

30/09/2011

FISICA DEL CUMA

E. MILANI

prof. Boffetta

Sistemi dinamici \rightarrow modelli matematici

che descrivono fenomeni fisici (evoluzione)

Moto del pendolo è un sistema dinamico

\leadsto obiettivo: sistemi semplici con comportamento complesso

ATMOSFERA non è un sistema semplice

ma ci sono alcuni fenomeni che possono essere descritti con sistemi semplici

Sistemi Fisici \rightarrow eq. DIFFERENZIALI ($\vec{F} = m\vec{\ddot{x}}$)

\swarrow PENDOLO



$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

Variabile: $\vec{x} \in \mathbb{R}^N \leadsto \boxed{\vec{\dot{x}} = \vec{F}(\vec{x})}$

N: dim. spazio delle fasi (dim. del sistema)

Nel caso del pendolo ho una derivata seconda
chiamo

$$\begin{cases} \theta = x \\ \dot{\theta} = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

ho derivate prime (\leadsto sist. dinamico)

Quindi nel linguaggio dei sistemi dinamici la dim. dello spazio delle fasi del pendolo è $N=2$

ma $\dot{x} = f(x, t)$?

il sist. completo è composto da:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

\leftarrow aggiungo una variabile.

C'è un'altra classe di sistemi dinamici:

HAPPE (sist. discreti)

↳ a differenza delle eq. differenziali
(dove il tempo $t \in \mathbb{R}$ continuo)
ora ho

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{N} \quad (\leadsto \text{tempo discreto})$$

DINAMICA ASINTOTICA

ATTRATTORE



mi può interessare caoscose
i limiti

Attrattore: luogo dei pnti in \mathbb{R}^n in cui avviene il
moto a tempi lunghi

es. Pendolo reale (attito!)

a tempi lunghi il pendolo si ferma
↳ la traiettoria va a finire in un

PUNTO FISSO

attrattore più semplice possibile

Punto Fisso

non c'è più moto

$$\Rightarrow \dot{x} = 0 \quad \text{per DEFINIZIONE}$$



Sono tutti gli $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n / \vec{F}(\vec{x}^*) = 0$

Non è detto che \vec{F} sempre in pnto fisso



possono esistere degli
attrattori più complessi

PENDOLO

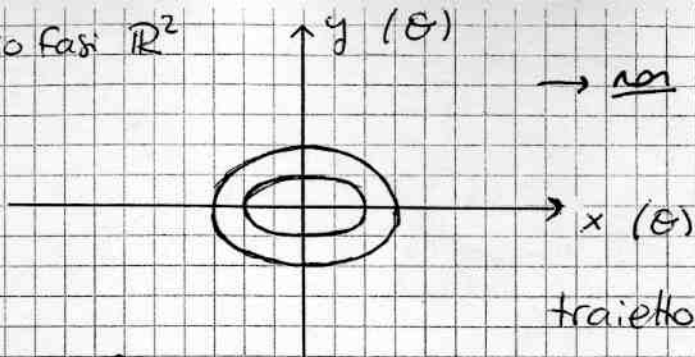
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \quad (\ddot{\theta} = -\omega^2 x)$$

$$\text{sol: } \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ = x$$

$$\Rightarrow y = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

rappresentazione parametrica di ELLISSE
(le ampiezze sono \neq)

spazio fasi \mathbb{R}^2



→ non \exists un attrattore (pendolo ideale)

traiettorie pendolo in \mathbb{R}^2

in generale.

Nello spazio delle fasi le traiettorie NON si incrociano mai



Se due traiettorie si incrociassero il sistema non saprebbe dove andare (sist. deterministico) \Rightarrow non può scegliere

Pendolo con attrito

$$\ddot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} - \omega^2 \theta$$

F dovuta all'attrito: si oppone (-)

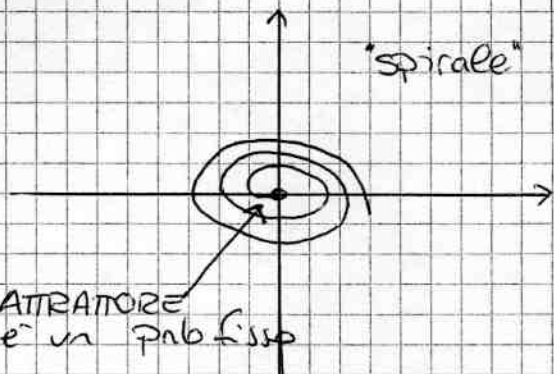
proporz. alla velocità ($\dot{\theta}$)

γ contiene le prop. degli attriti

$$\leadsto \theta(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

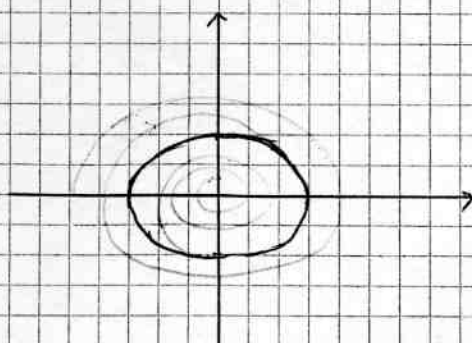
e nello spazio delle fasi:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 x \end{cases}$$



Un altro tipo di attrattore:

CICLO LIMITE



← il moto finale converge ad un moto periodico

1) PENDOLO COMPLETO

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

per θ piccolo
 $\sin \theta \approx \theta$

quali sono i punti fissi?

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin(x) \end{cases}$$

Punti fissi sono i punti / $F=0$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sin(x) = 0 \end{cases}$$

$x = \theta \rightarrow$ rimangono tra 0 e 2π

$$\vec{x}_1^* = (0, 0)$$

$$\vec{x}_2^* = (\pi, 0)$$



STABILITÀ (di punto fisso)

1) sistema lineare in $D=1$ (partiamo da un sist. semplice)

$$\dot{x} = ax$$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) e^{at}$$

punto fisso STABILE \rightarrow nei dintorni del punto fisso mi avvicino

INSTABILE \rightarrow nei suoi dintorni mi allontano

↓ punto fisso e $x^* = 0$

se $a < 0$ $x(t) \rightarrow x^*$ stabile

se $a > 0$ $x(t) \rightarrow x^*$ instabile

2) sistema lineare in 2D

$$\rightarrow (x, y)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y \\ \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y \end{cases}$$

$$\vec{x}^* = (0, 0)$$

posso effettuare una rotazione in nuove variabili (z_1, z_2)

(base ORTONORMALE) per avere una matrice DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ problemi unidimensionali}$$

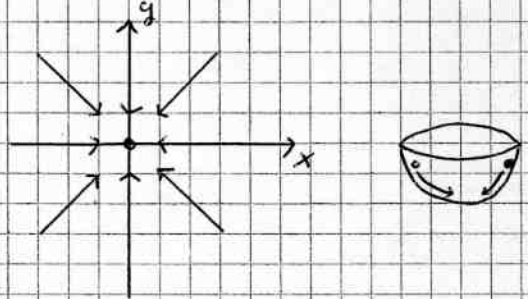
↑
autovalori

possono essere sia reali
che complessi

il pnb fisso è stabile se sia z_1 che z_2 si avvicinano al pnb fisso (quando nei suoi dintorni)

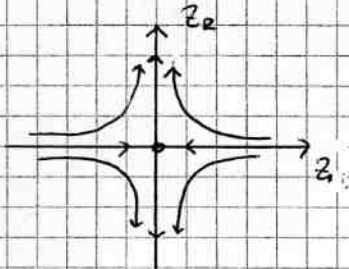
1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases}$$



⇒ STABILE ed è detto POZZO

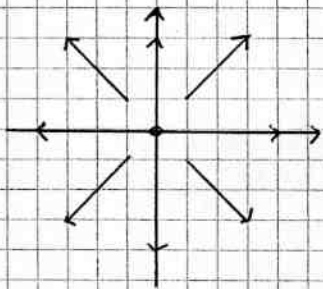
2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_2 > 0 \quad \lambda_1 < 0$



⇒ INSTABILE (tranne sulla retta $z_2=0$)
pnb fisso A SELLA



3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$



⇒ INSTABILE
pnb fisso SORGENTE



Ma gli autovalori λ_1, λ_2 possono essere complessi

4) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(\lambda_i) < 0$

esempio: $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a < 0$

autovalori

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 = 0$$

$$\lambda = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 - b^2} = a \pm ib$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - by \\ \dot{y}(t) = bx + ay \end{cases}$$

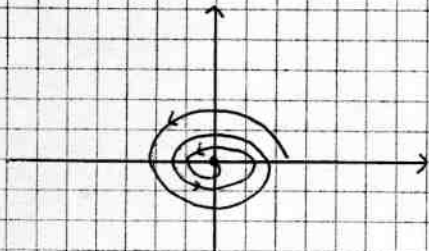
sol:
$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{at} \cos(bt) - y(0)e^{at} \sin(bt) \\ y(t) = x(0)e^{at} \sin(bt) + y(0)e^{at} \cos(at) \end{cases}$$

↑
dipende dal
pnb di partenza

ho ellisse il cui raggio dipende dal tempo
esponenzialmente

⇒ STABILE

pnb fisso A SPIRALE

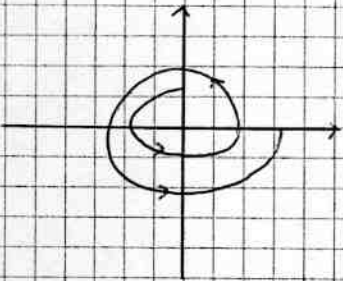


5) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\text{Re}(\lambda_i) > 0$

⇒ INSTABILE

pnb fisso A SPIRALE

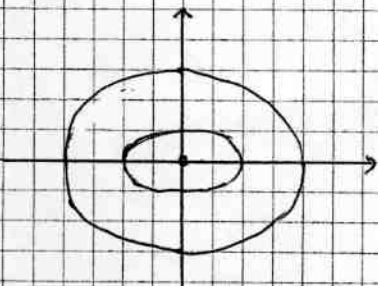


6) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\text{Re}(\lambda_i) = 0$

⇒ NEUTRO (né stabile né instabile)

pnb fisso ELITTICO



Quindi OGNI VOLTA che

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow$ pnb fisso STABILE

1D → "autovalore" è sempre Re

2D → gli autovalori possono essere complessi

ND → devo cercare gli autovalori e trovare
la parte reale.

Pendolo con attrito

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \delta y \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\delta \end{pmatrix}$$

autovalori: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\delta-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\delta+\lambda) + \omega^2 = 0$

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\omega^2}}{2}$$

.) se $\delta < 2\omega$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4\omega^2 - \delta^2}$$

$$\underbrace{\operatorname{Re}(\lambda_i)} < 0$$

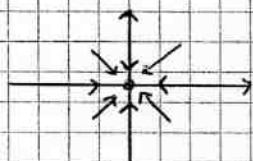
→ A SPIRALE

⇒ pnb fisso
STABILE

.) se $\delta > 2\omega$ (attrito "forte")

ottengo una radice reale (ma $< \delta$)
ho $-\delta$ davanti

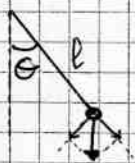
$$\lambda_{1,2} = \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow \text{il pendolo si ferma subito}$$



07/10/2011

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \rightarrow \vec{x}^* = 0 \text{ è stabile se } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$$

Pendolo



$$F = ma$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\text{se } \theta \ll 1 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

e torno al caso $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

Ma se θ non è $\ll 1$?

