

# Risonanza Stocastica: come il clima cambia la fisica

G. Boffetta

*Dipartimento di Fisica e INFN,*

*Università di Torino,*

*via P.Giuria 1, 10125 Torino (Italy)*

(Dated: November 22, 2012)

## INTRODUZIONE

Il clima è uno dei sistemi più complessi in natura ed il suo studio una delle più dure sfide concettuali e tecnologiche in atto. L'aumentare dei dati climatici a disposizione ed il miglioramento dei modelli numerici di simulazione richiedono, in parallelo, lo sviluppo di concetti base, di modelli, che permettano la comprensione dei fenomeni osservati e simulati.

Un'osservazione del clima passato particolarmente suggestiva è la presenza dei cosiddetti cicli di Milankovitch: dei pattern climatici con fluttuazioni della temperatura media terrestre di  $10\text{ K}$  con periodicità approssimata di circa  $40\text{ ka}$  e  $100\text{ ka}$  nell'ultimo milione di anni (dati di Vostok ed Epica). Il singolo ciclo segue un pattern tipico a "dente di sega": un rapido riscaldamento (in circa  $10\text{ ka}$ ) al periodo interglaciale seguito da un lento ritorno al periodo glaciale. Le periodicità dei pattern climatici sono state messe in corrispondenza con le variazioni astronomiche dell'orbita terrestre dal poliedrico scienziato serbo Milutin Milankovitch già nel 1941. Le variazioni orbitali, dovuti alla presenza degli altri pianeti nel nostro sistema, sono infatti l'unica causa delle fluttuazioni della radiazione solare media che incide sul nostro pianeta. In particolare, la variazione dell'eccentricità dell'orbita (quanto l'orbita si discosta da una circonferenza) con periodi principali di  $100\text{ ka}$  e  $413\text{ ka}$ , l'inclinazione dell'asse terrestre con periodo di  $41\text{ ka}$  e la precessione degli equinozi ( $23\text{ ka}$ ) contribuiscono alla variazione dell'insolazione ad una data latitudine. Questo effetto è particolarmente importante alle alte latitudini: ad esempio alla latitudine di  $65^\circ\text{ N}$  al solstizio d'estate l'insolazione può variare da  $450\text{ W/m}^2$  a  $550\text{ W/m}^2$  a causa delle variazioni astronomiche.

A livello globale le variazioni dell'insolazione sono molto più limitate e non possono spiegare, da sole, le variazioni di temperatura media di  $10\text{ K}$  osservate nei dati climatici. È necessario quindi un meccanismo di amplificazione che permetta di passare dalla piccola modulazione solare alla grande variazione climatica. Una possibile proposta, avanzata dai ricercatori italiani Benzi, Parisi, Sutera e Vulpiani nel 1982, è che l'amplificazione avvenga per mezzo di un feedback positivo indotto dall'albedo e che il passaggio tra periodo glaciale ed interglaciale avvenga tramite una seconda amplificazione dovuta alla *risonanza stocastica* indotta dalle fluttuazioni meteorologiche.

In questo articolo rivedremo brevemente gli ingredienti del modello di risonanza per il clima terrestre: il modello di bilancio energetico globale con la nonlinearietà introdotta

dall'albedo, le modulazioni astronomiche e il rumore indotto dalla variabilità meteorologica.

## UN MODELLO DI BILANCIO ENERGETICO GLOBALE

Consideriamo come variabile fondamentale del nostro modello la temperatura media della Terra  $T$ . La media va intesa su tutta la superficie e anche su un tempo meteorologico lungo ma la definizione precisa non è importante ai nostri fini. Il valore di  $T$  è determinato dal bilancio di energia che entra ed esce nel sistema. L'energia in ingresso è data dalla radiazione solare  $P_{in}$  (ad alta frequenza) mentre quella in uscita è data dalla radiazione infrarosso emessa dalla Terra  $P_{out}$  più la frazione  $\alpha$  di radiazione incidente direttamente riflessa dalla superficie terrestre. Per semplicità in questo approccio si trascura il contributo dell'atmosfera. Possiamo quindi scrivere

$$C \frac{dT}{dt} = P_{in} - \alpha P_{in} - P_{out} \quad (1)$$

dove  $C$  è la capacità termica della Terra, un coefficiente che nasconde una estrema varietà di fenomeni fisici ed il cui valore fortunatamente non è importante per quel che segue.

