Capitolo 1

ANALISI COMPLESSA

1.7 Definizione delle funzioni $\ln z$ e z^α nel piano complesso

La funzione logaritmo $w = \ln z$ è definita nel campo complesso $\forall z \neq 0$ dalla equazione

$$e^w = z \ , \tag{1.51}$$

ovvero

$$e^{\mathrm{Re}\ w} e^{i\mathrm{Im}\ w} = |z| e^{i\arg\ z} \tag{1.52}$$

da cui segue, prendendo il modulo di ambo i membri,

$$e^{\mathrm{Re}\ w} = |z| \ \Rightarrow \mathrm{Re}\ w = \ln|z| \ , \tag{1.53}$$

dove il logaritmo del numero positivo $|z|$ è quello definito in campo reale. Sostituendo nella (1.52) si ottiene

$$e^{i\mathrm{Im}\ w} = e^{i\arg\ z} \ , \tag{1.54}$$

la cui soluzione generale è

$$\mathrm{Im}\ w = \arg\ z + 2\pi n \ , \quad \forall n \in \mathbf{Z} \ . \tag{1.55}$$

Si rimuove l'ambiguità, insita nella stessa definizione di arg z, fissando il valore di n (per esempio $n = 0$) e scegliendo un intervallo di ampiezza 2π in cui far variare arg z, come discusso nel par.1.1.2. Quindi

$$\ln z = \ln|z| + i\ \arg\ z \ . \tag{1.56}$$

La funzione logaritmo è perciò completamente definita solo se si specifica in che intervallo varia arg z ed è *discontinua* su una semiretta (taglio) uscente dall'origine del piano complesso, perché tale è la funzione arg z, come si è visto nel paragrafo 1.1.2. L'origine è perciò una **singolarità non isolata** della funzione logaritmo detta **punto di diramazione** (branching point); lo stesso dicasi per il punto all'infinito. La funzione z^α, con $\alpha \in \mathbf{C}$, si definisce come

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \tag{1.57}$$

e, salvo che per $\alpha \in \mathbf{N}$, soffre degli stessi problemi della funzione logaritmo[8]. È facile dimotsrare che

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z} \ , \quad \forall z \neq 0 \tag{1.58}$$

e quindi anche

$$\frac{dz^\alpha}{dz} = \alpha z^{\alpha - 1} \ , \quad \forall \alpha \in \mathbf{C} \ . \tag{1.59}$$

[8]Per $\alpha \in \mathbf{N}$ non ci sono ambiguità poiché $e^{N(\ln z + 2\pi i n)} = e^{N \ln z}$.