Considero un sistema generale

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

a) pnti fissi?

b) stabilità?

a) per definizione sono i pnti con derivata = ZERO

$$\vec{F}(\vec{x}^*) = 0 \Rightarrow \vec{x}^*$$

esempio pendolo con ampiezza (non per θ piccolo)

$$\ddot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} - \omega^2 \sin \theta$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = x \\ \dot{x} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 \sin(x) \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow F_x \\ \rightarrow F_y \end{array}$$

$$x \in [0, 2\pi)$$

pti fissi?

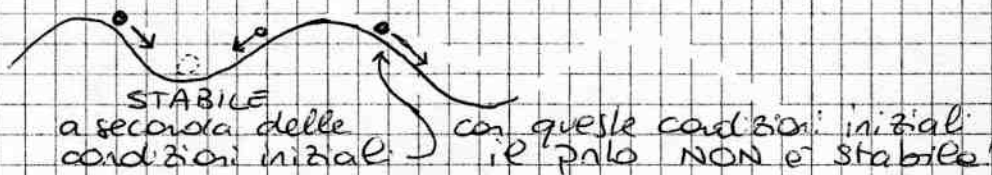
$$x_1^* = (0, 0) \quad x_2^* = (\pi, 0)$$

pti dove i membri a dx e dy vanno a ZERO

STABILITÀ

Se il sistema non è lineare, non esiste un metodo.

esempi:



MA posso dare delle condizioni PARTICOLARI

mi metto vicino al pnto fisso (infinitesimi)



STABILITÀ LINEARE

condizione iniziale: $\vec{x} = \vec{x}^* + \epsilon \vec{z}$ ($\epsilon \rightarrow 0$)

↑ infinitesimo ↑ spostamento

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \sim \dot{\vec{x}}^* + \epsilon \dot{\vec{z}} = \vec{F}(\vec{x}^* + \epsilon \vec{z})$$

$$\dot{x}_i^* + \epsilon \dot{z}_i = F_i(x_1^* + \epsilon z_1)$$

Taylor

$$\hookrightarrow = \cancel{F_i(x^*)} + \left. \frac{dF_i}{dx_j} \right|_{x^*} \epsilon z_j + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\rightarrow \epsilon \dot{z}_i = \left. \frac{dF_i}{dx_j} \right|_{x^*} \epsilon z_j$$

Otengo

$$\boxed{z_i = \left. \frac{dF_i}{dx_j} \right|_{x^*} z_j}$$

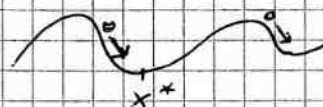


$$\left. \frac{dF_i}{dx_j} \right|_{x^*} \text{ è detto JACOBIANO di } F$$

$$\frac{dF_i}{dx_j} = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_1}{dx_2} & \dots & \frac{dF_1}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dF_n}{dx_1} & \dots & \dots & \frac{dF_n}{dx_n} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{non dipende da } z! \\ \Rightarrow \text{ sistema lineare!} \end{array}$$

Calcolare gli autovalori della Jacobiana di F nel pnto fisso. Il pnto è LINEARMENTE STABILE se (e solo se) $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ (TUTTI λ_i)

Ma la stabilità lineare non implica la stabilità generale



Se il sistema è linearmente INSTABILE \Rightarrow lo è anche generalmente!



Riconsideriamo il pendolo

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dF_x}{dx} & \frac{dF_x}{dy} \\ \frac{dF_y}{dx} & \frac{dF_y}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(x) & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$1) \quad J(x_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \quad x_1^* = (0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\gamma + \lambda) + \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}$$

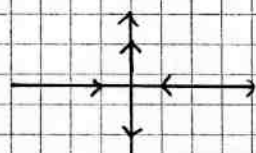
\leadsto ottengo che se $\gamma > 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0$

$\Rightarrow x_1^*$ è STABILE LINEARMENTE (il sistema)

$$2) \quad J(x_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \quad x_2^* = (\pi, 0)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\omega^2}}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Re} > 0 \\ \text{Re} < 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x_2^*$ pnto a SELLA \Rightarrow sistema LINEARMENTE INSTABILE



per arrivare ESATAMENTE ad x_2^* e fermarmi: devo partire con delle condz. iniziali ben precise (\rightarrow linea in un piano)

Ma esistono altre tecniche/metodi

CRITERIO: STABILITÀ ALLA LYAPUNOV (non lineare)

↓
riescio a dimostrarlo solo
per dei casi particolari.

↳ Nei sistemi esisterebbero delle grandezze che
si conservano se non ci fossero attriti.

↳ punto fisso e' un punto a minima energia.

Se J una funzione $E(\vec{x})$ tale che

1) $E(x^*) = 0$ e $E(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}$
valore minimo

2) $\frac{dE}{dt} \leq 0$ (non cresce)

Allora il punto fisso e' stabile (alla Lyapunov)

esempio:

pendolo

Energia $T+V$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = \omega \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\delta y - \omega^2 \sin(x) \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2} y^2 + \omega^2 [1 - \cos(x)]$$

dim:

1) $E(x,y) \geq 0$ (ho quadrati) $\forall x$

$E(0,0) = 0$ \checkmark ok

2) $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

perche' E non dipende
esplicitamente dal tempo

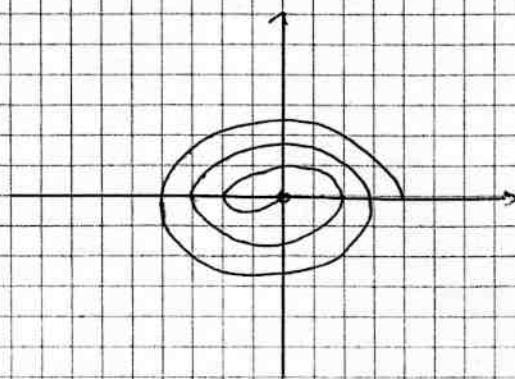
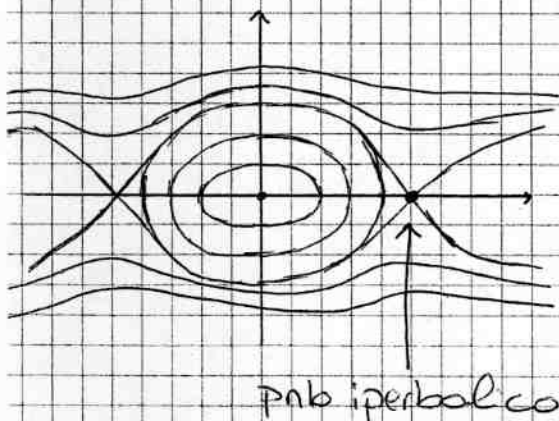
$$= \omega^2 \sin(x) y + y (-\delta y - \omega^2 \sin(x))$$

$$= -\delta y^2 \leq 0 \quad \text{sempre!} \quad \checkmark \text{ ok}$$

- (Pos)(Pos)

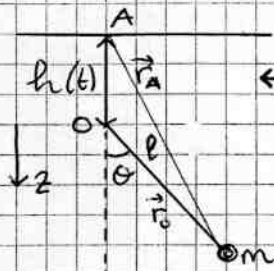
PENDOLO IDEALE

PENDOLO CON ATTRITO



Ma per avere un moto continuo anche con l'attrito?

→ PENDOLO FORZATO



← vasi
e giù

$$h(t) = h_0 \cos(\Omega t)$$

↑
frequenza che
scelgo

○ non è un sistema di riferimento inerziale
→ scelgo A (il laboratorio)

$$\vec{r}_A = \vec{r}_O + h(t) \hat{z}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} + \hat{z} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_O = \vec{a}_A - \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \hat{z}$$

$$\hookrightarrow mg \rightarrow mg + m \frac{d^2 h}{dt^2}$$

Quindi per il pendolo ottengo

$$\ddot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} - \frac{g - \beta \cos(\Omega t)}{l} \sin \theta$$

Troverò che l'energia ha un TERMINE AGGIUNTIVO

dovuto alla
FORZANTE

↓
che non avrà segno definito
quindi potrebbe mettere o togliere energia

↳ in MEDIA non cambia

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 \sin(x) + \beta \cos(\Omega t) \sin(x) \end{cases}$$

$$\text{con } \beta = \frac{h_0 \Omega^2}{l}$$

il tempo ora è ESPUCITO

⇒ il tempo è una variabile

⚠ ho 2 eq. per 3 variabili!
eq. per t?

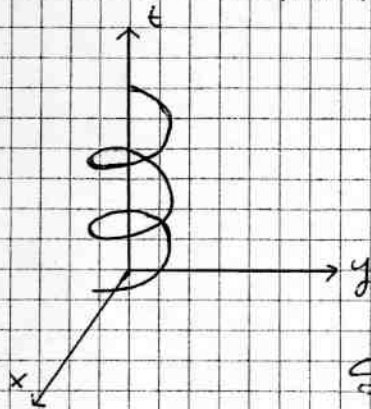
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 \sin(x) + \beta \cos(\Omega t) \sin(x) \\ t = 1 \quad \leftarrow \end{cases}$$

⇒ il pendolo forzato "vive" in un sistema 3D

pendolo forzato

→ se lo disegnavi in 2D avresti le curve che si incrociano

⇒ mi manca una dimensione: il TEMPO



$$N = 3$$

← 3 è la dimensione minima perché il sistema possa essere

CAOTICO

Se β "piccolo" (rispetto a ω^2)
le traiettorie sono "ok"

→ moto periodico

Se β "grande"

le traiettorie possono essere caotiche

→ moto caotico

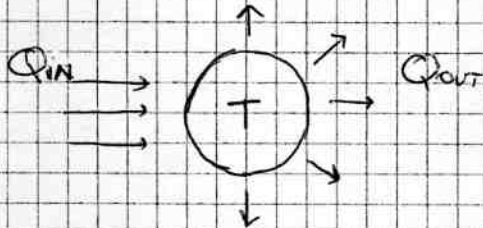
$$\beta = \frac{h_0 \cdot \Omega^2}{g}$$

14/10/2011

MODELLO DEL BILANCIO ENERGETICO

non è modello di clima, ma di fenomeno fisico che influenza il clima

↑
singolo meccanismo



$$C \frac{dT}{dt} = Q_{IN} - Q_{OUT}$$

C → capacità termica

T → temperatura media Terra

Dove $Q_{IN} = \frac{S}{4} \approx 338 \text{ W/m}^2$

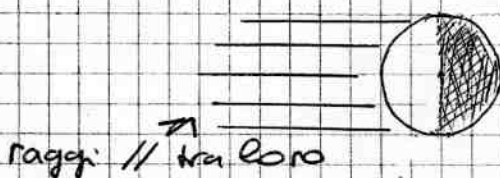
S : costante solare

$$S = 1353 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

↑
densità di energia fuori dall'atm con i raggi solari ortogonali alla superficie.

il SOLE è l'unica fonte

- e:
- a) Solo metà terra è illuminata
 - b) Solo all'equatore i raggi sono ortogonali alla superficie



$$Q_{out} = \sigma T^4 \quad \text{con } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

↳ tratto la terra come corpo
NERO

→ T della Terra è ~ costante

⇒ Equazione di bilancio energetico (Energy balance model)