La radiazione in ingresso è data da  $P_{in}(t) = \pi R^2 S$  dove  $S \simeq 1370 W m^{-2}$  è la costante solare (la potenza della radiazione solare fuori dall'atmosfera per metro quadrato) e  $\pi R^2$  ( $R$  il raggio della Terra) rappresenta la superficie effettiva perpendicolare ai raggi solari.  $P_{in}$  è indipendente (ovviamente) dalla temperatura  $T$  della Terra, ma potrà dipendere dal tempo secondo le modulazioni astronomiche. La radiazione emessa dalla superficie terrestre alla temperatura  $T$  si può stimare usando la legge di Stefan-Boltzmann per il corpo nero secondo la quale  $P_{out} = 4\pi R^2 \sigma T^4$  ( $\sigma \simeq 5.67 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$  è la costante di Stefan-Boltzmann). Per ultimo  $\alpha$  rappresenta l'albedo media della Terra, cioè quanto della radiazione solare viene riflessa nello spazio. Il suo valore medio sulla Terra vale  $\alpha \simeq 0.3$  ma esso non è distribuito uniformemente. Per esempio, per le foreste  $\alpha \simeq 0.15$ , per i deserti di sabbia il valore è circa  $\alpha \simeq 0.4$  mentre per la neve può arrivare a  $\alpha \simeq 0.8$ . Anche l'atmosfera contribuisce all'albedo in quanto la copertura nuvolosa riflette la radiazione solare.

Consideriamo inizialmente il caso semplificato in cui trascuriamo il ruolo dell'albedo. La soluzione stazionaria della (1) con  $\alpha = 0$ , ottenuta richiedendo  $dT/dt = 0$ , porta alla temperatura di equilibrio

$$T_0^* = \left( \frac{S}{4\sigma} \right)^{1/4} \simeq 279 K \simeq 6^\circ C \quad (2)$$

che sottostima la temperatura media del pianeta di circa 10 gradi. Data la crudezza del modello, basato su una semplice e fondamentale legge della fisica, il risultato è sorprendentemente vicino alla realtà. Il motivo fondamentale della sottostima è ovviamente l'assenza dell'atmosfera e del suo effetto serra. Da un punto di vista matematico, il *punto fisso*  $T_0^*$  dell'equazione (1) è un punto *stabile*: infatti se per qualche motivo il pianeta si trovasse ad una temperatura  $T > T_0^*$  avremmo che  $P_{in}$  non cambia mentre  $P_{out}(T)$  aumenterebbe (con la quarta potenza di  $T$ ) e pertanto la temperatura scenderebbe verso  $T_0^*$  (e ovviamente viceversa per  $T < T_0^*$ ). Abbiamo qui un esempio di ciclo di feedback negativo, cioè per il quale il sistema si autoregola. Da un punto di vista fisico, solo i punti fissi stabili sono significativi: infatti il sistema si allontana spontaneamente da un punto fisso instabile che quindi non viene mai osservato.

Come mostra la (2) la temperatura di equilibrio della terra dipende dal valore di  $S$ . Questa dipendenza è relativamente debole a causa della potenza  $1/4$  che appare nella (2). Per esempio si stima che la costante solare abbia delle fluttuazioni di circa 0.1% durante il ciclo solare di 11 anni. Queste fluttuazioni portano ad una variazione della temperatura di equilibrio, secondo la (2), di meno di 0.1 K. Si può stimare che le modulazioni astronomiche di Milankovitch portino ad una variazione diretta della temperatura di equilibrio di circa 0.5 K, molto minore quindi del valore 10 K dei cicli glaciali-interglaciali.

