

Capitolo 9

Turbolenza

9.1 Teorie statistiche della turbolenza

Nei precedenti Capitoli abbiamo spesso citato il fatto che la dinamica dei fluidi può evolvere in varie condizioni verso una situazione di turbolenza. Con ciò intendiamo una situazione in cui le caratteristiche fisiche dei sistemi, in primo luogo la velocità, variano in modo casuale sia nello spazio sia nel tempo.

La transizione verso la turbolenza si verifica ad esempio partendo da una configurazione instabile. Dal punto di vista sperimentale lo stato iniziale del sistema non può essere misurato se non con limitata accuratezza, per cui sarà al meglio definito dicendo che occupa una regione dello spazio delle fasi limitata. Mentre l'evoluzione lineare non cambia il volume dello spazio delle fasi rappresentativo del sistema, non appena la perturbazione iniziale diventi sufficientemente grande i punti si allontanano dallo stato iniziale: punti corrispondenti a stati iniziali di poco differenti nell'intorno di una configurazione instabile seguono traiettorie evolutive estremamente differenti. Ciò ha come conseguenza il fatto che risulta impossibile predire l'evoluzione del sistema pur essendo le leggi della dinamica deterministiche. Spesso questa divergenza delle traiettorie nello spazio delle fasi porta proprio a configurazioni turbolente.

Oltre che nel caso di instabilità intrinseca del fluido stati turbolenti si generano ogni qual volta esistano strati limite o superfici di contatto tra fluidi differenti o la presenza di forze esterne casuali che determinino un rimescolamento.

Poiché appare dunque irrealizzabile sviluppare una teoria deterministica degli stati turbolenti, si può tentare di impostare una teoria statistica, riferendosi alle medie delle grandezze fisiche turbolente. Quali medie sono significative? In sistemi spazialmente omogenei le medie spaziali permettono di separare le fluttuazioni turbolente dal moto d'insieme; in sistemi in cui la struttura turbolenta sia invariante nel tempo può invece essere opportuno prendere medie temporali. Dal punto di vista concettuale il tipo più generale e significativo di media è la cosiddetta *media d'insieme* (*ensemble average*). Un insieme è costitu-

ito dalle repliche dello stesso sistema che abbiano le stesse proprietà statistiche, pur possedendo eventualmente valori differenti delle quantità dinamiche nello stesso punto e nello stesso tempo. Eseguendo la media delle quantità fisiche (ad esempio la velocità) sui differenti membri dell'insieme a tempi corrispondenti si ottiene la medi d'insieme. In genere le medie sono di tipo temporale: si osservano i vari sistemi e si prendono le medie temporali della velocità, ad esempio, in un dato punto scegliendo un intervallo temporale sufficientemente lungo da dare lo stesso risultato in tempi differenti:

$$\bar{Q} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} Q dt \quad (9.1)$$

dove τ è appunto lungo rispetto ai tipici tempi scala delle fluttuazioni turbolente. Va notato che questo tipo di media è sostanzialmente differente dalle medie $\langle \rangle$ usate nelle teorie cinetiche che abbiamo discusso nel Capitolo 3.

La velocità in un fluido turbolento viene distinta in due campi componenti, la media e le fluttuazioni

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (9.2)$$

dove tuttavia la media delle fluttuazioni è per definizione nulla:

$$\bar{\mathbf{u}}' = 0 \quad (9.3)$$

e quindi non consente misure sperimentali. Taylor nel 1935 propose di considerare medie più complesse che consentissero qualche tipo di misura. In particolare definì la *funzione di correlazione delle velocità* (a due punti)

$$\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} \quad (9.4)$$

dove per $\mathbf{r} = 0$ abbiamo semplicemente il valore di $\overline{\mathbf{u}'^2}$, cioè dell'energia cinetica nei moti turbolenti e quindi del livello di turbolenza. Corrispondentemente, poiché non ci si aspetta correlazione a grandi distanze, sarà

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)} \cdot \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = 0. \quad (9.5)$$

Ciò significa che solo per un intervallo di valori di \mathbf{r} la funzione di correlazione non si annulla, il che definisce la *distanza di correlazione* dei moti turbolenti. Quindi il tensore di correlazione contiene informazioni sul livello di turbolenza e sulle sue tipiche scale spaziali; si tratta anche di quantità misurabile non nulla. Il tensore di correlazione delle velocità è un tensore a 9 componenti; alcune di queste componenti possono annullarsi quando il sistema possieda simmetrie. Esiste anche la possibilità di valutare correlazioni a 3 e più punti che permettono di determinare il campo di velocità turbolenta in sempre maggior dettaglio; sperimentalmente tali correlazioni diventano sempre più difficili da misurare.

