ESERCIZISUGLI INTEGRALI IN CAMPO COMPLESSO
Integrali Trigonometrici

Esercizio N.1

Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi + \mathrm{i}}$$

- **Soluzione**

  Ponendo $z = e^{i\varphi}$ l'integrale in questione si può scrivere come

  $$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2\mathrm{d}z}{z^2 - 2z - 1} \quad ,$$

  dove $\mathcal{C}$ è un cerchio di raggio 1 centrato sull'origine.
  La funzione integranda ha due poli semplici in $z_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$, ma solo z_- è all'interno di $\mathcal{C}$. Applicando il teorema dei residui si ha quindi

  $$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2\mathrm{d}z}{z^2 - 2z - 1} = 2\pi\mathrm{i}\Re es f(z)|_{z_-} = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{\sqrt{2}} \ .$$

Esercizio N.2

Calcolare l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\tan\theta + \mathrm{i}}$$

- **Soluzione**

  Ponendo $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ l'integrale di linea si trasforma in un integrale lungo il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{I} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z(\frac{z-z^{-1}}{\mathrm{i}(z+z^{-1})} + \mathrm{i})} = -\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z(z+z^{-1})}{2} = -\mathrm{i}\pi$$

Esercizio N.3

Data la funzione di variabile complessa β, definita dalla seguente rappresentazione integrale,

$$f(\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\beta - \cos\theta} \; ,$$

- si determini il dominio di convergenza di tale rappresentazione
- si calcoli esplicitamente l'integrale per β reale maggiore di uno.

- **Soluzione**

  - $f(\beta)$ è definita per ogni valore di β che non annulla il denominatore della funzione integranda, quindi per $\beta \notin [-1, 1]$.
  - Per β reale maggiore di uno l'integrale è definito e posso quindi calcolarlo ponendo $e^{\mathrm{i}\vartheta} = w$, trasformando l'integrale in questione nell'integrale di una funzione analitica lungo il cerchio trigonometrico ed applicando il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{\mathrm{i}w} \frac{2}{2\beta - w - w^{-1}} = 2\mathrm{i} \oint_{\mathcal{C}} dw \frac{1}{w^2 - 2\beta w + 1} \\ &= 2\mathrm{i} \oint_{\mathcal{C}} dw \frac{1}{(w - w_+)(w - w_-)} \end{aligned}$$

dove

$$w_{+,-} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \quad . \tag{1}$$

Poichè $w_+ + w_- = 2\beta$ e $w_+ w_- = 1$, da $\beta > 1$ segue che $w_+, w_- > 0$ e quindi $w_+ > 1$ e $0 < w_- < 1$. Quindi solo w_- contribuisce all'integrale e si ha

$$f(\beta) = 2\mathrm{i}\pi Res \frac{2\mathrm{i}}{(w - w_+)(w - w_-)}\bigg|_{w_-} = \frac{-4\pi}{w_- - w_+} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad . \tag{2}$$

Esercizio N.4

Data la funzione di variabile complessa z, definita dalla seguente rappresentazione integrale,

$$f(z) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\tan\vartheta + \mathrm{i}z} \quad , \tag{3}$$

- si determini il dominio di convergenza di tale rappresentazione
- si calcoli esplicitamente l'integrale per z reale maggiore di zero.

- **Soluzione**

  - $f(z)$ è definita per $iz \neq \tan\vartheta$, cioè $\Re e\, z \neq 0$. Ci sono quindi due domini disgiunti: $\mathcal{D}_1 = \{\Re e\, z > 0\}$ e $\mathcal{D}_2 = \{\Re e\, z < 0\}$.
  - z reale maggiore di zero appartiene a $\mathcal{D}_1$, quindi l'integrale è definito. Posso perciò porre $e^{i\vartheta} = w$ e trasformare l'integrale in questione nell'integrale di una funzione analitica lungo il cerchio trigonometrico $\mathcal{C}$ ed applicare il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{\mathrm{i}w} \frac{w + w^{-1}}{(w - w^{-1})/\mathrm{i} + \mathrm{i}z(w + w^{-1})} \\ &=\; \oint_{\mathcal{C}} dw \frac{w + w^{-1}}{(1-z)[w^2 - \frac{1+z}{1-z}]} \quad . \end{aligned}$$

Poichè $\left|\frac{1+z}{1-z}\right| > 1$ ne segue che

$$f(z) = 2\mathrm{i}\pi \lim_{w\to 0} \frac{1}{(1-z)[w^2 - \frac{1+z}{1-z}]} = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{1+z} \quad .$$