Consideriamo ora il ruolo dell'albedo, cioè prendiamo la (1) con  $\alpha \neq 0$ . Ovviamente la temperatura di equilibrio sarà più bassa che nel caso precedente. Ma il punto fondamentale che ora ci interessa è che l'albedo media è in realtà una funzione della temperatura: se la Terra si raffredda, maggiore sarà la copertura dei ghiacci e quindi maggiore sarà l'albedo. È facile capire che questo meccanismo genera un feedback positivo: se l'albedo è maggiore, infatti, la radiazione assorbita è minore e la Terra si raffredda ulteriormente. Pertanto non è sorprendente scoprire che in presenza di un'albedo che dipende da  $T$  (in modo decrescente) il punto fisso  $T_0^*$  diventa instabile. Chiaramente l'albedo, essendo un coefficiente numerico limitato  $0 \leq \alpha \leq 1$ , non può decrescere indefinitamente: per temperature molto basse tutta la superficie terrestre sarebbe coperta di ghiacci (la cosiddetta *palla di neve*) e l'albedo raggiungerebbe il valore minimo costante. Ovviamente anche per temperature relativamente alte, quando tutti i ghiacci siano sciolti, l'albedo raggiungerebbe un altro valore costante. Per temperature intermedie, dove ad una variazione di temperatura si può associare una variazione di copertura glaciale, si assume una semplice legge lineare di dipendenza tra

l'albedo e la temperatura media.

Un secondo meccanismo di instabilità generato dall'albedo è legato al sistema di formazione delle nuvole. Anche le nuvole aumentano l'albedo riflettendo la radiazione solare. Il processo di formazione delle nuvole è ovviamente molto complesso, ma in generale all'aumentare della temperatura ci si aspetta una maggiore copertura nuvolosa e quindi un aumento dell'albedo. Questo processo è bilanciato dalle precipitazioni e quindi ci aspettiamo che il contributo all'albedo delle nuvole saturi al di sopra di una data temperatura.

In generale, la presenza dell'albedo rende quindi instabile il punto fisso  $T_0^*$  discusso in precedenza. Cosa succede allora al pianeta? Esplicitando la dipendenza dalla temperatura dei vari termini, il nostro sistema si può riscrivere come

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))P_{in} - P_{out}(T) \quad (3)$$

Quale soluzione avremo data una forma della funzione albedo?

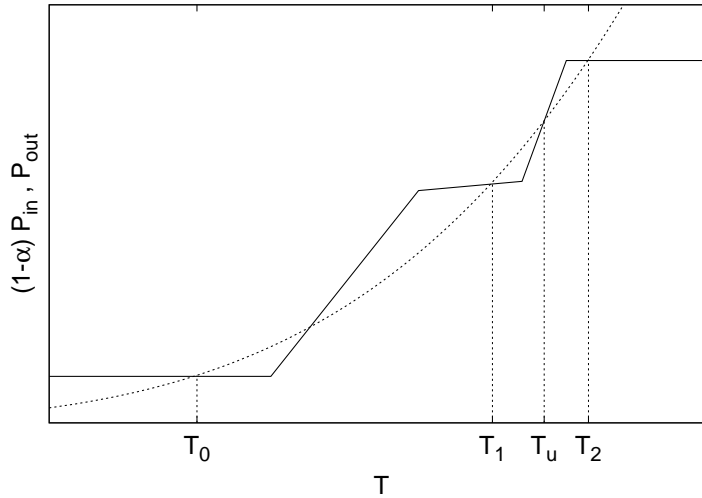


FIG. 1. Radiazione di ingresso  $(1 - \alpha)P_{in}$  (linea continua) e di uscita  $P_{out}$  (linea tratteggiata) in funzione della temperatura media per il modello di bilancio energetico. Le intersezioni tra le due curve individuano i punti fissi del sistema dei quali  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_2$  sono stabili, mentre  $T_u$  è instabile.

Per capirlo consideriamo la Figura 1. In questo grafico sono riportati  $(1 - \alpha(T))P_{in}$  e  $P_{out}$  in funzione della temperatura del pianeta. La linea tratteggiata rappresenta la legge del corpo nero  $P_{out} \sim T^4$ , mentre la linea continua rappresenta la radiazione assorbita, cioè la costante solare modulata dall'effetto dell'albedo. La curva dell'albedo ha diversi plateau costanti (in funzione della temperatura), collegati da andamenti lineari, rappresentanti gli

effetti della copertura glaciale e nuvolosa descritti in precedenza. Ovviamente è possibile complicare il sistema introducendo ulteriori meccanismi di feedback e la curva  $1 - \alpha(T)$  avrà allora un andamento più complesso.

Le intersezioni tra le due curve definiscono i punti di equilibrio del sistema nei quali, per definizione  $dT/dt = 0$ . La stabilità di questi punti fissi è determinata dalle derivate delle due curve nel punto fisso: quando la curva  $(1 - \alpha)P_{in}$  cresce più velocemente di  $P_{out}$  il punto fisso è instabile (infatti uno spostamento dal punto fisso viene amplificato), viceversa il punto fisso è stabile. Nell'esempio mostrato in Fig. 1 abbiamo quindi 3 punti fissi stabili corrispondenti alle temperature  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_2$  e due punti fissi instabili di cui uno è  $T_u$ . Osserviamo che la forma precisa della curva  $\alpha(T)$  non è importante per la nostra analisi: il punto fondamentale per il modello è la presenza di meccanismi di feedback che portino alla presenza di equilibri multipli. In sostanza, l'effetto dell'albedo è quello di sostituire il punto di equilibrio  $T_0^*$  discusso in precedenza con una serie di punti fissi a temperature differenti.

Il punto stabile  $T_0$  è nella regione di massimo valore di albedo (cioè  $1 - \alpha$  minimo) e corrisponde allo stato "palla di neve" che non ci interessa in questo contesto. Gli altri due punti fissi stabili,  $T_1$  e  $T_2$ , sono generati dal meccanismo combinato di feedback dovuto ai ghiacci ed alle nuvole e rappresentano quindi lo stato glaciale ed interglaciale, per i quali quindi assumeremo  $T_2 - T_1 = 10K$ .

A questo punto consideriamo le modulazioni astronomiche di Milankovitch. All'interno del modello di bilancio energetico possiamo tenere conto di queste modulazioni assumendo che la radiazione di ingresso  $P_{in}$  abbia una piccola componente variabile (che assumeremo armonica per semplicità) e quindi scriviamo

$$P_{in}(t) = \pi R^2 S (1 + \epsilon \sin(\omega t)) \quad (4)$$

dove  $\epsilon$  rappresenta un parametro piccolo, preso dell'ordine di  $\epsilon \simeq 5 \times 10^{-4}$ , ed  $\omega$  è la frequenza (principale) delle modulazioni astronomiche. L'effetto della modulazione è quello di spostare periodicamente verso l'alto e verso il basso la curva della radiazione di ingresso nella Figura 1.

Come si capisce dal grafico, se la radiazione di ingresso aumentasse molto la curva  $(1 - \alpha)P_{in}$ , salendo verticalmente, perderebbe le due intersezioni  $T_1$  e  $T_0$  con la curva  $P_{out}$  ed il sistema avrebbe solo il punto fisso interglaciale  $T_2$ . Viceversa, se la radiazione fosse molto ridotta, scomparirebbe il punto fisso  $T_2$  ed il sistema sarebbe forzato nel punto fisso glaciale

$T_1$  (o addirittura  $T_0$  se la curva scendesse molto). In realtà, come abbiamo già discusso, la modulazione astronomica della radiazione incidente è troppo piccola per generare queste *biforcazioni* con la scomparsa di uno o più punti fissi del sistema.

Quello che dobbiamo pensare, facendo ancora riferimento allo schema di Fig. 1, è che le modulazioni astronomiche muovano solo leggermente la curva  $(1-\alpha)P_{in}$  che mantiene quindi i punti fissi stabili. Quello che viene modificato, in un modo che sarà chiarito nel capitolo successivo, è il *grado di stabilità* dei due punti fissi  $T_1$  e  $T_2$  ovvero, con una terminologia che diventerà chiara, la probabilità che il sistema si trovi in uno dei due punti fissi. Quello che ancora manca nel modello è il meccanismo che permetta di saltare da un punto fisso stabile ad un altro più probabile. Questo meccanismo è dato dalla risonanza stocastica.