Va detto che non esiste a tutt'oggi una teoria completa che permetta di collegare le caratteristiche macroscopiche dei sistemi con le correlazioni del campo di velocità turbolenta. Per cui la turbolenza rappresenta uno dei problemi insoluti della fisica classica. nel seguito tratteremo alcuni aspetti generali della turbolenza nei fluidi incompressibili.

9.2 Turbolenza isotropa e omogenea

Il modello di turbolenza omogenea e isotropa consente di ridurre di molto il numero di elementi del tensore di correlazione delle velocità (Taylor 1938). Anzi tutto va detto che l'isotropia impone che la velocità media $\bar{\mathbf{u}}$ sia nulla. Quindi ci occuperemo solo del campo di velocità turbolente, lasciando cadere l'apice perché velocità totali e velocità turbolente si identificano. Inoltre poiché lavoreremo sempre su medie temporali, non indicheremo più esplicitamente la dipendenza della velocità dal tempo.

L'omogeneità implica che la funzione di correlazione $R_{ij}(r) = \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})}$ debba essere indipendente da \mathbf{x} , l'isotropia implica che essa dipenda solo dal modulo r di \mathbf{r} . D'altra parte la condizione di incompressibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ implica:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = \overline{u_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\partial r_j}} = 0 \quad (9.6)$$

e per simmetria:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = 0. \quad (9.7)$$

Secondo von Kármán e Howarth (1938) la forma più generale di un tensore con tali proprietà è:

$$R_{ij}(r) = \zeta(r)r_i r_j + \eta(r)\delta_{ij} \quad (9.8)$$

con A e B funzioni scalari. Consideriamo ora le funzioni di correlazione delle velocità radiali e trasversali come illustrate in Fig. 9.1; poiché la componente radiale di \mathbf{r} è r , mentre la componente trasversale è $r_n = 0$, si ricava:

$$R_{ll} = \zeta(r)r^2 + \eta(r) = \overline{\frac{1}{3}u^2}f(r) \quad (9.9)$$

$$R_{nn}(r) = \eta(r) = \overline{\frac{1}{3}u^2}g(r) \quad (9.10)$$

dove le funzioni $f(r)$ e $g(r)$ sono appunto le funzioni scalari di correlazione nelle due direzioni fondamentali, a partire da $f(0) = g(0) = 1$ a $r = 0$. Pertanto si può ridefinire il tensore di correlazione:

$$R_{ij}(r) = \overline{\frac{1}{3}u^2} \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r)\delta_{ij} \right]. \quad (9.11)$$

Utilizzando la (9.7), si ottiene:

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2}r \frac{df}{dr} \quad (9.12)$$

per cui dalla sola conoscenza della $f(r)$ possiamo ricavare tutte le componenti del tensore di correlazione. L'andamento delle funzioni $f(r)$ e $g(r)$ può essere ricavato sperimentalmente ed un caso specifico è illustrato in Fig. 9.2.

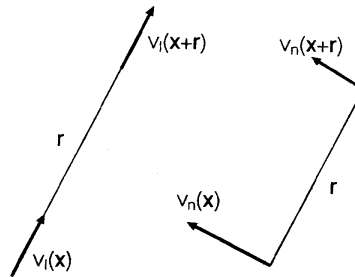
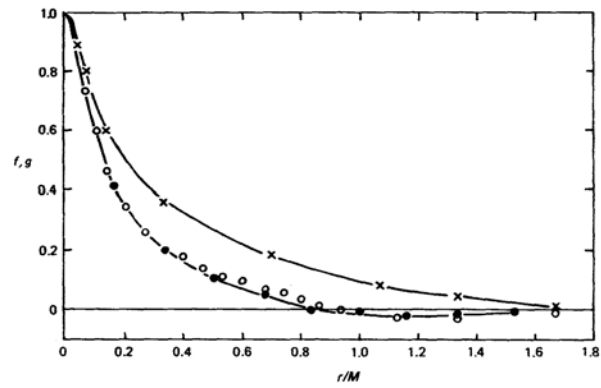


