non dobbiamo tuttavia farci fuorviare da questa interpretazione in quanto ovviamente in meccanica quantistica non ha senso specificare contemporaneamente posizione e impulso di una particella; inoltre la $f(\vec{p},\vec{R},t)$ non può contenere più informazione sul sistema della one-body density matrix da cui è stata ricavata.
Partendo dalle equazioni di evoluzione temporale per gli operatori di campo in rappresentazione di Heisenberg:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\vec{r},t) = [\widehat{H},\hat{\psi}(\vec{r},t)] \tag{8.39}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}',t) = [\widehat{H},\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}',t)] \tag{8.40}$$

e dalla definizione di one body density matrix

$$\rho(\vec{r},\vec{r}',t) = <\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}',t)\hat{\psi}(\vec{r},t)>_{\beta} \tag{8.41}$$

otteniamo l'equazione del moto per la matrice densità a un corpo:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},\vec{r}',t) = [\widehat{H},\rho(\vec{r},\vec{r}',t)]. \tag{8.42}$$

Effettiamo ora la trasformata di Wigner e facciamo l'ipotesi che $p \gg 1/\lambda$, ovvero che i tipici valori di impulso siano grandi rispetto ai termini contenenti l'operatore $\vec{\nabla}_{\vec{R}}$. Sotto questa condizione siamo pertanto autorizzati a trascurare i termini contenenti derivate spaziali seconde. L'equazione (8.42) diventa allora:

$$i\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{p},\vec{R},t) = \left[\widehat{H},f(\vec{p},\vec{R},t)\right], \tag{8.43}$$

che, limitandoci ai *leading terms* nello sviluppo in $\vec{\nabla}_{\vec{R}}$, si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \vec{\nabla}_{\vec{p}}H\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}}f - \vec{\nabla}_{\vec{R}}H\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}}f = 0, \tag{8.44}$$

che è l'equazione di evoluzione temporale di un osservabile classico. Infatti data l'equazione:

$$\frac{d}{dt}g(t,q,p) = \frac{\partial}{\partial t}g + \frac{dg}{dq_{\alpha}}\dot{q_{\alpha}} + \frac{dg}{dp_{\alpha}}\dot{p_{\alpha}}, \tag{8.45}$$

dove g è un osservabile classico, in essa posso sostituire le equazioni di Hamilton:

$$\dot{q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \tag{8.46}$$

$$\dot{p_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \tag{8.47}$$

L'equazione (8.44) esprime pertanto il teorema di Liouville:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{p}, \vec{R}, t) = 0. \tag{8.48}$$

Consideriamo ora il caso di particelle soggette a un quadripotenziale $A^\mu(x)$. L'hamiltoniana in prima quantizzazione del sistema, applicando la regola di accoppiamento minimale, è allora:

$$H(\vec{R}, \vec{p}, t) = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + eA_0(\vec{R}, t), \tag{8.49}$$

che, trascurando il termine quadratico in $\vec{A}$, diventa:

$$H(\vec{R}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{m}\vec{A} \cdot \vec{p} + eA_0(\vec{R}, t). \tag{8.50}$$

Sostituiamo ora questa hamiltoniana all'interno dell'equazione (8.44). Se teniamo conto dei seguenti risultati:

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}} H = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} = \vec{v} \tag{8.51}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} &= -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ &\approx -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{aligned} \tag{8.52}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} H \vec{\nabla}_{\vec{p}} f = \frac{\partial H}{\partial R^i}\frac{\partial f}{\partial p^i} = -\frac{e}{m}\frac{\partial A^j}{\partial R^i} p^j \frac{\partial f}{\partial p^i} + e\frac{\partial A^0}{\partial R^i}\frac{\partial f}{\partial p^i}, \tag{8.53}$$

giungiamo alla seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} f + e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f + \frac{e}{m} p^j \frac{\partial A^i}{\partial R^j}\frac{\partial f}{\partial p^i} = 0. \tag{8.54}$$

Notiamo che questo risultato differisce dall'equazione di Vlasov (8.9) per l'ultimo termine che non è gauge invariante. La presenza di questo termine ci suggerisce di definire una matrice densità gauge invariante nel modo seguente:

$$\tilde{\rho}(\vec{r}, \vec{r}', t) = <\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)\hat{\psi}(\vec{r}, t)>_\beta U(\vec{r}, \vec{r}', t), \tag{8.55}$$

dove:

$$U(\vec{r},\vec{r}',t)=\exp\left(-ie\int_{\vec{r}'}^{\vec{r}}d\vec{z}\cdot\vec{A}(\vec{z},t)\right). \tag{8.56}$$

L'integrale in equazione (8.56) è effettuato lungo un cammino arbitrario; per semplicità scegliamo di calcolarlo lungo la retta che congiunge i due punti. Poniamo ora $\vec{s}=\vec{r}-\vec{r}'$ e supponiamo $|\vec{s}|$ sufficientemente piccolo: tale approssimazione è lecita in quanto la matrice densità è piccata intorno al valore $s=0$, mentre è praticamente nulla per $s\geq\lambda$ dove con $\lambda$ intendiamo la lunghezza d'onda termica. Siamo allora autorizzati a supporre $\vec{A}$ praticamente costante lungo il cammino da $\vec{r}'$ a $\vec{r}$. Possiamo pertanto effettuare la seguente approssimazione:

$$U(\vec{r},\vec{r}',t)\approx\exp\left(-ie\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{R},t)\right). \tag{8.57}$$

La trasformata di Wigner gauge invariante sarà allora:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\vec{p},\vec{R},t) &= \int d\vec{s}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{s}}\tilde{\rho}\left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2},\vec{R}-\frac{\vec{s}}{2},t\right)\\ &= \int d\vec{s}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{s}}\rho\left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2},\vec{R}-\frac{\vec{s}}{2},t\right)e^{-ie\vec{s}\cdot\vec{A}}\\ &= f(\vec{p}+e\vec{A},\vec{R},t).\end{aligned} \tag{8.58}$$

Verifichiamo ora che, effettuando la sostituzione $f(\vec{R},\vec{p})=\tilde{f}(\vec{R},\vec{p}-e\vec{A})$ all'interno dell'equazione (8.54), il termine non gauge invariante si cancella. Osserviamo infatti che:

$$\begin{gathered}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}}f(\vec{R},\vec{p})=\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{f}(\vec{R},\vec{p}-e\vec{A})\\ =\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{f}(\vec{R},\vec{k})+\left(p^j-eA^j\right)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p^i}\left(-\frac{e}{m}\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right),\end{gathered} \tag{8.59}$$

dove abbiamo posto $\vec{k}=\vec{p}-e\vec{A}=m\vec{v}$. In base alle approssimazioni fatte finora il termine in $A\partial A$ va trascurato, pertanto il secondo addendo in equazione (8.59) cancella il pezzo non gauge invariante dell'equazione (8.54). Otteniamo quindi la seguente equazione *invariante per trasformazioni di gauge*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{f}+e(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{\nabla}_{\vec{k}}\tilde{f}=0, \tag{8.60}$$

dove $\tilde{f}=\tilde{f}(\vec{k},\vec{R},t)$.

Possiamo anche definire un operatore densità di corrente gauge invariante. Seguendo la regola di accoppiamento minimale:

$$\begin{aligned}p_\mu &\to p_\mu-eA_\mu\\ \frac{1}{i}\vec{\nabla} &\to \frac{1}{i}\vec{\nabla}-e\vec{A}\end{aligned}$$

otteniamo:

$$\hat{\vec{j}} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\psi}^\dagger\left(\frac{1}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right)\hat{\psi} - \left((\frac{1}{i}\vec{\nabla} + e\vec{A})\hat{\psi}^\dagger\right)\hat{\psi}\right]. \tag{8.61}$$

Esprimiamo ora il valore di aspettazione sull'ensemble della densità di corrente attraverso la trasformata di Wigner gauge invariante:

$$\begin{aligned} <\hat{\vec{j}}(\vec{R},t)> &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(\frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}\right) f(\vec{p},\vec{R},t) \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{k}}{m} f(\vec{k}+e\vec{A},\vec{R},t) \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\vec{k}}{m} \tilde{f}(\vec{k},\vec{R},t), \end{aligned} \tag{8.62}$$

dove ora $\vec{k}$ è direttamente collegato alla velocità attraverso la relazione:

$$\vec{k} = m\vec{v} = \vec{p} - e\vec{A}. \tag{8.63}$$

## 8.3 Equazioni cinetiche in QCD

Affrontiamo ora lo studio di un plasma non abeliano attraverso le equazioni cinetiche. Tratteremo il problema inizialmente in modo semi-classico e successivamente ne daremo la formulazione quantistica attraverso la trasformata di Wigner gauge-invariante. Scopriremo che l'approccio classico è comunque sufficiente a studiare gli *Hard Thermal Loops*, ovvero i loop in cui circola un quadrimpulso molto elevato.

### 8.3.1 Equazioni di trasporto classiche in QCD

Consideriamo una particella che trasporta una *carica di colore* $Q^a$ ($a = 1,2\ldots,N^2-1$) di $SU(N)$ (nel caso della QCD $N=3$) lungo una linea di universo $x^\mu(\tau)$, dove $\tau$ indica il *tempo proprio*. Trascurando lo spin, l'evoluzione temporale dei gradi di libertà di tale particella immersa in un campo di colore $A^a_\mu$ è data dalle equazioni di Wong:

$$m\frac{dx^\mu}{d\tau} = p^\mu \tag{8.64}$$

$$m\frac{dp^\mu}{d\tau} = gQ^aF^{\mu\nu}_a p_\nu \tag{8.65}$$

$$m\frac{dQ^a}{d\tau} = -gf^{abc}p^\mu A^b_\mu Q^c, \tag{8.66}$$

dove $g$ è la costante di accoppiamento della QCD. L'equazione (8.65) evidentemente è la generalizzazione della forza di Lorentz, mentre la (8.66) descrive la precessione nello spazio del colore. I coefficienti $f^{abc}$ sono le *costanti di struttura* dell'algebra di Lie associata al gruppo $SU(N)$ e sono totalmente antisimmetrici; nel caso della QCD abbiamo:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{ab}^{\ \ c} \ \frac{\lambda_c}{2}, \tag{8.67}$$

dove le matrici $\lambda_a$ sono le matrici di Gell-Mann.
Per dare una trattazione relativistica del problema è necessario considerare uno *spazio delle fasi allargato* i cui punti sono individuati dalle coordinate $(x^\mu, p^\mu, Q^a)$, dove evidentemente $x^\mu$ e $p^\mu$ sono quadrivettori e abbiamo incluso anche i gradi di libertà di colore. L'equazione di Boltzmann per la funzione di distribuzione nella sua forma più generale si scriverà allora come:

$$m\frac{df(x,p,Q)}{d\tau} = C[f](x,p,Q), \tag{8.68}$$

dove il termine a secondo membro indica la variazione del numero di particelle nel volumetto di spazio delle fasi dovuta alle collisioni tra i costituenti del sistema e dipende funzionalmente dalla funzione di distribuzione. Tale termine, spesso detto *collision term*, è molto importante nella descrizione del sistema lontano dall'equilibrio. Se siamo interessati a studiare la formazione del QGP in seguito all'urto di ioni pesanti ultrarelativistici occorre infatti tener presente che il sistema, successivamente alla collisione, è ben lontano dall'equilibrio termodinamico e ciò può influenzare i segnali che si vorrebbero rilevare. Questo è tuttora un campo di ricerca aperto: la teoria dei campi a temperatura finita, che è il principale strumento teorico a nostra disposizione, mal si presta infatti allo studio di sistemi lontani dall'equilibrio.
Supponendo d'ora in poi nullo l'integrale di collisione ed esplicitando la derivata rispetto al tempo proprio nell'equazione (8.68) otteniamo:

$$m\left\{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\frac{dp_\nu}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial Q^a}\frac{dQ^a}{d\tau}\right\} = 0, \tag{8.69}$$

che, tenendo conto delle equazioni di Wong, conduce all'importante risultato:

$$p^\mu\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - gQ_aF^a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu} - gf_{abc}A^b_\mu Q^c\frac{\partial}{\partial Q^a}\right]f(x,p,Q) = 0. \tag{8.70}$$

La condizione di self consistenza per l'equazione di Vlasov non abeliana si ottiene imponendo che la quadricorrente ottenuta a partire dalla funzione di distribuzione soluzione della (8.70) soddisfi l'equazione di Yang-Mills:

$$[D_\nu F^{\nu\mu}]^a = J^{\mu a}, \tag{8.71}$$

dove compare la derivata covariante definita come:

$$D_\mu^{ac} = \partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A_{b\mu}. \tag{8.72}$$

La quadricorrente totale di colore riceve contributo da tutte le elicità e da tutte le specie di particelle e si scrive pertanto come:

$$J^{\mu a} = \sum_{elic} \sum_{spec} j^{\mu a}, \tag{8.73}$$

dove, in analogia al plasma elettromagnetico, $j^{\mu a}$ si calcola attraverso la funzione di distribuzione nel modo seguente:

$$j^{\mu a} = g \int dP dQ p^\mu Q^a f(x, p, Q). \tag{8.74}$$

La misura di integrazione sul quadrimpulso è definita come:

$$dP = \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} 2\theta(p_0) \delta(p^2 - m^2), \tag{8.75}$$

dove le funzioni $\delta(p^2 - m^2)$ e $\theta(p_0)$ assicurano che le particelle si trovino sullo shell di massa e abbiano energia positiva.
La misura di integrazione sul colore è invece definita come:

$$dQ = d^8 Q \delta(Q^a Q_a - q_2) \delta(d_{abc} Q^a Q^b Q^c - q_3), \tag{8.76}$$

pertanto $Q^a Q_a$ e $d_{abc} Q^a Q^b Q^c$ sono costanti del moto. Il gruppo $SU(3)$ ha infatti 8 generatori e 2 operatori di Casimir, ovvero operatori che commutano con tutti i generatori del gruppo e che pertanto sono costanti del moto che pongono dei vincoli quandi si integra sul gruppo.
Utilizzando l'equazione (8.70) è possibile dimostrare che:

$$(D_\mu j^\mu)^a = 0. \tag{8.77}$$

Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} D_\mu^{ac} j_c^\mu &= \left(\partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A_{b\mu}\right) g \int dP dQ p^\mu Q_c f(x, p, Q) = \\ &= g \int dP dQ p^\mu Q^a \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + g^2 f^{abc} A_{b\mu} \int dP dQ p^\mu Q_c f(x, p, Q), \end{aligned}$$

che, tenendo conto dell'equazione (8.70), possiamo scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} D_\mu^{ac} j_c^\mu &= g \int dP dQ p^\mu Q^a \left( g Q_d F_{\mu\nu}^d \frac{\partial}{\partial p_\nu} + g f_{def} A_\mu^e Q^f \frac{\partial}{\partial Q_d} \right) f \\ &\qquad + g^2 f^{abc} A_{b\mu} \int dP dQ p^\mu Q_c f \\ &= -g^2 f_{aef} \int dP dQ A_\mu^e p^\mu Q^f f + g^2 f^{abc} A_{b\mu} \int dP dQ p^\mu Q_c f = 0, \end{aligned} \tag{8.78}$$

dove abbiamo tenuto conto che, integrando per parti:

$$g^2 f_{def}\int dPdQp^\mu Q^a A^e_\mu Q^f \frac{\partial f}{\partial Q_d} = -g^2 f_{def}\int dPdQp^\mu A^e_\mu (Q^a\delta^{fd} + Q^f\delta^{da}) f$$
$$= -g^2 f^{aef}\int dPdQp^\mu A_{e\mu} Q_f f(x,p,Q) \quad (8.79)$$

e inoltre si ha:

$$g^2\int dPdQp^\mu Q^a Q_d F^d_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial p_\nu} =$$
$$= -g^2\int dPdQ g^{\mu\nu} Q^a Q_d F^d_{\mu\nu} f(x,p,Q) = 0. \quad (8.80)$$

