Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.1 Il Campo Complesso

1.1.1 Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali

$$z = a + ib = (a, b) \qquad a, b \in \mathbf{R}$$

dove i è l'unità immaginaria

$$i^2 = -1 \ .$$

$$a = \mathrm{Re}\ z \ , \qquad b = \mathrm{Im}\ z \ .$$

L'insieme dei numeri complessi è un *campo*, indicato con $\mathbf{C}$, dato dal prodotto cartesiano del campo reale $\mathbf{R}$ con se stesso ($\mathbf{C} = \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$), dotato di *due* leggi di composizione interna, l'*addizione* e la *moltiplicazione*, che godono delle seguenti proprietà:

1) **Addizione (+)**

   Definizione:

$$z_1 = a_1 + ib_1 \ , \qquad z_2 = a_2 + ib_2 \longrightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \ .$$

Proprietà:

Associativa:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \qquad z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} \ .$$

Commutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ .$$

Esiste l'elemento neutro $0 \in \mathbf{C}$, tale che

$$z + 0 = 0 + z = z \qquad \forall z \in \mathbf{C} \ .$$

Per ogni $z \in \mathbf{C}$ esiste l'elemento inverso $-z \in \mathbf{C}$, tale che

$$z + (-z) = (-z) + z = 0 \ .$$

Quindi $\mathbf{C}$ è un *gruppo abeliano* rispetto all'addizione, con elemento neutro 0.

2) **Moltiplicazione** $(\cdot)$

Definizione:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \ . \end{aligned}$$

Proprietà:

Associativa:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \ .$$

Commutativa:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \ .$$

Esiste l'elemento neutro $1 \in \mathbf{C}$, tale che

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \qquad \forall z \in \mathbf{C} \ .$$

Per ogni $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ esiste l'elemento inverso $z^{-1} \in \mathbf{C}$, tale che

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

$$z = a + ib \longrightarrow z^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \ .$$

Quindi $\mathbf{C} - \{0\}$ è un *gruppo abeliano* rispetto alla moltiplicazione, con elemento neutro 1.

Vale inoltre la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \ .$$

- **Rappresentazione geometrica dei numeri complessi**

Un numero complesso z si può rappresentare graficamente come un punto nel *piano complesso di z* (o *piano di Argand*), sulle cui ascisse e ordinate si pongono rispettivamente la parte reale e immaginaria di z.

La rappresentazione *cartesiana* di zè

$$z = x + iy$$

(Fig 1.1).

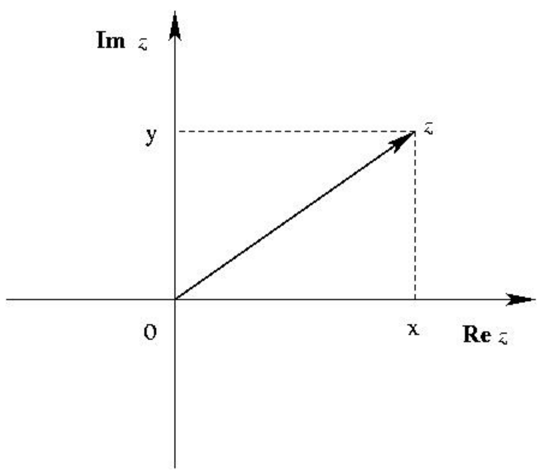

Figura 1.1: Rappresentazione cartesiana del numero complesso z

Una rappresentazione equivalente è quella *polare* (Fig 1.2)

$$z = re^{i\theta} = r \cos\theta + ir \sin\theta$$

con

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{modulo o valore assoluto di } z$$

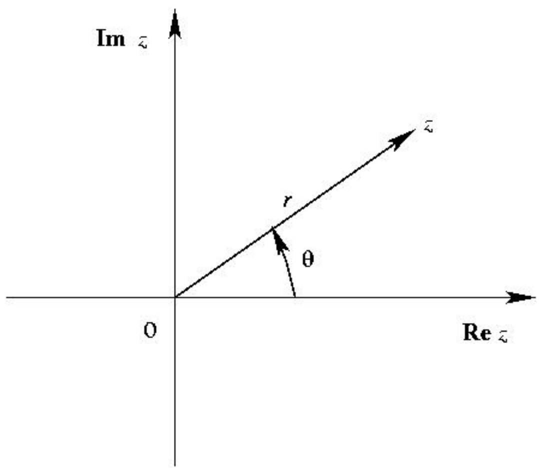

Figura 1.2: Rappresentazione polare del numero complesso z

e

$$\theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{argomento o fase di } z\ .$$

Graficamente r è il modulo del vettore $\vec{r}$ congiungente l'origine con il punto z, e θ è l'angolo che questo vettore forma con l'asse delle ascisse.