Fig. 9.1: Correlazioni di velocità radiali e trasverse

Fig. 9.2: Funzioni f e g del tensore di correlazione per turbolenza omogenea e isotropa: \times f misurata, \circ g calcolata da f , \otimes g misurata

Si consideri ora la trasformata di Fourier della R_{ij} e la sua antitrasformata:

$$T_{ij}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(r) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3r \quad (9.13)$$

$$R_{ij}(r) = \int T_{ij}(k) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k, \quad (9.14)$$

dove si è utilizzato il fatto che, essendo la funzione di correlazione sfericamente simmetrica, la stessa simmetria deve valere nello spazio delle \mathbf{k} . La condizione di incompressibilità impone:

$$k_i T_{ij} = k_j T_{ji} = 0. \quad (9.15)$$

Possiamo esprimere anche la trasformata attraverso una rappresentazione del tipo (9.8):

$$T_{ij}(k) = \zeta'(k) k_i k_j + \eta'(k) \delta_{ij} \quad (9.16)$$

che in base alla (9.15) fornisce:

$$\eta'(k) = -\zeta'(k) k^2. \quad (9.17)$$

Pertanto la T_{ij} può essere scritta attraverso un'unica funzione scalare; useremo la forma:

$$T_{ij}(k) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j). \quad (9.18)$$

Il significato di tale relazione appare evidente considerando l'espressione della densità di energia cinetica nella turbolenza:

$$\frac{1}{2} \overline{u^2} = \frac{1}{2} \mathbf{Tr} [R_{ii}(0)] = \frac{1}{2} \int \mathbf{Tr} [T_{ii}(k)] d^3k \quad (9.19)$$

che, eseguendo l'integrazione in simmetria sferica, fornisce:

$$\frac{1}{2} \overline{u^2} = \int_0^\infty E(k) dk. \quad (9.20)$$

Abbiamo dunque individuato il modo di esprimere le caratteristiche della turbolenza, cioè la correlazione tra le componenti delle velocità turbolente, attraverso una funzione scalare $E(k)$ che rappresenta lo spettro di energia, cioè la distribuzione di potenza nelle componenti di Fourier alle varie scale $\lambda = 2\pi/k$.

Tuttavia per ora le nostre deduzioni si sono essenzialmente basate su considerazioni geometriche, a parte l'assunzione di incompressibilità. Introduremo nel prossimo paragrafo le considerazioni fisiche necessarie per arrivare ad un modello fisico della turbolenza omogenea e isotropa.

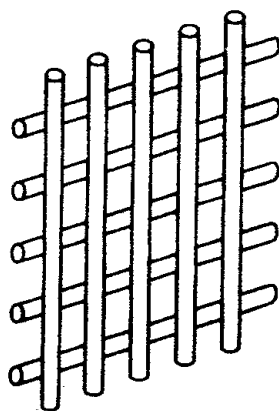


Fig. 9.3: Struttura tipica di una griglia usata per generare turbolenza in un fluido

9.3 Modello della turbolenza di Kolmogorov

Nel 1941 Kolmogorov propose una teoria statistica di equilibrio della turbolenza, calcolando la distribuzione energetica tra i vari modi di Fourier in condizioni di equilibrio. Tuttavia per raggiungere una tale situazione non si può assumere che il fluido sia isolato: infatti, essendo la turbolenza collegata ad effetti dissipativi, è naturale che l'energia cinetica turbolenta di un sistema isolato decresca nel tempo, pur rimanendo costante l'energia totale nelle molecole del fluido stesso. Occorre dunque assumere, per avere una situazione di equilibrio, che esista una sorgente esterna di turbolenza. In un certo senso l'equilibrio di Kolmogorov è simile concettualmente all'equilibrio termodinamico.