Applichiamo ora il formalismo sviluppato allo studio di un plasma di quark e gluoni *color neutral* nel limite di alta temperatura, in cui possiamo trascurare le masse delle particelle e assumere piccola la costante di accoppiamento. Sviluppiamo allora la funzione di distribuzione in potenze di $g$ ottenendo:

$$f = f^0 + gf^1 + g^2 f^2 + \ldots. \quad (8.81)$$

In assenza di un campo di colore netto la funzione di distribuzione all'equilibrio per le particelle del plasma è quella di Fermi (quark) o di Bose (gluoni):

$$f^0(x,p,Q) = f^0(p_0) = C\frac{1}{e^{\beta|p_0|}\pm 1}. \quad (8.82)$$

dove $C$ è una costante di normalizzazione. È questo l'unico input quantistico che inseriamo nel problema!
Possiamo ora definire una densità di corrente dipendente dal quadrimpulso come:

$$j^{\mu a}(x,p) = g\int dQp^\mu Q^a f(x,p,Q). \quad (8.83)$$

Possiamo valutare tale densità di corrente al leading order in g ottenendo:

$$\begin{aligned} j^{\mu a}(x,p) &= g\int dQp^\mu Q^a\left[f^0(p_0) + gf^1(x,p,Q) + O(g^2)\right] \\ &= g^2\int dQp^\mu Q^a f^1(x,p,Q) + O(g^3). \end{aligned} \quad (8.84)$$

Sostituendo lo sviluppo della funzione di distribuzione all'interno dell'equazione (8.70) e tenendo conto che la $f^0$ dipende unicamente da $p_0$ otteniamo l'equazione di Boltzmann per la $f^1$:

$$p^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - gf^{abc}A_{b\mu}Q_c\frac{\partial}{\partial Q^a}\right) f^1(x,p,Q) = p^\mu Q_a F^a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_{a\nu}} f^0(p_0). \quad (8.85)$$

### 8.3.2 Teoria cinetica quantistica in QCD

Le equazioni di Vlasov quanto-relativistiche per un plasma di QCD sono le seguenti:

$$\left[v \cdot D_x, \delta n_{\pm}(\vec{k}, x)\right] = \mp g\vec{v} \cdot \vec{E}(x)\frac{dn_k}{dk} \tag{8.86}$$

$$\left[v \cdot D_x, \delta N(\vec{k}, x)\right] = -g\vec{v} \cdot \vec{E}(x)\frac{dN_k}{dk} \tag{8.87}$$

$$(v \cdot D_x)\gamma_\mu \Lambda_\mu(\vec{k}, x) = -igC_f(N_k + n_k)\gamma^\mu v_\mu \Psi(x), \tag{8.88}$$

dove $v^\mu = (1, \vec{v})$ essendo $\vec{v}$ un vettore unitario, ovvero $\vec{v} = \vec{k}/k$; $\Psi(x)$ è campo medio fermionico relativistico. Le funzioni $\delta n_{\pm}(\vec{k}, x)$, $\delta N(\vec{k}, x)$ e $\gamma_\mu \Lambda_\mu(\vec{k}, x)$ sono *trasformate di Wigner gauge invarianti* per le particelle hard. Le prime due sono trasformate di Wigner delle matrici densità a un corpo di quark (antiquark) e gluoni, mentre l'ultima mesola gradi di libertà fermionici e bosonici avendo un'espressione del tipo $\Lambda \sim <\psi A>$.
La soluzione di queste equazioni consente di esprimere la corrente indotta come funzionale (non lineare) dei campi di gauge nel modo seguente:

$$j_\mu^a = \Pi_{\mu\nu}^{ab} A_b^\nu + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc} A_b^\nu A_c^\rho, \tag{8.89}$$

dove $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ è il propagatore di polarizzazione ritardato.
Il confronto tra i risultati che si trovano per un plasma di QED e uno di QCD e in particolare l'analisi delle condizioni che si devono soddisfare perchè anche per quest'ultimo sia lecito fermarsi all'approssimazione lineare costituirà l'oggetto del prossimo capitolo.

## 8.4 Effetti abeliani e non-abeliani

Consideriamo la risposta di un plasma elettromagnetico a un campo $A_\mu$ soft, ovvero con tipiche componenti di Fourier del tipo $P \sim eT$. La risposta del sistema genera una corrente indotta che, come visto nell'equazione (8.2) è data da:

$$j_{ind}^\mu = \int d^4y \Pi^{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y), \tag{8.90}$$

dove $j_{ind}^\mu \equiv <j^\mu(x)>$ essendo $j^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ l'operatore di corrente.
Il propagatore di polarizzazione (ritardato) come visto nell'equazione (8.3) è dato da:

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y) \equiv -i\theta(x_0 - y_0) <[j^\mu(x), j^\nu(y)]> . \tag{8.91}$$

Dal momento che $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ esso soddisfa alla condizione di trasversalità:

$$\partial_\mu \Pi^{\mu\nu}(x-y) = 0, \tag{8.92}$$

il che implica che la corrente indotta è conservata. Abbiamo infatti:

$$\partial_\mu j^\mu_{ind} = \int d^4y \partial_\mu \Pi^{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) = 0. \tag{8.93}$$

Inoltre l'equazione (8.90) è invariante per trasformazioni di gauge $A_\nu(y) \to A_\nu(y) + \frac{\partial}{\partial y^\nu}\lambda(y)$. Infatti:

$$\int d^4y \Pi^{\mu\nu}(x-y)\frac{\partial}{\partial y^\nu}\lambda(y) = -\int d^4y \frac{\partial}{\partial y^\nu}\Pi^{\mu\nu}(x-y)\lambda(y) = 0. \tag{8.94}$$

La corrente indotta può essere espressa direttamente in termini del campo elettrico $E^j(x) = -\partial_0 A^j(x) - \partial_j A^0(x)$, che, nello spazio dei quadrimpulsi, diventa $E^j(P) = i\omega A^j(P) - ip^j A^0(P)$, dove $P^\mu = (\omega, \vec{p})$. Possiamo pertanto scrivere:

$$j^\mu_{ind}(P) = \sigma^{\mu j}(P) E^j(P), \tag{8.95}$$

dove compare il *tensore di conduttività* $\sigma^{\mu j}(P)$. Dal confronto con l'equazione:

$$j^\mu_{ind}(P) = \Pi^{\mu\nu}(P) A_\nu(P), \tag{8.96}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu j}(P) &= \frac{i}{\omega}\Pi^{\mu j}(P) \\ \Pi^{\mu 0}(P) &= -ip^j \sigma^{\mu j}(P). \end{aligned} \tag{8.97}$$

Utilizzando il propagatore di polarizzazione ricavato a partire dalla teoria cinetica nell'equazione (8.28) otteniamo la seguente espressione per il tensore di conduttività:

$$\sigma^{\mu i}(P) \equiv i\, m_D^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu v^i}{\omega - \vec{v}\cdot\vec{p} + i\eta}. \tag{8.98}$$

Osserviamo pertanto che, dal momento che $\Pi \propto m_D^2 \propto e^2 T^2$, la teoria della risposta lineare ci fornisce il risultato $j_{ind} \propto e^2 T^2 A$. Il primo contributo non lineare alla corrente è dato dalla funzione di vertice a quattro punti del fotone ed è di ordine $e^4 A^3$. Pertanto l'approssimazione lineare vale fin tanto che $e^2 T^2 A > e^4 A^3$ ovvero $A < T/e$.

Consideriamo ora un plasma di QCD e supponiamo di trattare campi di gauge così deboli da essere autorizzati ad utilizzare la teoria della risposta lineare. La corrente indotta di colore è allora data dalla formula:

$$j^{\mu a}_{ind}(x) = \int d^4y \Pi^{\mu\nu}_{ab}(x-y) A^b_\nu(y), \tag{8.99}$$

dove il propagatore di polarizzazione è diagonale negli indici di colore e possiamo pertanto scrivere:

$$\Pi^{\mu\nu}_{ab}(x-y) = \delta_{ab}\Pi^{\mu\nu}(x-y). \tag{8.100}$$

Nel caso in cui $P \sim gT$ (propagazione di modi soft) e limitandoci al *leading order* in $g$ si trova, a partire dalle equazioni cinetiche per la QCD, che $\Pi^{\mu\nu}(P)$ ha la stessa espressione di quello ricavato per il plasma elettromagnetico con $m_D^2 \sim g^2T^2$. Abbiamo pertanto, in questa approssimazione, che le 8 componenti della corrente indotta di colore sono individualmente conservate:

$$\partial_\mu j^{\mu a}_{ind} = 0. \tag{8.101}$$

Tuttavia l'approssimazione lineare in QCD vale solo per campi di gauge molto più deboli che in QED. Vediamo cosa comporta l'andare oltre l'approssimazione lineare. L'equazione di Yang-Mills con la corrente indotta $j^{\mu a}_{ind}$ come termine di sorgente ha la seguente espressione:

$$\left[D_\nu, F^{\nu\mu}\right]^a(x) = j^{\mu a}_{ind}(x). \tag{8.102}$$

Dal momento che $[D_\mu, [D_\nu, F^{\mu\nu}]] = 0$ abbiamo che:

$$[D_\mu, j^\mu_{ind}] = 0, \tag{8.103}$$

ovvero la corrente indotta è *covariantemente conservata*, condizione diversa dalla semplice equazione (8.101). Dal momento che, per un campo di gauge soft:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \sim gT + igA_\mu, \tag{8.104}$$

possiamo ricondurci alla (8.101) solo nel limite in cui $A \ll T$, condizione molto più forte che nel caso elettromagnetico in cui avevamo $A \ll T/e$.
Riscriviamo ora la corrente indotta in termini di un campo elettrico di colore:

$$j^{\mu a}_{ind}(x) = \int d^4y \sigma^{\mu i}_{ab}(x,y) E^i_b(y). \tag{8.105}$$

La conduttività di colore è in realtà essa stessa, se andiamo oltre l'approssimazione lineare, un funzionale del campo $A$ e scriveremo pertanto:

$$\sigma^{\mu i}_{ab}(x,y|A) = \sigma^{\mu i}(x,y) U_{ab}(x,y|A), \tag{8.106}$$

dove $\sigma^{\mu i}(x,y)$ ha la stessa espressione del tensore di conduttività della QED data dall'equazione (8.98), mentre:

$$U_{ab}(x,y|A) = P\exp\left(-ig\int_y^x dz^\mu A_\mu(z)\right). \tag{8.107}$$

Sviluppando l'esponenziale ritroviamo per la corrente indotta l'espressione:

$$j_\mu^a = \Pi_{\mu\nu}^{ab} A_b^\nu + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc} A_b^\nu A_c^\rho. \tag{8.108}$$

Notiamo ora che $|x-y|$ dà una misura della scala della non località della risposta: la corrente indotta in un punto, per l'equazione (8.99), dipende dal valore del campo di gauge in tutti i punti dello spazio-tempo. Per un campo soft abbiamo $|x-y| \sim 1/P \sim 1/gT$, pertanto:

$$\Pi A \sim g^2 T^2 A \tag{8.109}$$

$$\Gamma AA \sim \Pi g|x-y|AA \sim g^2 T^2 \frac{g}{gT} AA. \tag{8.110}$$

Pertanto nel caso $A \sim T$ i due termini nello sviluppo della corrente sono dello stesso ordine (e così tutti gli altri). Per poterci limitare al termine lineare è necessario che sia $A \ll T$.

# Capitolo 9

# Modi collettivi nel QGP

In questo capitolo ricaveremo il propagatore efficace ${}^{\star}G_{\mu\nu}$ per un gluone *soft* (cioè con componenti del quadrimpulso di ordine $gT$) e, attraverso lo studio dei suoi poli, metteremo in luce i principali fenomeni collettivi che si verificano nel quark-gluon plasma.

## 9.1 Il tensore di polarizzazione per un gluon soft in approssimazione di HTL

Il propagatore di polarizzazione per un gluone soft a livello di un loop hard può essere calcolato attaverso i diagrammi di Feynman. I diagrammi che contribuiscono a $\Pi^{\mu\nu}_{ab}$ in approssimazione di Hard Thermal Loop il loop di quark, il loop di gluone, il *tadpole* di gluone e infine il loop di ghost. Sommando i quattro diagrammi si giunge al risultato:

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(\omega, \vec{p}) = \delta^{ab} m_D^2 \left[ -\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} + \omega \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v_\mu v_\nu}{\omega - \vec{v}\cdot\vec{p} + i\eta} \right], \tag{9.1}$$

dove $|\vec{v}| \simeq c$. Tale risultato, ottenuto attraverso il calcolo di diagrammi di Feynman, coincide con quello ricavato nel capitolo precedente a partire dalle equazioni cinetiche. Il termine $+i\eta$ a denominatore riflette le condizioni al contorno ritardate. Tale termine immaginario infinitesimo diventa importante solo nel caso che il denominatore si annulli e questo può avvenire solo per vettori *space-like* per cui $\omega^2 < \vec{p}^2$. In questo caso il propagatore di polarizzazione sviluppa una parte immaginaria data da:

$$Im\, \Pi^{ab}_{\mu\nu}(\omega, \vec{p}) = \delta^{ab} m_D^2 \omega \int \frac{d\Omega}{4\pi} v_\mu v_\nu \frac{-\eta}{(\omega - \vec{v}\cdot\vec{p})^2 + \eta^2}, \tag{9.2}$$

che conduce al risultato:

$$Im\,\Pi^{ab}_{\mu\nu}(\omega,\vec{p}) = -\delta^{ab}\pi m_D^2\omega\int\frac{d\Omega}{4\pi}v_\mu v_\nu\delta(\omega-\vec{v}\cdot\vec{p}). \tag{9.3}$$

Tale parte immaginaria descrive l'assorbimento o l'emissione di un gluone soft space-like da parte di una particella hard (quark o gluone) del bagno termico. Notiamo come $Im\,\Pi^{ab}_{\mu\nu}$ si annulli linearmente nel limite statico $\omega\to 0$, pertanto il *Landau damping* è un effetto dinamico.

