

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Fluidi e plasmi

Sebbene la fluidodinamica e la fisica del plasma siano quasi sempre presentate separatamente nei corsi universitari, le trattazioni di fluidi neutri e di fluidi elettricamente carichi sono concettualmente identiche nelle linee generali. La ragione per la distinzione delle due discipline è in parte storica. I fluidi neutri, liquidi e gas, sono sperimentati e studiati come sistemi continui per i quali si possono scrivere equazioni macroscopiche, usate da meccanici, ingegneri, meteorologi, oceanografi; alcune delle leggi fondamentali risalgono addirittura alla scienza antica, come il principio di Archimede. È chiaro peraltro che il comportamento collettivo macroscopico dipende dai processi microscopici di interazione tra gli atomi e le molecole che costituiscono i fluidi, interazioni che comunque avvengono sulla base di urti a breve raggio. Tuttavia, definiti e misurati alcuni parametri fenomenologici caratteristici (compressibilità, viscosità, conduzione termica, ecc.), le equazioni macroscopiche permettono una descrizione accurata di molti fenomeni.

Al contrario la fisica dei plasmi, cioè dei fluidi in cui sono presenti consistenti percentuali di cariche libere, considera sistemi in cui l'interazione elettromagnetica tra le singole particelle determina azioni a lungo raggio e coinvolge una fenomenologia microscopica molto più complessa. In particolare le forze a lungo raggio permettono un comportamento collettivo anche nel caso di plasmi a densità molto basse, la cui apparenza di sistema continuo in termini di fluidodinamica sembrerebbe di difficile realizzazione. È questo peraltro un caso molto comune in astrofisica, si abbia a che fare con i venti stellari, il mezzo interstellare o intergalattico, o anche con le magnetosfere di stelle a neutroni o con i nuclei galattici attivi. Infatti oltre il 99% dell'Universo che conosciamo è costituito di materiale ionizzato, cioè con percentuale significativa di cariche libere, ioni ed elettroni. In astrofisica dunque la descrizione di molti fenomeni collettivi macroscopici deve essere interpretata attraverso la fisica dei plasmi.

Va peraltro notato che, pur in presenza di materiale ionizzato, spesso i

fenomeni macroscopici non risentono direttamente delle forze elettromagnetiche microscopiche e una trattazione a fluido neutro è lecita, anche se il comportamento continuo è comunque dovuto proprio alle interazioni elettromagnetiche a lungo raggio: è questo ad esempio il caso della struttura stellare, ove, salvo correzioni dovute ai campi magnetici, il gas stellare può essere trattato come un fluido globalmente neutro; così pure le oscillazioni stellari non sono di tipo elettromagnetico, ma acustico.

Data la stretta analogia tra fluidi neutri e carichi, sembrerebbe concettualmente più corretto sviluppare la teoria dei mezzi continui partendo direttamente dalla teoria dei plasmi, di cui la fluidodinamica rappresenta una classe particolare. È tuttavia didatticamente più istruttivo partire dalla classe dei fluidi neutri, per i quali non si debbono introdurre le equazioni di Maxwell. La prima parte del testo sarà quindi dedicata alla fluidodinamica, rimandando alla seconda parte lo sviluppo completo della teoria dei plasmi.

La nostra discussione sarà sempre guidata dalle applicazioni astrofisiche, e quindi certi aspetti formali della teoria verranno solo indicati per lasciar più spazio agli esempi. Tuttavia di per sé il testo costituisce una trattazione globale della fluidodinamica e della fisica dei plasmi.

In questo Capitolo introduttivo discuteremo alcuni concetti generali di statistica che si applicano indifferentemente a fluidi neutri e carichi.

## 1.2 Formulazione della dinamica dei mezzi continui

La teoria da sviluppare per lo studio della struttura ed evoluzione dei fluidi e dei plasmi è di tipo dinamico e, in analogia alla fisica classica e quantistica, si basa sul principio di descrivere lo stato del sistema fisico ad ogni determinato istante attraverso opportune grandezze microscopiche e/o macroscopiche e di avere un sistema di equazioni di tipo differenziale alle derivate parziali con derivate temporali, che permettono di seguirne l'evoluzione temporale da uno stato all'altro.