Visualizziamo il campo di velocità turbolente come un insieme di vortici (*eddies*, in inglese) di differenti scale, e supponiamo che una sorgente esterna riversi costantemente energia nei vortici di scala grande. Dal punto di vista sperimentale tale risultato si studia facendo correre un fluido a portata costante attraverso una griglia con maglie di larghezza d (Fig. 9.3). Il fluido esercita una forza di trascinamento sulla griglia e questa reagisce con una forza di frenamento sul fluido. Nel sistema riposo del fluido, dove cioè esistono solo i moti turbolenti, la griglia funge da sorgente costante di energia. Se il numero di Reynolds è sufficientemente grande, a valle si osserva la creazione di vortici di scala dell'ordine di d , ma che successivamente si mescolano, si rompono in vortici di dimensioni minori e, a una certa distanza dalla griglia, acquisiscono una struttura turbolenta. Su questo tipo di esperimento sono state effettuate le misure riportate in Fig. 9.2.

Un'interpretazione della frammentazione di vortici dalle scale maggiori verso

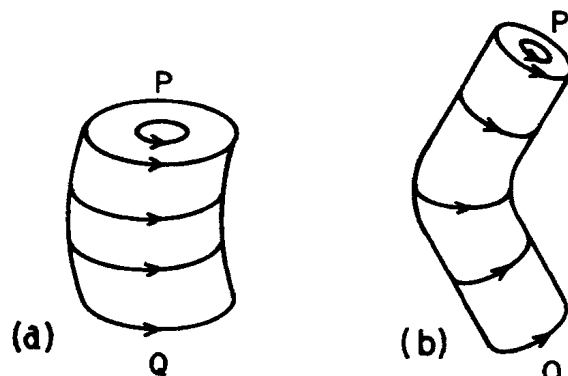


Fig. 9.4: Lo stiramento di un tubo di vortice ad opera delle interazioni turbolente. I punti P e Q si allontanano tra la configurazione (a) e la (b) con riduzione del raggio del vortice.

le scale minori deriva dal teorema della vorticità di Kelvin. I moti turbolenti nel loro moto casuale spingono i punti del fluido appartenenti ad uno stesso vortice ad allontanarsi sistematicamente, il che comporta uno stiramento del vortice stesso; poiché la vorticità deve conservarsi in un fluido incompressibile, ciò richiede una contrazione del raggio del vortice, cioè una diminuzione della sua scala (Fig. 9.4). Le linee di vorticità non saranno peraltro permanentemente congelate nel fluido qualora vi sia viscosità, e quindi potranno diffondere, mescolarsi con linee di opposto verso e quindi distruggersi collassando in un punto: i vortici quindi tenderanno prima a ridursi di scala e infine scompariranno dissipati in calore.

Un vortice di scala l avrà una velocità tipica associata u , e quindi il corrispondente numero di Reynolds lu/ν sarà maggiore per vortici più grandi (vedremo più avanti che la viscosità comunque non gioca un ruolo importante). L'energia fluirà dai vortici di scala maggiore a quelli di scala minore, fino ad una scala minima a cui l'energia è dissipata in calore dall'azione della viscosità. Questa scala minima corrisponderà a numeri Reynolds dell'ordine dell'unità:

$$l_d u_d \approx \nu. \quad (9.21)$$

Il quadro generale è dunque basato su

- un rifornimento di energia per unità di massa e di tempo è in vortici grandi

di scala L e velocità V , quindi con numero di Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{LV}{\nu} \gg 1$$

- una cascata energetica verso vortici sempre più piccoli fino a $l \approx l_d \approx \nu/u_d$ ove avviene la dissipazione e in calore
- ogni vortice intermedio, in condizioni di equilibrio, riceve energia per unità di massa e di tempo e dai vortici più grandi e la trasmette integralmente ai vortici più piccoli in modo da mantenere l'equilibrio nello spettro dei vortici.