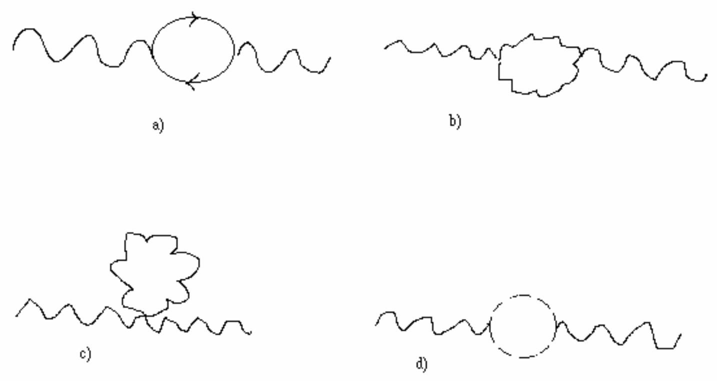


Figura 9.1: Il tensore di polarizzazione in approssimazione di HTL con loop di quark (a), loop di gluone (b), tadpole di gluone (c) e loop di ghost (d).

Il propagatore di polarizzazione, calcolato in equazione (9.1) a livello di un loop hard, è trasverso. Infatti, ricordando che $v^\mu = (1,\vec{v})$, abbiamo:

$$\begin{aligned} p^\mu\Pi^{ab}_{\mu\nu}(\omega,\vec{p}) &= \delta^{ab}m_D^2\left\{-\omega\delta_{\nu 0}+\omega\int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{\omega-\vec{v}\cdot\vec{p}}{\omega-\vec{v}\cdot\vec{p}+i\eta}v_\nu\right\} \\ &= \delta^{ab}m_D^2\left\{-\omega\delta_{\nu 0}+\omega\delta_{\nu 0}\right\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

## 9.2 Il propagatore efficace di un gluone soft

Il propagatore esatto di un gluone è espresso dall'equazione di Dyson:

$$G^{-1}_{\mu\nu} = G^{-1}_{0\,\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}, \tag{9.5}$$

in cui abbiamo omesso gli indici di colore e, per il momento, con $\Pi_{\mu\nu}$ si intende il propagatore di polarizzazione esatto.
Se ora nell'equazione di Dyson sostituiamo $\Pi_{\mu\nu}$ calcolato in approssimazione di Hard Thermal Loop e dato dall'equazione (9.1) otteniamo il *propagatore efficace* per un gluone soft:

$$^{\star}G^{-1}_{\mu\nu} = G^{-1}_{0\,\mu\nu} + \Pi^{HTL}_{\mu\nu}. \tag{9.6}$$

Per calcolare esplicitamente il propagatore efficace conviene porsi nel gauge di Coulomb in cui:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{A} = 0. \tag{9.7}$$

Orientando l'asse $z$ lungo $\vec{p}$ è immediato verificare che che le uniche componenti che contribuiscono a $^{\star}G_{\mu\nu}$ sono quella longitudinale (o elettrica) e quella trasversale (o magnetica). Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} ^{\star}G_{00}(p_0,\vec{p}) &\equiv {}^{\star}\Delta_L(p_0,\vec{p}) \\ ^{\star}G_{ij}(p_0,\vec{p}) &\equiv (\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j)^{\star}\Delta_T(p_0,\vec{p}), \end{aligned} \tag{9.8}$$

che implica:

$$\begin{aligned} ^{\star}G_{11}(p_0,\vec{p}) &= {}^{\star}G_{22}(p_0,\vec{p}) ={}^{\star} \Delta_T(p_0,\vec{p}) \\ ^{\star}G_{33}(p_0,\vec{p}) &= 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Valutiamo ora esplicitamente le componenti del tensore di polarizzazione. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(\omega,\vec{p}) &= m_D^2\left\{-1+\omega\int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{1}{\omega-\vec{v}\cdot\vec{p}+i\eta}\right\} \\ &= m_D^2\left\{-1+\omega\int\frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi}\frac{1}{\omega-p\cos\theta+i\eta}\right\} \\ &= m_D^2\left\{-1-\frac{1}{2}\frac{\omega}{p}\int_{-1}^{1}dx\frac{1}{x-\frac{\omega}{p}}\right\}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Otteniamo pertanto:

$$\Pi_{00}(p_0,\vec{p}) = -m_D^2\left(1-Q\left(\frac{p_0}{p}\right)\right) = -\Pi_L(p_0,\vec{p}), \tag{9.11}$$

dove abbiamo definito la funzione:

$$Q(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}. \tag{9.12}$$

Il propagatore di polarizzazione longitudinale è pertanto dato da:

$$\Pi_L(p_0, \vec{p}) = m_D^2 \left(1 - Q\left(\frac{p_0}{p}\right)\right). \tag{9.13}$$

Per il calcolo delle altre componenti di $\Pi_{\mu\nu}$ è utile ricordare che:

$$\begin{aligned} v^1 &= \sin\theta\cos\phi \\ v^2 &= \sin\theta\sin\phi \\ v^3 &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Consideriamo ora le componenti del tipo:

$$\Pi^{0i}(\omega, \vec{p}) = m_D^2 \omega \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^i}{\omega - \vec{v}\cdot\vec{p} + i\eta}. \tag{9.15}$$

L'integrazione su $\phi$ fa sopravvivere solo la componente $\Pi^{03}$ e otteniamo così:

$$\Pi^{03} = -m_D^2 \frac{1}{2}\frac{\omega}{p} \int_{-1}^{1} dx \frac{x}{x - \frac{\omega}{p}},$$

che conduce al risultato:

$$\Pi_{0i}(p_0, \vec{p}) = -\frac{p_0 p_i}{p^2} \Pi_L(p_0, p). \tag{9.16}$$

Passiamo ora a valutare $\Pi_{ij}$. Dal momento che:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\phi = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin\phi\cos\phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi = 0, \end{aligned} \tag{9.17}$$

Le uniche componenti non nulle sono $\Pi_{11} = \Pi_{22}$ e $\Pi_{33}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}(\omega, \vec{p}) = \Pi_{22}(\omega, \vec{p}) &= m_D^2 \frac{\omega}{p}\frac{1}{4} \int_{-1}^{1} dx \frac{x^2 - 1}{x - \omega/p} \\ &= m_D^2 \frac{\omega}{p}\frac{1}{4} \int_{-1}^{1} dx \left(x + \frac{\frac{\omega}{p}x - 1}{x - \frac{\omega}{p}}\right) = m_D^2 \frac{\omega}{p}\frac{1}{4} \int_{-1}^{1} dx \frac{\frac{\omega}{p}x - 1}{x - \frac{\omega}{p}}, \end{aligned} \tag{9.18}$$

che conduce al risultato:

$$\Pi_{11}(p_0, \vec{p}) = \Pi_{22}(p_0, \vec{p}) = \Pi_T(p_0, p), \tag{9.19}$$

dove:

$$\Pi_T(p_0, p) = \frac{m_D^2}{2} \frac{p_0^2}{p^2} \left(1 - \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2} Q\left(\frac{p_0}{p}\right)\right). \tag{9.20}$$

Abbiamo infine:

$$\begin{aligned} \Pi_{33}(\omega, \vec{p}) &= -m_D^2 \frac{\omega}{p} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx \frac{x^2}{x - \omega/p} = -m_D^2 \frac{\omega}{p} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx \left(x + \frac{\frac{\omega}{p} x}{x - \frac{\omega}{p}}\right) \\ &= -m_D^2 \frac{\omega^2}{p^2} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx \frac{x}{x - \omega/p}, \end{aligned} \tag{9.21}$$

che conduce al risultato:

$$\Pi_{33}(p_0, \vec{p}) = -m_D^2 \frac{p_0^2}{p^2} \left(1 - Q\left(\frac{p_0}{p}\right)\right). \tag{9.22}$$

Possiamo pertanto scrivere in maniera compatta:

$$\Pi_{ij}(p_0, \vec{p}) = (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \Pi_T(p_0, p) - \hat{p}_i \hat{p}_j \frac{p_0^2}{p^2} \Pi_L(p_0, p). \tag{9.23}$$

Notiamo ora che la funzione $Q(x)$ definita in equazione (9.12) come:

$$Q(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \tag{9.24}$$

è una funzione polidroma con punti di diramazione in $x = \pm 1$. Tale funzione, per $-1 < x < 1$ ha una parte immaginaria non nulla. Ricordiamo infatti che il logaritmo di un qualsiasi numero complesso può essere valutato secondo la prescrizione:

$$\ln z = \ln(|z| e^{i\phi}) = \ln|z| + i\phi, \tag{9.25}$$

dove tuttavia occorre specificare l'intervallo su cui varia $\phi$ ovvero il *foglio di Riemann* su cui si valuta la funzione. Nel caso in esame conviene scegliere il taglio lungo l'asse reale nell'intervallo $-1 < x < 1$, mentre ad eliminare l'ambiguità sono le condizioni al contorno ritardate, per cui $p_0 = \omega + i\eta$, il che equivale ad avvicinarsi al taglio dal semipiano superiore (lungo il taglio infatti la funzione è discontinua ed occorre specificare come ci si avvicini ad esso). Pertanto per gluoni di tipo spazio, per i quali $|\omega| < p$, abbiamo:

$$x - 1 = |x - 1| e^{i\pi} \tag{9.26}$$

e questo fissa la parte immaginaria della funzione $Q(\omega/p)$ ad essere:

$$Im\,Q(\omega/p) = -\frac{\pi\omega}{2p}\theta(p - |\omega|). \tag{9.27}$$

Come già osservato tale parte immaginaria è responsabile del Landau damping dei gluoni soft di tipo spazio.

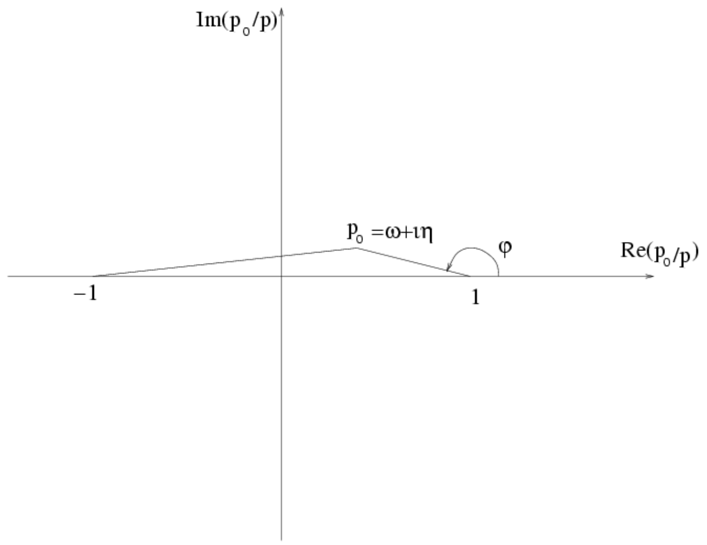


Figura 9.2: Porre condizioni al contorno ritardate equivale ad avvicinarsi a $p_0 = \omega$ dal semipiano superiore.

Dal momento che:

$$\Delta_L(p_0,p) = -\frac{1}{p^2} \qquad e \qquad \Delta_T(p_0,p) = -\frac{1}{p_0^2 - p^2}, \tag{9.28}$$

utilizzando le equazioni (9.6) e (9.8) otteniamo infine:

$$^\star\Delta_L(p_0,p) = -\frac{1}{p^2 + \Pi_L(p_0,p)} \qquad {}^\star\Delta_T(p_0,p) = -\frac{1}{p_0^2 - p^2 - \Pi_T(p_0,p)}. \tag{9.29}$$

## 9.3 Debye screening e Landau damping

Le relazioni di dispersione dei modi collettivi sono ottenute attraverso i poli dei propagatori efficaci espressi nella (9.29). La relazione di dispersione per i modi longitudinali è pertanto data da:

$$p^2 + \Pi_L(\omega_L, p) = 0, \tag{9.30}$$

mentre quella per i modi trasversali è:

$$\omega_T^2 = p^2 + \Pi_T(\omega_T, p). \tag{9.31}$$

Sviluppiamo ora queste relazioni per $p \ll m_D$, ovvero per $p/\omega_L \ll 1$ e $p/\omega_T \ll 1$. Iniziamo a considerare i modi longitudinali partendo dalla seguente identità valida per $p/\omega_L < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_L}{2p} \ln \frac{1 + \frac{p}{\omega_L}}{1 - \frac{p}{\omega_L}} &= \frac{\omega_L}{2p} \ln \left( 1 + 2 \frac{\frac{p}{\omega_L}}{1 - \frac{p}{\omega_L}} \right) \\ &= \frac{\omega_L}{2p} \ln \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{p}{\omega_L} \right)^n \right). \end{aligned} \tag{9.32}$$

Consideriamo ora lo sviluppo:

$$\ln(1+y) \sim y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \dots . \tag{9.33}$$

Applicando tale risultato all'equazione (9.32) otteniamo:

$$\frac{\omega_L}{2p} \ln \frac{1 + \frac{p}{\omega_L}}{1 - \frac{p}{\omega_L}} = \frac{\omega_L}{2p} \left\{ 2 \frac{p}{\omega_L} + \frac{2}{3} \left( \frac{p}{\omega_L} \right)^3 + \frac{2}{5} \left( \frac{p}{\omega_L} \right)^5 \right\}, \tag{9.34}$$

che, utilizzando l'espressione esplicita di $\Pi_L$ data in equazione (9.13) e ponendo $m_D^2 = 3\omega_{pl}^2$, conduce all'equazione:

$$\begin{aligned} p^2 + 3\omega_{pl}^2 \left\{ -\frac{1}{3} \left( \frac{p}{\omega_L} \right)^2 - \frac{1}{5} \left( \frac{p}{\omega_L} \right)^4 \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \omega_L^2 = \omega_{pl}^2 + \frac{3}{5} \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_L^2} p^2 . \end{aligned} \tag{9.35}$$

Nel limite $p \ll m_D$ otteniamo pertanto la seguente relazione di dispersione per i modi longitudinali:

$$\omega_L^2 = \omega_{pl}^2 + \frac{3}{5} p^2. \tag{9.36}$$

Analogamente per i modi trasversali otteniamo:

$$\omega_T^2 = p^2 + \frac{3}{2} \omega_{pl}^2 \frac{\omega_T^2}{p^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_T^2 - p^2}{\omega_T^2} \frac{1}{2} \frac{\omega_T}{p} \left( 2 \frac{p}{\omega_T} + \frac{2}{3} \left( \frac{p}{\omega_T} \right)^3 + \frac{2}{5} \left( \frac{p}{\omega_T} \right)^5 + \dots \right) \right\}, \tag{9.37}$$

che conduce alla relazione di dispersione:

$$\omega_T^2 = \omega_{pl}^2 + \frac{6}{5}p^2. \tag{9.38}$$

Nel caso invece che sia $p \gg m_D$ le relazioni di dispersione diventano invece:

$$\omega_T^2 \simeq p^2 + \frac{m_D^2}{2} \qquad\qquad \omega_L^2 = p^2 \left\{1 + 4\exp\left[-(2p^2/m_D^2) - 2\right]\right\}. \tag{9.39}$$

Pertanto, per grandi impulsi, la relazione di dispersione per i modi trasversali diventa quella di una particella relativistica con massa asintotica $m_\infty = m_D/\sqrt{2}$. I modi longitudinali si avvicinano invece al cono luce. È comunque opportuno ricordare che i modi collettivi che stiamo studiando sono tipici della scala di impulsi $p \sim gT$, mentre per impulsi più elevati scompaiono dallo spettro.

