Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.4 Serie in campo complesso

1.4.1 Serie di potenze

Una *serie di potenze* è una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ .$$

Per le serie di potenze in campo complesso valgono teoremi analoghi a quelli validi in campo reale:

- La regione di convergenza di una serie di potenze in $\mathbf{C}$ è un *cerchio* (centrato in z_0), il cui raggio si dice *raggio di convergenza* della serie. All'interno di tale cerchio la serie è uniformemente e assolutamente convergente. All'esterno non converge mai. Sulla circonferenza può convergere o no, a seconda dei casi, e c'è sempre almeno un punto singolare di $f(z)$.
- **Teorema di Weierstrass**: una serie di potenze è, per ogni z interno al cerchio di convergenza, derivabile termine a termine n volte (con n arbitrario):
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \Rightarrow \frac{d^n f(z)}{dz^n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^n (z - z_0)^k}{dz^n} \ ,$$
quindi essa è analitica all'interno del cerchio di convergenza.
- **Teorema di Cauchy-Hadamard**: il raggio di convergenza ρ della serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ coincide con l'inverso del massimo fra i punti di accumulazione della successione $\{|a_k|^{1/k}\}$, ovvero, se il limite esiste, con:
$$\rho = \left\{ \lim_{k \to \infty} |a_k|^{1/k} \right\}^{-1} \ . \tag{1.18}$$
Si può mostrare che la (1.18) è equivalente alla più comoda:
$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \ , \tag{1.19}$$
sempre che il limite, finito o infinito, esista.

1.4.2 Serie di Taylor

Lo sviluppo in serie di Taylor è uno sviluppo in serie di potenze di una funzione *nell'intorno di un suo punto di analiticità.*

Sia $f(z)$ una funzione *analitica* in un dominio D e sia C un intorno circolare, tutto contenuto in D, di un punto regolare z_0 (si veda Fig. 1.14).

È facile dimostrare che la funzione $f(z)$, infinitamente derivabile [2] , può essere rappresentata, per ogni $z \in C$, dalla **serie di Taylor**:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (1.20)}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(z)}{dz^k}\right]_{z=z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \ , \qquad (1.21) \end{aligned}}$$

dove per l'ultimo passaggio si è usata la rappresentazione di Cauchy (1.17) delle derivate di una funzione analitica.

Dimostrazione: partendo dalla rappresentazione integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z')}{z'-z}\, dz' \ ,$$

usando (vedi Fig. 1.14)

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z'-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n \qquad (1.22)$$

e integrando termine a termine la serie (uniformemente convergente, poiché $|z - z_0| <$

[2] Nel campo reale l'infinita derivabilità non è sufficiente per garantire che una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor; nel campo complesso basta invece la analiticità.

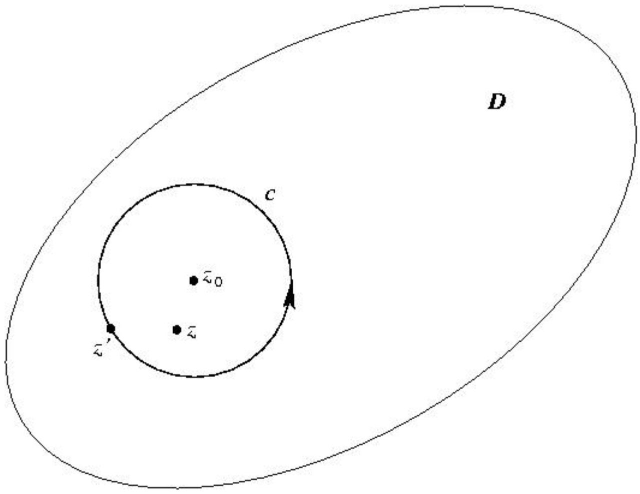

Figura 1.14: Intorno circolare del punto z_0 nel dominio D

$|z' - z_0|$, quindi $\left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1)$) si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}\, dz' \ , \tag{1.23}$$

che coincide con la (1.20).

[q.e.d]

Poiché il cerchio C deve essere tutto interno al dominio di analiticità di $f(z)$, il suo raggio r può essere fatto coincidere con la distanza di z_0 dal più vicino punto singolare di $f(z)$; il cerchio C è certamente contenuto nel cerchio di convergenza della serie di Taylor (1.20) e di solito i due cerchi coincidono; se la serie di Taylor converge anche al di fuori dell'originale dominio di definizione della funzione $f(z)$, la nuova funzione così definita viene detta **continuazione analitica** della funzione di partenza.