Kolmogorov postulò che fosse pertanto lecito esprimere ϵ come una combinazione delle sole quantità che caratterizzano i vortici:

$$\epsilon \approx \frac{u^3}{l} \quad (9.22)$$

e cioè

$$u \approx (\epsilon l)^{1/3} \quad (9.23)$$

che significa che la velocità associata con i vortici è proporzionale alla radice cubica della loro scala. Questo risultato è noto come *legge di scala di Kolmogorov*. Naturalmente la (9.22) vale fino ai vortici della regione di dissipazione, per cui:

$$\epsilon \approx \frac{u_d^3}{l_d} \quad l_d \approx \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad u_d \approx (\nu \epsilon)^{1/4} . \quad (9.24)$$

Scrivendo relazioni analoghe per i vortici di dimensione maggiore $\epsilon \approx V^3/L$ si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\frac{L}{l_d} \approx \mathcal{R}^{3/4} \quad \frac{V}{u_d} \approx \mathcal{R}^{1/4} \quad (9.25)$$

dove \mathcal{R} è il numero di Reynolds dei vortici maggiori, che determina dunque le dimensioni relative dei vortici a cui avviene la dissipazione.

Passiamo infine allo spettro di energia. I vortici maggiori avranno un numero d'onda $k_L \approx 1/L$ e quindi questo è il taglio dello spettro ai bassi numeri d'onda; analogamente vi sarà un taglio ai grandi numeri d'onda per $k_d \approx 1/l_d$. L'intervallo tra k_L e k_d è detto intervallo inerziale, per indicare che è l'intervallo in cui i vortici trasmettono integralmente dalle grandi alle piccole scale l'energia che viene iniettata dalla sorgente. Ci si aspetta dunque nuovamente che lo spettro $E(k)$ in questo intervallo sia scalato su ϵ e k ; con considerazioni puramente dimensionali si ottiene:

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (9.26)$$

che è la ben nota *legge -5/3 di Kolmogorov* (Fig. 9.5). Si mostra facilmente che essa si accorda con la (9.22).

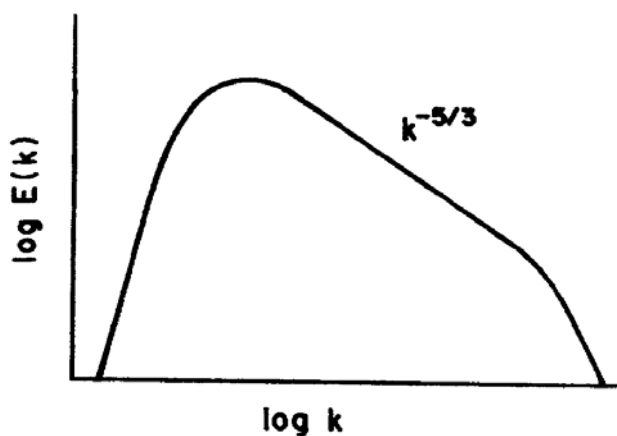


Fig. 9.5: Spettro di Kolmogorov

La precedente discussione non può essere considerata la costruzione di una teoria della turbolenza, ma soltanto una sequenza logica di argomenti di plausibilità. Una serie di esperimenti abbastanza significativa si accorda con i risultati ora discussi; in Fig. 9.6 sono riportati come esempio i dati sullo spettro di turbolenza che si sviluppa nell'onda di marea tra l'isola di Vancouver e la terraferma. Anche osservazioni astrofisiche sulla turbolenza nel mezzo interstellare appaiono indicare che lo spettro universale di Kolmogorov si realizza in molte occasioni. Esistono tuttavia anche dati che non sembrano confortare l'assunzione di omogeneità e isotropia. Una teoria completa e consistente della turbolenza fluida è ancora assente, sebbene molto lavoro sia in corso verso questo obiettivo.

9.4 Diffusione turbolenta

Come esempio di quanto accennato alla fine del precedente paragrafo, discutiamo gli effetti delle disomogeneità in un mezzo turbolento. La conseguenza, come vedremo, sarà quella di dare origine a fenomeni di trasporto di energia. Anche la teoria del *trasporto turbolento* fu proposta originariamente nel 1921 da Taylor; essa permette di spiegare i semplici fenomeni quotidiani che portano ad un aumento del trasporto di energia, ad esempio quando si mescola il caffè per sciogliervi lo zucchero. Se si versa semplicemente lo zucchero senza mescolare, esso si scioglie per diffusione molecolare e ciò avviene su tempi scala lunghi. Rimescolando con il cucchiaino, si genera invece turbolenza che consente una diffusione ben più rapida.