Vediamo ora come da un'analisi del propagatore efficace per un gulon soft emerga lo screening di Debye. Nel limite statico $\omega = 0$ abbiamo:

$$\Pi_L(0,p) = m_D^2 \qquad\qquad \Pi_T(0,p) = 0, \tag{9.40}$$

che, sostituiti nelle equazioni (9.29, conducono al risultato:

$$^\star\Delta_L(0,p) = -\frac{1}{p^2 + m_D^2} \qquad\qquad ^\star\Delta_T(0,p) = \frac{1}{p^2}. \tag{9.41}$$

Osserviamo pertanto che la massa di Debye $m_D$ agisce come un cutoff infrarosso nel settore elettrico. Nello spazio delle coordinate questo si traduce in una riduzione del raggio d'azione del potenziale di gauge.

Come abbiamo visto nelle equazioni (9.3) e (9.27) il propagatore di polarizzazione di un gluone soft di tipo spazio per $\omega \to 0$, ma comunque non nulla, sviluppa una parte immaginaria associata al trasferimento di energia alle particelle *hard* del plasma. Ponendo la nostra attenzione sul propagatore di polarizzazione trasverso notiamo che, in questo limite, è dominato dalla sua parte immaginaria.

$$\Pi_T(\omega \ll p) = -i\frac{\pi}{4}m_D^2\frac{\omega}{p} + O(\omega^2/p^2) \tag{9.42}$$

e pertanto il propagatore magnetico efficace sarà:

$$^\star\Delta_T(\omega \ll p) \simeq \frac{1}{p^2 - i(\pi\omega/4p)m_D^2}. \tag{9.43}$$

Nel calcolo di sezioni d'urto interverrà il modulo quadro di tale propagatore che è dato da:

$$|^{\star}\Delta_T(\omega \ll p)|^2 \simeq \frac{1}{p^4 + (\pi m_D^2 \omega/4p)^2}, \tag{9.44}$$

da cui notiamo che, finchè $\omega \neq 0$, $\Pi_T$ agisce come un cutoff infrarosso dipendente dalla frequenza.

# Parte III

# Transizioni di fase nel modello NJL

# Capitolo 10

# Il modello di Nambu Jona-Lasinio

Quella di Nambu e Jona-Lasinio è un teoria efficace che cerca di dare una trattazione semplificata di alcuni aspetti della QCD, preservandone alcune importanti simmetrie. Essa è una teoria che si presta a studiare la QCD nel suo regime non perturbativo, cioè per piccoli quadrimpulsi scambiati, in cui la costante di accoppiamento $\alpha_s > 1$ non consente una trattazione perturbativa.
In tale modello i gradi di libertà dei gluoni sono *congelati* e l'interazione tra i quark è quindi un'interazione di contatto: ciò fa sì che la teoria non sia rinormalizzabile e pone la necessità di introdurre un cutoff sugli impulsi che elimini le divergenze ultraviolette. D'altra parte il modello di NJL è stato appunto sviluppato per studiare processi di bassa energia ed è quindi lecito attendersi che la sua validità non possa essere spinta oltre una certa scala di impulsi.
Una grandezza importante che il modello di NJL consente di calcolare è il *condensato chirale* $<\bar{q}\, q>$, dove, a seconda del caso in esame, il valor medio è preso nel vuoto o nel mezzo, e a temperatura zero o finita. Un valore non nullo di tale condensato indica la rottura della simmetria chirale: il condensato è pertato il *parametro d'ordine* del sistema (come la magnetizzazione nel modello di Ising). Si è in genere concordi nel ritenere che il ripristino della simmetria chirale coincida con la transizione dalla materia adronica alla fase deconfinata. In questo capitolo tratteremo il caso semplice di un solo sapore di quark facendo inoltre ricorso all'approssimazione di campo medio, il che ci consentirà di ricondurci all'equazione di campo di Dirac libera, con la sola introduzione di una *massa efficace* dipendente dal condensato. Metteremo inoltre in luce i problemi di self-consistenza originati dall'approssimazione di campo medio. Partendo dal calcolo del condensato chirale nel vuoto a $T = 0$

passeremo quindi ad esaminare gli effetti dell'introduzione del mezzo, per giungere infine al caso più generale di temperatura e densità finite.

## 10.1 La lagrangiana di NJL e le sue simmetrie

La densità di Lagrangiana di Nambu Jona-Lasinio a un sapore ha la segeunte espressione:

$$\mathcal{L} = \bar{q}\,(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,q + G\left[(\bar{q}\,q)^2 + \left(\bar{q}i\gamma^5 q\right)^2\right], \tag{10.1}$$

dove abbiamo utilizzato la notazione compatta:

$$\bar{q}\,q = \sum_c \bar{q}_c\,q_c \qquad \text{con} \qquad c = R, G, B. \tag{10.2}$$

La somma sui colori è quindi in genere sottointesa. D'altra parte, essendo stati congelati i gradi di libertà dei gluoni, si è eliminata la possibilità che, interagendo, un quark cambi colore. Lo stesso termine di interazione della lagrangiana di NJL non contiene le matrici di Gell-Mann $\lambda_a$ di colore che sarebbero in grado di mescolare i colori dei quark. Quella di colore è pertanto una pura degenerazione della teoria.
La lagrangiana di NJL, *una volta posto a zero il termine di massa*, gode delle simmetrie *globali* (ovvero i cui parametri delle trasformazioni non dipendono dal punto dello spazio-tempo:

$$U_V(1) \times U_A(1) \times SU_C(3). \tag{10.3}$$

Esaminiamo ora dettagliatamente tali simmetrie mettendo in evidenza, grazie al teorema di Noether, le corrispondenti correnti conservate.

### 10.1.1 La simmetria $U_V(1)$

Si verifica immediatamente che la lagrangiana di NJL è invariante per la trasformazione di gauge globale di $U_V(1)$:

$$\begin{aligned} q &\to e^{i\alpha} q \\ \bar{q} &\to \bar{q} e^{-i\alpha}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

A tale simmetria è associata la conservazione della *corrente vettoriale*:

$$j^{\mu}_V = \bar{q}\gamma^{\mu} q, \tag{10.5}$$

che soddisfa l'equazione di continuità $\partial_\mu j_V^\mu = 0$. Abbiamo pertanto che è conservato il numero barionico:

$$B = \frac{1}{3} \int d^3x q^\dagger(x) q(x), \tag{10.6}$$

dove il fattore 1/3 è legato al fatto che i quark trasportano numero barionico 1/3.

### 10.1.2 La simmetria $U_A(1)$

Nel caso che partiamo da una lagrangiana con massa del quark nuda nulla il modello di NJL gode anche della simmetria $U_A(1)$ per trasformazioni di chiralità:

$$q \to e^{i\alpha\gamma^5} q, \tag{10.7}$$

dove la matrice $\gamma^5$ è definita come:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{10.8}$$

Dalle proprietà che definiscono le matrici di Dirac:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \end{aligned} \tag{10.9}$$

seguono le importanti proprietà:

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1 \qquad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \qquad \left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0. \tag{10.10}$$

Possiamo pertanto scrivere $e^{i\alpha\gamma^5}$ in modo più conveniente come:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\gamma^5} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2m}}{(2m)!} \left(\gamma^5\right)^{2m} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\gamma^5\right)^{2k+1} \\ &= \cos\alpha + i \sin\alpha\gamma^5, \end{aligned} \tag{10.11}$$

e pertanto abbiamo anche:

$$e^{-i\alpha\gamma^5} = \cos\alpha - i\sin\alpha\gamma^5. \tag{10.12}$$

Possiamo a questo punto ricavare la legge di trasformazione per lo spinore aggiunto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \bar{q} = q^\dagger\gamma^0 &\to q^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 \\ &\to \bar{q}\gamma^0 e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \bar{q}e^{i\alpha\gamma^5}. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Effettuando tali sostituzioni nella lagrangiana di NJL con $m = 0$ troviamo che essa è invariante per trasformazioni di chiralità. Abbiamo infatti che il termine libero si trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\bar{q}\left(ie^{i\alpha\gamma^5}\gamma^\mu e^{i\alpha\gamma^5}\partial_\mu\right)q &= \bar{q}\left(ie^{i\alpha\gamma^5}e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^\mu\partial_\mu\right)q \\ &= \bar{q}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)q, \end{aligned} \tag{10.14}$$

mentre il termine di interazione diventa:

$$\begin{aligned}(\bar{q}\,q)^2+\left(\bar{q}i\gamma^5 q\right)^2 &\to \left[\bar{q}\left(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\gamma^5\right)q\right]^2-\left[\bar{q}\left(\cos 2\alpha\gamma^5 + i\sin 2\alpha\right)q\right]^2 \\ &= \left[\cos 2\alpha\,(\bar{q}\,q) + \sin 2\alpha\left(\bar{q}i\gamma^5 q\right)\right]^2-\left[-i\cos 2\alpha\left(\bar{q}i\gamma^5 q\right)+i\sin 2\alpha\,(\bar{q}\,q)\right]^2 \\ &= (\bar{q}\,q)^2+\left(\bar{q}i\gamma^5 q\right)^2. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Nel caso $m = 0$ abbiamo che è conservata anche la corrente assiale:

$$j^\mu_A = \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q, \tag{10.16}$$

a cui è associata la carica:

$$\int d^3x q^\dagger(x)\gamma^5 q(x), \tag{10.17}$$

Nel caso in cui $m \neq 0$ la simmetria chirale è esplicitamente rotta, non essendo più la lagrangiana invariante per trasformazioni di chiralità.

### 10.1.3 La simmetria $SU_C(3)$

La lagrangiana di NJL è invariante per trasformazioni $SU_C(3)$ *di colore*:

$$q_c \to q'_c = e^{i\frac{\theta^a}{2}(\lambda_a)_{cd}} q_d, \tag{10.18}$$

dove le matrici $\lambda_a$ sono le matrici di Gell-Mann di colore, $a = 1,\ldots 8$, $\theta^a$ sono i parametri della trasformazione e gli indici $c, d$ corrono sui tre colori. Abbiamo pertanto 8 correnti conservate:

$$j^\mu_a = \bar{q}_c\gamma^\mu\left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{cd} q_d. \tag{10.19}$$

## 10.2 Equazioni del moto e loro linearizzazione

Partendo dalla densità di lagrangiana di NJL

$$\mathcal{L} = \bar{q}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)q + G\left[\left(\bar{q}\,q\right)^{2} + \left(\bar{q}i\gamma^{5}q\right)^{2}\right], \tag{10.20}$$

e applicando le equazioni di Euler Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{q}} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{q})} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{q}} = 0, \tag{10.21}$$

otteniamo l'equazione di campo:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)q + 2G\left[\left(\bar{q}\,q\right)q + \left(\bar{q}i\gamma^{5}q\right)i\gamma^{5}q\right] = 0. \tag{10.22}$$

Scegliamo a questo punto di trattare il problema in approssimazione di campo medio, effettuando all'interno dell'equazione (10.22) la seguente sostituzione:

$$\begin{aligned} \bar{q}\,q &\;\rightarrow\; <0|\bar{q}\,q|0> \\ \bar{q}i\gamma^{5}q &\;\rightarrow\; <0|\bar{q}i\gamma^{5}q|0>\,. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Notiamo che la quantità $\bar{q}i\gamma^{5}q$ è uno *pseudoscalare*, ovvero cambia segno per trasformazione di *parità*; pertanto, se vogliamo che lo stato di vuoto sia invariante per trasformazione di parità, deve essere:

$$<0|\bar{q}i\gamma^{5}q|0>= 0. \tag{10.24}$$

Giungiamo pertanto all'equazione di campo:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)q + 2G<0|\bar{q}\,q|0>q = 0, \tag{10.25}$$

che può essere ricondotta ad un'equazione di Dirac libera:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m^{\star}\right)q = 0, \tag{10.26}$$

in cui è stata introdotta una *massa efficace* definita come:

$$m^{\star} = m - 2G<0|\bar{q}\,q|0>\,. \tag{10.27}$$

Vediamo ora cosa diventa la densità di lagrangiana di NJL in approssimazione di campo medio. È conveniente scrivere i bilineari $\bar{q}\,q$ e $\bar{q}i\gamma^{5}q$ come il loro valor medio nel vuoto più la loro fluttuazione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \bar{q}\,q &= <0|\bar{q}\,q|0> + \left(\bar{q}\,q - <0|\bar{q}\,q|0>\right) \\ \bar{q}i\gamma^{5}q &= <0|\bar{q}i\gamma^{5}q|0> + \left(\bar{q}i\gamma^{5}q - <0|\bar{q}i\gamma^{5}q|0>\right). \end{aligned} \tag{10.28}$$

Trascurando i termini quadratici nelle fluttuazioni otteniamo pertanto:

$$
\begin{aligned}
(\bar{q}\,q)^2 &\simeq <\bar{q}\,q>^2 -2 <\bar{q}\,q>^2 +2\bar{q}\,q <\bar{q}\,q> \\
\left(\bar{q}i\gamma^5 q\right)^2 &\simeq <\bar{q}i\gamma^5 q>^2 -2 <\bar{q}i\gamma^5 q>^2 +2 <\bar{q}i\gamma^5 q> \bar{q}i\gamma^5 q = 0,
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

che, sostituiti all'interno della (10.20), conducono alla seguente densità di lagrangiana di campo medio:

$$
\mathcal{L}_{cm} = \bar{q}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - (m - 2G <\bar{q}\,q>)\right] q - G <\bar{q}\,q>^2 . \tag{10.30}
$$