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{S}{4} - \sigma T^4$$

T unica variabile

All'equilibrio

polo fisso: $\frac{S}{4} - \sigma T^4 = 0 \Rightarrow T^* = \left(\frac{S}{4\sigma} \right)^{1/4}$

$$T^* = \left[\frac{1353}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \right]^{1/4} \approx 278K = 5^\circ C$$

↳ ho trovato un valore di ordine di grandezza
in linea con il valore osservato

→ Valore reale $\bar{T}_{vern} \approx 15^\circ C > T^*$

perciò ho trascurato
l'atmosfera che assorbe parte
delle radiazioni

Stabilità di T^* :

$$\dot{x} = F(x) \quad F(x^*) = 0 \quad \text{stabilità} \quad \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} < 0$$

$$\sim \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{4} - \sigma T^4 \right) = -\sigma T^3 \Big|_{T^*} < 0 \Rightarrow \text{STABILE (T > 0)}$$

Infatti → poiché Q_{out} è prop. a T , un eccesso o una
carenza di calore viene BILANCIATO

FEEDBACK

Ruolo dell'albedo (meccanismo di feedback)



Frazione di radiaz. emessa da un corpo
che è colpito da radiazione

⇒ coeff. di radiazione

→ nullo per corpo nero, 1 per corpo bianco

$$\Rightarrow 0 \leq a \leq 1$$

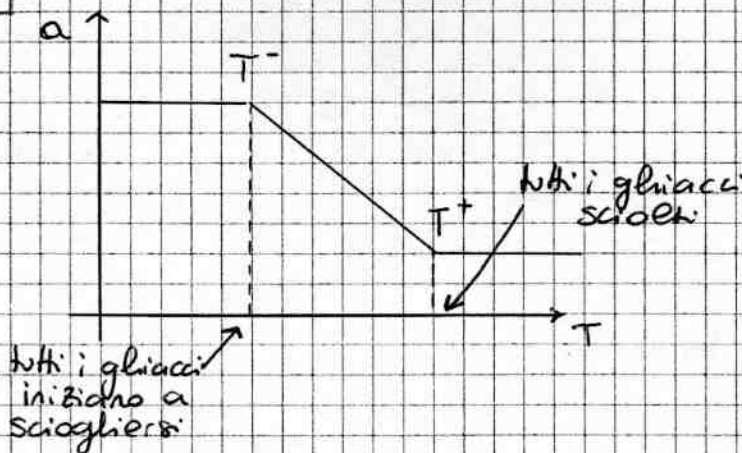
↑
albedo

Sulla Terra l'albedo dipende dalla temperatura

$T \downarrow \Rightarrow a \uparrow$

Se la Terra si raffredda
 \Rightarrow più neve e ghiaccio
 \Rightarrow albedo cresce

$$0 \leq a(T) \leq 1$$

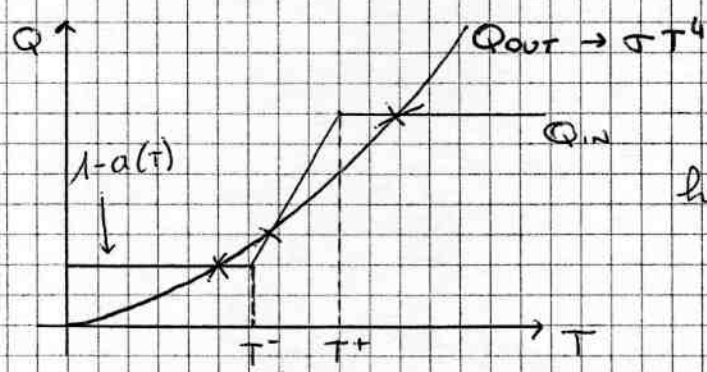


Energy balance model + albedo:

$$c \frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{S}{4} [1 - a(T)]}_{Q_{in}} - \sigma T^4$$

$[1 - a(T)]$ radiazione che arriva sulla Terra (non riflessa)

Punti fissi:



Massimo
 ho 3 punti fissi:
 T_1^* , T_2^* , T_3^*

Stabilità:

$$\frac{dF}{dT} = \frac{dQ_{in}}{dT} - \frac{dQ_{out}}{dT}$$

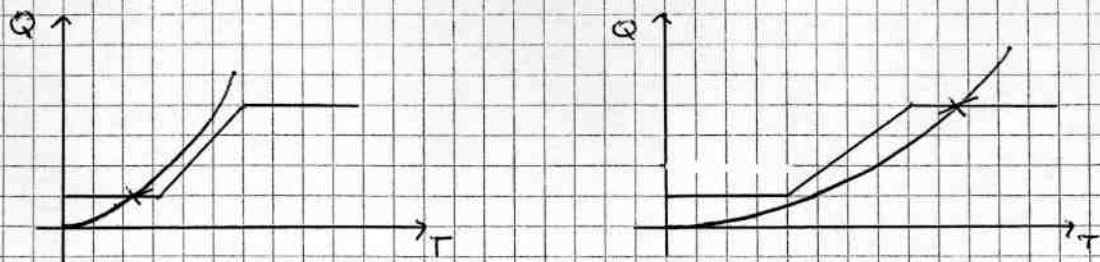
T_1^* : STABILE (perché tangente su Q_{in} in T_1^* e 0)

T_3^* : STABILE (stesso motivo di T_1^*)

T_2^* : INSTABILE ($\frac{dQ_{in}}{dT} > \frac{dQ_{out}}{dT}$)

\rightarrow se guardo dopo il pnb:
 dove $Q_{out} > Q_{in} \Rightarrow$ STABILITA

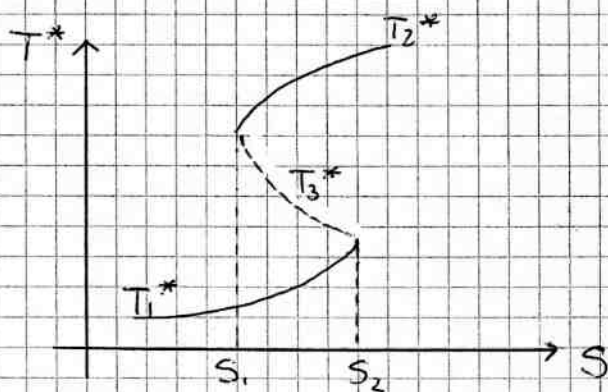
Le curve possono intersecarsi in 3 punti (come prima)
 o in UN punto: \Rightarrow 1 punto fisso



\rightarrow a seconda del valore
 della cost. solare S

\Rightarrow Posso avere uno o tre punti fissi a seconda di S

DIAGRAMMA di BIFORCAZIONE



— punto fisso stabile
 - - - punto fisso instabile

Infatti:

Se S piccola



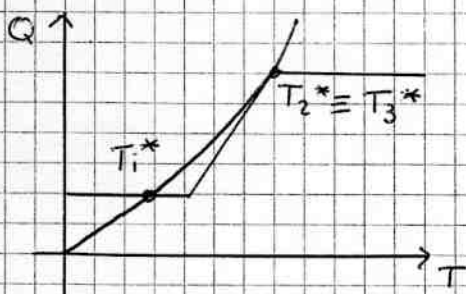
Se S cresce



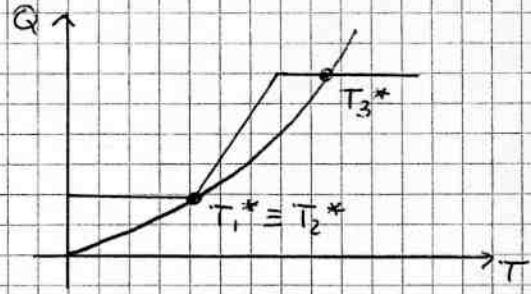
Se S grande



Quando $S = S_1$



Quando $S = S_2$



S_1 : punto di BIFORCAZIONE

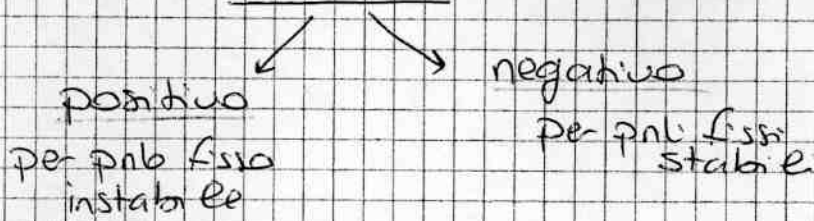
S_2 : punto di BIFORCAZIONE

coincidono T_2^* e T_3^*

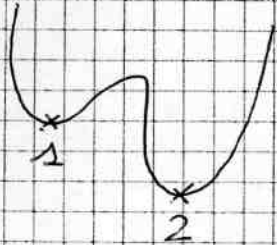
coincidono T_1^* e T_2^*

→ la dipendenza dell'albedo dalla temperatura $a(T)$

causa FEEDBACK



Ma i pnb fissi possono essere più o meno stabili.



→ il pnb fisso 2 è più stabile rispetto al pnb fisso 1

MILANKOVIC: collegamento tra variazioni astronomiche e le glaciazioni.
(var. astronomiche \Rightarrow glaciazioni)

$\Delta T \approx 10K$ ogni 10^5 anni.

Ultime glaciazioni:

(-100'000, -10'000)

(-280'000, -240'000)

(-200'000, -140'000)

1) Variazione dell'eccentricità dell'orbita.

su 413'000 anni.

2) Variazione dell'inclinazione dell'asse:

($22,1^\circ$, $24,5^\circ$) su 41'000 anni.

3) Precessione dell'asse

su 26'000 anni.

Il periodo di glaciazione è 100'000 anni

e questo "tempo" non è presente nei fenomeni di variazione di eccentricità, inclinazione e precessione.

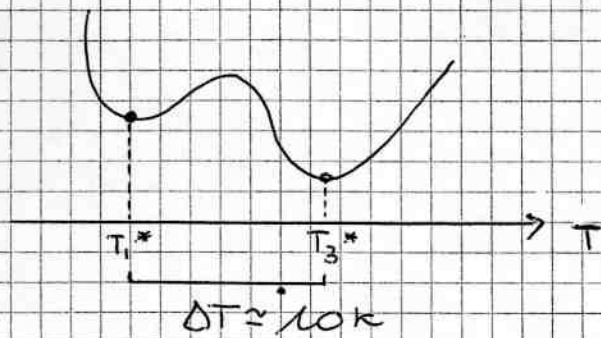
$\Rightarrow S$ è funzione del tempo!

Piccole variazioni di S (nel tempo) causano salhi da un pnb fisso all'altro.

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{S(t)}{4} [1 - a(T)] - \sigma T^4$$

$$S(t) = S_0 + b \sin(\omega t) \quad \text{con } b \ll S_0$$

← la varia periodicamente e la modulo



RISONANZA STOCASTICA

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} S(t) [1 - a(T)] - \sigma T^4 + \underbrace{\sqrt{\epsilon} \eta(t)}_{\text{variabile STOCASTICA}}$$

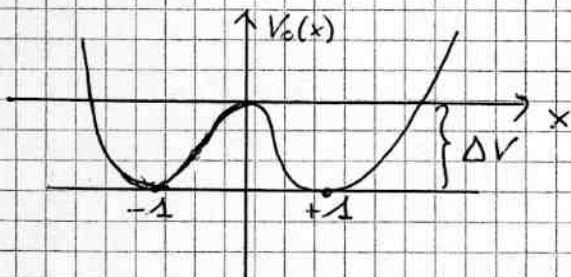
$\eta(t)$: ha valori tra -1 e $+1$
e fluttua con velocità maggiore rispetto a tutti gli altri tempi in gioco.