Precisamente la definizione dello stato di un sistema meccanico avviene attraverso le coordinate generalizzate di posizione e momento, e l'evoluzione è data dalle equazioni classiche di Hamilton per le coordinate generalizzate in funzione del tempo; la definizione dello stato di un campo elettromagnetico è data attraverso le funzioni di campo elettrico e magnetico, e l'evoluzione segue le equazioni di Maxwell; la definizione dello stato di un sistema quantistico viene descritta attraverso la funzione d'onda, e la sua evoluzione attraverso l'equazione di Schrödinger.

Ovviamente anche per i fluidi si deve giungere ad un'analogia formulazione. Tuttavia la descrizione di un fluido può essere fatta a più livelli a seconda che si debbano metterne in evidenza gli aspetti microscopici, cioè la dinamica delle singole particelle componenti, o gli aspetti macroscopici, cioè la dinamica del sistema fluido come un continuo. Corrispondentemente si può impostare il prob-

lema descrivendo lo stato per mezzo delle posizioni  $\mathbf{x}_i$  e velocità  $\mathbf{v}_i$  delle singole particelle e utilizzando le equazioni del moto hamiltoniane per ciascuna di esse, oppure si possono utilizzare le variabili macroscopiche, definite come opportune medie su elementi di volume, quali la densità, pressione e temperatura, e derivare equazioni macroscopiche per l'evoluzione di tali grandezze.

Per chiarire meglio questo schema di lavoro è utile una classificazione dei livelli di trattazione con le relative approssimazioni. Lo stato di un sistema di  $N$  particelle può essere descritto in modo completo nello *spazio delle configurazioni*  $\Gamma$  attraverso la *funzione di stato*  $D(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, t)$ , dove le variabili sono in numero pari alle quantità necessarie per definire lo stato del sistema, quindi pari alle  $3N$  coordinate spaziali e ai  $3N$  momenti coniugati, oltre al tempo. Uno stato è rappresentato da un punto nello spazio delle fasi a  $6N$  dimensioni, e l'evoluzione dinamica del sistema descriverà una traiettoria in tale spazio.

La descrizione microscopica del sistema usa le leggi di Newton o le equazioni di Hamilton per ciascuna particella per calcolare l'evoluzione temporale delle singole coordinate e quindi dello stato del sistema. Il metodo richiede la definizione delle forze di interazione a breve e lungo raggio d'azione fra le particelle, e quindi in linea di principio vale sia per fluidi neutri sia per i plasmi. Nel caso dei plasmi poi la funzione di stato definisce anche, attraverso le equazioni di Maxwell, i campi a lungo raggio e le correnti generati dal moto delle particelle cariche.

Le equazioni microscopiche, pur contenendo tutte le informazioni sullo stato, risultano però inapplicabili quando  $N$  sia grande; anzi non risultano neppure utili in quanto il moto delle singole particelle non è di fatto misurabile (si lasciano qui da parte considerazioni circa gli aspetti quantistici del problema, che potrebbero definire un ulteriore livello di descrizione attraverso le funzioni d'onda).

Il livello successivo di approssimazione è quello di passare allo *spazio delle fasi*  $\mu$  a 6 dimensioni  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  utilizzando la *funzione di distribuzione*  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . La funzione è definita come la densità di particelle nello spazio delle fasi a 6 dimensioni ad un generico tempo  $t$  ed è ricavata dalla funzione di stato  $D$  attraverso opportune medie. La dinamica è calcolata per mezzo dell'equazione di Liouville che, come ricaveremo nel prossimo paragrafo, dà l'evoluzione temporale della densità su tutto lo spazio delle fasi; nel caso dei fluidi neutri l'equazione di evoluzione è l'equazione di Boltzmann con termini di collisione a breve raggio, nel caso dei plasmi è l'equazione di Vlasov in cui le forze elettromagnetiche a lungo raggio sono espresse attraverso cariche e correnti ottenute consistentemente dalle equazioni di Maxwell. Naturalmente questa descrizione, a seguito delle medie effettuate, non contiene tutte le informazioni del livello precedente, ma permette comunque di trattare processi legati all'evoluzione della funzione di distribuzione misurabile delle particelle nello spazio delle coordinate e delle velocità, come effetti di instabilità di fascio e di anisotropie.

Il livello ancora più approssimato è quello che usa variabili macroscopiche misurabili, trattando il sistema come un continuo. Le variabili macroscopiche sono densità, temperatura (o pressione) e velocità di flusso e si ottengono come momenti della funzione di distribuzione sulle velocità. Anche le equazioni dell'evoluzione non sono altro che i momenti dell'equazione di Boltzmann e

corrispondono alle equazioni della fluidodinamica classica macroscopica. Nelle trasformazioni sui momenti si perde ulteriormente informazione sullo stato microscopico, e inoltre per chiudere il sistema di equazioni dei momenti consistentemente occorre introdurre un'equazione di stato o una condizione sul trasporto di energia, o altro ancora. Le forze in gioco sono ora le forze di pressione, cui nei plasmi vanno aggiunte quelle elettromagnetiche derivate sempre dalle equazioni di Maxwell espresse in funzione delle densità di materia, di carica e delle correnti.

Nella maggior parte dei casi astrofisici vengono impiegate le equazioni macroscopiche, ma in alcune applicazioni possono essere necessari anche gli altri due livelli di descrizione.

Va inoltre tenuto presente che l'evoluzione temporale dei sistemi fluidi è altamente nonlineare: si sviluppano moti caotici che portano a stati turbolenti e sottraggono parte dell'energia dall'evoluzione globale. Ciò rende i sistemi non conservativi e di fatto imprevedibili. Vedremo tuttavia che è possibile sviluppare modelli statisticamente significativi.

### 1.3 Equazione di continuità e teorema di Liouville

Queste equazioni sono alla base della formulazione della dinamica dei sistemi continui in termini delle grandezze macroscopiche e si applicano in eguale modo ai fluidi neutri e ai plasmi.

Come primo passo richiamiamo l'equazione di continuità per un sistema continuo di densità  $\rho$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$ . In una regione di volume  $V$  delimitata da una superficie  $S$ , dove non siano presenti sorgenti (positive o negative), la massa di fluido  $\int_V \rho dV$  cambia se e solo se non è nullo il flusso di massa attraverso la superficie  $\int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.1)$$

Applicando il teorema di Gauss si ottiene:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

e, dovendo tale risultato valere per qualunque volume considerato, otteniamo l'*equazione di continuità* (Eulero 1755):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (1.2)$$

L'equazione di continuità così ricavata lavorando nello spazio familiare a tre dimensioni più il tempo è la definizione del fatto che nella dinamica di un flusso di particelle si conserva il loro numero. L'equazione è peraltro estendibile ad uno spazio qualunque, in particolare allo spazio delle fasi e allo spazio delle

configurazioni precedentemente discussi, dove le quantità che si conservano (in assenza di sorgenti positive o negative) sono rispettivamente il numero medio di particelle in un dato volume con una data velocità o il numero medio di stati che evolvono a partire da condizioni iniziali prossime.

Passiamo ora a ricavare un'altra fondamentale relazione, l'equazione di Liouville, riferendoci in generale ad un sistema dinamico di  $N$  particelle. Ricordiamo che le coordinate generalizzate di posizione e momento  $(q_i, p_i)$  con  $i = 1, \dots, N$ , dei punti del sistema evolvono secondo le equazioni di Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.3)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.4)$$

dove  $H(q_i, p_i, t)$  è l'Hamiltoniana del sistema, funzione delle coordinate generalizzate e del tempo. Naturalmente il sistema è hamiltoniano solo se non dissipativo, assunzione lecita a livello microscopico per sistemi con interazioni elastiche.

Definiamo il concetto di *insieme statistico* come la raccolta di identiche repliche dello stesso sistema ad un dato istante di tempo corrispondenti a stati leggermente diversi raggruppati in un certo volume dello spazio delle configurazioni. Il significato di insieme statistico è legato alla necessità di discutere l'evoluzione dei sistemi dinamici tenendo conto dell'impossibilità di definire il loro stato in modo deterministico a causa di effetti quantistici, caotici, ecc. Diventa importante valutare la capacità della nostra trattazione di calcolare soluzioni statistiche significative entro i limiti di precisione della definizione dello stato iniziale.