Nel caso di diffusione molecolare gli elementi che diffondo (lo zucchero nell'esempio

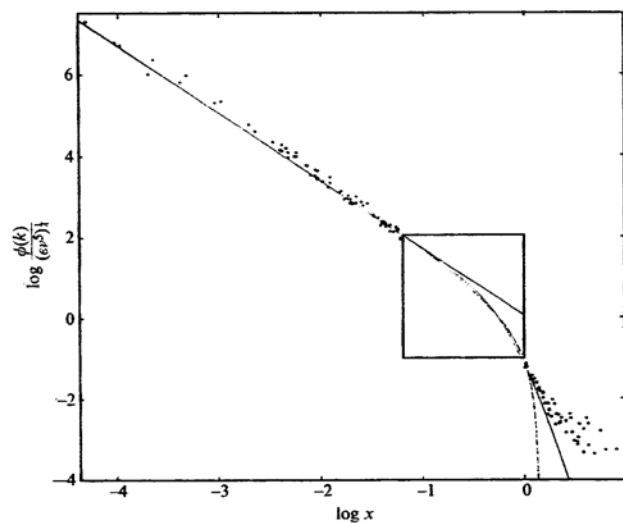


Fig. 9.6: Spettro di turbolenza ottenuto sperimentalmente a Vancouver da Grant, Stewart & Moilliet (1962)

precedente) seguono un'equazione di diffusione:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D\nabla^2 n \quad (9.27)$$

dove D è appunto il coefficiente di diffusione. Lo spostamento quadratico medio di un elemento al tempo t può essere valutato nel caso di diffusione a simmetria sferica partendo dall'origine come:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{\int_0^\infty r^2 n(r, t) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty n(r, t) 4\pi r^2 dr} \quad (9.28)$$

La (9.27) può essere rielaborata:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty r^2 n 4\pi r^2 dr = D \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) 4\pi r^2 dr \quad (9.29)$$

e integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^\infty r^2 n 4\pi r^2 dr = 6Dt \int_0^\infty n 4\pi r^2 dr \quad (9.30)$$

e pertanto lo spostamento quadratico medio al tempo t diventa:

$$\overline{x^2(t)} = 6Dt \quad (9.31)$$

Nel caso turbolento la definizione di spostamento quadratico medio al tempo t sarà:

$$\overline{x^2(T)} = \int_0^T dt \int_0^T dt' \overline{\mathbf{u}_L(t) \cdot \mathbf{u}_L(t')} \quad (9.32)$$

dove $\mathbf{u}_L(t)$ è la velocità del fluido nel punto in cui si trova al tempo t l'elemento che diffonde, e $\mathbf{u}_L(t) \cdot \mathbf{u}_L(t')$ è la funzione di correlazione temporale della velocità dello stesso elemento ai tempi t e t' . Se la situazione è stazionaria la funzione di correlazione dipende soltanto dalla differenza $t - t'$:

$$\mathbf{u}_L(t) \cdot \mathbf{u}_L(t') = \overline{u^2} R(t' - t) \quad (9.33)$$

con $R(0) = 1$, come ovvio dalla definizione di correlazione. Per simmetria sarà pure

$$R(t - t') = R(t' - t) . \quad (9.34)$$

Definiamo come tempo di correlazione τ_{corr} il tempo al di sopra del quale la funzione di correlazione R è nulla. Pertanto per $T \ll \tau_{corr}$, cosicché $R(t - t') \approx 1$, si ha:

$$\overline{x^2(T)} = \int_0^T dt \overline{u^2} \int_0^T dt' R(t - t') = \overline{u^2} T^2 . \quad (9.35)$$

Lo spostamento quadratico medio è quello consistente con un moto alla velocità quadratica media del fluido. Quando invece si considerino tempi $T \gg \tau_{corr}$ avremo gli effetti statistici sul moto casuale:

$$\overline{x^2(T)} = \int_0^T dt \overline{u^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(t' - t) . \quad (9.36)$$

Se poniamo

$$D_{turb} = \frac{1}{3} \overline{u^2} \int_0^{\infty} dt' R(t' - t) \quad (9.37)$$

si ottiene:

$$\overline{x^2(T)} = 6D_{turb}T \quad (9.38)$$

che coincide formalmente con la (9.31): D_{turb} è il coefficiente di diffusione turbolenta, che determina il trasporto passivo di qualunque quantità fisica (materia, calore, ecc.). Come detto precedentemente, D_{turb} può essere molto più grande della diffusione molecolare in quanto dipende dalle velocità fluide medie, invece del moto casuale delle singole molecole.