## 10.3 Il condensato chirale nel vuoto a $T = 0$

Sarà importante per il seguito della discussione trovare l'espressione dell'hamiltoniana in approssimazione di campo medio. Effettuiamo pertanto la trasformazione di Legendre:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{cm} &= \frac{\partial\mathcal{L}_{cm}}{\partial(\partial_0 q)} \cdot \partial_0 q - \mathcal{L}_{cm} \\
&= \bar{q}\left[-i\gamma^k\partial_k + m^\star\right] q + G <\bar{q}\,q>^2 \\
&= q^\dagger\left[-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m^\star\right] q + G <\bar{q}\,q>^2 ,
\end{aligned}
\tag{10.31}
$$

dove $m^\star$ è stato definito nell'equazione (10.27). Possiamo quindi scrivere:

$$
\begin{aligned}
H_{cm} &= \int d^3x q^\dagger(x) H_D q(x) + G\cdot V <\bar{q}\,q>^2 \\
&= \int d^3x q^\dagger(x) i\frac{\partial}{\partial t} q(x) + G\cdot V <\bar{q}\,q>^2 ,
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

dove, in questa approssimazione, i campi hanno i seguenti sviluppi (per semplicità trascuriamo per ora i gradi di libertà di colore):

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p},r}\sqrt{\frac{m^\star}{E}}\left[u^{(r)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}b_{\vec{p}}^{(r)} + v^{(r)}(\vec{p})e^{ip\cdot x}d_{\vec{p}}^{(r)\dagger}\right]_{p_0=E} \\
q^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p},r}\sqrt{\frac{m^\star}{E}}\left[u^{(r)\dagger}(\vec{p})e^{ip\cdot x}b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} + v^{(r)\dagger}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}d_{\vec{p}}^{(r)}\right]_{p_0=E} \\
i\frac{\partial}{\partial t}q(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}',s}\sqrt{\frac{m^\star}{E'}}E'\left[u^{(s)}(\vec{p}')e^{-ip'\cdot x}b_{\vec{p}'}^{(s)} - v^{(s)}(\vec{p}')e^{ip'\cdot x}d_{\vec{p}'}^{(s)\dagger}\right]_{p'_0=E'} ,
\end{aligned}
\tag{10.33}
$$

dove $E \equiv E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + (m^\star)^2}$. Utilizzando ora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} &= V \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \\ u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= \delta_{rs} \frac{E}{m^\star} \\ v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) &= \delta_{rs} \frac{E}{m^\star}, \end{aligned} \tag{10.34}$$

giungiamo finalmente al risultato:

$$H_{cm} = N_c \sum_{\vec{p},r} E_p \left( b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} + d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} d_{\vec{p}}^{(r)} - 1 \right) + G \cdot V < \bar{q}\, q >^2 , \tag{10.35}$$

in cui abbiamo fattorizzato la somma sui tre colori nel fattore di degenerazione $N_c$.

Il valor medio del condensato nel vuoto a $T = 0$ può essere calcolato a partire dalla relazione:

$$< 0|\bar{q}\, q|0 >= -i \lim_{y \to x^+} Tr\, S(x-y), \tag{10.36}$$

dove la traccia è presa sugli indici spinoriali e di colore e $S(x-y)$ è il propagatore relativistico a $T = 0$ nel vuoto di un quark con massa $m^\star$ (dal momento che lavoriamo in approssimazione di campo medio) ed è dato da:

$$\begin{aligned} S(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m^\star}{p^2 - (m^\star)^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m^\star}{[p_0 - (E_p - i\epsilon)] \cdot [p_0 + (E_p - i\epsilon)]} \end{aligned} \tag{10.37}$$

Pertanto abbiamo che:

$$< 0|\bar{q}\, q|0 >= -iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4m^\star}{[p_0 - (E_p - i\epsilon)]\, [p_0 + (E_p - i\epsilon)]} e^{ip_0\epsilon}, \tag{10.38}$$

che conduce al risultato:

$$< 0|\bar{q}\, q|0 >= -N_c \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{2m^\star}{\sqrt{\vec{p}^2 + (m^\star)^2}}, \tag{10.39}$$

dove occorre tener presente che $m^\star$ dipende a sua volta dal condensato secondo la relazione $m^\star = m - 2G < 0|\bar{q}\, q|0 >$. Notiamo immediatamente che l'integrale sugli impulsi nell'equazione (10.39) è divergente. Il modello di

NJL, presentando un'interazione di contatto, non è rinormalizzabile: è necessario pertanto introdurre un cutoff $\Lambda$ che elimini le divergenze ultraviolette. Tale cutoff è pertanto un parametro del modello e deve essere scelto in modo da riprodurre alcune osservabili fisiche come le costanti di accoppiamento e di decadimento di alcuni mesoni.
Una volta introdotto tale cutoff otteniamo quindi i seguenti risultati per il condensato e la massa dinamica:

$$\begin{aligned} <0|\bar{q}\,q|0> &= -\frac{3}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp \frac{p^2 m^\star}{\sqrt{p^2+(m^\star)^2}} \\ m^\star &= m + \frac{6G}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp \frac{p^2 m^\star}{\sqrt{p^2+(m^\star)^2}}. \end{aligned} \tag{10.40}$$

### 10.3.1 Studio del caso $m = 0$

Consideriamo ora il caso in cui la massa nuda del quark sia nulla. Essendo $m = 0$ abbiamo pertanto che $m^\star = -2G <0|\bar{q}\,q|0>$ e quindi:

$$m^\star = \frac{6G}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp \frac{m^\star p^2}{\sqrt{\vec{p}^2+(m^\star)^2}}. \tag{10.41}$$

Tale equazione ammette sempre la soluzione $m^\star = 0$. La soluzione con $m^\star \neq 0$ va cercata invece risolvendo l'equazione:

$$1 = \frac{6G}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2+(m^\star)^2}}. \tag{10.42}$$

Notiamo che vale la seguente maggiorazione:

$$1 = \frac{6G}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2+(m^\star)^2}} < \frac{6G}{\pi^2}\int_0^\Lambda p\,dp = \frac{3}{\pi^2}G\Lambda^2, \tag{10.43}$$

e pertanto è possibile avere la soluzione con $m^\star \neq 0$ solo se

$$G\Lambda^2 > \frac{\pi^2}{3}. \tag{10.44}$$

In natura sarà realizzata la soluzione per cui la densità di energia è minima.
Indichiamo con $|0>$ lo stato di vuoto che corrisponde al valor medio del condensato nullo, ovvero:

$$<0|\bar{q}\,q|0> = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m^\star = 0. \tag{10.45}$$

Pertanto, utilizzando l'equazione (10.35), ed effettuando la sostituzione:

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{p}} \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}, \tag{10.46}$$

giungiamo al risultato:

$$<0|\mathcal{H}_{cm}|0>= -N_c \cdot 2 \int_0^\Lambda \frac{p^3}{2\pi^2} dp = -\frac{3}{\pi^2}\frac{\Lambda^4}{4} \tag{10.47}$$

Indichiamo invece con $|\sigma_0>$ lo stato di vuoto corrispondente ad un valor medio del condensato (e quindi ad una massa efficace) diverso da zero, ovvero:

$$<\sigma_0|\bar{q}\, q|\sigma_0>= -\frac{m^\star}{2G} \neq 0. \tag{10.48}$$

Giungiamo pertanto alla seguente densità di energia:

$$<\sigma_0|\mathcal{H}_{cm}|\sigma_0>= -\frac{3}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp\, p^2 \sqrt{p^2 + (m^\star)^2} + \frac{(m^\star)^2}{4G}. \tag{10.49}$$

Sviluppando quest'ultima espressione per piccoli valori di $m^\star$ otteniamo:

$$\begin{aligned} <\sigma_0|\mathcal{H}_{cm}|\sigma_0> &= -\frac{3}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp\, p^3 \left[1 + \left(\frac{m^\star}{p}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{(m^\star)^2}{4G} \\ &\simeq -\frac{3}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp\, \left[p^3 + \frac{1}{2}(m^\star)^2 p\right] + \frac{(m^\star)^2}{4G} \\ &\simeq -\frac{3}{\pi^2}\frac{\Lambda^4}{4} - \frac{3}{\pi^2}\frac{(m^\star)^2}{4}\Lambda^2 + \frac{(m^\star)^2}{4G}. \end{aligned} \tag{10.50}$$

La condizione perchè la soluzione con condensato non nullo sia energeticamente favorita è pertanto:

$$\begin{aligned} <0|\mathcal{H}_{cm}|0> - <\sigma_0|\mathcal{H}_{cm}|\sigma_0> &= \frac{3\,(m^\star)^2}{4\pi^2}\Lambda^2 - \frac{(m^\star)^2}{4G} \\ &= \frac{(m^\star)^2}{4}\left(\frac{3}{\pi^2}\Lambda^2 - \frac{1}{G}\right) > 0 \\ &\Rightarrow \; G\Lambda^2 > \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned} \tag{10.51}$$

Quindi, quando esiste, la soluzione con $m^\star \neq 0$ corrisponde al minimo dell'energia. Notiamo che il mare di Dirac contribuisce in modo differente per i due diversi stati di vuoto. Da questo punto di vista il mare di Dirac dà un contributo "attivo" alla densità di energia del sistema ed alla differenza di energia tra i due stati di vuoto.

## 10.4 Il condensato chirale nel mezzo a $T=0$

Vediamo ora come la presenza del mezzo influenzi i risultati ottenuti in precedenza.
Consideriamo un plasma di quark a un sapore. A $T=0$ il vettore di stato che descrive tale sistema è:

$$|\rho>=\prod_{c,r,\vec{p}<p_F} b^{(r)\dagger}_{\vec{p},c}|0>\ . \qquad (10.52)$$

Tale vettore di stato non è altro che la *sfera di Fermi*, in cui tutti i livelli sono occupati fino ad un *livello di Fermi*, mentre quelli superiori sono liberi: essa rappresenta, a $T=0$, lo stato fondamentale di un sistema di fermioni non interagenti, o la cui interazione, come nel nostro caso, è stata riassunta in un campo medio.
La densità barionica di tale sistema è data da:

$$\rho_B=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot N_c\int_{p<p_F}\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}=\frac{p_F^3}{3\pi^2}. \qquad (10.53)$$

Nel caso di un plasma di quark a un sapore l'approssimazione di campo medio consiste nell'effettuare nell'equazione di campo esatta le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned}\bar{q}\,q &\rightarrow <\rho|\bar{q}\,q|\rho>\\ \bar{q}i\gamma^5 q &\rightarrow <\rho|\bar{q}i\gamma^5 q|\rho>=0,\end{aligned} \qquad (10.54)$$

ottenendo per la massa efficace:

$$m^\star=m-2G<\rho|\bar{q}\,q|\rho>\ . \qquad (10.55)$$

Nel calcolare il propagatore relativistico di un quark nel mezzo, a partire dallo sviluppo dei campi in operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned}q(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p},r}\sqrt{\frac{m^\star}{E}}\left[u^{(r)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}b^{(r)}_{\vec{p}}+v^{(r)}(\vec{p})e^{ip\cdot x}d^{(r)\dagger}_{\vec{p}}\right]_{p_0=E}\\ \bar{q}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p},r}\sqrt{\frac{m^\star}{E}}\left[\bar{u}^{(r)}(\vec{p})e^{ip\cdot x}b^{(r)\dagger}_{\vec{p}}+\bar{v}^{(r)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}d^{(r)}_{\vec{p}}\right]_{p_0=E}\end{aligned} \qquad (10.56)$$

occorre tener conto dei seguenti risultati:

$$\begin{aligned}&<\rho|b^{(r)\dagger}_{\vec{p}}b^{(s)}_{\vec{p}'}|\rho>=\delta_{rs}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\theta(p_F-p) \qquad <\rho|d^{(r)\dagger}_{\vec{p}}d^{(s)}_{\vec{p}'}|\rho>=0\\ &\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec{p})\bar{u}^{(r)}_\beta(\vec{p}) = \frac{(\gamma^\mu p_\mu+m^\star)_{\alpha\beta}}{2m^\star}\\ &\sum_r v^{(r)}_\alpha(\vec{p})\bar{v}^{(r)}_\beta(\vec{p}) = \frac{(\gamma^\mu p_\mu-m^\star)_{\alpha\beta}}{2m^\star}.\end{aligned} \qquad (10.57)$$

Possiamo pertanto scrivere il propagatore nel mezzo come:

$$
\begin{aligned}
iS_\rho(x-y) =& <\rho|T\left(q(x)\bar{q}(x)\right)|\rho> \\
=& \theta(x_0-y_0)N_c\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^\mu p_\mu+m^\star}{2E}e^{-ip\cdot(x-y)}\theta(p-p_F)+ \\
& -\theta(y_0-x_0)N_c\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^\mu p_\mu+m^\star}{2E}e^{-ip\cdot(x-y)}\theta(p_F-p)+ \\
& -\theta(y_0-x_0)N_c\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^\mu p_\mu-m^\star}{2E}e^{ip\cdot(x-y)}. \qquad (10.58)
\end{aligned}
$$

Utilizzando ora le seguenti rappresentazioni integrali delle funzioni $\theta$:

$$
\begin{aligned}
\theta(x_0-y_0) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega(x_0-y_0)}}{\omega+i\epsilon} \\
\theta(y_0-x_0) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\frac{e^{i\omega(x_0-y_0)}}{\omega+i\epsilon}, \qquad (10.59)
\end{aligned}
$$

giungiamo infine alla seguente espressione per il propagatore relativistico nel mezzo a $T=0$ in approssimazione di campo medio:

$$
\begin{aligned}
S_\rho(x-y) &= -i<\rho|T\left(q(x)\bar(q)(x)\right)|\rho> \\
&= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu p_\mu+m^\star}{2E}\left\{\frac{\theta(p-p_F)}{p_0-E+i\epsilon}+\frac{\theta(p_F-p)}{p_0-E-i\epsilon}-\frac{1}{p_0+E-i\epsilon}\right\}e^{-ip\cdot(x-y)}. \qquad (10.60)
\end{aligned}
$$

Possiamo pertanto calcolare il condensato chirale ottenendo:

$$
\begin{aligned}
<\rho|\bar{q}\,q|\rho> &= -i\lim_{y\to x^+}TrS_\rho(x-y) \\
&= -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{2m^\star}{E}\left\{\frac{\theta(p-p_F)}{p_0-E+i\epsilon}+\frac{\theta(p_F-p)}{p_0-E-i\epsilon}-\frac{1}{p_0+E-i\epsilon}\right\}e^{ip_0\eta} \\
&= -N_c\int_0^\Lambda\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{2m^\star}{E}+N_c\int_0^{p_F}\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{2m^\star}{E} \\
&= -\frac{3}{\pi^2}\int_{p_F}^\Lambda dp\frac{p^2m^\star}{\sqrt{p^2+(m^\star)^2}}. \qquad (10.61)
\end{aligned}
$$

Come vediamo il condensato continua ad essere negativo, ma la presenza del mezzo fa sì che il suo valore assoluto sia minore che nel vuoto e decresca al crescere di $p_F$, cioè della densità barionica. All'interno del mezzo il quark sviluppa quindi una massa dinamica data da:

$$
m^\star = m+\frac{6G}{\pi^2}\int_{p_F}^\Lambda dp\frac{p^2m^\star}{\sqrt{p^2+(m^\star)^2}}. \qquad (10.62)
$$

Al crescere di $p_F$ la massa dinamica tende alla massa nuda.