È molto importante sottolineare che esiste una completa equivalenza tra analiticità di una funzione in un punto e sua sviluppabilità in serie di Taylor in un suo intorno:

$$f(z) \text{ analitica in } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists I(z_0) \ / \ \forall z \in I(z_0) \ , \ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ .$$

- **Esempio:** la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

converge uniformemente a

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

nella regione $|z| < 1$. Il punto $z = 1$ è infatti un punto singolare di $f(z)$.

1.4.3 Zeri

Un punto **regolare** $z = z_0$ è uno **zero di ordine** n della funzione $f(z)$ se:

1) La funzione si annulla in z_0:

$$f(z_0) = 0$$

2) Le prime $n-1$ derivate si annullano in z_0:

$$\left. \frac{d^k f(z)}{dz^k} \right|_{z=z_0} = 0 \ , \qquad k = 1, 2, \ ... \ , n-1$$

3) La derivata n-esima è diversa da zero in z_0:

$$\left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} \neq 0 \ .$$

- **Esempio:** la funzione

$$f(z) = z^2$$

ha uno zero di ordine 2 in $z = 0$. Infatti:

$$f(0) = 0 \ , \qquad f'(0) = 0 \ , \qquad f''(0) = 2 \neq 0 \ .$$

Uno zero è un punto regolare di $f(z)$, che sarà quindi rappresentabile tramite uno sviluppo in serie di Taylor intorno a quel punto:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ . \tag{1.24}$$

Se z_0 è uno zero di ordine n di $f(z)$, si ha, dalla (1.21), che

$$a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0$$

e

$$a_n \neq 0 \ .$$

Quindi la (1.24) diventa

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ .$$

Cambiando l'indice nella sommatoria, $k \to k' = k - n$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k'=0}^{\infty} a_{k'+n} (z - z_0)^{k'+n} \\ &= (z - z_0)^n \sum_{k'=0}^{\infty} a_{k'+n} (z - z_0)^{k'} \ . \end{aligned}$$

La funzione

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$$

è una funzione analitica in z_0, in quanto sviluppabile in serie di Taylor intorno al punto $z = z_0$. Inoltre $g(z)$ è non nulla in z_0:

$$g(z_0) = a_n \neq 0 \ .$$

Pertanto *una funzione $f(z)$ che abbia in z_0 uno zero di ordine n può sempre essere scritta nella forma*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \ , \tag{1.25}$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in $z = z_0$.

1.4.4 Serie di Laurent

Fra le varie possibili singolarità di una funzione analitica giocano un ruolo particolarmente importante le *singolarità isolate*: un punto singolare z_0 si dice **singolarità isolata** della funzione $f(z)$ se esiste un suo intorno privato di z_0 in cui $f(z)$ è analitica.

Nell'intorno di una singolarità isolata è necessario considerare anche serie a potenze negative; per esempio, per ogni $z \neq 0$ vale:

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}, \tag{1.26}$$

come si vede subito ponendo $w = 1/z$; evidentemente l'origine è una singolarità isolata per la funzione $e^{1/z}$.

Lo sviluppo in serie di Laurent è uno sviluppo in serie di potenze positive e negative di una funzione $f(z)$ in un intorno bucato $\overline{I}(z_0)$ di un suo punto singolare isolato z_0 (si veda Fig. 1.15); si può infatti dimostrare [3] che esiste un $\overline{I}(z_0)$ tale che, per ogni $z \in \overline{I}(z_0)$, si può scrivere:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k. \tag{1.27}}$$

Ricordando la (1.14) è immediato calcolare i coefficienti d_k; basta dividere la (1.27) per $(z - z_0)^{n+1}$ e integrare su una curva chiusa γ interna a $\overline{I}(z_0)$ e che circondi z_0 per ottenere:

$$\boxed{d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \ , \tag{1.28}}$$

N.B. Anche per $k > 0$, il coefficiente d_k in generale *non* è la derivata $d^k f(z)/dz^k$ perché $f(z)$ non è analitica nel punto z_0.

[3] La dimostrazione è analoga a quella dello sviluppo in serie di Taylor, con la differenza che la curva γ da scegliere per la rappresentazione integrale di Cauchy di $f(z)$ è composta dalle due circonferenze (percorse in verso opposto) che delimitano una corona circolare centrata in z_0 e contenuta in $\overline{I}(z_0)$.

