Dimostrazione della formula $E = mc^2$ per studenti di quinta liceo

Emanuele Biolcati

26 marzo 2018

Partiamo da tre leggi fondamentali della Fisica:

1. Secondo principio della dinamica, scritto in modo generale, cioé in funzione della quantità di moto $p = mv$:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \tag{1}$$

2. Teorema dell'energia cinetica, secondo cui il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = L \tag{2}$$

3. La definizione di massa relativistica che essenzialmente deriva dalla necessità di mantenere la conservazione della quantità di moto anche in caso di velocità relativistiche:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Consideriamo un oggetto che si muova partendo da fermo fino a velocità prossime a quella della luce ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Scriviamo il teorema dell'energia cinetica per una variazione infinitesima (questa assunzione ci servirà per sfruttare al meglio gli operatori di derivazione), ovvero passando da ΔK a dK. Il lavoro infinitesimo può essere scritto in funzione di uno spostamento infinitesimo come $dL = Fdx$. Si ha:

$$dK = F\,dx \tag{4}$$

riscriviamo la (1) esprimendo la derivata come derivata di un prodotto di funzioni:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} \tag{5}$$

e sostituiamo questa espressione della forza nella (4) e poi *spostiamo* i denominatori dell'operatore derivata[1]:

$$dE = \left(\frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}\right) dx = dm\, v\frac{dx}{dt} + m\, dv\frac{dx}{dt} \tag{6}$$

ma $\frac{dx}{dt} = v$, velocità dell'oggetto, quindi:

$$dK = dm\, v^2 + m\, v\, dv. \tag{7}$$

Ora, senza alcun apparente motivo, proviamo a calcolare la derivata della massa inerziale in funzione della velocità $\frac{dm}{dv}$ (otterremo una quantità utile per i nostri conti). Partiamo dalla (3):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{8}$$

da cui, derivando la funzione irrazionale e ricordando che si tratta di funzione composta, si trova:

$$\frac{dm}{dv} = m_0\,\frac{-1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{-2v}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v}{c^2} \tag{9}$$

ma il primo rapporto dell'ultimo membro è proprio la massa inerziale, quindi risostituendo m si ha:

$$\frac{dm}{dv} = m\, v\,\frac{1}{c^2-v^2}. \tag{10}$$

Ora abusiamo nuovamente della notazione di Leibniz e *portiamo* il dv a secondo membro; contemporaneamente *portiamo* il denominatore della frazione a primo membro:

$$(c^2-v^2)\, dm = m\, v\, dv \tag{11}$$

Osserviamo che il secondo membro $m\, v\, dv$ è uguale al secondo addendo della (7). Quindi possiamo sostituire al posto di quella quantità l'espressione $(c^2-v^2)\, dm$ e si ottiene:

$$dK = dm\, v^2 + (c^2-v^2)\, dm = dm\, v^2 + c^2\, dm - v^2\, dm \tag{12}$$

elidendo i due termini opposti si giunge a:

$$dK = c^2\, dm. \tag{13}$$

[1] Si noti come questi conti sono permessi proprio in virtù della notazione di Leibniz $\frac{d}{dx}f(x)$ al posto di $f'(x)$.

Giunti a questo punto, possiamo tornare a grandezze non infinitesime, trasformando la (13) in:

$$\Delta K = c^2 \Delta m. \tag{14}$$

Se il nostro oggetto parte da fermo, l'energia cinetica iniziale è nulla, quindi la variazione di energia cinetica è solo energia cinetica finale K, ovvero $\Delta K = K$. Per variazione di massa di intende la differenza tra massa a riposo e massa inerziale, pensando all'inerzia che acquista l'oggetto muovendosi ad alta velocità, quindi $\Delta m = m - m_0$. Sostituendo si ottiene:

$$K = c^2(m - m_0) = m\,c^2 - m_0\,c^2 \tag{15}$$

e riordinando:

$$m\,c^2 = m_0\,c^2 + K. \tag{16}$$

Ora osserviamo con grande attenzione questa formula. L'ultimo termine è l'energia cinetica di un oggetto in moto, di conseguenza gli altri due termini sono energie. Il primo addendo del secondo membro è l'energia a riposo di un oggetto, ovvero una nuova energia $E_0 = m_0\,c^2$ che esso possiede solo in virtù della presenza di una sua massa. In verità è questa l'equazione più importante, seppur meno famosa, perché sta alla base delle trasformazioni da massa ad energia nelle reazioni nucleari. Il termine a primo membro, infine, è l'energia totale dell'oggetto, quindi possiamo a buon diritto scrivere:

$$E = mc^2 \tag{17}$$

e giungere così alla più celebre equazione della Fisica che, si noti, non compare in questa forma nell'articolo del 1905 di Einstein.