### 10.4.1 Il caso $m = 0$

Nel caso in cui si abbia una massa nuda del quark nulla, ovvero $m = 0$, la densità di lagrangiana di NJL, come già evidenziato, è invariante per trasformazioni chirali. Studiando il modello in approssimazione di campo medio abbiamo trovato che il quark acquista una massa efficace dipendente dall'interazione e dalla presenza del mezzo data da:

$$m^\star = \frac{6G}{\pi^2}\int_{p_F}^{\Lambda} dp \frac{p^2 m^\star}{\sqrt{p^2 + (m^\star)^2}}. \tag{10.63}$$

Nel caso che sia $p_F = \Lambda$ abbiamo dunque che $m^\star = 0$ e la simmetria chirale è ripristinata. In realtà tale simmetria è ripristinata ben prima che l'impulso di Fermi raggiunga il cutoff. Si trova infatti che esiste un *impulso di Fermi critico* a partire dal quale è possibile solo la soluzione con $m^\star = 0$.
Cerchiamo ora la condizione che deve essere soddisfatta affinchè sia possibile la soluzione con $m^\star \neq 0$. Avremo in questo caso che:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{6G}{\pi^2}\int_{p_F}^{\Lambda} dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + (m^\star)^2}} < \frac{3G}{\pi^2}\left(\Lambda^2 - p_F^2\right) \\ &\Rightarrow \; p_F < \Lambda\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{3G\Lambda^2}} = p_{Fc}. \end{aligned} \tag{10.64}$$

Pertanto per $p_F > p_{Fc}$ la simmetria chirale è ripristinata. Utilizzando i seguenti parametri:

$$\Lambda = 602.3 \text{ MeV} \qquad\qquad G\Lambda^2 = 4.637\,, \tag{10.65}$$

otteniamo:

$$p_{Fc} = 324.638 \text{ MeV}\,. \tag{10.66}$$

## 10.5 Il condensato chirale a temperatura e densità finita

Calcoliamo ora il valore del condensato chirale nel mezzo a temperatura finita utilizzando l'equazione:

$$<\bar{q}\, q>_{T,\rho} = -i \lim_{\vec{y}\to\vec{x}} \lim_{\tau_y \to \tau_x^+} Tr\, S(\vec{x} - \vec{y}, \tau_x - \tau_y), \tag{10.67}$$

dove, come in precedenza, la traccia è presa sugli indici di colore e sui normali indici spinoriali e con $S(\vec{x} - \vec{y}, \tau_x - \tau_y)$ intendiamo il *propagatore di Matsubara* a tempi immaginari in approssimazione di campo medio, definito nel modo seguente:

$$S(\vec{x}-\vec{y},\tau_x-\tau_y) = \frac{i}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n(\tau_x-\tau_y)}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\frac{1}{\gamma^0(i\omega_n+\mu)-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}-m^\star}, \tag{10.68}$$

intendendo con $m^\star$:

$$m^\star = m - 2G <\bar{q}\,q>_{T,\rho} \,. \tag{10.69}$$

In questo caso, essendo $q$ un campo fermionico, le frequenze di Matsubara sono definite come:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\beta}(2n+1). \tag{10.70}$$

Ai fini del calcolo del condensato chirale e del confronto con il propagatore fermionico non relativistico a temperatura finita, è utile scrivere il propagatore (10.68) nel modo seguente:

$$S(\vec{x}-\vec{y},\tau_x-\tau_y) = \frac{i}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n(\tau_x-\tau_y)}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\frac{\gamma^0(i\omega_n+\mu)-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+m^\star}{(i\omega_n+\mu)^2-\vec{p}^2-(m^\star)^2}, \tag{10.71}$$

e pertanto, ponendo $\epsilon_p = \sqrt{\vec{p}^2+(m^\star)^2}$, abbiamo che:

$$S(\vec{p},\omega_n) = i\left(\gamma^0(i\omega_n+\mu)-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+m^\star\right)\frac{1}{2\epsilon_p}\left[\frac{1}{(i\omega_n+\mu)-\epsilon_p}-\frac{1}{(i\omega_n+\mu)+\epsilon_p}\right]. \tag{10.72}$$

Nel momento in cui valutiamo la traccia di tale espressione otteniamo:

$$-i\,Tr\;S(\vec{p},\omega_n) = N_c\frac{2m^\star}{\epsilon_p}\left[\frac{1}{(i\omega_n+\mu)-\epsilon_p}-\frac{1}{(i\omega_n+\mu)+\epsilon_p}\right]. \tag{10.73}$$

Ricordiamo ora che il propagatore non relativistico fermionico libero nel mezzo, nello spazio degli impulsi e delle frequenze di Matsubara, è dato da[1]:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\vec{p},\omega_n) = \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{i\omega_n-(\epsilon_p^0-\mu)/\hbar} \tag{10.74}$$

e pertanto, effettuando la traccia sugli indici di spin, otteniamo, ponendo $\hbar = 1$:

$$Tr\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\vec{p},\omega_n) = 2\frac{1}{(i\omega_n+\mu)-\epsilon_p^0}. \tag{10.75}$$

[1] La funzione di Green termica non relativistica qui riportata segue la notazione utilizzata dal Walecka e differisce per un fattore $i$ dal propagatore definito nell'equazione 10.68: di questo occorre tener conto quando si utilizza tale funzione di Green per il calcolo della densità del sistema.

Notiamo pertanto che, ignorando la degenerazione di colore e la parte ad energia negativa, tale risultato coincide con la (10.73) a meno del fattore $m^\star/\epsilon_p$ dovuto al fatto che, mentre $\bar{q}q$ è uno scalare, $\psi^\dagger\psi$ si trasforma invece come la componente zero di un quadrivettore sotto trasformazioni di Lorentz. Torniamo ora al calcolo del condensato chirale dato da:

$$\begin{aligned} <\bar{q}\,q>_{T,\rho} &= -i \lim_{\eta\to 0^+} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n \eta} Tr\ S(\vec{p},\omega_n) \\ &= N_c \lim_{\eta\to 0^+} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n \eta} \frac{2m^\star}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{(i\omega_n+\mu)-\epsilon_p} - \frac{1}{(i\omega_n+\mu)+\epsilon_p} \right]. \end{aligned} \tag{10.76}$$

La somma sulle frequenze può essere valutata con la solita procedura di integrazione esposta nel paragrafo (4.2.2). Possiamo pertanto scrivere:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n \eta} \frac{2m^\star}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{(i\omega_n+\mu)-\epsilon_p} - \frac{1}{(i\omega_n+\mu)+\epsilon_p} \right] = \\ &\qquad = -\int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{(z-\mu)\eta}}{e^{\beta(z-\mu)}+1} \frac{2m^\star}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{z-\epsilon_p} - \frac{1}{z+\epsilon_p} \right], \end{aligned} \tag{10.77}$$

dove con $C$ intendiamo il cammino che avvolge l'asse $Re(z) = \mu$ in senso antiorario racchiudendo i poli $z = i\omega_n + \mu$. Per valutare esplicitamente i due termini che contribuiscono all'integrale modificheremo pertanto il cammino in modo che questo avvolga in un caso il polo $z = \epsilon_p$ e nell'altro il polo $z = -\epsilon_p$. Tenendo quindi conto che:

$$-\frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_p+\mu)}+1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p+\mu)}+1} - 1, \tag{10.78}$$

giungiamo infine al risultato:

$$\begin{aligned} <\bar{q}\,q>_{T,\rho} &= N_c \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{2m^\star}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p+\mu)}+1} - 1 \right] \\ &= \frac{3}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2 m^\star}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p+\mu)}+1} - 1 \right], \end{aligned} \tag{10.79}$$

in cui compaiono in modo esplicito i contributi di quark, antiquark e del vuoto. Pertanto, se partiamo da massa nuda nulla, utilizzando l'equazione (10.69), giungiamo all'equazione:

$$m^\star = -\frac{6G}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2 m^\star}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p+\mu)}+1} - 1 \right]. \tag{10.80}$$

Notiamo come:

$$\lim_{T\to\infty} <\bar{q}\, q>_{T,\rho} = 0, \tag{10.81}$$

che implica che ad alte temperature (purchè si parta da massa nuda nulla) la simmetria chirale è ripristinata.
Considerando invece il limite $T \to 0$ e tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \lim_{T\to 0} \mu &= \epsilon_F \\ \lim_{T\to 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p-\mu)}+1} &= \theta(p_F - p) \\ \lim_{T\to 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p+\mu)}+1} &= 0, \end{aligned} \tag{10.82}$$

giungiamo al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \lim_{T\to 0} <\bar{q}\, q>_{T,\rho} &= N_c \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{2m^\star}{\epsilon_p} \left[\theta(p_F - p) - 1\right] \\ &= -\frac{3}{\pi^2} \int_{p_F}^{\Lambda} dp \frac{p^2 m^\star}{\sqrt{p^2 + (m^\star)^2}}, \end{aligned} \tag{10.83}$$

che coincide con quanto trovato nel paragrafo (10.4).
È interessante valutare come si comporta invece la *densità barionica* al variare della temperatura e del potenziale chimico. Possiamo partire dagli sviluppi dei campi in operatori di creazione e distruzione pesati dalle funzioni d'onda spinoriali:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},r} \sqrt{\frac{m^\star}{E}} \left[u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} b_{\vec{p}}^{(r)} + v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip\cdot x} d_{\vec{p}}^{(r)\dagger}\right]_{p_0=E} \\ q^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},r} \sqrt{\frac{m^\star}{E}} \left[u^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{ip\cdot x} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} + v^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} d_{\vec{p}}^{(r)}\right]_{p_0=E}, \end{aligned} \tag{10.84}$$

dove per non appesantire la notazione abbiamo omesso gli indici di colore.
Effettuando una rotazione di Wick a tempi immaginari otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} q(\vec{x}, -i\tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},r} \sqrt{\frac{m^\star}{E}} \left[u^{(r)}(\vec{p}) e^{-E\tau} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} b_{\vec{p}}^{(r)} + v^{(r)}(\vec{p}) e^{E\tau} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} d_{\vec{p}}^{(r)\dagger}\right] \\ q^\dagger(\vec{x}, -i\tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},r} \sqrt{\frac{m^\star}{E}} \left[u^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{E\tau} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} + v^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{-E\tau} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d_{\vec{p}}^{(r)}\right]. \end{aligned} \tag{10.85}$$

La densità barionica è definita come:

$$\rho_B = \frac{1}{3} <: q^\dagger_{\alpha,c}(\vec{x}, -i\tau) q_{\alpha,c}(\vec{x}, -i\tau) :>= \frac{1}{3} N_c <: q^\dagger_\alpha(\vec{x}, -i\tau) q_\alpha(\vec{x}, -i\tau) :> , \tag{10.86}$$

in cui la dipendenza dal colore è stata fattorizzata nel fattore di degenerazione $N_c$ e il simbolo $: \ldots :$ indica l'operazione di *prodotto normale*. Utilizzando i seguenti valori medi sull'ensemble a $T$ e $\mu$ finiti:

$$\begin{aligned} < b^{(r)\dagger}_{\vec{p}} b^{(s)}_{\vec{k}} > &= \delta_{rs} \delta_{\vec{p}\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} \\ < d^{(r)\dagger}_{\vec{p}} d^{(s)}_{\vec{k}} > &= \delta_{rs} \delta_{\vec{p}\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p + \mu)} + 1}, \end{aligned} \tag{10.87}$$

e tenendo conto della normalizzazione degli spinori per cui:

$$\begin{aligned} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= \delta_{rs} \frac{E}{m^\star} \\ v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) &= \delta_{rs} \frac{E}{m^\star}, \end{aligned} \tag{10.88}$$

otteniamo per la densità barionica la formula:

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{1}{3} \cdot N_c \cdot 2 \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p + \mu)} + 1} \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda p^2 \, dp \left[ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p + \mu)} + 1} \right], \end{aligned} \tag{10.89}$$

dove il fattore 2 è dovuto alla somma sugli indici di spin. Notiamo che valgono i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{T \to 0} \rho_B &= \frac{p_F^3}{3\pi^2} \\ \lim_{T \to \infty} \rho_B &= 0, \end{aligned} \tag{10.90}$$

e inoltre $\rho_B(\mu = 0) = 0$.

Nel seguito del capitolo presenteremo i risultati, ottenuti numericamente, per l'andamento del condensato (e quindi della massa efficace) al variare della temperatura e del potenziale chimico. È opportuno sottolineare che di norma si considera il potenziale chimico come una funzione della temperatura e della densità, che sono i due parametri fisici che caratterizzano il sistema. Nel caso di un sistema di particelle fermioniche non relativistiche non interagenti abbiamo per esempio che il potenziale chimico è dato dal seguente sviluppo:

$$\mu(T, T_F) = \epsilon_F \left[ 1 + a \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + b \left( \frac{T}{T_F} \right)^4 + \ldots \right]. \tag{10.91}$$

Nel caso che stiamo studiando, per la natura delle equazioni che abbiamo ricavato in questo paragrafo, è invece più conveniente pensare $\mu$ e $T$ come variabili indipendenti e la densità barionica come una quantità determinata da questi due parametri attraverso l'equazione (10.89). Questo non deve però farci dimenticare che è la densità barionica, e non il potenziale chimico, la vera osservabile fisica.
Può essere utile confrontare l'equazione (10.89), ottenuta nell'ambito del modello NJL in approssimazione di campo medio, con l'espressione che avrebbe la densità barionica se supponessimo i quark particelle massless non interagenti. In tal caso otterremmo (per un solo sapore):

$$\begin{aligned}\rho_B &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty} p^2\,dp\left[\frac{1}{e^{\beta(p-\mu)}+1}-\frac{1}{e^{\beta(p+\mu)}+1}\right]\\ &= \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\beta^3}\int_0^{+\infty} x^2\,dx\left[\frac{e^{\beta\mu}}{e^x+e^{\beta\mu}}-\frac{e^{-\beta\mu}}{e^x+e^{-\beta\mu}}\right]. \qquad (10.92)\end{aligned}$$

Nel caso di quark massless non interagenti avremmo pertanto che $\rho_B\beta^3$ è una funzione universale dipendente da $\beta\mu$.

