Esercizi su equazioni differenziali

Studio delle equazioni del tipo

$$z'' + P(z)z' + Q(z)z = 0$$

Esercizio: data la seguente equazione differenziale

$$(z-2)zu'' + u' + \frac{\beta}{z}u = 0$$

- determinare posizione e natura delle singolarità;
- fissare β in modo tale che una soluzione abbia una polidromia tipo logaritmo in zero.

Soluzione:

- Singolarità di tipo fuchsiano in zero, due e infinito.
- Soluzione in zero:

$$p_o = \lim_{z \to 0} zP(z) = -\frac{1}{2}$$

$$q_0 = \lim_{z \to 0} z^2 Q(z) = -\frac{\beta}{2}$$

Studio delle radici caratteristiche:

$$\rho^2 - \frac{3}{2}\rho - \frac{\beta}{2} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8\beta}}{4}$$

Al fine di ottenere la singolarità richiesta deve essere soddisfatta la condizione $\alpha_1 - \alpha_2 = n \in \mathbb{Z}$.

Quindi se $9 + 8\beta \neq 4n^2$ allora esistono due soluzioni del tipo: $u_1 = z^{\alpha_1} \sum$ e $u_2 = z^{\alpha_2} \sum$, dove con $\sum$ si indica una funzione olomorfa, le soluzioni quindi non contengono termini logaritmici.

Possono esserci se $8\beta = 4n^2 - 9$ e ci sono sicuramente se $8\beta = -9$ cioè $\beta = -\frac{9}{8}$ (la condizione $n = 0$ equivale a $\alpha_1 = \alpha_2$).

Consideriamo il caso interessante $\alpha_1 - \alpha_2 = n \in \mathbb{Z}$

Con semplici calcoli si trova che la condizione porta a scrivere le radici come:

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm 2n}{4}, \quad n \geqslant 0 \tag{1}$$

Quindi le soluzioni saranno:

$$u_1 = z^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$u_2 = z^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k + a u_1 \log(z)$$

Non capisco cosa devo fare a pagina 2/3

Esercizio: trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^2 u'' + Azu' + Bu = 0$$

in zero e in infinito.
Iniziamo con il cercare le soluzioni in zero:

$$p_0 = \lim_{z \to 0} zP(z) = A$$

$$q_0 = \lim_{z \to 0} z^2 Q(z) = B$$

L'equazione indiciale è:

$$\rho^2 + (A-1)\rho + B = 0$$

naturalmente le radici, α e β, sono tali che:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 - A \\ \alpha\beta = B \end{cases}$$

Supponiamo $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$, allora

$$u_1 = z^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo:

$$z^{\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+\alpha)(k+\alpha-1) + (k+\alpha)A + B \right] c_k z^k \right\}$$

e annullando il coefficiente

$$\left[(k+\alpha)(k+\alpha-1) + (k+\alpha)A + B \right] c_k = 0, \quad \forall k. \tag{2}$$

Possiamo osservare che

$$[\quad]_k = (k+\alpha)^2 + (A-1)(k+\alpha) + B$$

è l'equazione indiciale nella variabile $k+\alpha$.

Se $k=0$, $[\quad]_k = 0$ perché α è proprio una soluzione, quindi possiamo prendere $c_0 \neq 0$, in particolare $c_0 = 1$.

L'unica altra soluzione di quella equazione è β, ma se $\beta \neq \alpha + n$ allora $\alpha + k$ non potrà mai annullare $[\quad]_k$, quindi per soddisfare la 2 dobbiamo scegliere $c_k = 0, \quad \forall k \geqslant 1$, quindi $u_1 = z^\alpha$ ed analogamente $u_2 = z^\beta$.

Se invece le due radici differiscono per un intero, detta α quella con parte reale maggiore, per $u_1 = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ il ragionamento identico a prima ci fa concludere che $u_1 = z^\alpha$.

Per $\beta = \alpha - n, \quad n \in \mathbb{N}$, in linea di principio dovrebbe essere:

$$u_2 = a u_1 \log z + z^\beta \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.$$

Derivando due volte e sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$z^\beta \left\{ a(2\alpha - 1 + A) z^n + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+\beta)(k+\beta-1) + A(k+\beta) + B \right] d_k z^k \right\} = 0.$$

Consideriamo $n \neq 0$, allora: $k = 0 \Rightarrow [\quad]_0 d_0 = 0$, $[\beta(\beta-1) + A\beta + B] d_0 = 0 \Rightarrow d_0 \neq 0$.

Per $k = 1, \dots, n-1$ abbiamo $[\quad]_k \neq 0 \Rightarrow d_k = 0$.

Rimane $k = n$; il coefficiente di z^n è:

$$a(2\alpha - 1 + A) + [\quad]_n d_n = 0.$$

Il secondo termine è:

$$[\quad]_n = (\beta+n)^2 + (A-1)(\beta-n) + B = \alpha^2 + (A-1)\alpha + B = 0$$

quindi $d_n \neq 0$.

Annullando il primo termine abbiamo: $a(2\alpha - 1 + A) = 0$. Siccome $2\alpha - 1 + A = n = 2\alpha - (\alpha + \beta) \neq 0 \Rightarrow a = 0$. Inoltre $d_k = 0, \quad \forall k > n$.

In conclusione

$$u_2 = z^\beta d_0 + z^\beta z^n d_n = z^\beta + z^\alpha d_n.$$

Il pezzo proporzionale a z^α si può trascurare perché quello che conta è la parte linearmente indipendente da u_1, quindi:

$$u_2 = z^\beta.$$

Se invece $n = 0$ il coefficiente di z^0 è:

$$a(2\alpha - 1 + A) + [\quad]_0 d_0 = 0$$

ma $2\alpha - 1 + A = [\quad]_0 = 0$ quindi $a \neq 0$ e $d_0 \neq 0$, $u_2 = az^\alpha \log z + z^\alpha d_0$.

Se u_2 deve essere linearmente indipendente da u_1 allora $d_0 = 0$ e $a = 1$, $u_2 = z^\alpha \log z$

La soluzione in infinito?

Esercizio: studiare l'equazione

$$u'' + \frac{3z-1}{z(z-1)}u' + \frac{2}{z(z-1)}u = 0$$

in zero, in uno e in infinito.

Non capisco se è da fare o meno

Esercizio: determinare n in modo che l'equazione sia totalmente fuchsiana

$$z(z+2i)u'' + 2(z+in)u' + \frac{1}{4}\left[(z+i)^{n-1} + i(n+1)\right]u = 0$$