9.5 Fluidodinamica turbolenta

Val la pena considerare come si possa scrivere l'equazione di Navier-Stokes quando si includano i moti turbolenti. Partiamo dall'espressione per fluidi incompressibili:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (9.39)$$

e scriviamola nelle componenti scalari:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p \delta_{ij} - \rho u_i u_j + \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (9.40)$$

Separiamo tutte le quantità in componente media e componente turbolenta

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad p = \bar{p} + p' \quad f_i = \bar{f}_i + f'_i \quad (9.41)$$

introduciamole nell'equazione di Navier-Stokes e prendiamone la media, con il che tutte le quantità lineari nelle fluttuazioni si annullano. Dobbiamo inoltre usare speciale attenzione al termine nonlineare:

$$\rho \overline{u_i u_j} = \rho \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \rho \left(\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \overline{u'_j} + \overline{u'_i} \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (9.42)$$

ed eliminando i termini con medie nulle:

$$\rho \overline{u_i u_j} = \rho \left(\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \right). \quad (9.43)$$

In conclusione l'equazione di Navier-Stokes mediata diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) = \rho \bar{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\bar{p} \delta_{ij} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j - \rho \overline{u'_i u'_j} + \eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (9.44)$$

che è generalmente nota come *equazione di Reynolds* (1895). Il termine cruciale nell'equazione è il cosiddetto *tensore degli sforzi di Reynolds* $\overline{u'_i u'_j}$. Lo si può valutare utilizzando l'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) = \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} \quad (9.45)$$

ed esprimendo le derivate temporali attraverso la differenza tra la (9.40) e la (9.44); a parte i dettagli algebrici è chiaro come questo calcolo porterà a introdurre dei termini di correlazione a tre punti $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ che non permettono la chiusura del sistema in modo autoconsistente, neppure procedendo a sviluppi a ordini superiori.

In molte applicazioni si utilizza quindi una forma approssimata per la chiusura, ponendo

$$\overline{u'_i u'_j} = -D_{turb} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.46)$$

che in genere porta a risultati sufficientemente in accordo con gli esperimenti.

9.6 Turbolenza in astrofisica

Le osservazioni ad alta risoluzione oggi utilizzate in astrofisica hanno permesso di mostrare che la turbolenza è una componente comune nei fluidi cosmici. La mancanza di una teoria adeguata della turbolenza limita fortemente le capacità predittive di molte delle teorie astrofisiche. Citiamo alcuni esempi.

9.6.1 Convezione turbolenta

Il trasporto convettivo è attivo in quasi tutti i tipi di stelle, almeno in certi strati. Riferendosi ad esempio a stelle di sequenza principale, nelle zone centrali di stelle di grande massa la cospicua produzione di energia tenderebbe a produrre gradienti di temperatura molto ripidi se il trasporto di calore avvenisse soltanto attraverso il flusso di fotoni; ciò porta allo sviluppo delle instabilità convettive come precedentemente discusso, che generano moti turbolenti consistentemente con gli elevati numeri di Reynolds connessi con le basse viscosità del mezzo. Nel caso di stelle di piccola massa sono invece gli strati superficiali ad essere instabili convettivamente perché relativamente freddi e opachi ai fotoni; la presenza di moti convettivi superficiali è ad esempio osservata nel caso del Sole (si ricordi la Fig. 8.4).