$\sqrt{\epsilon} \eta(t)$: RUMORE METEOROLOGICO

↓
equivale a far oscillare la pallina nella rappresentazione meccanica

⇒ Quindi è possibile che le oscillazioni siano abbastanza ampie da far fare alla pallina il salto dell'altro pozzo fisso.

DOPPIA BUCA DI POTENZIALE



$$\frac{dx}{dt} = - \frac{dV_0(x)}{dx} + \sqrt{\epsilon} \eta$$

$$V_0(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

$$V_0'(x) = x^3 - x = 0$$

in $x = -1$
e $x = +1$

$$V_0(0) = 0 \quad V_0(\pm 1) = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{1}{4}$$

Senza il termine di rumore:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} = F = -x^3 + x$$

Quindi i punti fissi sono STABILI

Con il rumore stocastico:

Formula di Kramer

da cui il tempo medio di salto da una buca di potenziale all'altra

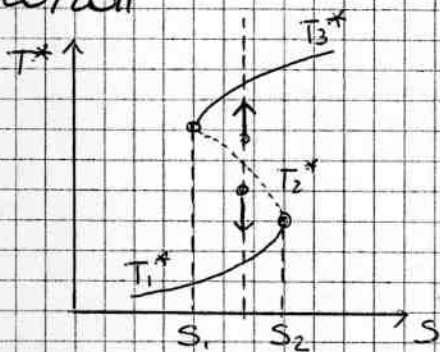
Valle per $\frac{E}{\Delta V} \ll 1$

$$\tau = A e^{\frac{\Delta V}{E}} \Rightarrow \tau \text{ dipende fortemente da } \Delta V \text{ e } E$$

→ Cicli di Milankovic spostano S
 quindi cambiano di poco ΔV
 ma questo fa cambiare di molto τ

→ Variazione poco probabile causa
 variazione molto probabile

21/10/2011

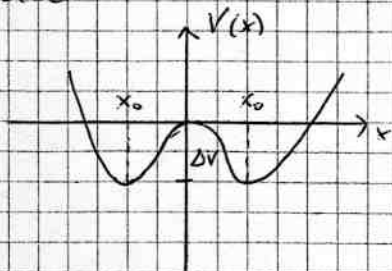


$$S(t) = S_0 + b \sin(\omega t)$$

con $b \ll S_0$

↳ piccole "oscillazioni"

potenziale:



$$V(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

minimi: $x_0 = \pm 1$

$$V(x_0) = -\frac{1}{4} = -\Delta V$$

$$\dot{x} = -\frac{dV_0}{dx} = -x^3 + x$$

$T_2^* \rightarrow$ punto instabile

STOCASTICO $\rightarrow \dot{x} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + \sqrt{\epsilon} \eta(t)$

ϵ con ϵ piccolo

$\eta(t)$ una funzione molto veloce (~ 1 anno)
 $\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \delta(t-t')$

Formule di KRAMER

\checkmark se $\epsilon \ll \Delta V \rightarrow$ vibra poco
 $\Rightarrow \tau = \tau_0 e^{\frac{\Delta V}{\epsilon}}$ TEMPO MEDIO DI SALTO
 con $\frac{\Delta V}{\epsilon} \gg 1$ per tip
 $\Rightarrow \tau \gg \tau_0$

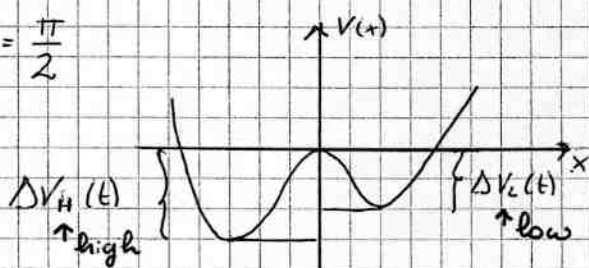
RISONANZA STOCASTICA

\rightarrow se il potenziale cambia nel tempo
 (\hookrightarrow irrag. solare cambia con il tempo)

potenziale modulato/periodico

$\hookrightarrow V(x) = V_0 + b x \sin(\omega t)$ $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$
 con $b > 0$

1) $\omega t = \frac{\pi}{2}$

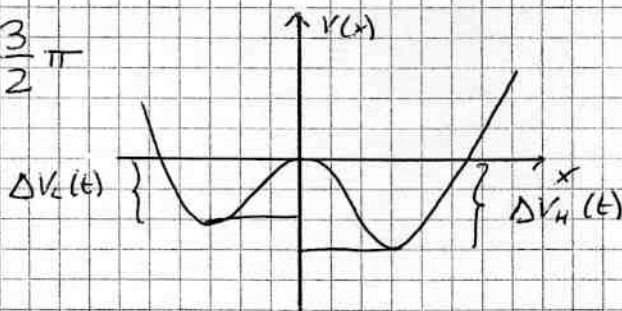


$t = \frac{T}{4}$

T: periodo

periodo dell'oscill. $T = \frac{2\pi}{\omega}$

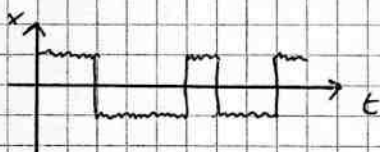
2) $\omega t = \frac{3}{2}\pi$



$t = \frac{3}{4}T$

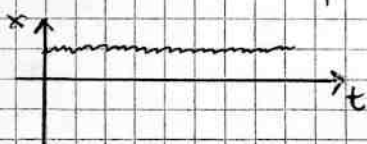
Se ϵ è grande ($\epsilon \sim \Delta V$)

numero molto grande
 \Rightarrow non vale Kramer



un po' in una buca ed un po' nell'altra
senza periodicità

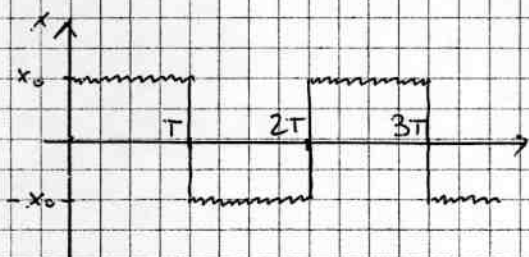
Se ϵ molto piccola ($\epsilon \rightarrow 0$)



NON sono fenomeni
 di risonanza
 stocastica

Risonanza Stocastica

ho ϵ tale che è facile saltare dalla buca poco profonda a quella più profonda
→ mentre il viceversa è improbabile.



→ Nel tempo cambia la forma delle buche
↳ Quella che è profonda diventa poco profonda
⇒ ho periodicità relativa al cambiamento delle buche

tempo di salto

$$\tau(\Delta V_H) = \tau_0 e^{\frac{\Delta V_H}{\epsilon}} \gg \frac{T}{2}$$
$$\tau(\Delta V_L) = \tau_0 e^{\frac{\Delta V_L}{\epsilon}} \ll \frac{T}{2}$$

Se riesco a soddisfare entrambe ho risonanza stocastica

$$\Delta V_H = \Delta V_0 + b$$

$$\Delta V_L = \Delta V_0 - b$$

⇒ Condizione di risonanza:

$$\tau_0 e^{\frac{\Delta V_0}{\epsilon}} \approx \frac{T}{2}$$

→ Nella realtà posso avere buche molto poco profonde ma la "pallina" starà sempre nella buca più profonda

MA → ciclo di Milankovic coincide con il periodo glaciazioni - variazioni astronomiche
Quindi non è detto che sia risonanza stocastica

MODELLO CAOTICO

fino ad anni '60 → Matematici, Astronomi, Metereologi

Lorenz → 1963

problema della convezione

due piastre molto vicine con destra FLUIDO
 → fluido caldo sul basso (contatto con piastra calda)
 che poi tende a salire



Configurazione di
Rayleigh - Bénard

~ 1880

↳ il sistema ha un pnb fisso (con $v=0$)
 PUNTO FISSO CONDUTTIVO

dove ΔT è piccola } dipende da
 $\Delta T < \Delta T_c$ } viscosità
 } conducibilità

↳ il calore in eccesso viene trasmesso per
 CONDUZIONE

verso la piastra più fredda

Poiché ΔT_c dipende "un po' da tutto", Rayleigh introduce
 un numero adimensionale

→ n° di Rayleigh $Ra = \frac{\Delta T \cdot H^3}{\nu k}$

↑
 cioè un valore critico sotto il quale
 non ho movimento ($v=0$)

Sopra questo valore critico $v \neq 0$

⇒ $\Delta T > \Delta T_c$ ho CONVEZIONE

inizialmente è un moto molto regolare $\vec{v}(x) = \text{cost}$
 ↑
 pnb fisso

→ vedo le celle di convezione



Dall'alto



bande / righe

Ma aumentando ancora il regime vedo che le
 righe H-C iniziano ad oscillare

→ le celle oscillano

e aumentando ancora la temperatura

→ moto caotico

→ turbolenze

} $\Delta T \gg \Delta T_c$

Lorentz era interessato a comprendere cosa comportava il cambiamento da uno stato all'altro

↳ modello di Lorentz

prima $\left. \begin{array}{l} \vec{u}(\vec{x}, t) \\ T(\vec{x}, t) \end{array} \right\} \infty$ variabili non numerabili

poi \longrightarrow 3 VARIABILI (non sono le coord. spaziali x, y, z , sono solo NOMI)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) & \text{moto verticale} \\ \dot{y} = x(r - z) - y & \text{discost. di temperatura dal valore medio} \\ \dot{z} = xy - bz & \text{differenza dal profilo lineare} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\nu}{\kappa} = 10 \\ b = \frac{8}{3} \\ r = \frac{Ra}{Ra_c} \propto \Delta T \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{rapporto} \\ \text{della} \end{array} \frac{\text{base}}{\text{altezza}} \quad h$$

ho un pnto fisso in CONDIZIONE $(x, y, z)^* = (0, 0, 0)$

Stabilità?