## IL MECCANISMO DELLA RISONANZA STOCASTICA

Il meccanismo della risonanza stocastica richiede la partecipazione di un nuovo soggetto nel modello. Questo soggetto è la variabilità meteorologica del clima. Essa induce delle fluttuazioni su tempi scala molto più veloci della dinamica descritta dall'equazione (1) le quali portano a variazioni del sistema attorno alla temperatura di equilibrio. Come avviene per molti fenomeni fisici, in presenza di variabili con tempi scala molti diversi, possiamo trattare le variabili veloci come un *rumore* che agisce direttamente sulle variabili lente. Il vantaggio di questo approccio, che è utilizzato con successo in moltissimi campi della fisica, dalla meccanica statistica a..., è che la dinamica del processo veloce non deve essere risolta in dettaglio, ma è sufficiente darne solo le proprietà statistiche. Oltretutto, la statistica delle variabili veloci può in molti casi essere assunta Gaussiana, infatti quando mediata sulle scale dei processi lenti, è il risultato della sovrapposizione di tante cause indipendenti.

L'effetto delle fluttuazioni stocastiche sulla dinamica del nostro modello climatico con equilibri multipli risulta nella possibilità del sistema di saltare da un punto fisso ad un altro per mezzo di una serie fluttuazioni *stocastiche* che lo portano fuori dall'equilibrio. Per particolari condizioni questi salti avvengono in condizioni di *risonanza* con le modulazioni periodiche dei punti fissi date dalla (4): in queste condizioni si parla di risonanza stocastica.

Per comprendere come funzioni la risonanza stocastica, consideriamo una ulteriore semplificazione del modello. Siccome siamo interessati alla dinamica attorno ai punti fissi  $T_1$  e  $T_2$  di Fig. 1, linearizziamo il modello (1) attorno al punto instabile  $T_u$ , cioè introduciamo

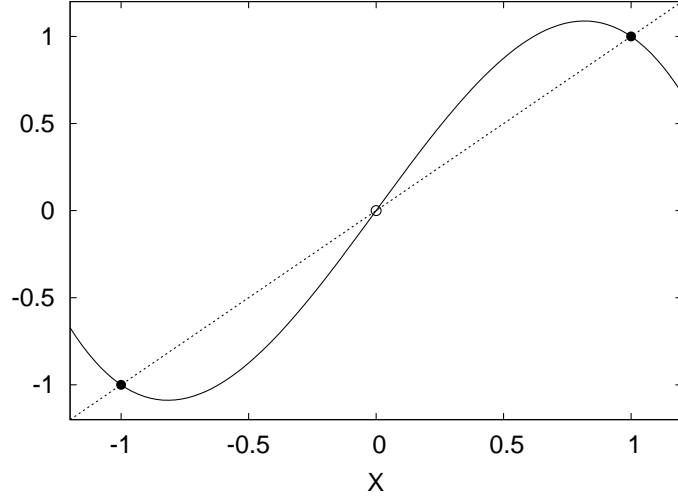


FIG. 2. Punti di equilibrio per il modello con variabile adimensionale (6). La curva tratteggiata è la linearizzazione della potenza di uscita,  $P_{out} = X$ , la linea continua il modello analitico per la potenza assorbita  $P_{in} = 2X - X^3$  che riproduce qualitativamente il ruolo dell'albedo. Il punto fisso  $X = 0$  (cerchio aperto) è instabile, mentre i punti fissi  $X = -1$  e  $X = +1$  (cerchi pieni) sono stabili e corrispondono ai punti  $T_1$  e  $T_2$  della Fig. 1.

una nuova variabile  $X$  legata a  $T$  da

$$T = T_u + \Delta T X \quad (5)$$

dove  $\Delta T \simeq 5K$  è la distanza tra  $T_u$  e  $T_1$  o  $T_2$  (notiamo che assumiamo qui la simmetria  $T_2 - T_u = T_u - T_1$ , ma si può facilmente generalizzare la (5) senza fare uso di questa assunzione). Per la variabile  $X$  il punto fisso instabile corrisponde ovviamente a  $X = 0$  mentre i punti stabili sono dati da  $X = \pm 1$ . Siccome  $\Delta T \ll T_u$ , possiamo linearizzare l'equazione (1) attorno a  $T_u$ . Fisicamente questo significa che siamo interessati alla dinamica per piccole variazioni della temperatura, tra  $T_1$  e  $T_2$ . Otteniamo quindi  $P_{out} \simeq 4\pi R^2 \sigma (T_u^4 + 4T_u^3 \Delta T X + \dots)$  pertanto, riscaldando opportunamente le variabili la potenza di uscita è semplicemente proporzionale ad  $X$ . Per avanzare da un punto di vista formale, è utile introdurre una formulazione analitica della funzione albedo  $\alpha(T)$ . La funzione più semplice che riproduce qualitativamente la Fig. 1 attorno al punto  $T_u$  con la corretta simmetria è, nella variabile  $X$ , il polinomio  $2X - X^3$  mostrato in Fig. 2. Introducendo anche la modulazione periodica (4) e riscaldando il tempo in modo da renderlo adimensionale si ottiene il modello di bilancio



