Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.5 Residui

Sia $f(z)$ una funzione *analitica* in un dominio D, z_0 un *punto singolare isolato*, γ una curva di Jordan, tutta contenuta in D e contenente al suo interno il punto z_0, ma non altre singolarità (questo è possibile, perché z_0 è isolato). Si definisce **residuo** della funzione $f(z)$ nel punto $z = z_0$ la quantità

$$\boxed{\{\text{Res} f(z)\}_{z=z_0} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz \ . \qquad (1.31)}$$

Dalla eq.(1.28) che definisce i coefficienti di Laurent, calcolata per $k = -1$, si vede subito che vale:

$$\boxed{\{\text{Res} f(z)\}_{z=z_0} = d_{-1} \ . \qquad (1.32)}$$

Quindi *il residuo di una funzione in un punto singolare isolato* z_0 *è il coefficiente della potenza* (-1) *– esima del suo sviluppo in serie di Laurent intorno a* z_0.

- **Esempio**

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \{\text{Res} f(z)\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z} = 1 \ ,$$

  dove γ è una curva che circonda l'origine.

Ovviamente, se z_0 è un punto *regolare* di $f(z)$ e cerchiamo ugualmente di calcolare il residuo, troviamo zero per il teorema di Cauchy. Non vale però il viceversa: una funzione può avere residuo nullo in un punto ed ivi essere singolare, se $d_{-1} = 0$ ma esiste qualche $d_{-n} \neq 0$ per $n > 1$; un esempio caratteristico è $f(z) = 1/z^2$ che nell'origine ha un polo doppio, con residuo nullo.

1.5.1 Teorema dei residui

Δ **Teorema 13:** sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio D, eccetto che in un *numero finito di singolarità isolate*. Sia γ una curva di Jordan contenuta in D, non passante per alcun punto singolare di $f(z)$. In queste ipotesi vale il *teorema dei residui*:

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=z_k} \ , \qquad (1.33)}$$

dove $z_1, z_2, ..., z_n$ sono le singolarità di $f(z)$ *interne a* γ.

Dimostrazione

Il teorema dei residui si dimostra facilmente per induzione completa. Infatti la (1.33) è vera per n=1 per la definizione di residuo. Se le singolarità sono $n+1$ isoliamo la $(n+1)$-esima come in Fig. 1.16.

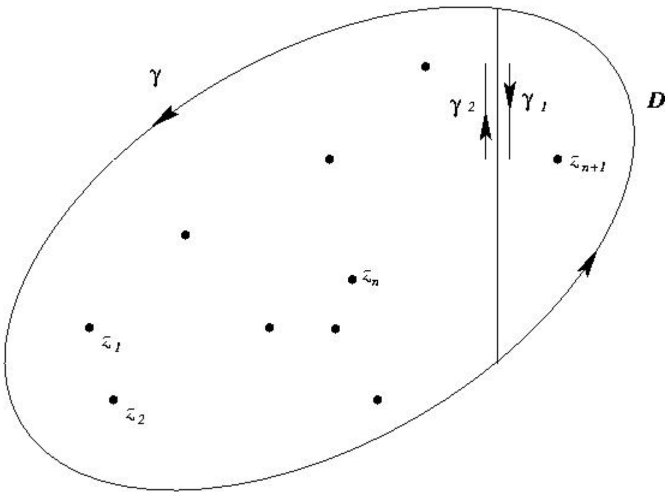

Figura 1.16: Curva γ che contiene $n+1$ singolarità della funzione

Usando la tesi (1.33) per n singolarità si ottiene

$$\oint_\gamma f(z)dz \ = \ \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i \left\{\mathrm{Res} f(z)\right\}_{z=z_{n+1}} + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left\{\mathrm{Res} f(z)\right\}_{z=z_k} \\
&= 2\pi i \sum_{k=1}^{n+1} \left\{\mathrm{Res} f(z)\right\}_{z=z_k} \ . \qquad (1.34)
\end{aligned}
$$

Quindi la (1.33) è vera per $n+1$ singolarità.

È utile osservare che il numero di singolarità interne alla curva γ deve essere finito; se fosse infinito, all'interno di γ ci sarebbe un punto di accumulazione di singolarità e quindi una singolarità **non** isolata, per cui non ha senso definire il residuo.

1.5.2 Calcolo dei residui

Vediamo ora come si calcola esplicitamente il residuo di una funzione in un suo punto singolare isolato.

Se z_0 è una **singolarità essenziale** non c'è altro modo[4] che usare le equazioni (1.31) e (1.32).

Se invece $z = z_0$ è un **polo di ordine** n di $f(z)$ c'è un modo alternativo che richiede solo di calcolare derivate. Infatti in un intorno di z_0 si può scrivere:

$$
f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}
$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in z_0. Il residuo è, dalla (1.31),

$$
\left\{\mathrm{Res} f(z)\right\}_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} dz \ .
$$

Ora, dalla rappresentazione di Cauchy per le derivate di $f(z)$ (1.17)

$$
\left\{\frac{d^k g(z)}{dz^k}\right\}_{z=z_0} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \ ,
$$

[4]locale, perché vedremo più avanti che il discorso può essere diverso se si conosce il comportamento globale della funzione in tutto il piano complesso, punto all'infinito compreso.

si ottiene, ponendo $k = n - 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1} g(z)}{dz^{n-1}} \right\}_{z=z_0}$$

e quindi, poiché

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z) \ ,$$

$$\boxed{\{\text{Res} f(z)\}_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] \right\} \ . \qquad (1.35)}$$

Nel caso particolare in cui z_0 sia un **polo semplice** ($n = 1$), si ha

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right] .$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Laurent nel caso di un polo semplice (1.29)

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \\ &= \frac{d_{-1}}{z - z_0} + d_0 + d_1 (z - z_0) + \ldots \ , \end{aligned}$$

si ottiene

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \left\{ d_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^{k+1} \right\}$$

e quindi

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=z_0} = d_{-1} \ , \qquad (1.36)$$

a conferma di quanto visto in generale in eq.(1.32).