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & +\sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ eq.} \\ 2^{\circ} \text{ eq.} \\ 3^{\circ} \text{ eq.} \end{array}$$

da cui ottengo

$$\lambda_{1,2,3} \text{ autovalori} \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -b \\ \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2} \end{array}$$

$\lambda_1 < 0$ sempre

$\lambda_{2,3}$? \rightarrow quella con il \ominus sempre < 0
e con il \oplus ?

quando $r < 1$ è STABILE

ad $r = 1$ si perde la stabilità

perché λ va a ZERO

Lorenz ha scelto $r \gg 1$ $r = 28$

→ il sistema ha comportamento non periodico

→ di giorno in giorno (i calcolatori erano poco potenti)

si ottenevano in output x, y, z

che il giorno dopo venivano messi in input in un momento precedente al momento di spegnimento

↓

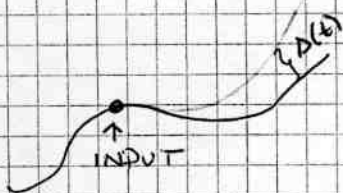
si voleva controllare che i dati in input fossero

corretti verificando che le traiettorie coincidessero

ma si notò che dopo poco la traiettoria nuova si discostava da quella del giorno prima in modo sensibile

↓

Dipendenza Sensibile dalle Condizioni Iniziali
= CAOS



$$\Delta(t) \sim e^{\lambda t} \Delta(0) \quad \text{cresce esponenzialmente}$$

•) se $\Delta(0) = 10^{-4}$ ← precisione di input rispetto ad output del giorno precedente

$$\rightarrow \Delta(t) = 10^{-4} e^{\lambda t} \approx 1 \Rightarrow T \approx \frac{1}{\lambda} \log 10^4 = \frac{4}{\lambda} \log 10$$

•) se $\Delta(0) = 10^{-6}$ (raffino la condizione iniziale)

$$\rightarrow T \approx \frac{6}{\lambda} \log(10) \rightarrow \text{il tempo che le traiettorie stanno vicine è dell'ordine di } \frac{1}{\lambda}$$

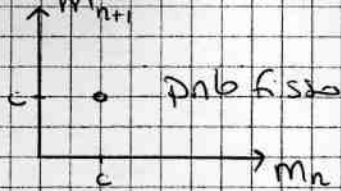
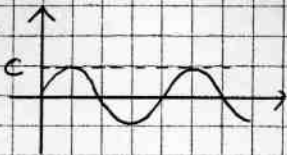
⇒ anche se l'errore è piccolissimo dopo un certo tempo le traiettorie divergono/cambiano molto

Lorenz decise di guardare solo l'altezza dei picchi delle traiettorie

M_n → valore del massimo n-esimo

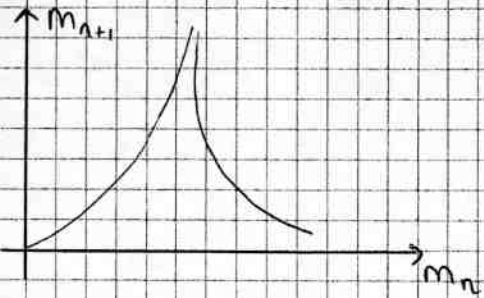
e di graficarlo in funzione del valore del picco precedente.

pendolo:



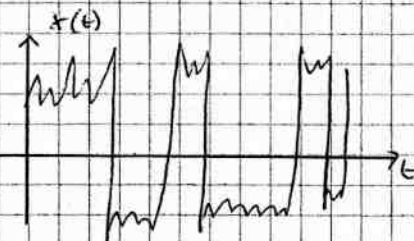
MAPPA DI RITORNO

Per un sistema caotico la mappa di ritorno è:

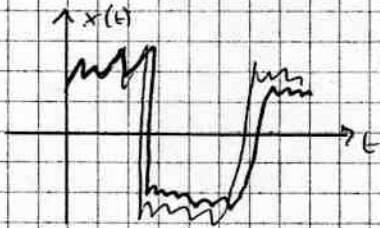


28/10/2011

1) traiettorie NON periodiche



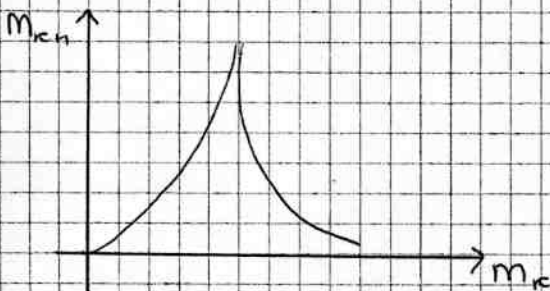
2) dipendenza SENSIBILE dalle condizioni iniziali



1) + 2) = CAOS

MAPPA DEI RITORNI

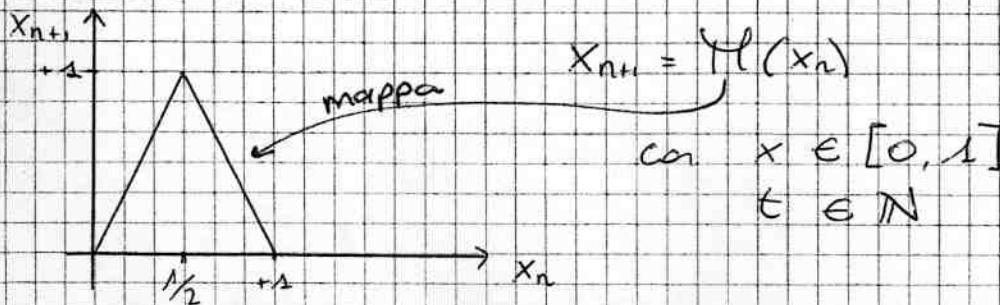
Misurando l'altezza dei massimi successivi $\{m_k\}$



→ Lorenz

Voglio studiare le proprietà dinamiche di questa mappa ma prima la semplifico.

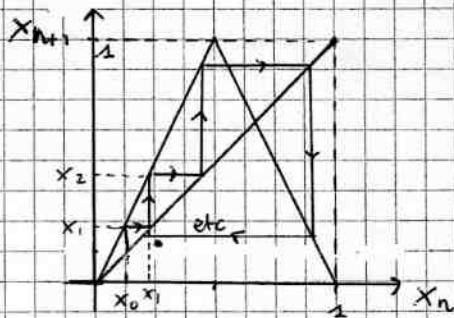
MAPPA A TENDA (1D)



→ l'evoluzione discreta della mappa dipende dal tempo

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

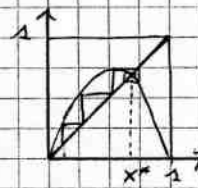
Graficamente posso disegnare la bisettrice $x_n = x_{n+1}$



$$x_1 = T(x_0)$$

$$x_2 = T(x_1)$$

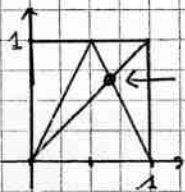
Se uso una parabola



punto fisso
 $T(x^*) = x^*$

↓
dato da intersezione tra
mappa e bisettrice

Torniamo alla mappa a tenda



$$2-2x = x \quad 3x = 2 \Rightarrow x^* = \frac{2}{3} \text{ punto fisso}$$

Stabilità:

prendo una traiettoria

$$x_0 = x^* + \varepsilon_0$$

↑ perturbazione

dopo un tempo:

$$x_1 = T(x_0) = T(x^* + \varepsilon_0) \leftarrow \varepsilon_0 \text{ piccolo}$$

$$= T(x^*) + \underbrace{\frac{dT}{dx}}_{T'} \Big|_{x^*} \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^2)$$

posso dire che

$$x_1 = x^* + \varepsilon_1$$

$$= T(x^*) + T'(x^*) \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow x^* + \varepsilon_1 = x^* + T'(x^*) \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 T'(x^*)$$

Quindi $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_0| \cdot |T'(x^*)|$

ma la stabilità? è stabile se $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_0|$

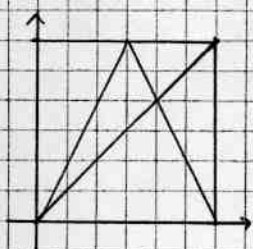
$$\leadsto x^* \text{ è (linearmente) stabile} \iff \underline{|T'(x^*)| < 1}$$



T' : pendenza

1 : pendenza della diagonale

Quindi



ha punti fissi INSTABILI

$$x^* = 0$$

$$x^* = \frac{2}{3}$$

esempio

partiamo da

$$x_0 = 0,2 \quad (< \frac{1}{2})$$

$$x_1 = 2 \cdot x_0 = 0,4 \quad (< \frac{1}{2})$$

$$x_2 = 0,8 \quad (> \frac{1}{2})$$

$$x_3 = 0,4$$

perché il sistema è deterministico

avrò una serie di $0,8 - 0,4 - 0,8 - 0,4 \dots$

è un ciclo di periodo 2

Ma questo ciclo di periodo 2 è stabile?

→ sono due valori in cui la mappa salta "avanti ed indietro"

$$x_1^*, x_2^* \rightarrow f(x_1^*) = x_2^*$$

$$f(x_2^*) = x_1^*$$

Suppongo di guardare la mappa ogni 2 tempi

$$f(f(x_1^*)) = x_1^*$$

$$f(f(x_2^*)) = x_2^*$$

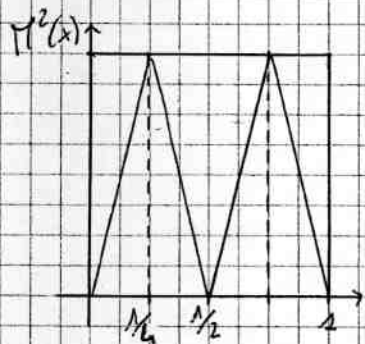
→ x_1^* e x_2^* sono punti fissi di $f \circ f$

che chiamo $f^2(x) = f(f(x))$

diverso da f al quadrato:

$$\text{se } f(x) = x^3$$

$$f(f(x)) = f^2(x) = x^9$$



i rami hanno pendenza 4!

→ i punti fissi sono tutti instabili

→ il ciclo di periodo 2 è instabile

Dobbiamo cambiare prospettiva

devo cambiare base → BINARIA

$$x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 2^{-j} = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$$

con $d_j = \{0, 1\}$

$$0 \leq x_0 \leq 1$$

lo faccio perché $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

\Rightarrow se $x_0 < \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = 0$
 $x_1 = \{ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \}$

se $x_0 > \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = 1$ $\begin{matrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{matrix}$
 $x_1 = \{ N\alpha_2, N\alpha_3, N\alpha_4, \dots \}$

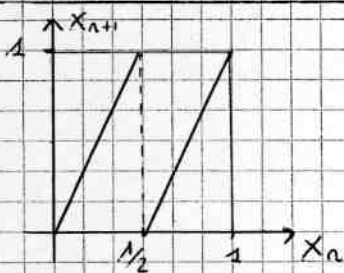
con N: negazione sulla cifra $\begin{matrix} N(1) = 0 \\ N(0) = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow x_2 = \{ \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots \}$ se $x_0 < \frac{1}{2}$

$x_2 = \{ N\alpha_3, N\alpha_4, N\alpha_5, \dots \}$ se $x_0 > \frac{1}{2}$

MA voglio "levarmi" l'operazione di negazione N
 \rightarrow cambio mappa

MAPPA DI BERNOULLI



la mappa ora è più continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le proprietà di stabilità sono le stesse (anche se i punti fissi sono cambiati)

Sceleggo questa mappa perché

$f(x) = (2x) \bmod 1$

\rightarrow moltiplico per 2 e tolo 1 solo se $x > \frac{1}{2}$

Se $x_0 = 0,2$

$\Rightarrow x_1 = 0,4$

$x_2 = 0,8$

$x_3 = 0,6 \quad (0,8 \cdot 2) - 1 = 1,6 - 1 = 0,6$

Quindi $x_0 = \{ d_1, d_2, d_3, d_4, \dots \}$
 $x_1 = \{ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \}$

esempio:

$x_1 = 0,1100101\dots$

$x_2 = 0,100101\dots$

$x_3 = 0,00101\dots$

"sposto a sx"

In binario la mappa di Bernoulli sposta le cifre

~ BERNULLI SHIFT

1) $x_0 = 0, \underline{01010101} \dots = \frac{1}{3}$
 $x_1 = 0, 1010101 \dots = \frac{2}{3}$
 $x_2 = 0, 010101 \dots = \frac{1}{3}$ } \Rightarrow ha periodo 2

2) $x_0 = 0, \underline{011011011} \dots$
 $x_1 = 0, 11011011 \dots$ questa mappa ha periodo 3

3) $x_0 = 0, \underline{011001100110} \dots$ periodo 4

i numeri periodici sono razionali:

$$x \in \mathbb{Q} \quad x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

se parto dalla condizione $x_0 \in \mathbb{Q}$

$$x_0 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \underbrace{\alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+p}}_p, \alpha_{k+p+1}, \alpha_{k+p+2}, \dots \}$$

\nwarrow rappresentazione periodica dopo un certo numero

la mappa mi shifta tutto a $s \times$ passo a passo.

