Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.6 Calcolo di integrali definiti mediante il teorema dei residui

Il teorema dei residui (1.33) è di grande utilità perché permette non solo di calcolare integrali naturalmente definiti su curve chiuse nel piano complesso, ma anche ampie classi di integrali definiti sull'asse reale, trasformandoli in integrali in campo complesso.

1.6.1 Integrali trigonometrici

Una prima classe da considerare è la seguente [5]:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta \ . \tag{1.37}$$

Per calcolare integrali di questo tipo

a) si usano le formule di Eulero per esprimere $\sin\theta$ e $\cos\theta$ in funzione di $e^{i\theta}$ (senza usare la complessa coniugazione!) e si effettua la sostituzione

$$z = e^{i\theta} \ \Rightarrow \ d\theta = -i\frac{dz}{z} \ ; \tag{1.38}$$

b) ci si riconduce ad un integrale nel piano z lungo una circonferenza di raggio unitario;

c) si calcola l'integrale con il teorema dei residui.

1.6.2 Esempi

Esempio 1

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\cos\theta} \ .$$

[5] Naturalmente l'intervallo d'integrazione potrebbe essere anche $(-\pi, \pi)$ o qualsiasi altro intervallo di ampiezza 2π.

Con la sostituzione (1.38) si ha:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \; .$$

Sostituendo in I:

$$\begin{aligned} I &= -i\oint_C \frac{dz}{z}\frac{1}{5+3/2\,(z+1/z)} \\ &= -\frac{2i}{3}\oint_C \frac{dz}{z^2+\frac{10}{3}z+1} \end{aligned}$$

dove C è una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Studiamo ora le singolarità della funzione integranda:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+\frac{10}{3}z+1} \; .$$

$$\begin{aligned} z^2+\frac{10}{3}z+1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_1 = -\frac{1}{3}\; , \; z_2 = -3 \\ &\Rightarrow \quad z^2+\frac{10}{3}z+1 = \left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3) \; . \end{aligned}$$

La funzione $f(z)$ ha due poli semplici in $z=-1/3$ (*interno* alla curva C e $z=-3$ (*esterno* alla curva C). Pertanto

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2i}{3}2\pi i\left\{\text{Res}\frac{1}{z^2+\frac{10}{3}z+1}\right\}_{z=-1/3} \\ &= \frac{4\pi}{3}\lim_{z\to-1/3}\frac{z+1/3}{\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)} \\ &= \frac{\pi}{2} \; . \end{aligned}$$

Esempio 2

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} \; , \qquad p\in\mathbf{C}$$

Poniamo

$$z = e^{i\theta} \;\Rightarrow\; d\theta = -i\frac{dz}{z}$$

Allora (vedi esempio precedente)

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \ .$$

Sostituendo in I:

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_C \frac{dz}{z} \frac{1}{1 - p\,(z + 1/z) + p^2} \\ &= 1 \oint_C \frac{dz}{pz^2 - (1+p^2)z + p} \end{aligned}$$

dove C è una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. La funzione integranda

$$f(z) = \frac{1}{pz^2 - (1+p^2)z + p}$$

ha due poli semplici:

$$\begin{aligned} pz^2 - (1+p^2)z + p = 0 \quad &\longrightarrow \quad z_1 = 1/p \ , \ z_2 = p \\ &\longrightarrow \quad pz^2 - (1+p^2)z + p = p\,(z - 1/p)\,(z - p) \end{aligned}$$

e quindi

$$I = \frac{i}{p} \oint_C \frac{dz}{(z - 1/p)\,(z - p)} \ .$$

Dove sono situati i poli di $f(z)$?

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad |p| < 1 \quad \longrightarrow \quad z = p \text{ interno a } C \ , \ z = 1/p \text{ esterno a } C \\ &\text{se} \quad |p| > 1 \quad \longrightarrow \quad z = p \text{ esterno a } C \ , \ z = 1/p \text{ interno a } C \ . \end{aligned}$$

Ne segue che, se $|p| < 1$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{p} 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{1}{(z-p)(z-1/p)} \right\}_{z=p} \\ &= -\frac{2\pi}{p} \lim_{z \to p} \left\{ \frac{z - p}{(z-p)(z-1/p)} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{1 - p^2} \end{aligned}$$

e, se $|p| > 1$,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{i}{p} 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{1}{(z-p)(z-1/p)} \right\}_{z=1/p} \\
&= -\frac{2\pi}{p} \lim_{z\to 1/p} \left\{ \frac{z-1/p}{(z-p)(z-1/p)} \right\} \\
&= \frac{2\pi}{p^2-1} \ .
\end{aligned}
$$

Se $|p| = 1$, l'integrando ha una singolarità sul cammino di integrazione e I non è definito.

Lasciamo allo studente attento di accorgersi che l'esempio 1 è un caso particolare dell'esempio 2.

1.6.3 Lemma di Jordan

Molto spesso possono essere calcolati con il metodo dei residui anche integrali estesi a tutto l'asse reale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \ . \tag{1.39}$$

In tal caso la strategia da seguire è di considerare accanto all'integrale I l'integrale:

$$J(R) = \int_{-R}^{R} g(x)dx + \int_{\gamma_R} g(z)dz, \tag{1.40}$$

dove γ_R è una semicirconferenza, centrata nell'origine e di raggio R, situata nel semipiano Im $z > 0$ o Im $z < 0$ a seconda dei casi (vedi Fig. 1.17).

L'integrale $J(R)$ è esteso a una curva chiusa e si può quindi calcolare con il metodo dei residui; dalla conoscenza di $J(R)$ è poi immediato calcolare l'integrale I se la funzione $g(z)$ è tale che:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0 \ . \tag{1.41}$$

Ciò succede nei casi seguenti[6]:

[6]In realtà dalla (1.41) segue che

$$\lim_{R\to\infty} J(R) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(x)dx, \tag{1.42}$$

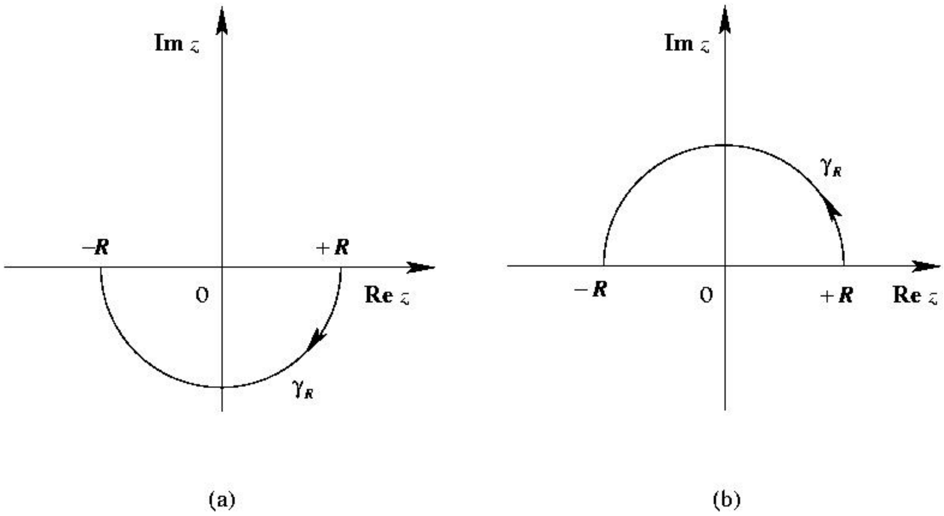

Figura 1.17: Semicirconferenze di raggio r nel semipiano inferiore (a) e superiore (b)

1) La funzione $g(z)$ tende a zero più velocemente di $1/|z|$ per $z \to \infty$:

$$g(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad , \qquad z \to \infty \ . \tag{1.44}$$

In questo caso la semicirconferenza γ_R può giacere sia nel semipiano Im $z > 0$ sia nel semipiano Im $z < 0$.

Dimostrazione.

Passando a coordinate polari (e supponendo di considerare la semicirconferenza nel semipiano superiore)

$$\int_{\gamma_R} g(z)dz = iR\int_0^{\pi} g\left(Re^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta$$

---

che coincide con

$$I = \lim_{R_1\to\infty, R_2\to\infty} \int_{-R_1}^{R_2} g(x)dx, \tag{1.43}$$

solo nel caso che quest'ultimo integrale esista; se ciò non succede, ma esiste il limite (1.42), allora questo si chiama *valore principale* dell'integrale (1.39).

e applicando la disuguaglianza (1.7) si ottiene

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)dz\right| \leq R\int_0^\pi \left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

da cui, sfruttando l'ipotesi

$$\lim_{R\to\infty} R\left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right| = 0 \ ,$$

si ottiene infine la (1.41). (Notare che non si è fatto altro che ridimostrare la disuguaglianza di Darboux (1.10) in questo caso particolare.)

[q.e.d.]

2) La funzione integranda $g(z)$ è della forma $e^{i\alpha z}f(z)$, con $\alpha > 0$, dove $f(z)$ è una funzione che tende uniformemente (rispetto all'argomento di z) a zero quando $|z|$ tende a infinito e l'argomento di z è compreso fra 0 e π (cioè nel semipiano Im $z \geq 0$), ovvero [7]

$$f(z) = o(1), \qquad z\to\infty, \qquad 0 \leq \arg z \leq \pi \ . \tag{1.45}$$

In tal caso, se si sceglie per γ_R una semicirconferenza nel semipiano **superiore** (Im $z > 0$), centrata nell'origine e di raggio R, è facile dimostrare che vale:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz = 0 \ . \tag{1.46}$$

3) Con la sostituzione $z \to -z$, si vede subito che la (1.46) vale anche per $\alpha < 0$, purché valga la (1.45) con $\pi \leq \arg z \leq 2\pi$ e la semicirconferenza γ_R stia nel semipiano **inferiore**.

4) Con la sostituzione $z \to -iz$ si vede subito che vale anche

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{\alpha z}f(z)\ dz = 0 \ , \qquad \alpha > 0 \tag{1.47}$$

purché valga la (1.45) con $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ e la semicirconferenza γ_R, centrata in qualsiasi punto x_0 dell'asse reale, stia a **sinistra** della parallela dell'asse immaginario passante per x_0. Ovviamente se $\alpha < 0$ vale un discorso analogo per una semicirconfrenza γ_R che stia a *destra* della parallela dell'asse immaginario passante per x_0.

[7]Notare che questa condizione è molto meno restrittiva della (1.44); qui è l'esponenziale, rapidamente decrescente per Im $z \to +\infty$, che si incarica di far tendere rapidamente a zero l'integrando.

Per capire subito su quale semicirconferenza chiudere il cammino per poter applicare il lemma di Jordan, basta ricordare che essa va scelta in modo che, lungo la sua freccia, l'esponente del fattore che moltiplica $f(z)$ deve essere reale e tendere a $-\infty$ per $|z| \to \infty$.

Si indica con **lemma di Jordan** il contenuto dei punti 2), 3) e 4), ma per comodità denoteremo con questo termine tutto quanto detto in questo paragrafo.

1.6.4 Esempi

Esempio 1

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

La funzione integranda è simmetrica:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = f(-x) \ .$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \ .$$

Inoltre

$$f(z) \overset{|z|\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^2} \ ;$$

le ipotesi del lemma di Jordan (caso 1) sono soddisfatte in entrambi i semipiani. Possiamo quindi chiudere il cammino di integrazione nel piano complesso come indicato in Figura 1.17 (scegliamo di chiuderlo nel semipiano positivo).

Indichiamo con C_R il cammino chiuso e con Γ_R la semicirconferenza. Il lemma di Jordan ci assicura che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^\infty f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} f(z)dz \ .$$

Pertanto

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} f(z)dz \ .$$

Studiamo la funzione $f(z)$:

$$(z^2+1)(z^2+4) = 0 \ \longrightarrow \ z = \pm i \ , \ z = \pm 2i \ .$$

$f(z)$ ha 4 poli semplici, due nel semipiano Im $z > 0$ e due nel semipiano Im $z < 0$. Quindi

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\{\text{Res} f(z)\}_{z=i} + \{\text{Res} f(z)\}_{z=2i} \right]$$

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=i} = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z^2+4)} = \frac{i}{6}$$

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=2i} = \lim_{z\to 2i} (z-2i) \frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)(z^2+1)} = -\frac{i}{3}$$

$$I = \pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6} \ .$$

Si noti che in questo esempio, e nei successivi esempi 2 e 3, l'integrando è positivo; se il risultato trovato fosse un numero negativo (o peggio immaginario) si sarebbe certo commesso un errore di segno (o dimenticato un fattore i).

Esempio 2

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} \ , \qquad n \textit{ intero positivo}$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}} \overset{|z|\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^{2n}}$$

Il lemma di Jordan (caso 1) vale in tutto il piano z. Chiudiamo il cammino di integrazione in Im $z > 0$:

$$I = \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} \ .$$

I poli di $f(z)$ sono dati da

$$1 + z^{2n} = 0 \ \longrightarrow \ z^{2n} = -1 \ \longrightarrow \ z = (-1)^{\frac{1}{2n}} \ .$$

Quanti poli giacciono nel semipiano Im $z > 0$? Poiché -1 si può rappresentare come

$$-1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

con k intero, i poli saranno

$$z = z_k = e^{i\pi\frac{2k+1}{2n}} = e^{i\theta_k}$$

con

$$\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$$

cioè

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2n}} \ , \ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2n}} \ , \ z_{-1} = e^{-i\frac{\pi}{2n}} \ , \ etc.$$

I poli z_k giacciono nel semipiano Im $z > 0$ se $0 < \theta_k < \pi$, ovvero se

$$0 < \frac{2k+1}{2n} < 1$$

che, poiché k è intero, equivale a

$$-\frac{1}{2} < k < n - \frac{1}{2} \ \longrightarrow \ 0 \le k \le n-1 \ .$$

La funzione $f(z)$ ha quindi n poli semplici in Im $z > 0$:

$$z = z_k = e^{i\theta_k} \ , \ \ \theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi \ , \qquad k = 0, 1, ...(n-1) \ .$$

Il residuo di $f(z)$ nel polo z_k vale

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=z_k} &= \lim_{z\to z_k} \left\{ (z-z_k)\frac{1}{1+z^{2n}} \right\} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{2nz^{2n-1}} \\ &= \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} = -\frac{z_k}{2n} \ . \end{aligned}$$

Pertanto

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{z_k}{2n} \right) = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{2n}(2k+1)} \ .$$

Poniamo

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{2n}} \quad \longrightarrow \quad z_0^{2k+1} = e^{\frac{i\pi}{2n}(2k+1)}$$

Allora

$$I = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{(2k+1)} = -\frac{i\pi}{n} z_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_0^2 \right)^k = -\frac{i\pi}{n} z_0 \frac{1 - z_0^{2n}}{1 - z_0^2}$$

Ma $z_0^{2n} = -1$ e pertanto

$$I = -\frac{2i\pi}{n} \frac{z_0}{1 - z_0^2} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\frac{z_0 - z_0^{-1}}{2i}}$$

e infine

$$I = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \ .$$

Esempio 3

$$I \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} \ dx \ .$$

L'integrale esiste poiché la funzione integranda è continua sull'asse reale ed è $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to \pm\infty$; **non** si può però applicare il caso 1) del lemma di Jordan perché l'integrando non è affatto $O\left(\frac{1}{z}\right)$ **nel piano complesso**; infatti

