Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.3 Integrazione in Campo Complesso

1.3.1 Curve (richiami)

Una curva γ nel piano complesso è una applicazione continua

$$\gamma \ : \ J \ \longrightarrow \ \mathbf{C} \qquad J = [a, b] \in \mathbf{R}$$

dove J è un intervallo reale limitato e chiuso:

$$\gamma \ : \ t \longrightarrow \ z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \leq t \leq b \ .$$

L'applicazione γ associa ad ogni valore del *parametro* t due funzioni reali $x(t)$ e $y(t)$. Spesso si considera la curva γ non solo come l'applicazione appena definita, ma come l'*immagine* (o *sostegno*) di tale applicazione, cioè come l'insieme di punti

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}/z = z(t), t \in [a, b]\} \ .$$

Una curva si dice **regolare** nell'intervallo $[a, b]$ se le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ hanno derivate prime continue e non entrambe nulle $\forall t \in [a, b]$.

Una curva si dice **regolare a tratti** nell'intervallo $[a, b]$ se l'intervallo può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli chiusi in cui la curva sia regolare.

Una curva si dice **chiusa** se $z(a) = z(b)$. Un caso particolare di curva chiusa è un punto, cioè una curva di equazione $z(t) = costante$ $\forall t \in [a, b]$.

Una curva si dice **semplice** se $z(t_1) \neq z(t_2)$ $\forall t_1 \neq t_2$, con $t_1, t_2 \in [a, b)$. (N.B. L'intervallo $[a, b)$ è semi-aperto per includere le curve chiuse nella definizione di curve semplici.) In pratica una curva semplice è una curva che non si interseca con se stessa.

Una curva **chiusa** e **semplice** si dice **curva di Jordan**.

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente teorema:

Δ **Teorema 5:** ogni curva di Jordan γ divide il piano in due regioni, una interna e una esterna a γ.

Ad ogni curva chiusa si assegna un verso di percorrenza. Convenzionalmente si considera come positivo il verso antiorario. Si definisce convenzionalmente *interna* ad una curva chiusa la zona lasciata a *sinistra* se si percorre la curva nel suo verso di percorrenza (ed *esterna* quella lasciata a destra).

Due curve di Jordan γ_1 e γ_2 si dicono **omotopicamente equivalenti** (O.E.) in una regione D se possono essere deformate con continuità l'una nell'altra *senza uscire da D.* N.B. È essenziale specificare la regione D in cui le due curve sono O.E.

Esempio: se $D = \mathbf{C}$ ogni curva di Jordan è O.E. a un punto, ma questo non è più vero se da $\mathbf{C}$ si sottraggono uno o più punti.

Una regione $D \subseteq \mathbf{C}$ si dice *connessa per archi* se, $\forall z_1, z_2 \in D$, esiste una curva γ *tutta interna a D*, che congiunge z_1 e z_2.

Una regione $S \subseteq \mathbf{C}$ si dice **semplicemente connessa** (s.c.) se ogni curva chiusa contenuta is S è O.E. a un punto. (Definizione alternativa: una regione S è s.c. se per ogni curva di Jordan γ contenuta in S la regione interna a γ è sottoinsieme di S). Intuitivamente una regione s.c. è una regione senza buchi.

Lemma di Gauss (o teorema di Green): siano $P(x,y), Q(x,y) \in C^1$ due funzioni reali e continue con derivate prime continue in un dominio E semplicemente connesso. Allora per ogni curva γ chiusa regolare a tratti contenuta in E

$$\oint_\gamma [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_S \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy \ , \tag{1.6}$$

dove S è la regione interna a γ.

1.3.2 Integrali in campo complesso

Integrale di una funzione di variabile reale a valori complessi

Consideriamo una funzione complessa di una variabile reale $w(t) = u(t) + iv(t)$:

$$w: \ [a,b] \longrightarrow \mathbf{C} \qquad [a,b] \subset \mathbf{R}$$

$$t \in [a,b] \ , \quad w(t) \in \mathbf{C} \ .$$

Definiamo l'integrale di $w(t)$ in t

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \ .$$

L'integrale esiste se la funzione $w(t)$ è continua o se ha un numero finito di discontinuità di prima specie.

L'integrale (alla Riemann) si può interpretare come limite di somme integrali:

$$\int_a^b w(t)dt = \lim_{n\to\infty} I_n$$

dove

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{l=1}^{n} w(\tau_l)(t_l - t_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{n} u(\tau_l)(t_l - t_{l-1}) + i\sum_{l=1}^{n} v(\tau_l)(t_l - t_{l-1}) \ . \end{aligned}$$

Si divide cioè l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ e si valuta la funzione $w(t)$ nei punti τ_l interni a ciascun sottointervallo $(t_{l-1} < \tau_l < t_l)$.

Dalla disuguaglianza triangolare $(|a_1+a_2+...+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+...+|a_n|)$:

$$|I_n| \leq \sum_{l=1}^{n} |w(\tau_l)|(t_l - t_{l-1})$$

segue, prendendo il limite per $n \to \infty$, la relazione

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|dt \ . \tag{1.7}$$

Integrale di una funzione complessa di variabile complessa

Sia $f(z)$ una funzione:

$$f:\ D \subseteq \mathbf{C} \ \longrightarrow\ \mathbf{C}$$

$$f:\ z = (x+iy) \in D \mapsto\ w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in \mathbf{C}\ .$$

Si consideri una curva γ regolare a tratti nell'intervallo $[a, b]$

$$\gamma:\ t\ \mapsto\ z(t) \qquad a \leq t \leq b$$

e siano $A = z(a)$ e $B = z(b)$ gli estremi di tale curva (Fig. 1.6)

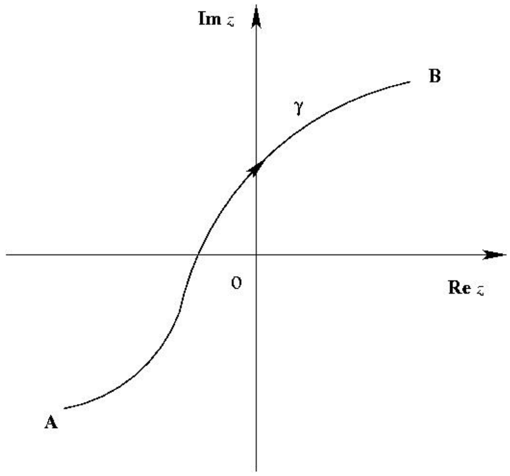

Figura 1.6: Curva aperta che unisce i punti A e B nel piano complesso

Se $f(z)$ è *continua* $\forall z \in \gamma$, si definisce l'*integrale curvilineo* di $f(z)$ tra A e B *lungo* γ

$$\int_{A(\gamma)}^{B} f(z)dz = \int_a^b f\left(z(t)\right) \frac{dz}{dt} dt \ . \tag{1.8}$$

N.B. Il secondo membro della (1.8) esiste perché γ è regolare a tratti (quindi dz/dt ha un numero finito di discontinuità).

Δ **Teorema 6:** l'integrale di una funzione continua $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ lungo una curva γ regolare a tratti è dato da

$$\int_{A(\gamma)}^{B} f(z)dz = \int_{A(\gamma)}^{B} [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i \int_{A(\gamma)}^{B} [v(x,y)dx + u(x,y)dy] \ . \tag{1.9}$$

Dimostrazione

Dalla definizione (1.8) segue che

$$\begin{aligned} \int_{A(\gamma)}^{B} f(z)dz &= \int_a^b f\left(z(t)\right) \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_a^b [u(x,y) + iv(x,y)] \left[\frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}\right] dt \\ &= \int_a^b \left[u(x,y)\frac{dx(t)}{dt} - v(x,y)\frac{dy(t)}{dt}\right] dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad i\int_a^b \left[v(x,y)\frac{dx(t)}{dt} + u(x,y)\frac{dy(t)}{dt}\right] dt \\
&= \quad \int_{A(\gamma)}^B [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i\int_{A(\gamma)}^B [v(x,y)dx + u(x,y)dy] \ .
\end{aligned}
$$

[$q.e.d$]

N.B. *In generale l'integrale dipende dalla curva* γ *e non solo dagli estremi di integrazione.*

Valgono per l'integrale (1.9) le proprietà degli integrali curvilinei. In particolare, se C è un punto sulla curva γ,

$$
\int_{A(\gamma)}^B f(z)dz = \int_{A(\gamma)}^C f(z)dz + \int_{C(\gamma)}^B f(z)dz
$$

e

$$
\int_{A(\gamma)}^B f(z)dz = -\int_{B(\gamma)}^A f(z)dz \ .
$$

Δ **Teorema 7: Disuguaglianza di Darboux** Sia M il valore massimo assunto dal modulo della funzione $f(z)$ lungo la curva γ:

$$
M = \max_{z\in\gamma} |f(z)|
$$

e l la lunghezza di γ tra A e B:

$$
l = \int_a^b \frac{ds}{dt}dt \equiv \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \ .
$$

Allora vale la *disuguaglianza di Darboux*:

$$
\left|\int_{A(\gamma)}^B f(z)dz\right| \leq Ml \ . \tag{1.10}
$$

Dimostrazione

Applicando la disuguaglianza (1.7) alla definizione (1.8) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{A(\gamma)}^B f(z)dz\right| &\leq \int_a^b |f(z(t))| \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \\
&\leq M\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \ .
\end{aligned}
$$

Ora,

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \equiv \frac{ds}{dt} \ ;$$

pertanto

$$\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = l$$

e quindi:

$$\left|\int_{A(\gamma)}^B f(z)dz\right| \leq Ml \ .$$

[q.e.d.]

1.3.3 Teorema di Cauchy

Δ **Teorema 8:** sia $f(z)$ una funzione *regolare* all'interno di un dominio aperto E *semplicemente connesso.* Il *teorema di Cauchy* asserisce che, per ogni curva γ chiusa, regolare a tratti, tutta contenuta in E,

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)dz = 0 \ . \qquad (1.11)}$$

L'integrale di una funzione analitica è nullo lungo una qualsiasi curva chiusa omotopicamente equivalente a un punto nel dominio di analiticità della funzione.

Dimostrazione

Dal teorema (1.9) si ha che

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i\oint_\gamma [v(x,y)dx + u(x,y)dy]$$

e, per il lemma di Gauss (1.6) (si ponga $P = u$, $Q = -v$ nel primo integrale e $Q = u$, $P = v$ nel secondo)

$$\oint_\gamma f(z)dz \ = \ \iint_S \left[-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \quad i \iint_S \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right] dxdy \ ,$$

dove $S \subset E$ è la regione interna a γ. Poiché $f(z)$ è analitica valgono le condizioni di Cauchy-Riemann $u'_x = v'_y$ e $u'_y = -v'_x$. Pertanto

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \ .$$

[q.e.d.]

In altre parole, $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ se γ è contenuta nel dominio E di analiticità di $f(z)$ ed è deformabile con continuità in un punto senza uscire da E.

In modo più conciso si può anche dire che la forma differenziale $f(z)dz = u(x,y)dx - v(x,y)dy + i[v(x,y)dx + u(x,y)dy]$ è *chiusa* in un aperto E: $d(f(z)dz) = 0$, se valgono le condizioni di CR; essa diventa *esatta* se il dominio è *semplicemente connesso.*

Corollario al teorema di Cauchy

Δ **Teorema 9:** siano γ_1 e γ_2 due curve semplici e regolari a tratti che congiungono i punti A e B e $\gamma = \gamma_1 \oplus (-\gamma_2)$ sia tutta contenuta nel dominio semplicemente connesso di analiticità di $f(z)$ (Fig. 1.7).

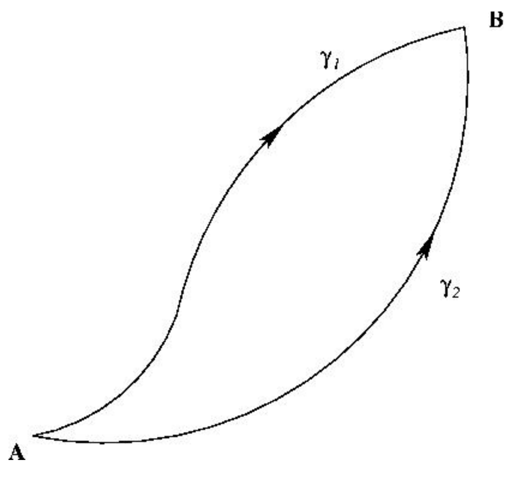

Figura 1.7: Curve aperte che uniscono i punti A e B in un dominio semplicemente connesso

Allora

$$\int_{A(\gamma_1)}^{B} f(z)dz = \int_{A(\gamma_2)}^{B} f(z)dz$$

ovvero: *l'integrale di una funzione analitica non dipende dal cammino di integrazione purché i cammini siano deformabili con continuità l'uno nell'altro senza incontrare singolarità.*

Dimostrazione

$$\int_{A(\gamma_1)}^{B} f(z)dz - \int_{A(\gamma_2)}^{B} f(z)dz = \left(\int_{A(\gamma_1)}^{B} + \int_{B(\gamma_2)}^{A}\right) f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

per il teorema di Cauchy (1.11).

[q.e.d.]

Esempio:

consideriamo l'integrale

$$I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z} \ .$$

La funzione $1/z$ è analitica in $\mathbf{C} - \{0\}$. Se la regione interna alla curva γ non contiene l'origine (Fig. 1.8) l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy.

Se invece l'origine è interna a γ, per esempio γ è una circonferenza C di raggio R centrata in O (Fig. 1.9) l'integrale è diverso da zero.

Calcoliamone il valore. L'equazione della curva C in coordinate polari è

$$z = z(\varphi) = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = R(-\sin\varphi + i\cos\varphi) = iz \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$I = \oint_{C} \frac{dz}{z} = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{z(\varphi)} z'(\varphi)d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i$$

N.B. L'integrale non dipende da R.

Ne segue che, se γ_1 e γ_2 sono due semicirconferenze centrate nell'origine (Fig. 1.10) gli integrali

$$I_1 = \int_{A(\gamma_1)}^{B} \frac{dz}{z}$$

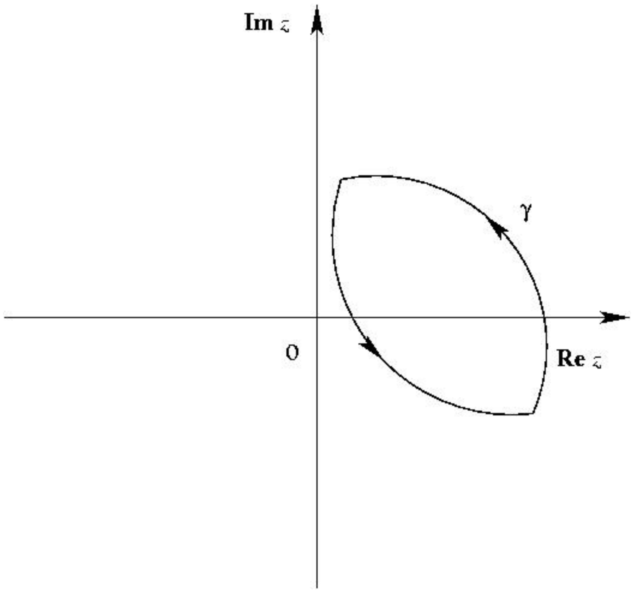

Figura 1.8: Curva chiusa che non contiene l'origine

e

$$I_2 = \int_{A(\gamma_2)}^{B} \frac{dz}{z}$$

non devono necessariamente essere uguali poiché non si può applicare il Corollario del teorema di Cauchy. Infatti essi valgono

$$I_1 = i\int_0^{\pi} d\varphi = i\pi \ , \qquad I_2 = i\int_0^{-\pi} d\varphi = -i\pi \ .$$

N.B. $I_1 \neq I_2$ perché deformando γ_1 in γ_2 si attraversa una singolarità ($z = 0$).

In modo analogo si può calcolare il seguente integrale

$$I = \oint_C \frac{dz}{z-a} \qquad a \in \mathbf{C} \tag{1.12}$$

dove la curva C è la circonferenza di raggio R centrata in a (Fig. 1.11).

Infatti, ponendo

$$z = z(\varphi) = a + Re^{i\varphi}$$

si ha

$$z'(\varphi) = iRe^{i\varphi} = i(z-a)$$

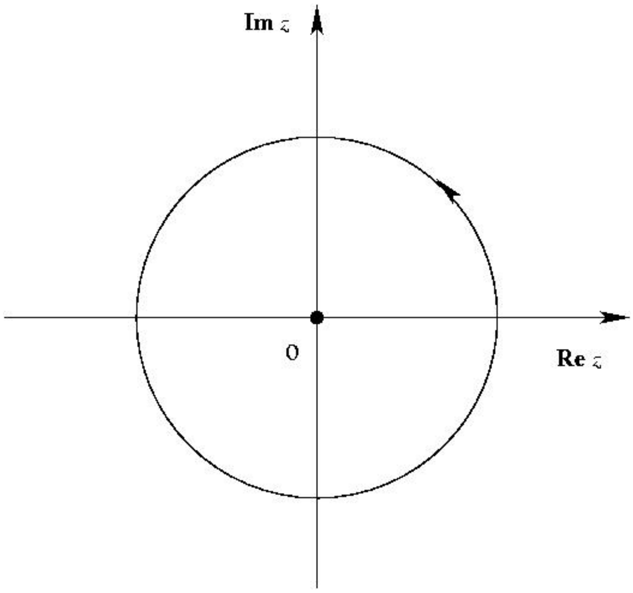

Figura 1.9: Curva chiusa che contiene l'origine

e quindi

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(\varphi) - a} z'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i \ .$$

Δ **Teorema 10: Teorema di Cauchy generalizzato** Sia $f(z)$ una funzione *analitica* in un dominio D *qualsiasi* e siano γ_1 e γ_2 due curve chiuse *omotopicamente equivalenti* in D. In queste ipotesi:

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz \ .$$

Dimostrazione

Per dimostrare il teorema consideriamo 3 casi:
a) D semplicemente connesso
b) D generico, γ_1 e γ_2 non si intersechino
c) D generico, γ_1 e γ_2 si intersechino

a) In questo caso la dimostrazione è banale perché, per il teorema di Cauchy,

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0 \ .$$

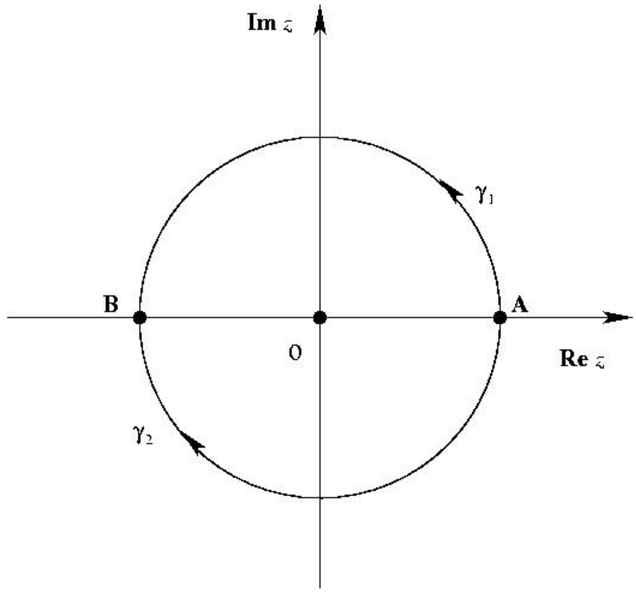

Figura 1.10: Semicirconferenze centrate nell'origine

b)

Effettuiamo due tagli AB e CD (Fig. 1.12). Poiché γ_1 e γ_2 sono O.E. in D, la regione compresa tra le due curve appartiene tutta a D. Si ha allora (per il corollario al teorema di Cauchy):

$$\int_{A(E)}^{D} = \int_{A}^{B} + \int_{B(F)}^{C} + \int_{C}^{D}$$
$$\int_{D(G)}^{A} = \int_{D}^{C} + \int_{C(H)}^{B} + \int_{B}^{A} \quad .$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

poiché

$$\int_{A}^{B} = -\int_{B}^{A} \quad e \quad \int_{D}^{C} = -\int_{C}^{D} \quad .$$

c) In questo caso si ha (vedi Fig. 1.13):

$$\int_{A(E)}^{B} = \int_{A(F)}^{B}$$

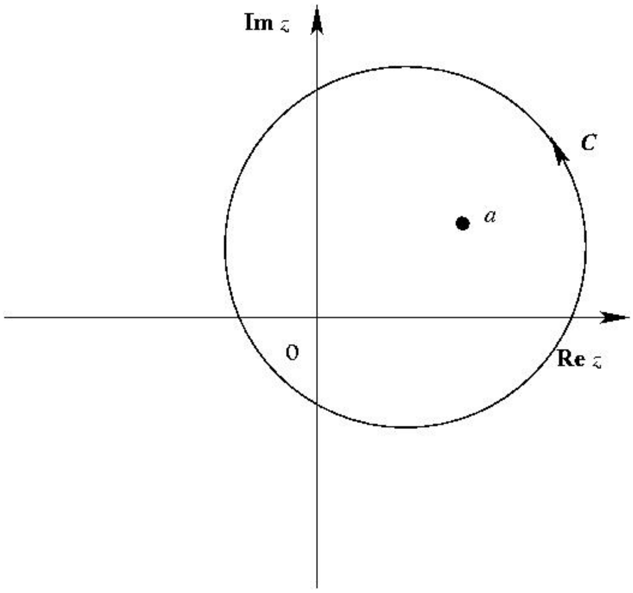

Figura 1.11: Circonferenza centrata nel punto a

$$\int_{B(G)}^{A} = \int_{B(H)}^{A} \quad .$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz \ .$$

N.B. Non è detto che la regione ($AGBFA$) appartenga a D (γ_1 e γ_2 sono O.E. in D).

[q.e.d.]

- **Corollario:** l'integrale (1.12) vale $2\pi i$ per ogni curva chiusa γ che circondi il punto a:

$$I = \oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i, \qquad a \in \mathbf{C} \tag{1.13}$$

Inoltre, sempre per ogni curva chiusa γ che circondi il punto a,

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i \delta_{n,1} \ , \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad (1.14)}$$

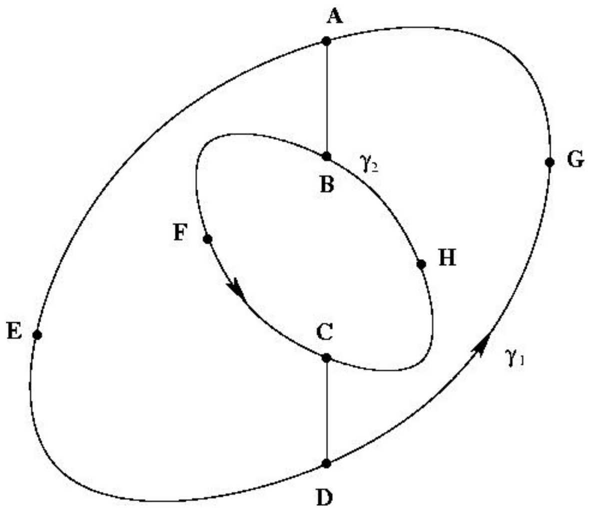

Figura 1.12: Curve γ_1 e γ_2 che non si intersecano in un dominio D

dove δ_{nl} è la delta di Krönecker definita da

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = l \\ 0 & \text{se } n \neq l \end{cases} \qquad n, l \in \mathbf{Z} \; .$$

La (1.14) come si dimostra osservando che il cammino γ può essere deformato in una circonferenza C di raggio R e centro a e ponendo

$$z - a \equiv Re^{i\theta} \;\Rightarrow\; dz = iRe^{i\theta} d\theta \; ; \tag{1.15}$$

ne segue immediatamente, per $n \neq 1$:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{i}{R^{n-1}} \left. \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

mentre per $n = 1$ vale la eq.(1.13)

1.3.4 Rappresentazione integrale di Cauchy

Δ **Teorema 11:** sia $f(z)$ una funzione *analitica* in un dominio E aperto *semplicemente connesso* e γ una curva di Jordan contenuta in E. Sia S la regione interna a γ. Sotto queste ipotesi vale la **rappresentazione integrale di Cauchy per la funzione** $f(z)$:

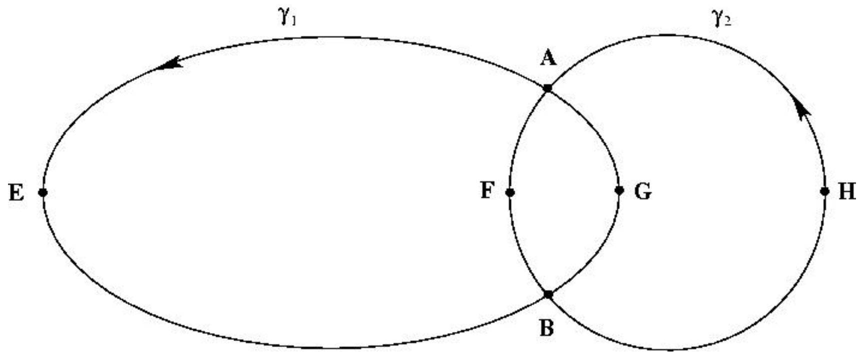

Figura 1.13: Curve γ_1 e γ_2 che si intersecano in un dominio D

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}dz' \qquad \forall z \in S\ , \gamma = \partial S\ . \qquad (1.16)}$$

N.B. Perché valga la (1.16) è essenziale che z appartenga a S, cioè sia *interna* a γ. Infatti,

1) se $z \in \gamma$ la funzione integranda ha una singolarità sul cammino di integrazione e quindi l'integrale non esiste;

2) se z è esterno a γ, la funzione integranda $f(z')/(z'-z)$ è analitica in S e l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy (1.11) ;

3) se z è interno a γ, la funzione integranda $f(z')/(z'-z)$ in generale *non* è analitica in S, ma può avere una singolarità in $z' = z$.

Dimostrazione

Consideriamo il seguente integrale

$$I(z) = \oint_\gamma \frac{f(z') - f(z)}{z'-z}dz'\ .$$

Per il teorema generalizzato di Cauchy γ può essere deformata in una circonferenza C centrata in z di raggio arbitrario r, interna a S:

$$I(z) = \oint_C \frac{f(z') - f(z)}{z'-z}dz'\ .$$

Per la disuguaglianza di Darboux (1.10),

$$|I(z)| \leq \max_{z' \in C} \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| 2\pi r \ = 2\pi \max_{z' \in C} |f(z') - f(z)| \, ,$$

dove si è usato $|z' - z| = r$, $\forall z' \in C$. Poiché la funzione $f(z)$ è continua in S, il secondo membro può essere reso arbitrariamente piccolo. Infatti, dalla definizione di continuità di una funzione, $\lim_{z' \to z} f(z') = f(z)$, segue

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta \ / \ \ |f(z') - f(z)| < \epsilon \quad \forall z' \in I_\delta(z) \ .$$

Basta allora scegliere $r < \delta$ per dimostrare che $\forall \epsilon > 0$ si ha

$$|I(z)| \leq 2\pi\epsilon.$$

Ma l'unico numero non negativo minore o uguale a un numero positivo arbitrario è lo zero, quindi

$$I(z) = 0,$$

ossia, utilizzando l'integrale (1.13),

$$\oint_\gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z' - z} dz' = f(z) \ 2\pi i \ ,$$

da cui la (1.16).

[q.e.d.]

La rappresentazione integrale di Cauchy permette quindi di conoscere i valori di una funzione analitica in tutta la regione interna ad una curva chiusa γ una volta noti i suoi valori nei punti appartenenti alla curva γ.

Rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate

Δ **Teorema 12:** sia $f(z)$ una funzione *analitica* in un dominio E aperto *semplicemente connesso* e γ una curva di Jordan contenuta in E. Sia S la regione interna a γ. In queste ipotesi vale la rappresentazione integrale di Cauchy (1.16); derivando ripetutamente sotto il segno di integrale e utilizzando l'identità:

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z' - z} = \frac{n!}{(z' - z)^{n+1}},$$

si ottiene la *rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate della funzione* $f(z)$:

$$\boxed{\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}} dz' \qquad \forall z \in S \ . \qquad (1.17)}$$

Un'importantissima conseguenza della (1.17) è che **una funzione analitica è infinitamente derivabile**, ovviamente con derivate continue.