ESERCIZI SULLE CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

Esercizio N.1

Verificare se la funzione $f(z) = c$ con $c \in \mathbf{C}$ costante è analitica.

- **Soluzione**

$$f(z) = c = c_x + \mathrm{i}c_y \quad c_x, c_y \in \mathbf{R} \quad ,$$

la funzione $f(z)$ è continua in tutto il piano complesso $\mathbf{C}$, le funzioni u e v sono continue e derivabili:

$$u(x, y) = c_x \ , \quad v(x, y) = c_y \quad ,$$

le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate $\forall z \in \mathbf{C}$:

$$u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0 \quad .$$

Quindi una funzione costante è analitica in tutto il piano complesso.

Esercizio N.2

Verificare se la funzione $f(z) = z$ è analitica e nel caso calcolare la sua derivata.

- **Soluzione**

$$f(z) = z = x + \mathrm{i}y$$

$$u(x, y) = x \ , \quad v(x, y) = y$$

$$u'_x = v'_y = 1$$

$$u'_y = -v'_x = 0$$

La funzione $f(z) = z$ è analitica in tutto il piano complesso perchè le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate in tutto $\mathbf{C}$.
La sua derivata è:

$$f'(z) = u'_x + \mathrm{i}v'_x = 1 \quad .$$

Esercizio N.3

Verificare se la funzione $f(z) = z^2$ è analitica e nel caso calcolare la sua derivata.

- **Soluzione**

$$f(z) = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy \quad ,$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \;\; , \;\; v(x,y) = 2xy \quad ,$$

$$\begin{array}{rcl} u'_x & = & v'_y = 2x \quad , \\ u'_y & = & -v'_x = -2y \quad . \end{array}$$

La funzione $f(z) = z^2$ è analitica in tutto il piano complesso perchè le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate in tutto **C**.
La sua derivata è:

$$f'(z) = u'_x + \mathrm{i}v'_x = 2x + 2\mathrm{i}y = 2z \quad .$$

Esercizio N.4
Verificare se la funzione $f(z) = z^*$ è analitica e nel caso calcolare la sua derivata.

- **Soluzione**

$$f(z) = z^* = x - iy$$

$$u(x,y) = x \;\; , \quad v(x,y) = -y$$

$$u'_x = 1 \;\; , \quad v'_y = -1$$

La funzione $f(z) = z^*$ non è analitica perchè le condizioni di Cauchy-Riemann non sono mai verificate. . La derivata di z^* non esiste quindi in alcun punto di **C**.

Esercizio N.5

Verificare se la funzione $f(z) = |z|^2$ è analitica.

- **Soluzione**

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \ , \quad v(x,y) = 0$$

$$\begin{array}{lcl} u'_x = 2x & , & v'_y = 0 \\ u'_y = 2y & , & v'_x = 0 \ . \end{array}$$

La funzione è certamente non analitica $\forall z \neq 0$, poiché le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte solo nel punto $z = 0$. Tuttavia anche in quel punto la funzione non è analitica, perché, pur esistendo la derivata (che vale zero), non esiste un intorno dell'origine in cui f sia analitica.

Esercizio N.6

Verificare se la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ è analitica e nel caso calcolare la sua derivata.

- **Soluzione**

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ , \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Le funzioni u e v sono continue e derivabili in $\mathbf{C} - \{0\}$ ed in quel dominio le condizioni di Cauchi-Riemann sono soddisfatte:

$$\begin{array}{lcl} u'_x = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & , & v'_y = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u'_x \\ u'_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & v'_x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u'_y \ . \end{array}$$

La funzione $f(z)$ è quindi analitica in $\mathbf{C} - \{0\}$.

La sua derivata è

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y+ix)^2}{(y+ix)^2(y-ix)^2} = -\frac{1}{z^2} \ .$$

Vale pertanto la stessa regola di derivazione valida in campo reale

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \ .$$

Esercizio N.7

Verificare se la funzione $f(z) = \mathrm{e}^z$ è analitica e nel caso calcolare la sua derivata.

- **Soluzione**

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y) \ .$$

Le funzioni

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathrm{e}^x \cos y \\ v(x,y) &= \mathrm{e}^x \sin y \ , \end{aligned}$$

sono continue e derivabili in tutto il piano (x,y) e le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte ovunque:

$$\begin{aligned} u'_x &= \mathrm{e}^x \cos y = v'_y \ , \\ u'_y &= -\mathrm{e}^x \sin y = -v'_x \ . \end{aligned}$$

Pertanto la funzione esponenziale è analitica $\forall z \in \mathbf{C}$ e la sua derivata è

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{e}^z}{dz} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x \cos y) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x \sin y) \\ &= \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y) \\ &= \mathrm{e}^z \ , \end{aligned}$$

come nel campo reale.

Esercizio N.8

Verificare se la funzione $f(z) = \sin z$ è analitica e nel caso calcolare la sua derivata.

- **Soluzione**

$$f(z) = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \ .$$

Usando le relazioni

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{i}y) &= \cosh y \\ \sin(\mathrm{i}y) &= \mathrm{i} \sinh y \ . \end{aligned}$$

si deduce che le funzioni u e v sono:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sin x \cosh y \\ v(x, y) &= \cos x \sinh y \ , \end{aligned}$$

continue e derivabili in tutto il piano (x, y). Le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte ovunque:

$$\begin{aligned} u'_x &= \cos x \cosh y = v'_y \\ u'_y &= \sin x \sinh y = -v'_x \end{aligned}$$

e pertanto la funzione $\sin z$ è analitica $\forall z \in \mathbf{C}$.

La sua derivata è

$$\begin{aligned} \frac{d \sin z}{dz} &= \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cosh y) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sinh y) \\ &= \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y \\ &= \cos x \cos(\mathrm{i}y) - \sin x \sin(\mathrm{i}y) \\ &= \cos(x + iy) = \cos z \ . \end{aligned}$$

Analogamente si può mostrare che

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z \ .$$

Esercizio N.9

Verificare se la funzione $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ è analitica.

- **Soluzione**

  Le funzioni u e v sono:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \rho^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\varphi}{n} \quad , \\
v(x,y) &= \rho^{\frac{1}{n}} \sin\frac{\varphi}{n} \quad ,
\end{aligned}
$$

dove

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \quad .$$

Le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono discontinue su una semiretta uscente dall'origine; per esempio, se scegliamo $-\pi < \varphi \leq \pi$ sono discontinue e quindi ovviamente non derivabili su $\mathbf{R}_-$. Le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte perciò su $\mathbf{C} - \{0\} - \mathbf{R}_-$ e la funzione $z^{\frac{1}{n}}$ è analitica in quel dominio.