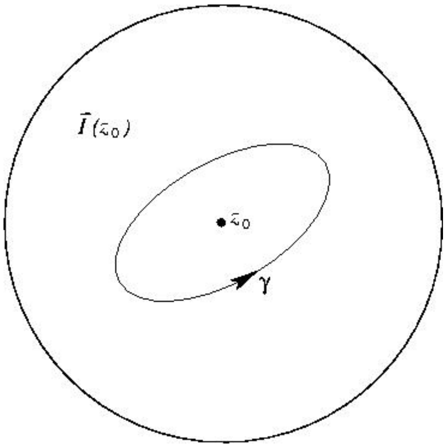

Figura 1.15: Curva γ in un intorno bucato del punto z_0

Notare inoltre che lo sviluppo in serie di Taylor (1.20) si ottiene come caso particolare dello sviluppo in serie di Laurent (1.27) se invece z_0 è un punto regolare di $f(z)$. Infatti, se z_0 è regolare, per il teorema di Cauchy $d_k = 0$ per tutti i $k \leq -1$ e la (1.27) si riduce alla (1.20) ($\triangle$).

1.4.5 Singolarità isolate: poli e singolarità essenziali

- **Poli**

  Il punto singolare isolato z_0 si definisce **polo** della funzione $f(z)$ se lo sviluppo in serie di Laurent intorno a z_0 possiede un numero *finito* n di potenze negative; un polo si dice di *ordine* n se:

  1) I coefficienti $..., d_{-n-2}, d_{-n-1}$ si annullano:

  $$d_{-k} = 0 \ , \qquad \forall k > n$$

  2) Il coefficiente d_{-n} è diverso da zero:

  $$d_{-n} \neq 0 \ .$$

  Un polo di ordine 1 si dice *polo semplice*, di ordine 2 *polo doppio* e così via.

Nell'intorno di un polo di ordine n lo sviluppo (1.27) si riduce quindi a

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \tag{1.29}$$

e, mediante il cambiamento di indice $k \to k' = k + n$, a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k'=0}^{\infty} d_{k'-n} (z - z_0)^{k'-n} \\ &= (z - z_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_{k-n} (z - z_0)^k \ . \end{aligned}$$

Definiamo ora

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k-n} (z - z_0)^k \ .$$

La funzione $g(z)$ è data da uno sviluppo in serie di Taylor intorno a z_0: essa è pertanto *analitica* in z_0. Inoltre $g(z)$ è diversa da zero in z_0:

$$g(z_0) = d_{-n} \neq 0 \ .$$

Pertanto *se z_0 è un polo di ordine n della funzione $f(z)$, questa può essere espressa come*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \ , \tag{1.30}$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in $z = z_0$.

Dalle (1.30) e (1.25) segue che il punto $z = z_0$ è uno *zero* di ordine n per la funzione $1/f(z)$:

$$\frac{1}{f(z)} = h(z)(z - z_0)^n \ ,$$

dove $h(z) = 1/g(z)$ è di nuovo una funzione analitica e non nulla in z_0.

- **Singolarità essenziali**

  Il punto $z = z_0$ si definisce invece **singolarità essenziale isolata** della funzione $f(z)$ se è un punto singolare *isolato* e lo sviluppo in serie di Laurent intorno a z_0 possiede un numero *infinito* di potenze negative.

  Come si vede dallo sviluppo in serie di Laurent (1.26), un esempio di singolarità essenziale isolata è l'origine per la funzione $e^{1/z}$, e analogamente per le funzioni $\sin(1/z)$, $\cos(1/z)$ e simili.

Dalle definizioni di polo e singolarità essenziale isolata segue che un polo di ordine n può essere rimosso moltiplicando la $f(z)$ per $(z-z_0)^n$, mentre questo non è possibile per una singolarità essenziale.

Un'altra importante differenza fra poli e singolarità essenziali è la seguente: è evidente dalla (1.30) che $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ se il punto z_0 è un polo di $f(z)$; se invece z_0 è una singolarità essenziale il limite non esiste, perché nell'intorno di z_0 la funzione oscilla forsennatamente: per farsene un'idea, basta pensare all'andamento nell'intorno dell'origine della funzione $\sin \frac{1}{z}$ con z reale o immaginario puro.

Più in generale, si può dimostrare il **Teorema di Weierstrass per le singolarità essenziali isolate**: se $z = z_0$ è una singolarità essenziale isolata della funzione $f(z)$, coefficienti negativi, allora per ogni ϵ e δ piccoli a piacere e per ogni numero complesso $c \in \mathbf{C}$, esiste un valore di $z \in \overline{I}_\delta(z_0)$ tale che

$$|f(z) - c| < \epsilon \ .$$

In altre parole, il teorema di Weierstrass afferma che *in qualunque intorno di una singolarità essenziale isolata, la funzione $f(z)$ approssima indefinitamente qualunque valore prefissato c*, senza necessariamente raggiungerlo.