energetico scritto per la variabile  $X$

$$\frac{dX}{dt} = X - X^3 + \epsilon \sin(\omega t) = -\frac{dV(X,t)}{dX} \quad (6)$$

dove abbiamo introdotto la funzione potenziale  $V(X,t) = -X^2/2 + X^4/4 - \epsilon X \sin(\omega t)$ . L'introduzione della funzione  $V(X,t)$  rende il nostro problema formalmente equivalente al moto di una particella con attrito (in regime sovrasmorzato) nel potenziale a doppia buca  $V(X,t)$ . La Fig. 3 mostra il potenziale  $V(x,t)$  per quattro istanti durante un periodo della modulazione. Al tempo  $t = 0$  il punto fisso  $X = 1$  è più stabile (in quanto la buca è più profonda), mentre a  $t = 3\mathcal{T}/4$  ( $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$  è il periodo della modulazione) è più stabile la buca a  $X = -1$ . Ricordiamo che l'ampiezza della modulazione astronomica è molto piccola,  $\epsilon \simeq 0.0005$  (da deformazione del potenziale mostrato in Figura 3 è molto esagerata) e pertanto la variazione astronomica non è in grado da sola di far passare la pallina da una buca di potenziale all'altra.

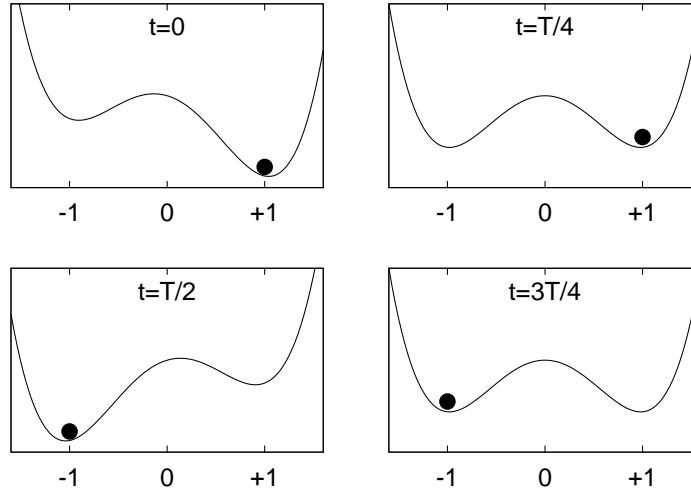


FIG. 3. Modello a doppia buca per spiegare il meccanismo della risonanza stocastica. Al tempo iniziale  $t = 0$  il sistema si trova nella buca di destra dalla quale non può uscire dato il lungo tempo medio di salto. Al tempo  $t = \mathcal{T}/2$  la buca di potenziale si è ridotta e così il tempo di salto secondo la (??). Con probabilità prossima ad uno il sistema salta nella buca di sinistra. Nel secondo semiperiodo ( $\mathcal{T}/2 < t < \mathcal{T}$ ) il processo si ripete per la buca di sinistra.

Consideriamo ora il ruolo del rumore meteorologico. Come detto, questo viene descritto come un processo veloce, caratterizzata da una distribuzione di probabilità, che assumeremo

Gaussiana, con valor medio nullo e varianza  $\sigma$ . Questo rumore si sovrappone alla dinamica deterministica (6) per darci l'equazione differenziale stocastica

$$\frac{dX}{dt} = X - X^3 + \epsilon \sin(\omega t) + \sqrt{\sigma} \eta(t) \quad (7)$$

dove  $\eta(t)$  è quindi una variabile gaussiana a media nulla e varianza  $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t')$ . Per proseguire abbiamo bisogno di conoscere l'intensità del rumore meteorologico. Questa si può stimare conoscendo l'ampiezza delle fluttuazioni meteorologiche attorno al clima attuale, dalle osservazioni. Dai modelli di circolazione globale possiamo pure stimare il tempo caratteristico di correlazione per le fluttuazioni di temperatura, che risulta essere dell'ordine di 10 anni. A questo punto, sfruttando il teorema di fluttuazione-dissipazione, possiamo avere una stima dell'ampiezza del rumore  $\sigma$  come il prodotto della varianza delle fluttuazioni di temperatura per il tempo di rilassamento.