Pertanto una trattazione della convezione turbolenta è essenziale per la costruzione dei modelli stellari. Nel 1948 Biermann e successivamente Vitense adattarono alcuni principi di Prandtl (1925) al caso stellare, sviluppando la cosiddetta *teoria della lunghezza di mescolamento* (*mixing length theory*) che è ampiamente utilizzata ancor oggi nella trattazione delle zone convettive delle stelle. Il concetto base di tale teoria è che, nel campo gravitazionale della stella, una bolla turbolenta calda di dimensioni a salga per una distanza tipica l seguendo un cammino casuale con velocità quadratica media u_{rms} e quindi rilasci il calore in eccesso al mezzo circostante; analogamente avviene per una bolla fredda che affonda di una distanza tipica l prima di mescolarsi con l'ambiente. Il processo di trasferimento di energia dalla bolla turbolenta avviene tramite gli sforzi di Reynolds e può essere scritto formalmente sulla base della (9.46) identificando la direzione 1 con la direzione della gravità e 2 quella trasversa:

$$\overline{\rho u'_1 u'_2} = -\eta_c \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} \quad (9.47)$$

dove η_c è la viscosità dei vortici che possiamo scrivere in analogia alla viscosità molecolare come

$$\eta_c \approx \rho u_{rms} l \quad (9.48)$$

dove l è il libero cammino medio e u_{rms} la velocità quadratica media della bolla. La u_{rms} può essere determinata usando la teoria di Kolmogorov nel limite per bolle grandi $k_0 a \approx 1$:

$$u_{rms} \approx C^{1/2} \epsilon^{1/3} k_0^{-1/3} .$$

Per determinare l si usa la forma classica del cammino libero medio di una particella di raggio a che si muove in un mezzo di densità ρ con velocità u_{rms} :

$$l \approx u_{rms} \frac{\rho a^2}{\eta_c} \quad (9.49)$$

che coincide con la (9.48) per

$$l \approx a . \quad (9.50)$$

Essendo nel caso delle stelle le dimensioni delle bolle una frazione dell'altezza scala di pressione, si possono sperimentare i risultati del trasporto convettivo

delle bolle turbolente con le formule ora ricavate. Il risultato è che, quando tale trasporto è efficiente, il gradiente di temperatura tende a raggiungere il limite adiabatico:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dr}. \quad (9.51)$$

L'assunzione del gradiente adiabatico per le regioni convettivamente instabili appare una buona approssimazione, e in effetti i modelli sembrano poco sensibili ai dettagli della turbolenza. Naturalmente ciò non è sempre vero, in particolare la situazione diventa critica quando si abbia a che fare con fasi dinamicamente attive delle stelle. In tal caso i tempi scala dei moti convettivi entrano in gioco e possono dare origine a instabilità delle strutture.

9.6.2 Trasporto del momento angolare, dinamo, ecc.

La convezione turbolenta è una via importante per ridistribuire il momento angolare nelle stelle rotanti e nei dischi di accrescimento. All'interno del Sole la velocità angolare varia in modo abbastanza complicato. Esistono modelli che tentano di interpretare queste variazioni attraverso l'effetto degli sforzi di Reynolds associati con la turbolenza nei moti convettivi.

Nel caso dei dischi di accrescimento ancora gli sforzi di Reynolds potrebbero essere responsabili per creare un aumento dell'efficienza del trasporto di momento angolare verso l'esterno del disco; in tal modo sarebbe possibile spiegare il riscaldamento dei dischi e la corrispondente emissione di radiazione.

Vedremo nella seconda Parte del corso che l'interazione tra turbolenza e campi magnetici è fondamentale per spiegare l'effetto dinamo, e in genere quindi l'evoluzione delle stelle rotanti.

In tutti questi casi la turbolenza è un elemento fondamentale con effetti fisici molto più critici che non nel caso dei modelli stellari. Pertanto lo studio di tali fenomeni richiede una miglior comprensione della turbolenza.

Va anche detto che anche il mezzo interstellare e i fenomeni in esso attivi sono influenzati da moti turbolenti indotti dall'interazione con le stelle, con il trasporto di momento angolare e con la presenza di campi magnetici. Spesso si osserva una equipartizione dell'energia tra turbolenza, energia magnetica, energia termica ed energia in particelle sopratermiche come i raggi cosmici. Come ciò avvenga è ancora da interpretare, anche se appare un effetto realistico dell'equilibrio; comunque, dal nostro punto di vista, prova come la turbolenza sia una componente anche energeticamente fondamentale in astrofisica.