## 10.6 Risultati numerici

Riportiamo ora i risultati numerici ottenuti nel caso $m = 0$ con la seguente scelta di parametri:

$$\begin{aligned}\Lambda &= 602.3\text{MeV}\\ G\Lambda^2 &= 4.637. \qquad (10.93)\end{aligned}$$

### 10.6.1 Risultati numerici a $T = 0$

In figura (10.1) abbiamo riportato l'andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione dell'impulso di Fermi a temperatura zero, risolvendo per diversi valori di $p_F$ l'equazione (10.62) con massa nuda nulla. Notiamo che, a partire da un impulso di Fermi critico pari a $p_{Fc} = 324.638$ MeV, la massa efficace si annulla e la simmetria chirale è ripristinata.

Avendo così trovato il comportamento della massa efficace come funzione dell'impulso di Fermi $p_F$ e utilizzando l'equazione che ci definisce il potenziale chimico:

$$\mu = \sqrt{p_F^2 + (m^\star(p_F))^2}, \qquad (10.94)$$

possiamo ricavare numericamente l'andamento del potenziale chimico al variare dell'impulso di Fermi, ovvero della densità barionica. Il risultato ottenuto, mostrato in figura (10.2), non è per nulla banale. Notiamo infatti che

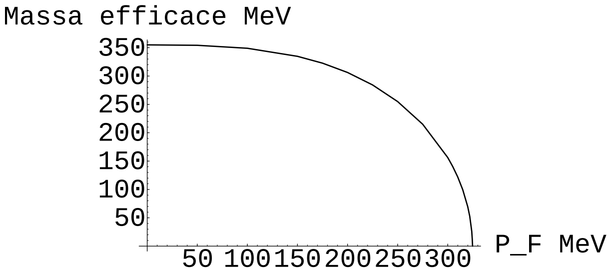


Figura 10.1: Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione dell'impulso di Fermi a $T = 0$.

la funzione $\mu = \mu(p_F)$ non è monotona: questo significa che a un dato potenziale chimico (energia di Fermi) corrispondono più valori di $p_F$ e quindi, dal grafico in figura (10.1), più valori di $m^\star$. Esiste poi un valore critico $\mu_c$ del potenziale chimico al di sopra del quale abbiamo solo la soluzione $m^\star = 0$. Numericamente abbiamo trovato:

$$\mu_c = 367.128 \text{ MeV} \qquad \text{per} \qquad p_F = 175 \text{ MeV}. \tag{10.95}$$

Notiamo inoltre che la funzione presenta un punto angoloso in $p_F = p_{Fc} = 324.638$ MeV: è questo infatti l'impulso di Fermi a cui si verifica la transizione di fase chirale.

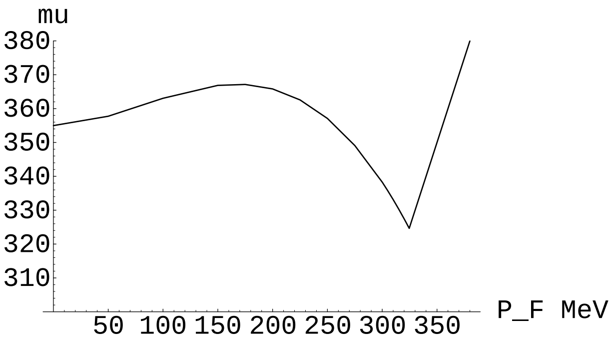


Figura 10.2: Andamento del potenziale chimico $\mu$ in funzione di $p_F$ a $T = 0$.

Il fatto che ad una data energia di Fermi corrispondano diversi valori di

$p_F$ e quindi di $m^\star$, cioè del condensato, sembrerebbe indicare la possibilità di coesistenza di più fasi, ognuna corrispondente ad un certo valore del condensato. In realtà perchè possano coesistere più fasi è necessario che anche le loro pressioni siano uguali. Utilizzando l'equazione:

$$\epsilon(p_F) = -\frac{3}{\pi^2}\int_{p_F}^{\Lambda} dp\, p^2\sqrt{p^2 + (m^\star(p_F))^2} + \frac{(m^\star(p_F))^2}{4G}, \tag{10.96}$$

possiamo studiare il comportamento della densità di energia al variare di $p_F$ (notiamo che la densità di energia è fissata in modo univoco dall'impulso di Fermi). Risolvendo numericamente l'equazione (10.96) per diversi valori di $p_F$ otteniamo il grafico riportato in figura (10.3). Sembrerebbe pertanto che, data un'energia di Fermi, sarà termodinamicamente favorita la soluzione con impulso di Fermi minore, cioè con massa efficace maggiore. Possiamo anche studiare l'andamento con $p_F$ dell'energia per particella tenendo conto che:

$$\frac{E}{N} = \frac{E}{V}\cdot\frac{V}{N} = \frac{\epsilon}{3\rho_B} = \frac{\epsilon(p_F)\pi^2}{p_F^3}. \tag{10.97}$$

Otteniamo così il grafico riportato in figura (10.4). Il risultato ottenuto non è particolarmente incoraggiante in quanto la funzione non presenta punti di minimo in corrispondenza di alcun valore di $p_F$ e inoltre avremmo che:

$$\lim_{p_F\to 0}\frac{E}{N} = -\infty. \tag{10.98}$$

In base a questi risultati un sistema costituito da $N$ quark tenderebbe ad espandersi indefinitamente, fino ad avere densità nulla, e l'energia per particella tenderebbe al valore $-\infty$.

Questi problemi interpretativi possono essere evitati sottraendo alla densità di energia del mezzo la densità di energia del vuoto (quello con condensato non nullo). Otteniamo pertanto:

$$\begin{aligned}\epsilon(p_F) - \epsilon(0) = &-\frac{3}{\pi^2}\int_{p_F}^{\Lambda} dp\, p^2\sqrt{p^2 + (m^\star(p_F))^2} + \frac{(m^\star(p_F))^2}{4G} + \\ &+ \frac{3}{\pi^2}\int_{0}^{\Lambda} dp\, p^2\sqrt{p^2 + (m^\star)^2} - \frac{(m^\star)^2}{4G}.\end{aligned} \tag{10.99}$$

L'energia per particella sarà pertanto regolarizzata nel seguente modo:

$$\frac{\widetilde{E}}{N} = \frac{\epsilon(p_F) - \epsilon(0)}{3\rho_B} = \frac{(\epsilon(p_F) - \epsilon(0))\,\pi^2}{p_F^3}. \tag{10.100}$$

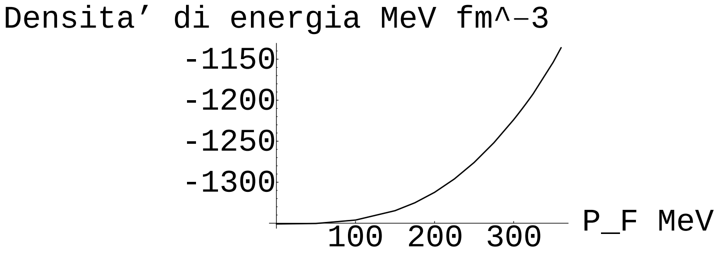


Figura 10.3: Densità di energia in funzione di $p_F$ a $T = 0$.

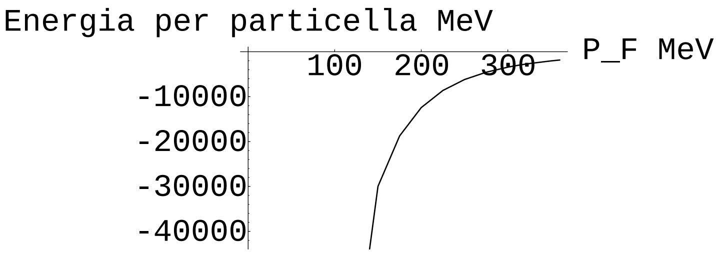


Figura 10.4: Energia per particella in funzione di $p_F$ a $T = 0$.

Il comportamento dell'energia per particella per $p_F \to 0$ può essere studiato in maniera quasi analitica. Per piccoli valori di $p_F$ infatti $m^\star(p_F)$ può essere considerata praticamente costante e pari al suo valore nel vuoto. Possiamo pertanto scrivere, nel caso $p_F \ll m^\star$:

$$\begin{aligned} \epsilon(p_F) - \epsilon(0) &\sim \frac{3}{\pi^2}\int_0^{p_F} dp\, p^2\sqrt{p^2+(m^\star)^2} = \frac{3}{\pi^2}m^\star \int_0^{p_F} dp\, p^2\sqrt{1+\left(\frac{p}{m^\star}\right)^2} \\ &\sim \frac{3}{\pi^2}m^\star \int_0^{p_F} dp\, p^2 = \frac{1}{\pi^2}m^\star p_F^3 \qquad (10.101) \\ \lim_{p_F\to 0}\frac{\widetilde{E}}{N} &= m^\star. \qquad (10.102) \end{aligned}$$

Numericamente otteniamo i risultati riportati nelle figure (10.5) e (10.6). Notiamo come l'energia per particella presenti un punto di massimo per $p_F \simeq$ 200 MeV e due punti di minimo: uno per $p_F = 0$ e uno per $p_F \simeq 360$ MeV. In corrispondenza di questi due valori di $p_F$ il sistema si trova in una configurazione di equilibrio. Infatti dall'equazione:

$$P = \rho^2 \frac{d}{d\rho}\left(\frac{E}{N}\right), \qquad (10.103)$$

abbiamo che, dove $E/N$ ha un minimo, la pressione si annulla e quindi il sistema nè si espande nè si contrae.
Fissato quindi il numero barionico, che *deve essere conservato*, il sistema evolverà, a seconda della densità iniziale, verso uno dei due minimi.
Se partiamo da $p_F < 200$ MeV abbiamo:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{E}{N}\right) > 0 \qquad \Rightarrow P > 0 \qquad (10.104)$$

e quindi il sistema tenderà ad espandersi fino ad avere densità nulla a $p_F = 0$.
Se invece partiamo da $200 < p_F < 360$ MeV, essendo in questo caso:

$$P = \rho^2 \frac{d}{d\rho}\left(\frac{E}{N}\right) < 0\,, \qquad (10.105)$$

il sistema tenderà a contrarsi e quindi ad aumentare la sua densità fino a $p_F \simeq 360$ MeV, che è maggiore di $p_{Fc}$. Pertanto in questo caso, pur partendo con una massa efficace anche non nulla (se inizialmente $p_F < p_{Fc}$), il sistema tenderà ad andare incontro alla transizione di fase chirale.
Infine, per valori iniziali di $p_F > 360$ MeV, il sistema si espanderà fino a raggiungere l'equilibrio a $p_F \simeq 360$ MeV.

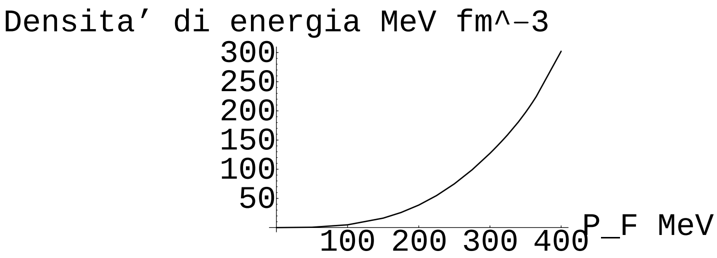


Figura 10.5: Densità di energia in funzione di $p_F$ a $T = 0$ dopo aver sottratto il contributo del vuoto.

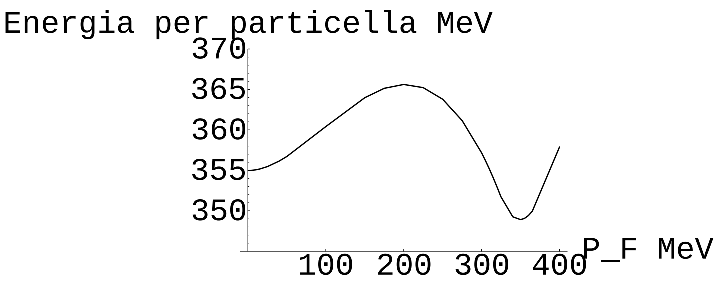


Figura 10.6: Energia per particella in funzione di $p_F$ a $T = 0$ dopo aver sottratto il contributo del vuoto.

### 10.6.2 Risultati numerici a $T \neq 0$

Consideriamo ora il comportamento del sistema a $T$ e $\mu$ finiti. Iniziamo a riportare nelle figure (10.7), (10.8), (10.9) l'andamento della massa efficace al variare della temperatura per valori di $\mu$ pari a 0, 100 e 200 MeV.

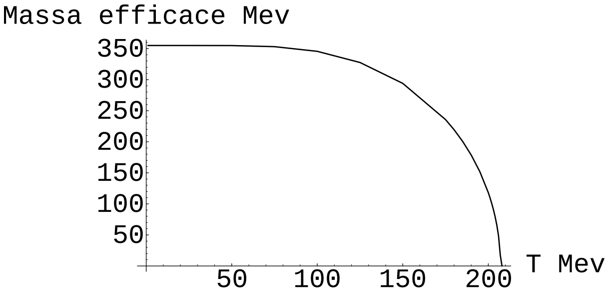


Figura 10.7: Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu = 0$.

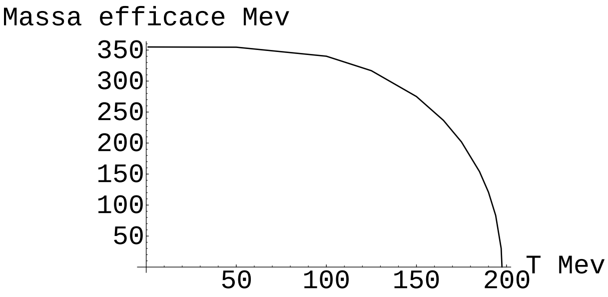


Figura 10.8: Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu = 100$ MeV.