Dopo un transiente la traiettoria è PERIODICA di periodo p

poiché $0 \leq x \leq 1$

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrazionali)

$$x_0 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots \}$$

TRAIETTORIA NON PERIODICA

i numeri irrazionali sono infinitamente di più dei numeri razionali.

e poiché $0 \leq x \leq 1$

1) TUTE le traiettorie (tranne un insieme a misura nulla) sono NON periodiche

2) il sistema è CAOTICO

- dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

\rightarrow 2 traiettorie si separano nel tempo (dopo poco)

Prendiamo

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0,1001101000101\dots \\ x_0' &= 0,1001101000100\dots \end{aligned} \right\} \text{condizioni iniziali} \\ (t=0)$$

differenziamo a $2^{-13} = \Delta(0)$

a $t=1$ sposto le cifre a sx (per x_0 e x_0')

\Rightarrow differenziamo a 2^{-12}

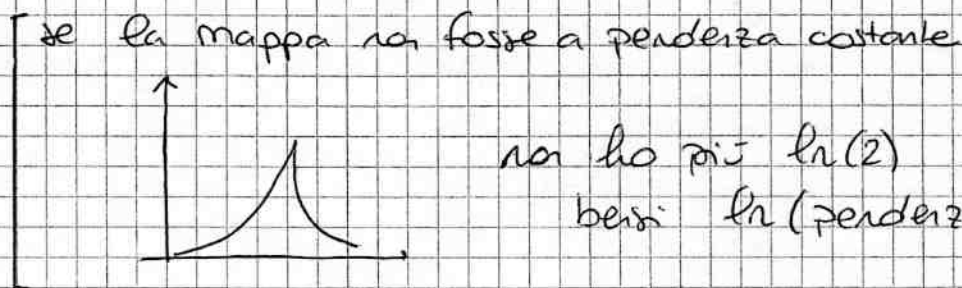
$$2^{-12} = \Delta(1) = 2\Delta(0)$$

e così via "passo a passo"

\rightarrow la distanza tra due traiettorie dopo n passi è:

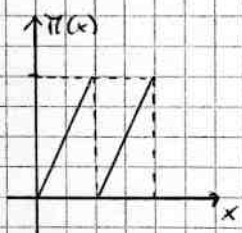
$$\Delta(n) = 2^n \Delta(0) = \Delta(0) e^{n \ln(2)} \quad \leftarrow \text{pendenza}$$

\rightarrow piccoli errori crescono in modo esponenziale



1) } \Rightarrow mappa di Bernoulli: è un sistema CAOTICO
2) }

4/11/2011



Mappa di Bernoulli:

$$f(x) = (2x) \bmod 1$$

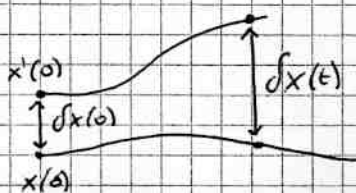
1) ORBITE NON PERIODICHE

2) DIP. SENSIBILE DALLE CONDIZ. INIZIALI

ESPONENTE DI LYAPUNOV

Tasso medio di separazione esponenziale di
traiettorie vicine.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\lim_{\delta x(0) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} \right] \right]$$



CAOS se $\lambda > 0$

$$\leadsto dx(t) \approx dx(0)e^{\lambda t}$$

\Rightarrow se $\lambda > 0$ la distanza cresce esponenzialmente nel tempo

se $\lambda = 0$ la distanza non cresce in modo esponenziale

(magari in un altro modo...)

Δ i limiti non sono intercambiabili

perché voglio prima le traiettorie VICINE, solo dopo mondo $t \rightarrow \infty$

$$[\lambda] = \frac{1}{T} \rightarrow s^{-1}$$

ci dà informazioni su quando perdono predicibilità
 λ è PREDICIBILITÀ

I sistemi caotici sono "di fatto" imprevedibili.

\rightarrow essendo deterministica sono predicibili, ma poiché c'è dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali anche un piccolo errore implica imprevedibilità

Io non conosco lo stato VERO $x(t)$

ma se conosco un'approssimazione $x(t) = x(t) + dx(t)$

MODELLO

Se però lo stato è caotico $dx(t)$ cresce nel tempo
 \uparrow incertezza

\Rightarrow dopo un tempo breve il mio modello non sarà più attendibile (es. METEO)

TEMPO DI PREDICIBILITÀ

$$T_p = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{\delta_{max}}{\delta x(0)} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{FISSO}}$

\leftarrow tolleranza

\leftarrow errore iniziale

lo migliore solo come un logaritmo

$$\rightarrow T_p \approx \frac{1}{\lambda}$$

Se il sistema non è caotico $\lambda = 0$
 es. Luna \rightarrow eclissi
 posso predire per MOLTO tempo

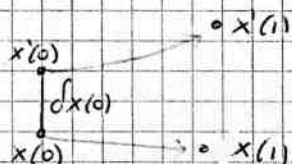
\rightarrow il sistema caotico (es. Pireo) impedisce misure precise a lungo termine, ma non di trovarne i valori medi (es. clima)

LYAPUNOV IN MAPPE UNIDIMENSIONALI

$$x(n+1) = T(x(n))$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{dx(0) \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{|dx(n)|}{|dx(0)|}$$

Supponiamo 2 traiettorie:



$$x'(0) = x(0) + dx(0)$$

$$x(1) = T(x(0))$$

$$\begin{aligned} x'(1) &= T(x'(0)) = T(x(0) + dx(0)) = \\ &= T(x(0)) + T'(x(0)) dx(0) = \\ &= x(1) + \frac{T'(x(0)) dx(0)}{dx(1)} \end{aligned}$$

Quindi:
$$dx(n+1) = T'(x(n)) dx(n)$$

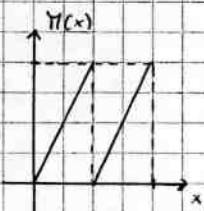
\uparrow
derivata della mappa

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{dx(0) \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{|T'(x(n-1)) T'(x(n-2)) \dots T'(x(0)) dx(0)|}{|dx(0)|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{k=0}^{n-1} |T'(x(k))| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |T'(x(k))| \end{aligned}$$

Quindi λ è la media del logaritmo della derivata della mappa.

esercizio

λ della mappa di Bernoulli:



$$T(x) = (2x) \bmod 1$$

$$T'(x) = 2 \quad \forall x$$

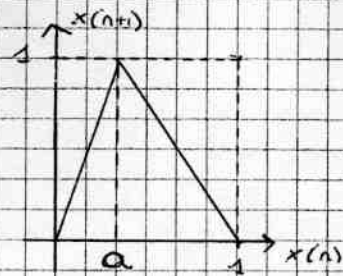
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |T'(x(k))|$$

Sarebbe un problema perché la traiettoria è CAOTICA ma so che $|T'(x)| = 2$

$$\Rightarrow \lambda = \ln 2 \approx 0,6 > 0 \Rightarrow \text{MAPPA CAOTICA}$$

esercizio Tappa a tenda skorta

$$x^{(n+1)} = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{se } x \leq a \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{se } x > a \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{se } x \leq a \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } x > a \end{cases}$$

siccome faccio la media su tempi lunghi mi interessa solo la probabilità di quanto tempo sta da questa o da quella parte di a

$$P(x^{(n)} < a) = a$$

$$P(x^{(n)} > a) = 1-a \quad a + (1-a) = 1$$

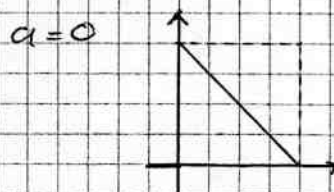
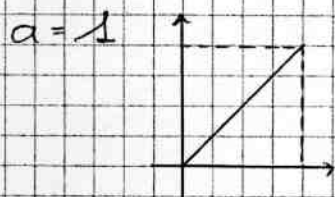
da deterministica \rightarrow a probabilistica

$$I = P(x < a) \ln \left| \frac{1}{a} \right| + P(x > a) \ln \left| \frac{1}{1-a} \right| =$$

$$= a \ln \frac{1}{a} + (1-a) \ln \frac{1}{1-a} =$$

$$= -a \ln(a) - (1-a) \ln(1-a) \geq 0 \quad \text{se } 1 \leq a \leq 0$$

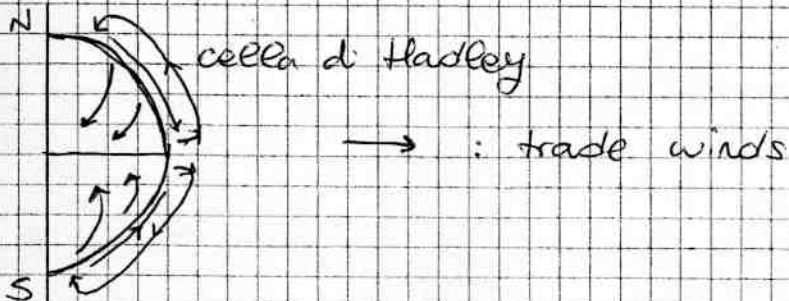
$\hookrightarrow = 0$ solo se $a=1$ o $a=0$



MODELLO DI LORENZ (1984)

HADLEY (1735)

spiega i trade winds con Coriolis

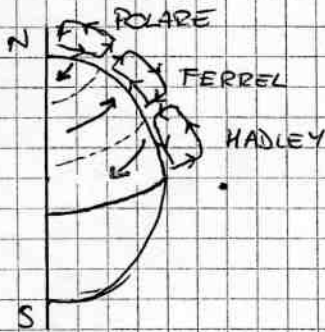


Coriolis devia a dx nell'emisfero Nord
a sx nell'emisfero Sud

Ma Hadley non spiega i venti opposti a latitudini più alte.

THOMSON e FERREL (1857-59)

dicono che esistono 3 celle di Hadley



→ Simmetria zonale

oltre a queste circolazioni, ci sono dei fenomeni locali che possono interrompere questa simmetria

↓
es. CICLONI

→ si introduce qua per cercare di spiegare i meccanismi.

