ESERCIZI SUGLI STUDI DI FUNZIONE

Esercizio N.1

Si studi la funzione

$$f(z) \,=\, \mathrm{e}^z$$

- **Soluzione**

La funzione e^z non ha zeri. Inoltre, poichè lo sviluppo della funzione intorno all'origine è uno sviluppo di Taylor

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

che converge in tutto $\mathbf{C}$, si deduce che e^z è una funzione *intera*, cioè non ha alcuna singolarità al finito.

Esercizio N.2

Si studi la funzione

$$f(z) \,=\, \sin z$$

- **Soluzione**

Lo sviluppo della funzione intorno all'origine è uno sviluppo di Taylor:

$$\sin z \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}$$

che converge in tutto il piano complesso. La funzione quindi non ha singolarità, cioè è intera. Ha invece un numero infinito di zeri: infatti

$$\sin z \,=\, 0 \rightarrow Imz \,=\, 0 \;\;\mathrm{e}\;\; Rez \,=\, \pi k \;\;\mathrm{con}\;\; k \in \mathbf{Z} \;\;.$$

Esercizio N.3

Si studi la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

- **Soluzione**

Per $z \neq 0$ questa funzione ha le stesse proprietà di , quindi è regolare ovunque ed ha gli stessi zeri. Lo sviluppo intorno all'origine si ricava facilmente da quello di $\sin z$ ed è:

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \quad .$$

La serie ovviamente converge in tutto **C** come quella di $\sin z$; inoltre non contiene potenze negative di z per cui l'origine è un punto regolare come per $\sin z$, ma in questo caso non è uno zero, perche' la serie ha come primo termine non nullo quello costante.

Esercizio N.4

Si studi la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

- **Soluzione**

Per $z \neq 0$ questa funzione ha le stesse proprietà di , quindi è regolare ovunque ed ha gli stessi zeri. Lo sviluppo intorno all'origine di questa funzione si ricava facilmente da quello di $\sin z$ ed è:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} \quad .$$

Per $z \neq 0$ la serie ovviamente converge come quella di $\sin z$. La serie contiene però ora potenze negative di z ed è quindi una serie di Laurent nell'intorno di $z = 0$. L'origine infatti non è più un punto regolare come per $\sin z$, ma è un polo del primo ordine, perche' la serie ha come primo termine non nullo quello proporzionale a z^{-1}.

Esercizio N.5

Si studi la funzione

$$f(z) = \sin\frac{1}{z}$$

- **Soluzione**

Questa funzione ha un numero infinito di zeri:

$$\sin\frac{1}{z} = 0 \rightarrow Imz = 0 \;\text{ e }\; Rez = \frac{1}{\pi k} \;\text{ con }\; k \in \mathbf{Z} \quad .$$

L'insieme degli zeri ha un punto di accumulazione in $z = 0$ e l'origine e' quindi una singolarità essenziale. La funzione non possiede altre singolarità. Questo fatto si puo'dedurre anche dallo sviluppo in serie di Laurent della funzione nell'intorno dell'origine:

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{-(2n+1)} \quad .$$

Come tutte le serie esponenziali, il raggio di convergenza della serie è infinito, quindi per $z \neq 0$ la funzione è regolare. La serie contiene però infinite potenze negative di z e quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale.