Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.2 Funzioni Complesse

Una funzione complessa di variabile complessa

$$f: \quad E \longrightarrow \mathbf{C}\ , \qquad E \subseteq \mathbf{C}$$

è un'applicazione che associa un numero complesso $f(z)$ ad ogni $z \in E$, con E sottoinsieme del campo $\mathbf{C}$. Useremo la seguente notazione:

$$f: \quad z \mapsto w = f(z) \quad z \in E\ ,\ E \subseteq \mathbf{C}\ ,\ w \in \mathbf{C}\ ,$$

$$z = x + iy$$

$$w(z) = u(x,y) + iv(x,y)\ .$$

Quindi dare la f è equivalente a specificare due funzioni reali di due variabili reali:

$$u = u(x,y) \quad \text{e} \quad v = v(x,y)\ .$$

Analogamente a quanto accade nel caso di funzioni reali, una funzione complessa di variabile complessa $f(z)$ è detta *continua* se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ovvero se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ / \ \ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon\ , \quad \forall z \in I_\delta(z_0)\ ,$$

dove $I_\delta(z_0)$ è un *intorno* di raggio δ del punto z_0 e $|f(z) - f(z_0)|$ è il *modulo* del numero complesso $f(z) - f(z_0)$.

Esempi

1)

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2xy\ . \end{aligned}$$

In coordinate polari

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} \\ w &= r^2 e^{2i\varphi}\ . \end{aligned}$$

2)

$$f(z) = z^* = x - iy$$

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & x \\ v(x,y) & = & -y \ . \end{array}$$

In coordinate polari

$$\begin{array}{rcl} z & = & re^{i\varphi} \\ w & = & re^{-i\varphi} \ . \end{array}$$

1.2.1 Derivata di una funzione complessa di variabile complessa

Definizione: una funzione $f(z)$ si dice **derivabile** nel punto z se esiste il limite per $h \to 0$ ($h \in \mathbf{C}$) del rapporto incrementale

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

considerato come funzione della variabile *complessa* h. Tale limite deve essere quindi *indipendente dal modo in cui* $h \to 0$. Esistono infatti infinite direzioni lungo le quali h può tendere a 0 (si veda Fig 1.5)

La funzione f è derivabile se tutte queste direzioni danno lo stesso risultato per il limite del rapporto incrementale. In questo caso il limite si chiama *derivata* di f rispetto a z:

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \ .$$

1.2.2 Condizioni di Cauchy-Riemann

Consideriamo una funzione

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

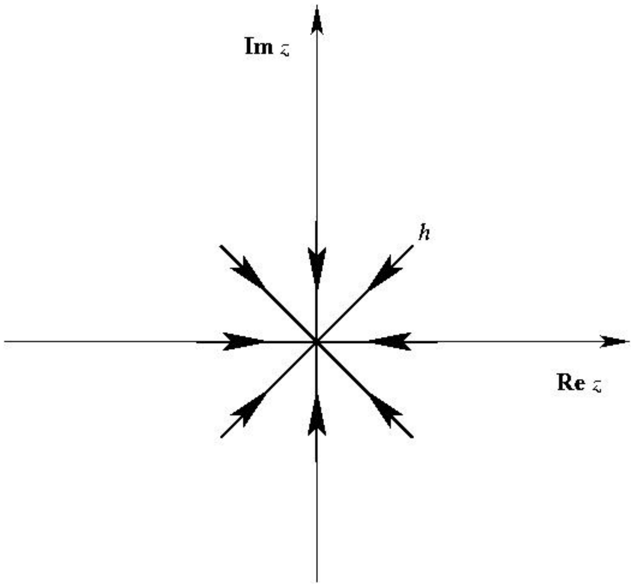

Figura 1.5: Direzioni del rapporto incrementale

tale che nel punto $z = x + iy$ sia la sua parte reale $u(x, y)$ che la sua parte immaginaria $v(x, y)$ siano di classe C^1, cioè continue con le loro derivate prime:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u'_x \ , \ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = u'_y \ , \ \ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = v'_x \ , \ \ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = v'_y \ .$$

Δ **Teorema 1:** le **condizioni di Cauchy e Riemann** (CR)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{aligned} \qquad (1.1)}$$

sono condizioni *necessarie e sufficienti* affinché la funzione $f(z)$ sia derivabile nel punto z.