→ 3 equazioni (no dipendenza spaziale)

X → intensità dei trade winds verso W (simmetria zonale)
Y, Z → intensità del vento della catena di cicloni / anticicloni

hanno componente lungo la longitudine

↳ trasporto di calore verso Polo
⇒ riduzione cella di Hadley
⇒ riduzione trade winds

Forzante solare ↓

coeff. attrito ↓

$$\begin{cases} \dot{X} = aF - aX - Y^2 - Z^2 & \text{per questi di segno } \Rightarrow \ominus : \text{riduzione intensità} \\ \dot{Y} = XY - bXZ - Y + G & \text{forzante } \underline{\text{non}} \text{ zonale} \\ \dot{Z} = bXY + XZ - Z & \end{cases}$$

↳ trasporto dei vortici da parte dei trade winds

Essendo delle velocità posso dire che il sistema deve soddisfare il principio di conservazione dell'energia.

$$E = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dE}{dz} \frac{dz}{dt}$$

$$= x(aF - ax - \cancel{x^2} - \cancel{z^2}) + y(\cancel{y^2} - by + G) + z(\cancel{bxy} + \cancel{z} - z)$$

→ i termini di accoppiamento non cambiano l'energia
→ e' mo SCAMBIO

$$= \underbrace{aFx + GY}_{\text{termini FORZANTI}} - \underbrace{ax^2 - y^2 - z^2}_{< 0 \rightarrow \text{dissipazione (attrito)}}$$

Essendo delle velocità posso dire che il sistema deve soddisfare il principio di conservazione dell'energia.

$$E = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dE}{dz} \frac{dz}{dt}$$

$$= x(aF - ax - \cancel{x^2} - \cancel{z^2}) + y(\cancel{xy} - \cancel{bxz} - y + G) + z(\cancel{by} + \cancel{xz} - z)$$

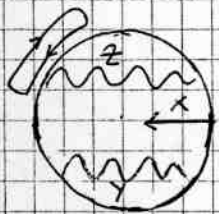
→ i termini di accoppiamento non cambiano l'energia
 ~ è uno SCAMBIO

$$= \underbrace{aFx + Gy}_{\text{termini FORZANTI}} - \underbrace{ax^2 - y^2 - z^2}_{< 0 \rightarrow \text{dissipazione (attrito)}}$$

11/11/2011

Lorenz 84

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G \\ \dot{z} = bxy + xz - z \end{cases}$$



← catena di vortici che trasportano calore dall'equatore verso i poli

⇒ riducono cella convettiva di Hadley

G: rappresenta il fatto che la forzante può essere diversa a diverse longitudini

$$E = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

abbiamo trovato un punto fisso: [G=0]

$$x^* = F \quad y^* = 0 \quad z^* = 0$$

stabilità:

$$J = \begin{pmatrix} -a & -2y & -2z \\ y - bz & x - 1 & -bx \\ by + z & bx & x - 1 \end{pmatrix}_{x^*} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & F-1 & -bF \\ 0 & bF & F-1 \end{pmatrix}$$

$$\det |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & F-1-\lambda & -bF \\ 0 & bF & F-1-\lambda \end{vmatrix} = -(a+\lambda) \left[(F-1-\lambda)^2 + b^2 F^2 \right] = 0$$

Quindi ho:

$$1) \lambda_1 = -a$$

$$2) [(F-1) - \lambda]^2 + b^2 F^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda(F-1) + (F-1)^2 + b^2 F^2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = (F-1) \pm \sqrt{\cancel{(F-1)^2} - \cancel{(F-1)^2} - b^2 F^2} = (F-1) \pm i b F$$

un punto fisso e' (linearmente) stabile $\Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0$

$$1) \lambda_1 = -a$$

riguardando il modello

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{-ax^2 - y^2 - z^2}_{\text{termini di attrito}} + (aFx + Gy)$$

$\Rightarrow a > 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 < 0 \quad \text{OK} \quad \text{STABILE}$$

$$2) \lambda_{2,3} = (F-1) \pm i b F$$

$$\text{Re}(\lambda_{2,3}) = (F-1) \quad \text{se } F > 1$$

$$\Rightarrow \text{Re}(\lambda_{2,3}) > 0 \Rightarrow \text{INSTABILE}$$

$\leadsto F$ e' la forzante

cioe' se forzo il sistema "abbastanza" (soglia)
il punto fisso diventa instabile

\hookrightarrow gli AUSEI perdono stabilita'
(trade winds)

\rightarrow Per $F > 1$ nasce una soluzione periodica

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \sqrt{a(F-1)} \cos(bt + \varphi_0) \\ z_0 = \sqrt{a(F-1)} \sin(bt + \varphi_0) \end{cases}$$

$$y_0^2 + z_0^2 = a(F-1)$$

non sono le variabil.
geniche

\downarrow
sono un caso
particolare

$$\rightarrow \frac{d}{dt} (y^2 + z^2) = 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} =$$

$$= 2y(\cancel{xy} - bxz - y) + 2z(\cancel{bz} + xz - z) =$$

$$= 2xy^2 + 2xz^2 - 2y^2 - 2z^2 =$$

$$= 2(y^2 + z^2)(x-1)$$

Se prendo $x=1$

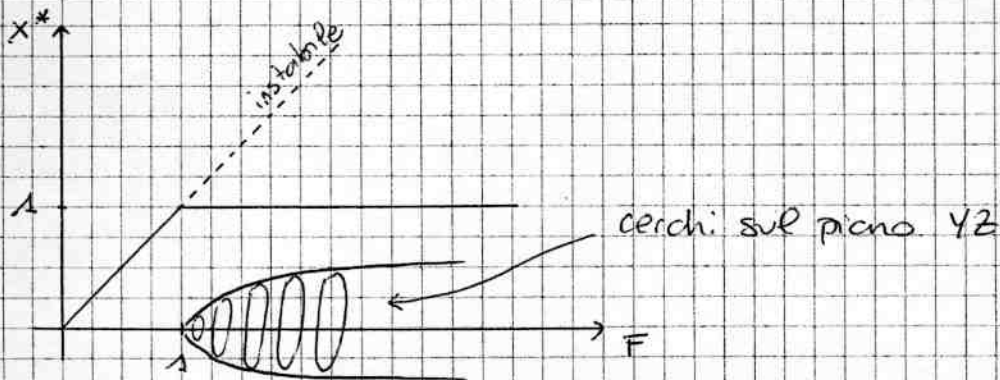
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(y^2 + z^2) = 0 \quad \text{cioè } y^2 + z^2 \text{ è COSTANTE}$$

↳ mi riconduce al caso particolare

$$(y_0^2 + z_0^2 = a(F-1))$$

$$\dot{x} = -(y^2 + z^2) + a(F-1) = -a(F-1) + a(F-1) = 0 \quad \checkmark$$

⚠ Questo non è un punto fisso, è periodico

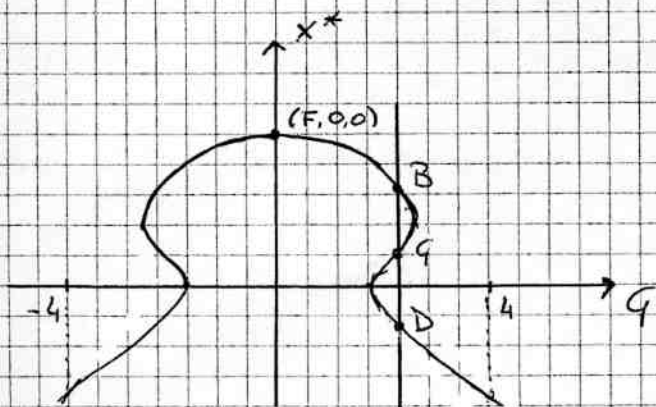


Questo è tutto valido per $Q=0$

Lorenz ha anche studiato il caso $Q > 0$ ($F < 1$ fissato)

↳ ci sono dei punti fissi multipli

→ EQUILIBRI MULTIPLI



Se cambio Q cambia anche x^*

ad un certo punto ho 3 possibili punti fissi → B, G, D

ca G) INSTABILE

B) circolazione STANDARD (tipo Hadley)

D) circolazione ANOMALA → trade winds invertiti

e fortemente ASIMMETRICA

$$\downarrow$$
$$y, z > 0$$

cicloni interrompono
equilibrio zonale

↳ STATO DI BLOCKING

se aumento ancora Q

→ 2 stati

·) uno "giusto"

·) uno con i venti invertiti

Periodicità? → STAGIONI

- Lorenz: la variazione di stagionalità → variazione irragg. solare
⇒ si salta da un punto fisso ad un altro
(non risonanza stocastica!!)

MODELLO FORZATO (emisfero Sud) con F periodica (Q costante > 0)
1 anno

$$F = F_0 + A \cos\left(\frac{t}{T}\right)$$

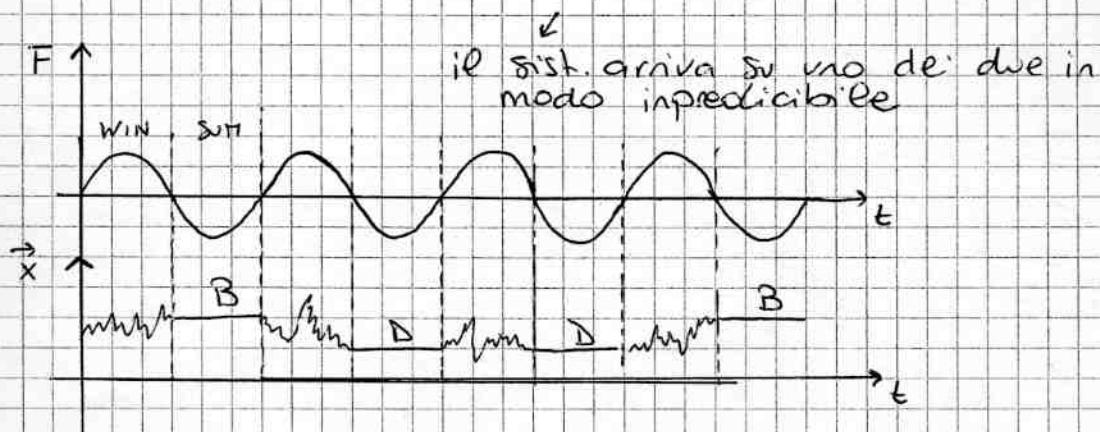
·) fase INVERNALE → $F = 8$

·) punto caotico (sist. dinamico)

·) fase ESTIVA → $F = 6$

- punto fisso Hadley

- punto fisso anomalo (Blocking)



EL NIÑO

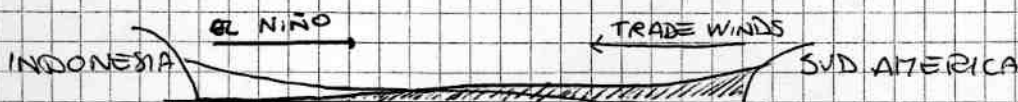
SO

→ Vallis

↳ pattern climatico del Pacifico tropicale
(con effetti GLOBALI) → ogni 3/7 anni

Caratteristiche:

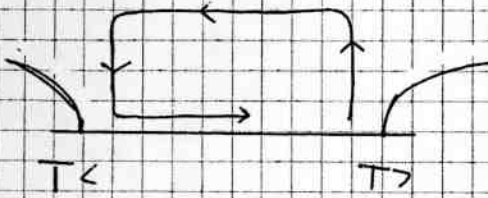
- 1) H_2O superficiale calda ($+5^\circ C$) sulle coste del Pacifico est (PERU)
- 2) Riduzione dei Trade Winds → e loro inversione ($O \rightarrow E$)
- 3) Innalzamento del Pacifico ad EST (10 cm)
- 4) monzone successivo INTENSO ed ESTESO



Con el Niño introduco un modello base per i meccanismi di interazione ATMOSFERA - OCEANO

il pattern atmosferico del Niño causa un pattern proprio dell'oceano

↪ Oceano agisce sull'atmosfera



Date del Niño:

1973, 1983, 1987, 1992, 1995, 1998, 2003, (2005?), 2009

↳ questi eventi non sono sempre uguali (\neq intensità)