Consideriamo inizialmente l'equazione (7) in assenza di modulazioni astronomiche, cioè con  $\epsilon = 0$ . Siamo quindi nella condizione simmetrica mostrata in Fig. 3 per  $t = \mathcal{T}/4$ . A causa della presenza del rumore  $\eta(t)$ , la particella ha una probabilità non nulla di saltare la barriera di potenziale  $\Delta V$  (che nel nostro esempio vale  $\Delta V = 1/4$ ). Il tempo medio  $\tau$  per il salto (inversamente proporzionale alla probabilità) è dato, per  $\Delta V/\sigma \gg 1$ , dalla relazione di Kramers

$$\tau \simeq \tau_0 e^{\frac{2\Delta V}{\sigma}} \quad (8)$$

in cui  $\tau_0$  è un tempo tipico che dipende dalla forma del potenziale. È interessante osservare che se sostituiamo nella (8) i valori di  $\Delta V$  e  $\sigma$  discussi in precedenza otteniamo un tempo medio di salto (ritornando alle variabili dimensionali originali) di circa 50000 anni: la presenza della nonlinearietà dovuta all'albedo e del rumore meteorologico introduce un tempo scala nel sistema molto maggiore dei tempi tipici di rilassamento deterministico in uno degli stati climatici. In assenza di modulazione astronomica però, i salti sono eventi casuali che avvengono con distribuzione Poissoniana e senza una forma di periodicità.

La risonanza stocastica si basa sul fatto che il tempo medio di salto, secondo la formula di Kramers (9), dipende fortemente (in modo esponenziale) dalla barriera di potenziale  $\Delta V$ : questo è il meccanismo di amplificazione che cercavamo. Con riferimento alla Figura 3, abbiamo che per  $\epsilon \neq 0$  la profondità delle due buche è differente. A  $t = 0$  avremo che la profondità della buca di sinistra vale approssimativamente  $\Delta V_- = 1/4 - \epsilon$ , mentre la buca di destra ha profondità  $\Delta V_+ = 1/4 + \epsilon$  e pertanto, in accordo con la (8) il tempo di salto

dalla buca di destra a sinistra è maggiore del salto da sinistra a destra. Il fenomeno della risonanza stocastica si ha sotto la condizione

$$\tau_0 e^{\frac{2\Delta V_-}{\sigma}} \ll \frac{\mathcal{T}}{2} \ll \tau_0 e^{\frac{2\Delta V_+}{\sigma}} \quad (9)$$

Infatti sotto queste condizioni la probabilità di saltare nel semiperiodo  $\mathcal{T}/2$  in cui la buca ha profondità  $\Delta V_+$  è molto piccola. Il sistema resta nella buca di destra fino a che la profondità, dopo un semiperiodo, non diminuisce a  $\Delta V_-$  ed il sistema passa nell'altra buca con probabilità vicina ad uno.

