

Parte VIII
APPENDICI

Appendice A

Cenni di ottica geometrica

La costruzione delle immagini attraverso un sistema ottico viene eseguita attraverso le tecniche dell'ottica geometrica che tengono conto delle leggi della rifrazione e riflessione. Come esempio studiamo il caso della formazione dell'immagine attraverso una lente convergente nell'ipotesi di lente sottile.

Considerata una lente sottile biconvessa simmetrica (Fig. A.1), definiamo il *piano della lente* come quel piano su cui giace il bordo rotondo della lente, e che la divide in due metà di ugual forma, simmetriche rispetto al piano stesso. Consideriamo altresì l'*asse ottico* come la retta perpendicolare al piano della lente che passa per il centro della lente stessa. Indichiamo il semispazio a sinistra della lente come spazio-oggetti e quello alla destra della lente come spazio-immagini. Si indichi con f la *lunghezza focale* della lente (o più brevemente la focale), che corrisponde alla distanza a cui la lente farà convergere in un unico punto un fascio di raggi paralleli tra loro e paralleli all'asse ottico.

Il valore della distanza focale può essere calcolato con l'equazione:

$$\frac{1}{f_\lambda} = \left(\frac{n_\lambda}{n'_\lambda} - 1 \right) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{(n_\lambda - 1)d}{n_\lambda R_1 R_2} \right] \quad (\text{A.1})$$

dove:

- n_λ è l'indice di rifrazione del materiale con cui è costituita la lente,
- n'_λ è l'indice di rifrazione dell'ambiente in cui la lente è immersa,
- d è la distanza tra le due superfici o spessore della lente.

Si noti che gli indici di rifrazione dipendono dalla lunghezza d'onda, il che causa effetti di aberrazione cromatica (vedi testo).

Se d è piccolo rispetto a R_1 e R_2 , si ha la condizione di lente sottile:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{A.2})$$

Nell'ipotesi di lente sottile valgono le seguenti tre regole per tracciare i raggi tra oggetto e immagine:

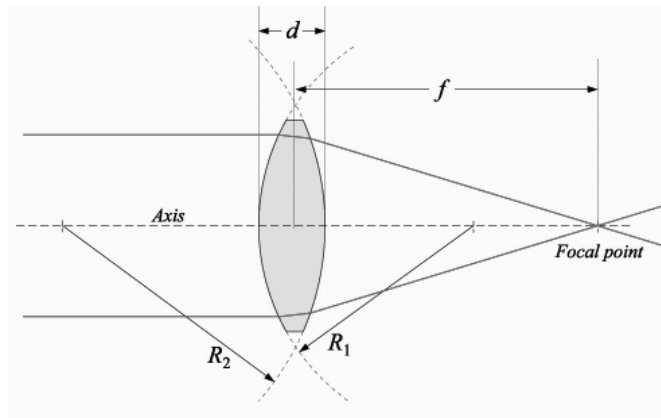


Fig. A.1: Lente biconvessa; sono indicati l'asse ottico, il punto focale nel piano delle immagini a destra della lente e i raggi di curvatura R_1 e R_2 delle due superfici convesse; f è la distanza focale, d lo spessore della lente.

1. i raggi che passano per il centro della lente proseguono senza cambiare direzione
2. i raggi che passano per il punto focale anteriore vengono trasformati dalla lente in raggi paralleli all'asse ottico
3. i raggi che entrano nella lente paralleli all'asse ottico, vengono convogliati da questa nel punto focale posteriore.

Prendiamo come oggetto una freccia posta a distanza S_1 dal centro di una lente convergente di lunghezza focale f con $S_1 > f$; sia la freccia perpendicolare all'asse ottico con la coda sull'asse. Per disegnare l'immagine in questa semplice configurazione basta tracciare due raggi provenienti dalla punta della freccia (Fig. A.2):

- un raggio che segue un cammino parallelo all'asse ottico e che viene rifratto dalla lente nel fuoco dalla parte opposta dell'oggetto
- un raggio che passa direttamente attraverso al centro della lente e che non viene deflesso.