Notiamo come nei tre casi il comportamento della funzione sia qualitativamente molto simile. Esiste una temperatura critica $T_c$ a partire dalla quale il condensato si annulla: al crescere di $\mu$ tale temperatura critica si abbassa. In tutti e tre i casi la massa efficace, che può essere presa come *parametro d'ordine* del sistema, tende a zero con continuità al tendere di $T$ a $T_c$. A

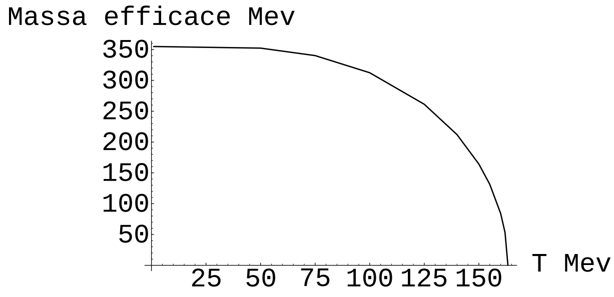


Figura 10.9: Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu = 200$ MeV.

presentare una discontinuità in $T = T_c$ è la sua derivata $\frac{dm^\star}{dT}$ e questo ci fa concludere che ci troviamo di fronte ad una transizione di fase del secondo ordine. Numericamente otteniamo i seguenti risultati:

| $\mu$ (MeV) | $T_c$ (MeV) |
|---|---|
| 0 | 207.153 |
| 100 | 197.489 |
| 200 | 163.318 |

Possiamo capire l'origine di tale comportamento plottando numericamente, a $\mu$ fissato e per diversi valori di $T$, la funzione:

$$f(m^\star, \mu, T) = -\frac{6G}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{\epsilon_p} \left[ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p + \mu)} + 1} - 1 \right] - 1, \quad (10.106)$$

i cui zeri ci forniscono i valori della massa efficace $m^\star$. In figura (10.10) riportiamo i risultati trovati a $\mu = 200$ MeV per $T = 162, 163, 164$ MeV. Notiamo che, con l'aumentare della temperatura, l'intersezione con l'asse delle ascisse si ha per valori di $m^\star$ via via minori fino a $m^\star = 0$ per $T = 163.318$ MeV: per temperature superiori la funzione non presenta ulteriori intersezioni e pertanto l'unica soluzione è quella banale $m^\star = 0$.

Possiamo anche vedere il comportamento della densità barionica, ad esempio a $\mu$ fissato, al variare della temperatura (sempre nell'ambito del modello NJL) utilizzando la (10.89). In figura (10.11) abbiamo riportato il suo andamento per $\mu = 200$ MeV.

Un comportamento decisamente diverso della massa efficace in funzione della temperatura si ha per $\mu = 300$ MeV. Come possiamo vedere dal grafico

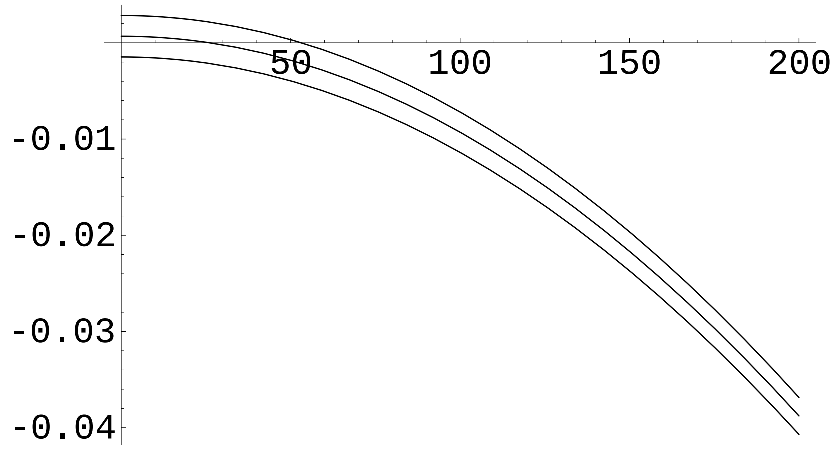


Figura 10.10: Ricerca della massa efficace $m^\star$ a $\mu = 200$ MeV per $T = 162,\ 163,\ 164$ MeV (dall'alto verso il basso). In ascissa è riportata $m^\star$ misurata in MeV.

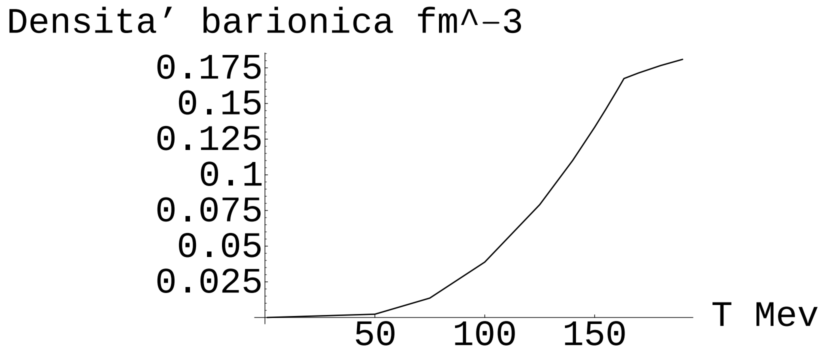


Figura 10.11: Densità barionica al variare di $T$ a $\mu = 200$ MeV.

riportato in figura (10.12), la funzione $m^\star = m^\star(T)$ presenta una discontinuità per $T = 77.306$ MeV in cui passa da $m^\star = 174.468$ MeV a $m^\star = 0$. In questo caso pertanto sembra che ci troviamo di fronte ad una transizione di fase del primo ordine.
In figura (10.13) abbiamo riportato l'andamento della funzione (10.106) per diversi valori della temperatura. Vediamo come, mentre a $T = 77.306$ MeV abbiamo ancora una massa efficace $m^\star = 174.468$ MeV, per temperature immediatamente superiori rimane solo la soluzione $m^\star = 0$. I valori critici di $T$ e $m^\star$ sono stati trovati risolvendo numericamente il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} f(m^\star, T, \mu = 300) &= 0 \\ \frac{\partial f(m^\star, T, \mu = 300)}{\partial m^\star} &= 0. \end{aligned} \tag{10.107}$$

Questo comportamento discontinuo della massa efficace, analizzato nel caso $\mu = 300$ MeV, si può osservare numericamente per $\mu > 285$ MeV.
Notiamo che, a $\mu = 300$ MeV fissato, c'è un piccolo range di temperature, che si trova numericamente essere $71.41 < T < 77.306$ MeV, in cui abbiamo due diversi valori di $m^\star$ oltre alla soluzione banale $m^\star = 0$. Questa molteplicità era già stata osservata a $T = 0$. Ci si può attendere che il fenomeno sia presente con continuità a partire da $\mu \approx 285$ MeV fino a $\mu_c = 367.128$ MeV.

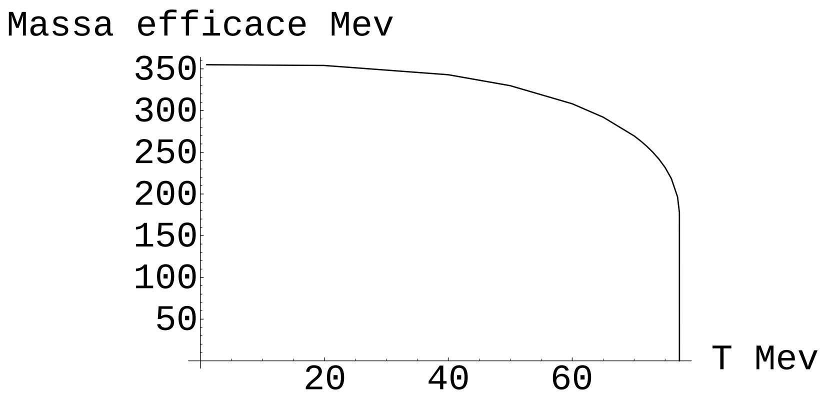


Figura 10.12: Andamento della massa efficace $m^\star$ in funzione della temperatura a $\mu = 300$ MeV.

In figura (10.14) abbiamo riportato la linea di transizione dalla fase con simmetria chirale rotta a quella con simmetria chirale ripristinata. Tale curva

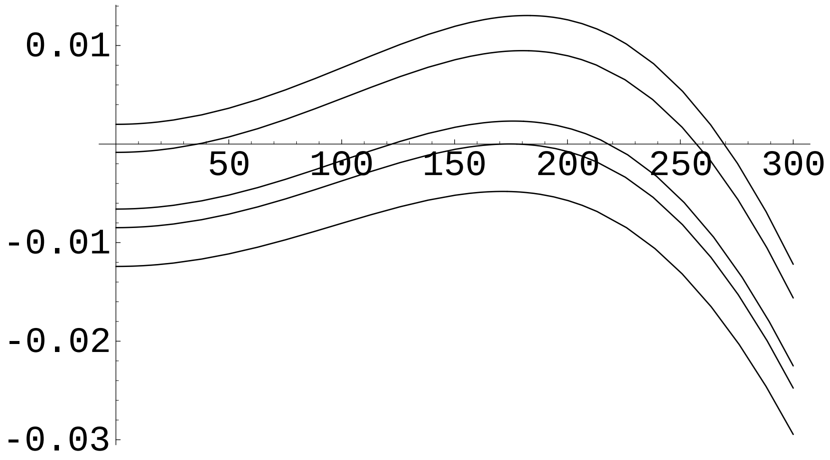


Figura 10.13: Ricerca della massa efficace $m^\star$ a $\mu = 300$ MeV per $T = 70,\ 72,\ 76,\ 77.306,\ 80$ MeV (dall'alto verso il basso). In ascissa è riportata $m^\star$ misurata in MeV.

è stata ottenuta determinando, a $\mu$ di volta in volta fissato, la temperatura a partire dalla quale si ha solo la soluzione $m^\star = 0$.
È opportuno distinguere due regimi: per $T$ grande e $\mu$ piccolo la transizione è del secondo ordine, mentre per $T$ piccola e $\mu$ grande la transizione è del primo ordine.
Si noti che la temperatura limite, al di sopra della quale la fase chirale è sempre presente, anche a $\mu = 0$, è poco sopra 200 MeV, valore in ottimo accordo con quanto si trova in letteratura.

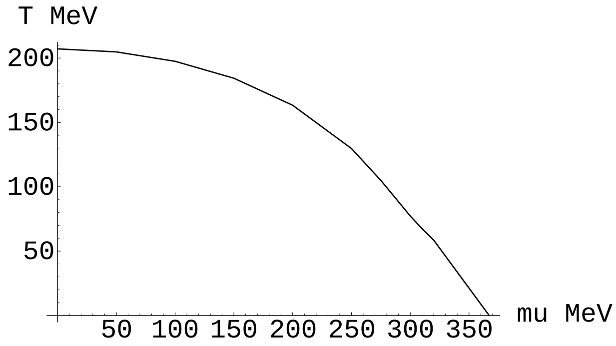


Figura 10.14: Linea di transizione di fase nel piano $(\mu, T)$.

# Conclusioni

Molti sono gli argomenti trattati in questa tesi che meriterebbero un maggiore approfondimento.

Nell'ambito del modello di Nambu Jona-Lasinio sarebbe interessante andare oltre l'approssimazione di campo medio e vedere come ciò si rifletta sulla transizione di fase chirale. Inoltre la procedura di regolarizzazione della densità di energia a $T = 0$ è forse eccessivamente "naïve" e meriterebbe una trattazione più rigorosa. Si dovrebbe poi estendere la regolarizzazione al caso di temperatura finita e studiare il comportamento della densità di energia e dell'energia per particella al variare di $T$ e $\mu$.

Molti sono i problemi ancora aperti nella fisica del QGP.
Un problema teorico è quello dell'identificazione della transizione di fase chirale con la transizione alla fase deconfinata: i calcoli su reticolo indicano che esse si verificano alla stessa temperatura, ma perchè le due transizioni coincidano non è ben chiaro.
Un altro problema non ancora risolto è legato al tempo di termalizzazione: nell'ambito della teoria dei campi a temperatura finita il QGP viene trattato come un sistema all'equilibrio termico, nonostante si stimi che, nell'intervallo di tempo di pochi $fm/c$ nei quali si ritiene che si realizzi la fase deconfinata, il sistema non riesca a raggiungere l'equilibrio.
È inoltre ancora argomento di disussione l'effetto dell'eventuale deconfinamento sui segnali rivelati, ad esempio sulla molteplicità degli adroni prodotti: si tratta comunque di segnali indiretti, non ci si aspetta certo di rivelare quark liberi. In quest'ottica grande importanza riveste lo studio dei moti collettivi nel QGP, argomento che è stato in parte affrontato in questa tesi e che, insieme alla descrizione del QGP in termini di quasi-particelle, meriterebbe un ulteriore sviluppo.
La complessità dell'argomento suggerisce la necessità di stabilire una connessione tra i diversi approcci con cui viene affrontato: QFT su reticolo e a temperatura finita, fisica dei sistemi a molti corpi, equazioni cinetiche ....

# Bibliografia


[1] Jean-Paul Blaizot: *Theory of the Quark-Gluon Plasma*, hep-ph/0107131.

[2] Blaizot, Jancu: *The quark-gluon plasma: Collective dynamics and hard thermal loops*, hep-ph/0101103.

[3] M. Le Bellac: *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford University Press, 1991.

[4] M. Le Bellac: *Thermal field theory*, Cambridge University Press, 1996.

[5] Fetter, Walecka: *Quantum Theory of Many Particle Systems*, Mc-Graw Hill, New-York, 1971.

[6] J. D. Walecka: *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, Oxford University Press, 1995.

[7] P. F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi, C. Manuel: Phys. Rev. Lett.**72**, 1994.

[8] M. Creutz: *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, 1983.

[9] P. Rehberg, S. P. Klevansky, J. Hüfner: *Hadronization in the SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model*, Phys. Rev. **C53**, 1996.

[10] P. Ginsparg, Nucl. Phys. **B170**, 1980.

[11] E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii: *Physical Kinetics*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[12] M. I. Gorenstein, S. N. Yang: *Gluon plasma with a medium-dependent dispertion relation*, Phys. Rev. **D52**, 1995.

[13] M. B. Barbaro, A. Molinari, M. R. Quaglia: *Minimal Theory of a few Structures of Matter (Atoms, Molecules and Crystals)*, CLU, Anno Accademico 1999-2000.

[14] W. M. Alberico, A. Molinari: appunti alle lezioni del corso di Teoria dei Sistemi a Molti Corpi.

[15] W. M. Alberico, A. Molinari: appunti alle lezioni del corso di Teoria della Struttura Nucleare.

[16] A. Bottino, C. Giunti: *Lezioni di Fisica Teorica*, CLU, 1999.

[17] F. Giacosa: *Transizioni di fase chirali nel modello di Nambu Jona-Lasinio*, Tesi di Laurea, Anno Accademico 1999-2000.