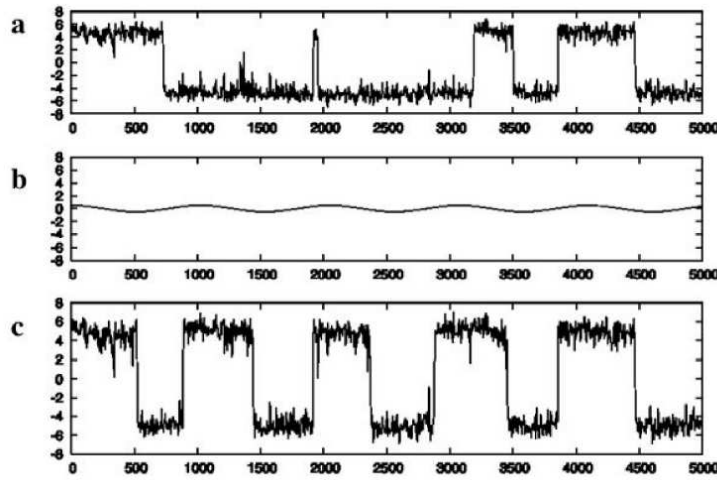


FIG. 4. Simulazione numerica del sistema (7) per diversi valori dei parametri. Il grafico (a) corrisponde al caso stazionario con  $\epsilon = 0$ : il sistema salta da una buca all'altra con tempi casuali determinati dal rumore tramite la (8). Se introduciamo nel potenziale una piccola perturbazione periodica mostrata nel pannello (b), il sistema passa da una buca all'altra sincronizzato con il periodo della perturbazione, come mostrato nel grafico (c). Figura adattata da: R. Benzi, *Nonlin. Proc. Geophys.* **17**, 431 (2010).

La Figura 4 mostra una simulazione numerica del sistema (7) in condizioni di risonanza stocastica. È evidente, dal confronto dei pannelli (b) e (c) come la risonanza stocastica sia un meccanismo in grado di amplificare la piccola perturbazione del potenziale. Osserviamo ancora che il passaggio da una buca all'altra è il risultato di un processo probabilistico, pertanto è possibile che durante un semiperiodo favorevole il sistema non transisca. In questo caso il sistema dovrà aspettare un intero periodo affinché si ripresenti il potenziale

favorevole e pertanto osserveremo il salto dopo un tempo  $3T/2$ . La presenza di salti ad un numero intero di semiperiodi è un tipico segnale della presenza di risonanza stocastica.

Osserviamo ancora che il segnale mostrato dalla Figura 4 è poco somigliante ai grafici dei proxy di temperatura nell'ultimo milione di anni che mostrano il caratteristico andamento asimmetrico a dente di sega (rapido raffreddamento e lento riscaldamento). Dobbiamo però tenere conto che il modello di risonanza stocastica si basa su un modello di bilancio energetico estremamente semplice, che non tiene conto di molti fattori. Modelli più complessi, che tengano conto di ulteriori fattori del sistema climatico, possono cambiare la forma del segnale mantenendo però i meccanismi alla base della risonanza stocastica che resta un importante riferimento concettuale per comprendere come il rumore meteorologico, assieme alle nonlinearità, possano amplificare le piccole variazioni astronomiche.

## CONCLUSIONI

Dopo 30 anni dalla sua introduzione la risonanza stocastica è diventato uno dei paradigmi nello studio dei sistemi complessi, assieme a concetti chiave quale dinamica caotica e geometria frattale. A partire dalla variabilità climatica dell'ultimo milione di anni, la risonanza stocastica è stata proposta come meccanismo alla base di altre variazioni veloci della temperatura del pianeta, quali gli eventi di Dansgaard-Oeschger associati alle oscillazioni della circolazione nord-Atlantica.

Al di là dei problemi climatici, la risonanza stocastica è stata applicata ad un vasto insieme di fenomeni fisici, biologici e problemi ingegneristici (per esempio per il classico problema di aumentare il rapporto segnale/rumore). In molte applicazioni, come ad esempio negli studi neurofisiologici, le equazioni del moto del sistema non sono note e l'apparenza di fenomeni di risonanza stocastica in condizioni di perturbazioni periodiche sono un modo di misurare alcune proprietà non banali della dinamica del sistema. In questo senso la risonanza stocastica è uno strumento ben definito per comprendere il funzionamento di molti sistemi complessi.

## BIBLIOGRAFIA

I lavori originali sulla risonanza stocastica:

R. Benzi, A. Sutera e A. Vulpiani, *The mechanism of stochastic resonance* J. Phys. A **14**, L453 (1981)

R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera e A. Vulpiani, *Stochastic resonance in climatic change* Tellus **34**, 10 (1982)

C. Nicolis, *Stochastic aspects of climatic transitions - response to a periodic forcing* Tellus **34**, 1 (1982)

Alcune review recenti:

L. Giammaitoni, P. Hanggi, P. Jung e F. Marchesoni, *Stochastic resonance* Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1996)

R. Benzi, *Stochastic resonance: from climate to biology* Nonlin. Proc. Geophys. **17**, 431 (2010)