Ogni elemento dell'insieme statistico è rappresentato da un punto nello spazio delle configurazioni ad un dato istante, e la sua evoluzione corrisponde a un particolare insieme di traiettorie. Se i punti dell'insieme sono distribuiti in modo regolare nello spazio delle fasi, si può definire una densità degli stati dell'insieme statistico  $\rho_{ins}(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_N, p_N, t)$  nell'intorno di uno stato  $(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_N, p_N)$  che in seguito indicheremo brevemente con  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ . Il *teorema di Liouville* stabilisce che la derivata temporale di questa densità seguendo la traiettoria sia nulla, cioè che l'insieme statistico non si disperda:

$$\frac{D\rho_{ins}}{Dt} = 0 \quad (1.5)$$

dove  $D/Dt$  indica appunto la derivata temporale lungo la traiettoria.

Per dimostrare il teorema si denotino due stati successivi lungo la traiettoria  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$  e  $(\mathbf{q}_i + \delta\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i + \delta\mathbf{p}_i)$  rispettivamente ai tempi  $t$  e  $t + \delta t$ . Pertanto

$$\frac{D\rho_{ins}}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_{ins}(\mathbf{q}_i + \delta\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i + \delta\mathbf{p}_i, t + \delta t) - \rho_{ins}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t)}{\delta t} \quad (1.6)$$

e, con uno sviluppo in serie di Taylor,

$$\begin{aligned} \rho_{ins}(\mathbf{q}_i + \delta \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i + \delta \mathbf{p}_i, t + \delta t) &= \rho_{ins}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \delta q_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \delta p_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial p_i} + \delta t \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial t} \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\frac{D\rho_{ins}}{Dt} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \dot{p}_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial t} \quad (1.7)$$

che mostra la differenza tra derivata temporale locale ( $\partial/\partial t$  o derivata euleriana) e derivata temporale lungo la traiettoria ( $D/Dt$  o derivata lagrangiana).

Applicando ora il teorema di continuità alla densità di stati  $\rho_{ins}$  nello spazio delle configurazioni considerando che le traiettorie sono continue e percorse a velocità  $\mathbf{v}_i = (\dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)$ :

$$\frac{\partial \rho_{ins}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla_{q_i, p_i} \cdot (\rho_{ins} \mathbf{v}_i) = 0 \quad (1.8)$$

e poiché le variabili  $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$  sono indipendenti:

$$\frac{\partial \rho_{ins}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (\rho_{ins} \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (\rho_{ins} \dot{p}_i)}{\partial p_i} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \rho_{ins}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \dot{p}_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial p_i} + \rho_{ins} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (1.10)$$

Usando le equazioni di Hamilton:

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (1.11)$$

si ottiene

$$\frac{\partial \rho_{ins}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \dot{p}_i \frac{\partial \rho_{ins}}{\partial p_i} = 0 \quad .$$

e risulta così dimostrato il *teorema di Liouville*.

L'insieme statistico, se le forze agenti sulle particelle possono essere trattate con un'Hamiltoniana, si comporta dunque nell'evoluzione dinamica come un sistema incompressibile. Stati vicini inizialmente nello spazio delle configurazioni rimangono vicini anche nel seguito dell'evoluzione.

Il significato del teorema può essere ancora illustrato nel modo seguente. L'evoluzione di un volumetto  $d^N q_i d^N p_i$  di punti dell'insieme statistico di stati al tempo  $t$  si porterà nel volumetto  $d^N q'_i d^N p'_i$  al tempo  $t'$ . Poiché il numero di stati si conserva

$$\rho_{ins} d^N q_i d^N p_i = \rho'_{ins} d^N q'_i d^N p'_i \quad (1.12)$$

e poiché il teorema di Liouville implica che

$$\rho_{ins} = \rho'_{ins}$$

si ha che

$$d^N q_i d^N p_i = d^N q'_i d^N p'_i \quad (1.13)$$

cioè gli stati occupano volumi sempre eguali, anche se eventualmente distorti a seguito delle traiettorie seguite dai singoli stati. Pertanto possiamo dire che un'indeterminazione nello stato iniziale non pregiudica la nostra valutazione dell'evoluzione del sistema.

## 1.4 L'equazione di Boltzmann non-collisionale

Consideriamo un sistema di  $N$  particelle classiche identiche; la generalizzazione al caso di più tipi di particelle comporta complicazioni tecniche e di principio, come vedremo in particolare nel caso dei plasmi. Analizziamo lo stato del sistema nella sua rappresentazione in due diversi spazi: (1) lo spazio delle configurazioni, o spazio  $\Gamma$ , a  $6N$  dimensioni corrispondenti alle coordinate generalizzate coniugate di ciascuna delle particelle; (2) lo spazio delle fasi  $\mu$ , a 6 dimensioni corrispondenti alla posizione e alla velocità  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  di una particella. Nello spazio  $\Gamma$  lo stato del sistema è rappresentato da un punto e la sua evoluzione dinamica corrisponde ad una traiettoria; nello spazio  $\mu$  lo stato del sistema è rappresentato da  $N$  punti e l'evoluzione dalle corrispondenti  $N$  traiettorie; esiste una corrispondenza tra le due rappresentazioni, una mappatura tra i due spazi.

Definiamo ora la funzione di distribuzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  come la densità di particelle nello spazio delle fasi  $\mu$ . Se  $\delta N$  è il numero di punti in un volume elementare  $\delta V$  dello spazio a 6 dimensioni:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta N}{\delta V} \quad (1.14)$$

dove  $\delta V$  deve comunque contenere un numero sufficientemente grande di punti da dar senso al passaggio dalla descrizione microscopica a quella macroscopica.

Il teorema di Liouville precedentemente dimostrato si riferisce alla densità  $\rho_{ins}$  di stati nello spazio  $\Gamma$ : ma ovviamente è possibile derivare un analogo risultato per la funzione  $f$  nello spazio  $\mu$ . Per far questo basta scrivere le equazioni del moto per le particelle nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{v}} H \quad (1.15)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla_{\mathbf{x}} H \quad (1.16)$$

con  $\nabla_{\mathbf{v}}$  e  $\nabla_{\mathbf{x}}$  a rappresentare i gradienti nello spazio delle velocità e delle posizioni; l'Hamiltoniana, nel caso di particelle non interagenti e soggette a soli campi esterni con potenziale  $\Phi(\mathbf{x})$ , ha la forma:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Phi(\mathbf{x}) ; \quad (1.17)$$

non è possibile però in generale includere in questo schema le collisioni, in quanto per esse la forma del potenziale non è più locale in quanto dipende dalle posizioni relative delle particelle interagenti; il problema può essere risolto con buona approssimazione, come vedremo, per fluidi neutri in cui le interazioni sono solo del tipo a corto raggio, mentre per i plasmi le interazioni coulombiane sono a lungo raggio.

Nelle suddette condizioni il teorema di Liouville può venire trasferito direttamente dallo spazio delle configurazioni a  $6N$  dimensioni più il tempo allo spazio delle fasi a  $6$  dimensioni più il tempo:

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \quad (1.18)$$

L'equazione di Liouville per sistemi non-collisionali prende il nome di *equazione di Boltzmann non-collisionale* e si esplicita nelle forme:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (1.19)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (1.20)$$

Tuttavia ripetiamo che non è possibile l'applicazione di questa equazione al caso di sistemi in cui le collisioni tra particelle non sono trascurabili perchè in tal caso l'Hamiltoniana viene necessariamente a dipendere dalle coordinate di tutte le particelle; il teorema di Liouville in quel caso vale solo nello spazio a  $6N + 1$  dimensioni. Per trattare il caso dei sistemi collisionali debbono essere usate opportune tecniche che permettono di ridurre il numero di variabili. Un caso noto è quello dell'equazione di Fokker-Planck che vedremo più avanti nel Corso.