Nel caso in figura è indicato anche il raggio uscente dalla punta della freccia e che attraversando il fuoco nello spazio-oggetti esce dalla lente parallelo all'asse ottico. L'intersezione dei raggi rappresenta la punta della freccia-immagine (capovolta). Qualunque altro raggio uscente dalla punta della freccia-oggetto e che passi attraverso la lente viene concentrato in tale punto. La coda della freccia sta sull'asse ottico a distanza S_2 dal centro della lente, e l'immagine è perpendicolare all'asse ottico. Con semplici proporzionalità tra gli angoli simili nello

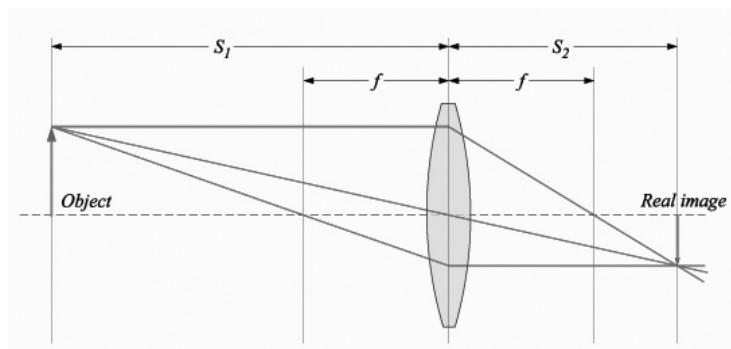


Fig. A.2: Formazione dell'immagine in una lente convergente biconvessa simmetrica con il tracciamento di raggi.

schema di figura, si ricava la relazione:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f}. \quad (\text{A.3})$$

Nel caso di sorgenti astronomiche $S_1 \rightarrow \infty$, per cui l'immagine si forma su piano focale. In tal caso per definire la punta della freccia-oggetto è sufficiente tracciare il raggio non deflesso passante per il centro della lente e indicarne l'intersezione con il piano focale.

Sistemi ottici complessi, che sfruttino riflessioni su specchi e lenti correttive come discusse nel testo, richiedono calcoli estesi, anche per tener conto delle irregolarità. Esistono opportuni programmi numerici di tracciamento dei raggi (*ray tracing*) che permettono di ricavare le immagini attraverso un qualunque sistema ottico; essi sono utilizzati in astronomia per definire nel modo migliore le caratteristiche dei sistemi ottici dei telescopi a seconda delle esigenze osservative.

Appendice B

Diffrazione di un'apertura circolare

Il calcolo della risoluzione angolare di un telescopio con apertura circolare fu per la prima volta risolto dall'astronomo inglese George Airy nel 1835. Si consideri un'apertura circolare di raggio R nel piano xy . Luce coerente attraversa l'apertura provenendo dalla direzione negativa dell'asse z (Fig. B.1). consideriamo i raggi che lasciano l'apertura parallelamente al piano xz ad un angolo θ rispetto all'asse x e studiamone l'interferenza su di uno schermo a grande distanza.

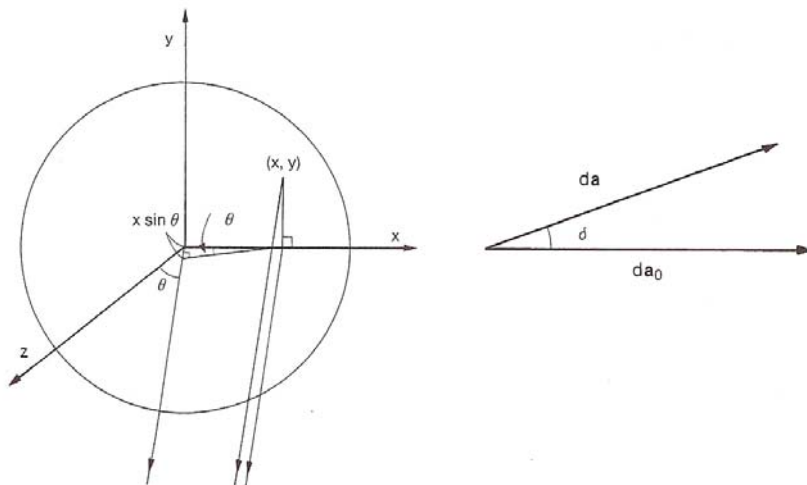


Fig. B.1: Diffrazione di un'apertura circolare

La differenza di fase tra l'onda che esce dal centro dell'apertura e un punto generico (x, y) dipende dalla differenza di cammino $s = x \sin \theta$, e risulta