Le relazioni fra componenti cartesiane e polari di z sono:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Il *complesso coniugato* di un numero complesso z è un numero complesso $z^* \in \mathbf{C}$ così definito:

$$z = x + iy = re^{i\theta} \longrightarrow z^* = x - iy = re^{-i\theta}\ .$$

(si veda Fig 1.3)

1.1.2 Funzioni reali di variabile complessa

Una funzione reale di variabile complessa

$$f: \quad E \longrightarrow \mathbf{R}\ , \qquad E \subseteq \mathbf{C}$$

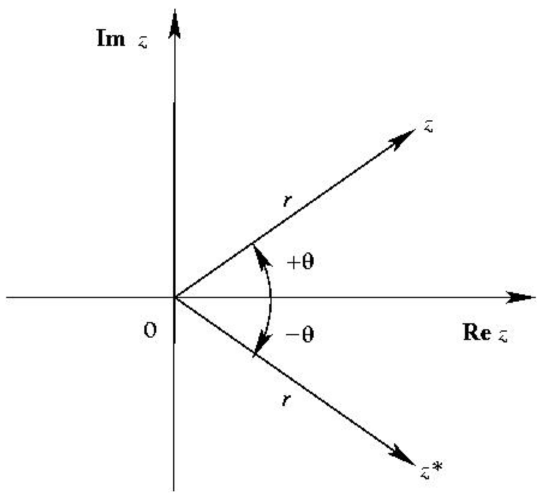

Figura 1.3: Rappresentazione polare del numero complesso z e del suo complesso coniugato z^*

è un'applicazione che associa un numero reale $f(z)$ ad ogni $z \in E$, con E sottoinsieme del campo $\mathbf{C}$.

Definizione di funzione continua.

La funzione $f(z)$ si dice *continua* nel punto $z = z_0$ se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ossia, ricordando la definizione di limite, se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;\; / \;\; |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \;, \quad \forall z \in I_\delta(z_0) \;,$$

dove $I_\delta(z_0)$ è un *intorno* di raggio δ del punto z_0:

$$I_\delta(z_0) = \{z \in \mathbf{C} / |z - z_0| < \delta\} \;\; .$$

Esempi

1) La funzione *modulo*

$$f(z) = |z|$$

è una funzione reale di variabile complessa, continua in tutto il piano complesso.

2) Le funzioni

$$f(z) = \mathrm{Re}z \quad \mathrm{e} \quad g(z) = \mathrm{Im}z$$

sono funzioni reali di variabile complessa, continue in tutto il piano complesso.

3) La funzione argomento

$$\varphi(z) = \arg z$$

è una funzione reale di variabile complessa:

$$\varphi : \quad \mathbf{C} - \{0\} \longrightarrow I_{2\pi} \subset \mathbf{R} \ ,$$

dove $I_{2\pi}$ è un intervallo semiaperto di lunghezza 2π. Tale intervallo non è univocamente definito e può essere scelto in infiniti modi diversi, ma in ogni caso la funzione $\varphi(z)$ è *discontinua* su una semiretta uscente dall'origine del piano complesso. Si considerino per esempio i due casi rappresentati in Fig. 1.4:

$$\begin{aligned} a) \quad I_{2\pi} &= (-\pi, \pi] \\ b) \quad I_{2\pi} &= [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Nel caso a) $\varphi(z)$ è *discontinua* sul semiasse reale negativo. Infatti

$$\varphi(-x) = \pi \quad x \in \mathbf{R}_+$$

ma il limite $\lim_{z \to -x} \varphi(z)$ non è definito, perché i limiti destro e sinistro sono diversi:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0^+} \varphi(-x + i\epsilon) &= \pi \\ \lim_{\epsilon \to 0^+} \varphi(-x - i\epsilon) &= -\pi \ . \end{aligned}$$

Nel caso b) invece $\varphi(z)$ è discontinua sul semiasse reale positivo.

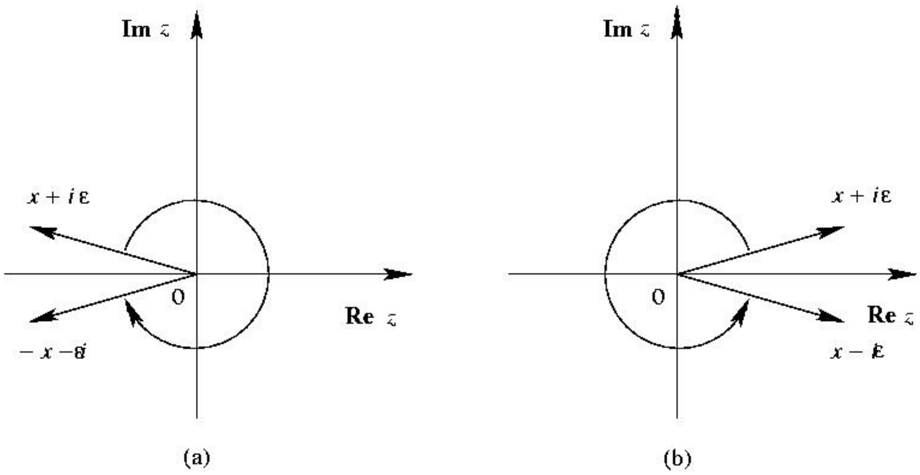

Figura 1.4: Discontinuità dell'argomento di z