Dimostrazione

Dimostriamo dapprima che le condizioni di (CR) sono *necessarie*, ossia che

$$f(z) \text{ derivabile } \Rightarrow (\mathrm{CR}) \ .$$

Per ipotesi la derivata di $f(z)$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

esiste ed è indipendente dalla direzione di $h = h_x + ih_y$. In particolare si potrà scegliere h puramente reale ($h = h_x$) o puramente immaginario ($h = ih_y$).

Se $h = h_x$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h_x\to 0} \frac{f(z+h_x)-f(z)}{h_x} \\ &= \lim_{h_x\to 0} \frac{u(x+h_x,y)+iv(x+h_x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{h_x} \\ &= \lim_{h_x\to 0} \frac{u(x+h_x,y)-u(x,y)}{h_x} + i \lim_{h_x\to 0} \frac{v(x+h_x,y)-v(x,y)}{h_x} \\ &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Se $h = ih_y$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h_y\to 0} \frac{f(z+ih_y)-f(z)}{ih_y} \\ &= \lim_{h_y\to 0} \frac{u(x,y+h_y)+iv(x,y+h_y)-u(x,y)-iv(x,y)}{ih_y} \\ &= \lim_{h_y\to 0} \frac{u(x,y+h_y)-u(x,y)}{ih_y} + i \lim_{h_y\to 0} \frac{v(x,y+h_y)-v(x,y)}{ih_y} \\ &= -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Uguagliando ora le parti reali e immaginarie delle espressioni (1.2) e (1.3) per la derivata $f'(z)$ otteniamo le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \ . \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che le condizioni di CR sono *sufficienti* per la derivabilità di $f(z)$, ossia

$$(\mathrm{CR}) \ \Rightarrow f(z) \text{ derivabile } .$$

Consideriamo a questo scopo il rapporto incrementale

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h_x, y+h_y) + iv(x+h_x, y+h_y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h_x + ih_y} \ . \tag{1.4}$$

Poiché le funzioni u e v sono per ipotesi continue con le loro derivate prime in z, esse sono differenziabili e si può quindi scrivere nell'intorno del punto (x, y):

$$\begin{aligned} u(x+h_x, y+h_y) &= u(x,y) + h_x u'_x(x,y) + h_y u'_y(x,y) + o(|h|) \\ v(x+h_x, y+h_y) &= v(x,y) + h_x v'_x(x,y) + h_y v'_y(x,y) + o(|h|) \ . \end{aligned}$$

Sostituendo questi sviluppi nel rapporto incrementale (1.4) si ottiene

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{h_x u'_x(x,y) + ih_x v'_x(x,y) + h_y u'_y(x,y) + ih_y v'_y(x,y) + o(|h|)}{h_x + ih_y} \ .$$

Utilizzando ora le condizioni di Cauchy-Riemann (1.1) e prendendo il limite per $h_x, h_y \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{h_x,h_y\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \\ &\lim_{h_x,h_y\to 0} \frac{h_x u'_x(x,y) + ih_x v'_x(x,y) - h_y v'_x(x,y) + ih_y u'_x(x,y) + o(|h|)}{h_x + ih_y} = \\ &\lim_{h_x,h_y\to 0} \frac{(h_x + ih_y)[u'_x(x,y) + iv'_x(x,y)]}{h_x + ih_y} = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = f'(z) \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

La derivata di $f(z)$ è quindi definita univocamente indipendentemente dalla direzione di h: la funzione è pertanto derivabile e la sua derivata è

$$f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) \ .$$

[q.e.d.]

Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann è possibile dare quattro espressioni equivalenti della derivata di una funzione in termini delle sue parti reale e immaginaria:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) \\ &= v'_y(x,y) - iu'_y(x,y) \\ &= u'_x(x,y) - iu'_y(x,y) \\ &= v'_y(x,y) + iv'_x(x,y) \ . \end{aligned}$$

N.B. Dalle ultime due espressioni si deduce che *per calcolare la derivata di $f(z)$ è sufficiente conoscerne o la parte reale u o la parte immaginaria v.*

1.2.3 Funzioni analitiche

- Definizione

Una funzione $f(z)$

$$f : F \longrightarrow \mathbf{C} \quad F \subset \mathbf{C}$$

si dice **analitica** (o **regolare**, o **olomorfa**) *in una regione* aperta $E \subset F$ se essa è *derivabile*, con *derivata continua*, in ogni punto $z \in E$. È quindi necessario e sufficiente affinché $f(z)$ sia analitica in E che siano soddisfatte le seguenti condizioni in tutti i punti di E:

1) parte reale $u(x, y)$ e parte immaginaria $v(x, y)$ siano di classe C^1;

2) siano soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann (1.1).

Una funzione $f(z)$ si dice **analitica in un punto** z_0 se esiste un intorno $I(z_0)$ in cui $f(z)$ è analitica, ovvero se z_0 è interno ad un insieme aperto E in cui $f(z)$ è analitica. (N.B. non è sufficiente che le condizioni di CR siano soddisfatte solo nel punto $z = z_0$.)

I punti in cui $f(z)$ è analitica si dicono *punti di analiticità* o punti **regolari** della funzione.

I punti in cui $f(z)$ non è analitica si dicono *punti singolari* o **singolarità** della funzione.

1.2.4 Esempi

Esempio 1

$$f(z) = \text{costante} = c = c_x + ic_y \quad c \in \mathbf{C}, \;\; c_x, c_y \in \mathbf{R}$$

$$u(x, y) = c_x \;, \quad v(x, y) = c_y$$

$$u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$$

La funzione $f(z)$ è continua in tutto il piano complesso $\mathbf{C}$, le funzioni u e v sono continue e derivabili e le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate $\forall z \in \mathbf{C}$. Quindi una funzione costante è analitica in tutto il piano complesso e la sua derivata è zero:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = 0$$

Esempio 2

$$f(z) = z^* = x - iy$$

$$u(x,y) = x \ , \quad v(x,y) = -y$$

$$u'_x = 1 \ , \quad v'_y = -1$$

La funzione $f(z) = z^*$ non è analitica. Si può infatti mostrare che il rapporto incrementale dipende dalla direzione dell'incremento h. Sia $h = \rho e^{i\theta}$ in rappresentazione polare. Allora il rapporto incrementale

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^* - z^*}{h} = \frac{h^*}{h} = \frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

dipende dall'angolo θ. La derivata di z^* non esiste in alcun punto di $\mathbf{C}$.

Esempio 3

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ , \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Le funzioni u e v sono continue e derivabili in $\mathbf{C} - \{0\}$. Le condizioni di CR

$$u'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \ , \quad v'_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = u'_x$$

$$u'_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \ , \quad v'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u'_y$$

sono soddisfatte. La funzione $f(z)$ è quindi analitica in $\mathbf{C} - \{0\}$. La sua derivata è

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y+ix)^2}{(y+ix)^2(y-ix)^2} = -\frac{1}{z^2} \ .$$

Vale pertanto la stessa regola di derivazione valida in campo reale

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \ .$$

Si dimostra, esattamente come nel campo reale, che vale

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

per n intero qualsiasi [1].

Le funzioni analitiche in tutto il piano complesso, come, per esempio, i polinomi, la funzione esponenziale e le funzioni seno e coseno, si chiamano funzioni **intere**.