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{1 + z^2} \ dz \ , \tag{1.48}$$

quindi esso diverge esponenzialmente per $z = iy$ con $y \to \pm\infty$. Invece il primo addendo dell'integrale (1.48) soddisfa le ipotesi del caso 2) del lemma di Jordan ($\alpha = 1 > 0$) e quindi si calcola chiudendo il cammino nel semipiano superiore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \ dz \quad = \quad 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \right\}_{z=i} = \frac{\pi}{e} \ ;$$

il secondo addendo ricade invece nel caso 3) ($\alpha = -1 < 0$) e quindi si calcola chiudendo il cammino nel semipiano inferiore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{1+z^2}\, dz \quad = \quad -2\pi i \left\{ \mathrm{Res} \frac{e^{-iz}}{1+z^2} \right\}_{z=-i} = \frac{\pi}{e} \ .$$

Pertanto

$$I = \frac{\pi}{e} \ .$$

Esempio 4

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \ .$$

La funzione integranda è pari:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = f(-x) \ .$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \ .$$

Notare che l'integrando <u>non</u> è singolare nell'origine; infatti lo zero semplice del denominatore è compensato da uno zero semplice del numeratore.

Il lemma di Jordan non è direttamente applicabile, perché

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} \ ;$$

quindi per il primo addendo bisognerebbe applicare il caso 2) ($\alpha = 1 > 0$) e chiudere con una semicirconferenza nel semipiano superiore, mentre il secondo ricade nel caso 3) ($\alpha = -1 < 0$) e bisognerebbe chiudere nel semipiano inferiore. Non si può nemmeno spezzare l'integrale in una somma di due integrali, perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

non esiste (lo zero del denominatore non è più compensato da uno zero del numeratore).

La difficoltà si aggira nel modo seguente: poiché $f(z)$ è ovunque analitica al finito (si noti che $f(z) \to 1$ per $z \to 0$), **prima** di spezzare l'integrale si può deformare il cammino di integrazione, grazie al teorema di Cauchy. In particolare, i due cammini C_1 e C_2 di Figura 1.18 danno lo stesso risultato per I:

$$I = \frac{1}{2}\int_{C_1} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2}\int_{C_2} \frac{\sin z}{z} dz \ .$$

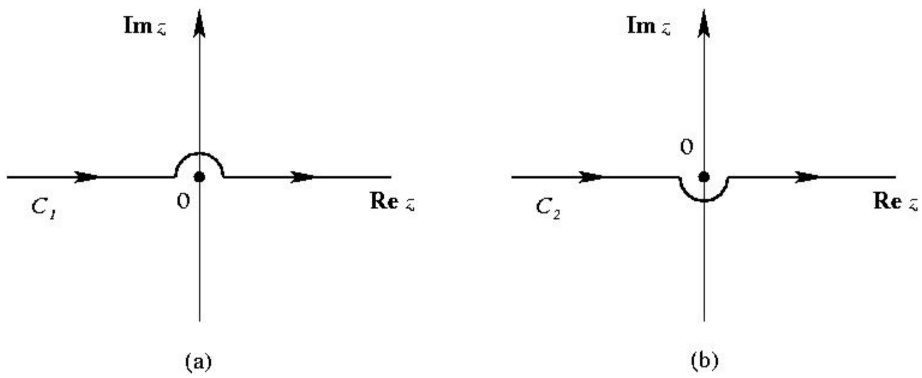

Figura 1.18: Cammini C_1 e C_2 che aggirano l'origine

Dopo aver così deformato il cammino è possibile spezzare l'integrale in una somma di due e procedere con il metodo dei residui. Calcoleremo I in due modi diversi:

i) Integriamo su C_1:

$$I = \frac{1}{4i}\left(\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_1} \frac{e^{-iz}}{z} dz\right) \ .$$

Benché la funzione $f(z)$ sia regolare ovunque, le funzioni $\frac{e^{iz}}{z}$ e $\frac{e^{-iz}}{z}$ hanno un polo semplice in $z = 0$; inoltre esse soddisfano il lemma di Jordan nei semipiani $\text{Im}\, z > 0$ e $\text{Im}\, z < 0$, rispettivamente. Pertanto si possono chiudere i cammini di integrazione nelle curve γ_1 e γ_2 (vedi Figura 1.19).

$$I = \frac{1}{4i}\left(\oint_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \oint_{\gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz\right) \ .$$

Si noti che la curva γ_2 è percorsa in senso **orario**.

Ora, il primo integrale è nullo per il teorema di Cauchy e il secondo si calcola con il teorema dei residui, tenendo conto del cambiamento di segno necessario perchè la curva γ_2 è percorsa in senso orario:

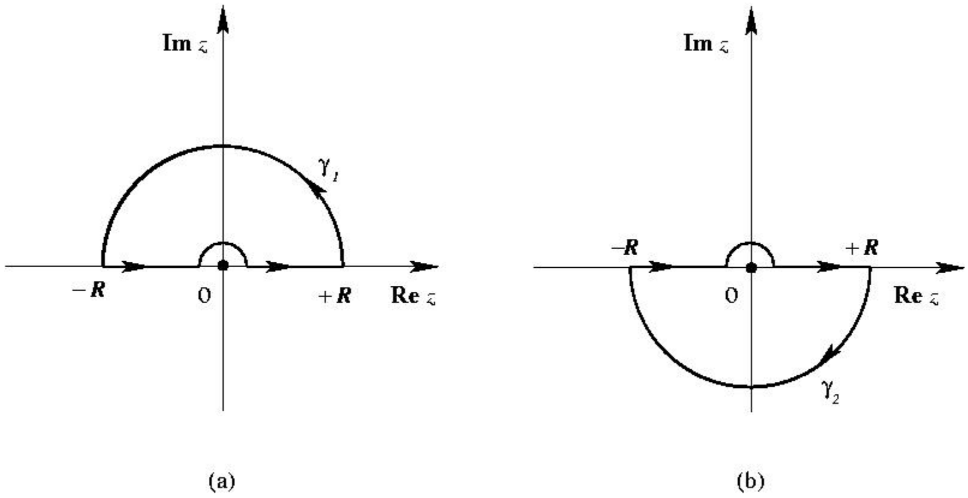

Figura 1.19: Chiusura del cammino che aggira l'origine nel semipiano superiore (a) ed inferiore (b)

$$I = -\frac{1}{4i}\oint_{\gamma_2}\frac{e^{-iz}}{z}dz = +\frac{1}{4i}2\pi i\left\{\mathrm{Res}\frac{e^{-iz}}{z}\right\}_{z=0} = \frac{\pi}{2} \ . \tag{1.49}$$

È facile verificare che lo stesso risultato si ottiene integrando su C_2.
ii)

$$I = \frac{1}{4i}\left(\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{C_1}\frac{e^{-iz}}{z}dz\right) \ .$$

Cambiamo variabile nel secondo integrale:

$$z \to -z \ , \qquad C_1 \to -C_2$$

Allora

$$I = \frac{1}{4i}\left(\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{-C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz\right) = \frac{1}{4i}\left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz \ .$$

Ma

$$\int_{C_1} - \int_{C_2} = -\oint_{\gamma} \longrightarrow \int_{C_2} = \int_{C_1} + \oint_{\gamma} \ ,$$

dove γ è una curva chiusa che circonda l'origine. Pertanto

$$I = \frac{1}{4i}\left(2\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz + \oint_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz\right) \ . \tag{1.50}$$

Ora,

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

per il lemma di Jordan (applicabile in Im $z > 0$) e per il teorema di Cauchy, e

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{e^{iz}}{z} \right\}_{z=0} = 2\pi i \ .$$

Sostituendo infine nella (1.50) si ottiene

$$I = \frac{\pi}{2} \ .$$