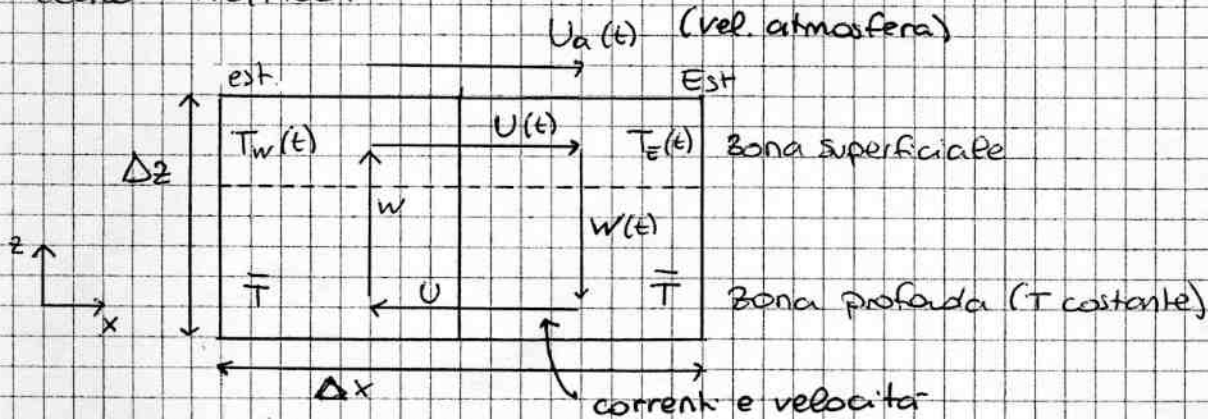
MODELLO IN VALLE

accoppiamento oceano-atmosfera

↳ si basa sui Box MODEL

(classe di modelli in cui il bacino studiato viene visto come una scatola)

Oceano PACIFICO:



Nella realtà $\frac{\Delta x}{\Delta z} \sim 10^3$

U_a è un vento che si genera se $T_e > T_w$

→ $U_a \propto (T_e - T_w)$

$\frac{dU_a}{dt} = B (T_e - T_w)$ → se la differenza di temperatura mi aumenta il vento

ma se $T_e = T_w$ non devo avere vento

l'equazione invece mi dice che è COSTANTE

⇒ mi serve altro.

$$\frac{dU_a}{dt} = B'(T_E - T_w) - C'U_a$$

$C' \rightarrow$ legato alla viscosità

il vento costante genera una corrente nell'oceano
(non è un meccanismo generato dal mare)

$$\frac{dU}{dt} = D U_a - C U$$

$D \rightarrow$ attrito aria-acqua

in un fluido $\frac{dT(x,t)}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dx} U + \frac{dT}{dz} W = 0$$

$$\cdot = \frac{dT}{dt} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T = 0$$

$$\frac{dT_w}{dt} = -U \frac{\Delta T}{\Delta x} - W \frac{\Delta T}{\Delta z} = -U \frac{T_E - T_w}{\Delta x} - W \frac{T_w - \bar{T}}{\Delta z}$$

ricordo che l'acqua è incompressibile

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$$

$$\text{se } \rho = \text{cost.} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad \frac{dU}{dx} + \frac{dW}{dz} = 0$$

$$\text{cioè } \frac{U}{\Delta x} = \frac{W}{\Delta z}$$

se ho corrente verso sx devo avere corrente verso le basso, ecc...

$$\Rightarrow \frac{dT_w}{dt} = -\frac{U}{\Delta x} (T_E - T_w + T_w - \bar{T}) = -\frac{U}{\Delta x} (T_E - \bar{T})$$

ΔT_w non dipende da T_w ...

Dovendo tener conto anche dei termini di riassorbimento:

$$\frac{dT_w}{dt} = -\frac{U}{\Delta x} (T_E - \bar{T}) - A(T_w - T^*)$$

$T^* \rightarrow$ temperatura di equilibrio

$$\frac{dT_E}{dt} = \frac{U}{\Delta x} (T_w - \bar{T}) - A(T_E - T^*)$$

\rightarrow ho un sistema di 4 equazioni

$$\begin{cases} \frac{dU_a}{dt} = B'(T_E - T_w) - C'U_a \\ \frac{dU}{dt} = D U_a - C U \\ \frac{dT_w}{dt} = \frac{U}{\Delta x} (\bar{T} - T_E) - A(T_w - T^*) \\ \frac{dT_E}{dt} = \frac{U}{\Delta x} (T_w - \bar{T}) - A(T_E - T^*) \end{cases}$$

18/11/2011

Voglio semplificare il sistema che ho

Atmosfera all'equilibrio $\Rightarrow \frac{dU_a}{dt} = 0$

Le variazioni sono veloci

(sono interessati alle variabili "lente")

tempo scala dell'oceano

Otengo $U_a = \frac{B'}{C'} (T_E - T_w)$

↳ cambiando T, Ua e' istantaneamente "aggiustata"

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = D \frac{B'}{C'} (T_E - T_w) - CU \\ \frac{dT_w}{dt} = \frac{U}{\Delta x} (\bar{T} - T_w) - A (T_w - T^*) \\ \frac{dT_E}{dt} = \frac{U}{\Delta x} (T_w - \bar{T}) - A (T_E - T^*) \end{cases}$$

ORA scelgo una scala di temperatura in cui: $\bar{T} = 0 \Rightarrow T' = T - \bar{T}$

chiamo $D \frac{B'}{C'} \equiv B$

definisco: 1) un nuovo tempo $t' \equiv At$

$[A] = T^{-1} \Rightarrow t'$ adimensionale

2) una nuova velocita'

$u' = \frac{U}{A \Delta x} \rightarrow u'$ adimensionale

3) delle nuove temperature

$T'_{E,w} = \frac{T_{E,w}}{T^*}$

$\rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} \frac{dt'}{dt} = A \frac{d}{dt'}$

Quindi:

$$\begin{cases} A \frac{d}{dt'} (A \Delta x u') = B T^* (T'_E - T'_w) - C A \Delta x u' \\ A \frac{d}{dt'} T^* T'_w = A u' (-T^* T'_E) - A (T^* T'_w - T^*) \\ A \frac{d}{dt'} T^* T'_E = A u' (T^* T'_w) - A (T^* T'_E - T^*) \end{cases}$$

A non scompare: rimane nell'aver scelto

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{du'}{dt'} = b(T_E' - T_W') - cu' \\ \frac{dT_W'}{dt'} = -u'T_E' - (T_W' - 1) \\ \frac{dT_E'}{dt'} = u'T_W' - (T_E' - 1) \end{cases} \quad \text{con: } \begin{cases} b = \frac{BT^*}{A^2 \Delta x} \\ c = \frac{C}{A} \end{cases}$$

(se volessi tornare alle dimensioni: dovrei risostituire)

Ora ribattezzo le variabili:

$$x \equiv u' \quad y \equiv T_E' - T_W' \quad z \equiv T_E' + T_W' - 2$$

e chiamo (per comodità) $t' = t$

$$\frac{d}{dt} (T_E' - T_W') = u' (T_W' + T_E') - (T_E' - T_W')$$

$$\frac{d}{dt} (T_E' + T_W') = u' (T_W' - T_E') - (T_W' + T_E' - 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = by - cx \\ \frac{dy}{dt} = x(z+2) - y \\ \frac{dz}{dt} = -xy - z \end{cases}$$

ho un sistema dinamico di 3 equazioni che posso considerare in modo ASTRATTO

x è forzata da $y \rightarrow$ la T forza la corrente
(b termine di accoppiamento)

$y, z \rightarrow$ la corrente trasporta la T

• è simile al sistema Lorenz 1963:
(matematicamente)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Punti Fissi?

1) $\vec{x}_A^* = (0, 0, 0)$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \rightarrow by - cx = 0 \Rightarrow y = \frac{c}{b}x$

$$\rightarrow -xy - z = 0$$

$$-x \frac{c}{b}x - z = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{c}z$$

$$\rightarrow x(z+2) = y$$

$$x\left(-\frac{c}{b}x^2 + 2\right) = \frac{c}{b}x$$

battezzo $\frac{c}{b} = r$

$\hookrightarrow rx^3 + rx - 2x = 0$

.) $x=0$ già vista

.) $rx^2 = 2-r$

$\hookrightarrow x = \sqrt{\frac{2-r}{r}}$

$\Rightarrow \vec{x}_2^* = \left(\sqrt{\frac{2-r}{r}}, \sqrt{r(2-r)}, r-2 \right)$

ho quindi DUE punti fissi,
cosa significano?

\vec{x}_1^* : non c'è corrente
l'oceano è tutto alla stessa temperatura

PUNTO "MORTO"

\vec{x}_2^* : c'è corrente (costante)
c'è differenza di temperatura
c'è somma delle T diversa da 2

PUNTO CONVETTIVO

STABILITÀ?

.) \vec{x}_1^*

$J = \begin{pmatrix} -c & b & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1^*}$

$\begin{vmatrix} -c-\lambda & b & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(c+\lambda)(1+\lambda)^2 + b2(1+\lambda) = 0$
 $(1+\lambda)[2b - (1+\lambda)(c+\lambda)] = 0$

.) $\lambda_1 = -1$ $\forall c, b \Rightarrow$ STABILITÀ.

.) λ_{23}

$+\lambda^2 + \lambda(c+1) + c - 2b = 0$

$\lambda_{23} = \frac{-(c+1) \pm \sqrt{(c+1)^2 - 4c + 8b}}{2}$

$= \frac{-(c+1) \pm \sqrt{8b + (c-1)^2}}{2}$

Devo solo fare attenzione al caso:

radice reale con \oplus davanti (λ_2)

$$\lambda_2 = \frac{-(c+1) + \sqrt{8b + (c-1)^2}}{2} = 0$$

Quando $(c+1) = \sqrt{8b + (c-1)^2}$

$$(c+1)^2 = 8b + (c-1)^2$$

$$c^2 + 2c + 1 = 8b + c^2 - 2c + 1$$

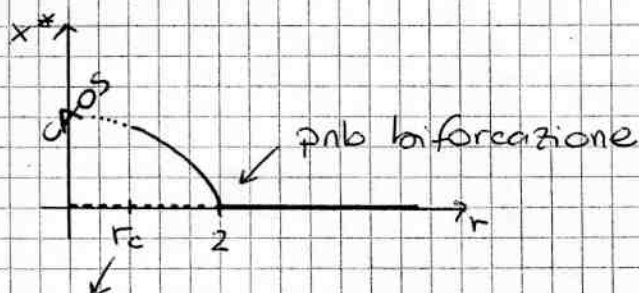
$$4c = 8b$$

$$\hookrightarrow \frac{c}{b} = r = 2$$

Se $c=0$ ho $-1 + \sqrt{8b+1} > 0$

\Rightarrow per $r < 2$ è INSTABILE

\hookrightarrow STABILE per $r > 2$



) \vec{x}_2^ Se ne cerca la stabilità

\hookrightarrow trova un valore r_c sotto il quale non ho più stabilità

EL NIÑO $\Rightarrow U > 0$ ($\Rightarrow U_a$ vengono invertiti)



\leftarrow senza particolare periodicità

Si è preso $c = 0,25 \text{ months}^{-1} \approx \frac{1}{50} \text{ y}^{-1}$

$$A = 1 \text{ y}^{-1}$$

$$\Delta x = 7500 \text{ km}$$

è difficile stimare $b \rightarrow 2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ C}^{-1}$

\rightarrow una corrente di $35 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ può essere generata in 1 month da una differenza di temperatura di 2°C

\rightarrow il modello mi evidenzia anche il periodo dell'anno di questi eventi \rightarrow STAGIONI