Δ **Teorema 2:** se $f_1(z)$ e $f_2(z)$ sono due funzioni analitiche nel punto z, allora le funzioni

1) $f_1(z) + f_2(z)$

2) $f_1(z) \cdot f_2(z)$

3) $f_1(z)/f_2(z)$ se $f_2(z) \neq 0$

4) $f_1(f_2(z))$

sono analitiche in z e valgono le seguenti regole di derivazione

a) $[f_1(z) + f_2(z)]' = f_1'(z) + f_2'(z)$

b) $[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$

c) $[f_1(z)/f_2(z)]' = [f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)]/[f_2(z)]^2$

d) $\frac{d}{dz}[f_1(f_2(z))] = \frac{df_1}{df_2}\frac{df_2}{dz}$.

La dimostrazione segue banalmente dalla definizione di derivata.

Δ **Corollario:** le funzioni razionali di z sono analitiche in tutto il piano complesso esclusi gli zeri del denominatore.

Dimostrazione: Poiché le funzioni $f_1(z) = 1$ e $f_2(z) = z$ sono analitiche in $\mathbf{C}$, segue dalla proprietà 2) che tutte le potenze di z sono analitiche in $\mathbf{C}$, e quindi per la proprietà 1) i *polinomi* di z

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ...c_n z^n$$

[1] La stessa formula vale per ogni esponente, reale o complesso, ma non ne parliamo qui perché non abbiamo ancora definito z^α per α non intero.

sono funzioni ovunque analitiche. Per la proprietà 3) le funzioni *razionali* (rapporto di due polinomi P_n e Q_m)

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

sono funzioni analitiche in tutto il piano complesso esclusi i punti z_i tali che $Q_m(z_i) = 0$.

[q.e.d.]

Δ **Teorema 3** : se la parte reale (immaginaria) di una funzione *analitica* è costante, anche la sua parte immaginaria (reale) è necessariamente costante. Infatti da $u(x, y) = costante$ segue $u'_x = u'_y = 0$ e quindi dalle condizioni di CR segue che:

$$v'_y = v'_x = 0 \ \Rightarrow v(x, y) = K' = \text{costante} \ .$$

Pertanto

$$f(z) = \text{costante} \ .$$

Nel caso particolare in cui $v(x, y) = 0$, oppure $u(x, y) = 0$, ne segue banalmente che *una funzione analitica a valori reali (o immaginari puri) è necessariamente costante.*

[q.e.d.]

Δ **Teorema 4:** una funzione analitica di modulo costante è costante (cioè le sue parti reale e immaginaria sono separatamente costanti):

$$f(z) \text{ analitica e } |f(z)| = \text{cost.} \ \Rightarrow \quad f(z) = cost.$$

Dimostrazione

Per ipotesi

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = K \ .$$

Se $K = 0$ la dimostrazione è banale perché ciò implica $f(z) = 0$; assumiamo quindi nel seguito $K \neq 0$.

Derivando rispetto a x e a y si ottiene

$$\begin{aligned} 2u\partial_x u + 2v\partial_x v &= 0 \\ 2u\partial_y u + 2v\partial_y v &= 0 \ . \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per u, la seconda per v, sommando membro a membro e utilizzando le condizioni di CR, si ottiene

$$(u^2 + v^2)\partial_x u = 0$$

da cui segue che, poiché $u^2 + v^2$ è per ipotesi costante e diverso da zero, $\partial_x u = 0$. Analogamente, moltiplicando la prima equazione per $-v$ e la seconda per u, si ottiene

$$(u^2 + v^2)\partial_y u = 0.$$

Questa implica che anche $\partial_y u = 0$ e quindi $u(x, y) = costante$. Dalle CR segue immediatamente che se le derivate parziali di u sono nulle, anche le derivate parziali di v sono nulle, e pertanto $f(z) = costante$, come nel teorema precedente.

[q.e.d.]