$$\delta = \frac{s}{\lambda} 2\pi = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x = kx \quad (\text{B.1})$$

che dipende solo dalla coordinata x . La somma delle ampiezze delle onde provenienti da un elemento dell'apertura è proporzionale all'area $dxdy$. Dando all'ampiezza un significato vettoriale, si chiami $d\mathbf{a}_0 = dxdy\hat{i}$ l'ampiezza dell'onda proveniente dal centro dell'apertura; conseguentemente l'ampiezza dell'onda proveniente dall'elemento generico in (x, y) sarà, tenendo conto della differenza di fase:

$$d\mathbf{a} = dxdy(\cos \delta\hat{i} + \sin \delta\hat{j}) \quad (\text{B.2})$$

per cui, sommando su tutti gli elementi dell'apertura si avrà:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \int_{\text{apertura}} d\mathbf{a} = \int_{x=-R}^{x=R} dx \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} dy (\cos kx\hat{i} + \sin kx\hat{j}) = \\ &= 2 \int_{x=-R}^{x=R} dx \sqrt{R^2-x^2} (\cos kx\hat{i} + \sin kx\hat{j}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e poiché la funzione seno è dispari, l'integrale è non nullo solo lungo l'asse x :

$$a = \int_0^R dx \sqrt{R^2-x^2} \cos kx$$

e con cambiamento di variabili

$$a \propto \int_0^1 dt \sqrt{1-t^2} \cos pt \quad . \quad (\text{B.4})$$

Il valore dell'intensità della somma delle onde si annulla dove $a = 0$. Il primo zero si ha per $p = 3.8317$, cioè per

$$\sin \theta = \frac{3.8317}{2\pi R} \lambda = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad . \quad (\text{B.5})$$

Appendice C

Evoluzione dello spettro di corpo nero cosmico

L'idea base del lavoro in cui Alpher, Bethe, Gamow nel 1948 formularono la teoria del big-bang è che lo stato iniziale ad alta densità dell'Universo originale deve anche essere caratterizzato da alta temperatura. In tali condizioni il cammino libero medio dei fotoni deve essere molto piccolo e quindi il sistema può raggiungere l'equilibrio termodinamico e quindi avere una distribuzione planckiana:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{C.1})$$

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{h/\lambda kT} - 1}, \quad (\text{C.2})$$

con una densità di energia totale:

$$u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (\text{C.3})$$

dove $\sigma = 5.67051 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann. In un successivo lavoro Alpher e Herman calcolarono come questa distribuzione si raffreddasse durante l'espansione dell'Universo. La densità di energia nell'intervallo di lunghezze d'onda tra λ e $\lambda + d\lambda$ deve decrescere nell'espansione $\propto a^{-4}$. Infatti il volume cresce $\propto a^3$ e la densità $\propto a^{-3}$ e l'energia dei fotoni, in base alle regole del modello cosmologico, è $\propto \nu \propto \lambda^{-1} \sim a^{-1}$. Con riferimento al fattore di scala

odierno a_0 e con $\lambda = (a/a_0) \lambda_0$ si può quindi ricavare:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_0} d\lambda_0 &= \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{d\lambda_0}{e^{h/\lambda_0 k T_0} - 1} \\ &= \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 u_{\lambda} d\lambda = \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{(a/a_0) d\lambda_0}{e^{h/(a/a_0)\lambda_0 k T} - 1} = \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{d\lambda_0}{e^{h/(a/a_0)\lambda_0 k T} - 1} . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Pertanto, poiché $(a/a_0) \lambda_0 k T = \lambda_0 k T_0$, si ricava che la distribuzione spettrale rimane quella di un corpo nero alla temperatura definita da quella dell'espansione adiabatica di un gas di fotoni $T = (a_0/a) T_0$.