

2.2 Soluzione nell'intorno di un punto fuchsiano

In z_0 singolare la soluzione generale **non** può essere regolare, e viceversa: se in z_0 ci sono **due** soluzioni regolari linearmente indipendenti u_1 e u_2 allora $P(z)$ e $Q(z)$ sono regolari. Infatti il sistema

$$\begin{aligned} u_1''(z) + P(z)u_1'(z) + Q(z)u_1(z) &= 0 \\ u_2''(z) + P(z)u_2'(z) + Q(z)u_2(z) &= 0 \end{aligned}$$

permette di ottenere P e Q come rapporto di determinanti nelle funzioni regolari u_1 , u_1' e u_1'' ($i = 1, 2$) con a denominatore il Wronskiano, certo diverso da zero perché u_1 e u_2 sono indipendenti.

Teorema di Fuchs: se z_0 è un punto singolare fuchsiano, esiste sempre **almeno una** soluzione del tipo:

$$u_1(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{con } c_0 \neq 0. \quad (2.39)$$

La seconda soluzione o è ancora della forma (2.39) oppure contiene anche un termine aggiuntivo $du_1 \ln(z - z_0)$, come vedremo nell'eq. (2.45). Le serie che compaiono nella soluzione hanno raggio di convergenza almeno uguale alla distanza fra z_0 e la più vicina singolarità dell'equazione differenziale. Come si determina l'esponente ρ ? Supponiamo che z_0 sia un punto singolare fuchsiano. In questo caso le funzioni $P(z)$ e $Q(z)$ possono essere scritte come

$$P(z) = \frac{p(z)}{z - z_0} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} p_l (z - z_0)^l}{z - z_0} \quad (2.40)$$

$$Q(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^2} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} q_l (z - z_0)^l}{(z - z_0)^2}, \quad (2.41)$$

dove le funzioni $p(z)$ e $q(z)$ sono regolari in $z = z_0$, e sono state quindi sviluppate in serie di Taylor intorno a z_0 . Sostituendo ora le (2.39), (2.40) e (2.41) nell'equazione (2.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k)(\rho + k - 1)(z - z_0)^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k) \sum_{l=0}^{\infty} p_l (z - z_0)^{\rho+k+l} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{\infty} q_l (z - z_0)^{\rho+k+l} = 0. \end{aligned}$$

Uguagliamo ora a zero il coefficiente della potenza $(z - z_0)^\rho$; poniamo cioè $k = l = 0$ nell'equazione precedente. Otteniamo così:

$$c_0[\rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0] = 0 ,$$

ovvero, per $c_0 \neq 0$,

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 . \quad (2.42)$$

L'equazione (2.42), detta **equazione indiciale** o *caratteristica* dell'equazione differenziale (2.2), è un'equazione di secondo grado in ρ e ha quindi due soluzioni, ρ_1 e ρ_2 . Per risolvere l'equazione differenziale occorre quindi risolvere l'equazione indiciale (2.42), dove

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)P(z)$$

e

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 Q(z) ,$$

e ricavare gli indici ρ_1, ρ_2 . Scelti gli indici in modo che $\text{Re}\rho_1 \geq \text{Re}\rho_2$ il teorema di Fuchs ci assicura che esiste sempre la soluzione particolare

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k , \quad c_0 \neq 0 \quad (2.43)$$

i cui coefficienti si possono determinare in modo univoco in funzione di c_0 sostituendo la serie nell'equazione differenziale e ricavando delle relazioni di ricorrenza. Per risolvere completamente l'equazione differenziale occorre però ricavare una seconda soluzione, linearmente indipendente dalla prima. Distinguiamo due casi

- 1) Se le due radici differiscono per un numero non intero, la seconda soluzione è simile alla prima:

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k , \quad d_0 \neq 0 \quad (2.44)$$

- 2) Se le due radici ρ_1 e ρ_2 differiscono per un numero intero la seconda soluzione è

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k + du_1(z) \ln(z - z_0) , \quad (2.45)$$

dove d e i d_k (per $k \neq \rho_1 - \rho_2$)¹ si determinano per sostituzione in funzione di d_0 ; può anche succedere che si ottenga $d = 0$ ma solo se $\rho_1 \neq \rho_2$.

¹ d_n può essere scelto arbitrariamente poiché la differenza fra due soluzioni del tipo u_2 con diversi valori di d_n è proporzionale alla prima soluzione u_1 di (2.43).

2.2.1 Esempio: l'equazione di Bessel

L'equazione di Bessel

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0 \quad (2.46)$$

ha, come si è già detto, un punto singolare fuchsiano in $z = 0$. L'equazione indiciale è

$$\rho^2 - \alpha^2 = 0 ,$$

con soluzioni $\rho_{1,2} = \pm\alpha$. Se $2\alpha \notin \mathbf{Z}$ allora $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbf{N}$ ed entrambe le soluzioni sono della forma

$$u_\rho(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k . \quad (2.47)$$

Sostituendo la (2.47) nella (2.46) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho)(k + \rho - 1) z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho+2} - \rho^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

da cui

$$c_1(1 + 2\rho)z^{1+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k + 2\rho)z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho+2} = 0 . \quad (2.48)$$

Se nella prima sommatoria effettuiamo il cambiamento di indice $k \rightarrow k - 2$ otteniamo:

$$c_1(1 + 2\rho)z^{1+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} [c_{k+2}(k + 2)(k + 2 + 2\rho) + c_k]z^{k+\rho+2} = 0 , \quad (2.49)$$

da cui (essendo $\alpha \neq -1/2$)

$$c_1 = 0 \quad (2.50)$$

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k + 2)(k + 2 + 2\rho)} . \quad (2.51)$$

Notare che se 2α fosse un intero n , diciamo positivo, la (2.51) non avrebbe senso per $\rho_2 = -\alpha = -n/2$ e per $k = n - 2$. Se n è dispari ciò non è grave (basta scegliere tutti i $c_{2l+1} = 0$), ma impedisce di trovare la seconda soluzione nella forma (2.47) se n è pari. Dalla relazione di ricorrenza (2.51)

ricaviamo infine che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli, mentre i coefficienti pari sono:

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -\frac{c_0}{2(2+2\rho)} \\
 c_4 &= -\frac{c_2}{4(4+2\rho)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2+2\rho)(4+2\rho)} \\
 c_6 &= -\frac{c_4}{6(6+2\rho)} = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2+2\rho)(4+2\rho)(6+2\rho)} \\
 c_{2n} &= (-1)^n \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2+2\rho)(4+2\rho)(6+2\rho) \dots (2n+2\rho)} .
 \end{aligned}$$

Le **funzioni di Bessel** $J_\alpha(z)$ sono definite come segue:

$$J_\alpha(z) = N_\alpha u_\alpha(z) , \quad (2.52)$$

dove N_α è un'opportuna costante di normalizzazione. Nel caso particolare $\alpha^2 = 1/4$ le due soluzioni dell'equazione di Bessel sono

$$\begin{aligned}
 J_{1/2}(z) &= N_{1/2} \sqrt{z} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \\
 &= \frac{N_{1/2}}{\sqrt{z}} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = N_{1/2} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} . \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

e

$$J_{-1/2}(z) = N_{-1/2} \frac{\cos z}{\sqrt{z}} . \quad (2.54)$$

Notare che $\rho_1 - \rho_2 = 1$ ma non c'è il termine con il logaritmo ($d = 0$). Si può dimostrare che per tutti gli α semi-interi le J_α sono esprimibili tramite funzioni trigonometriche. Per esempio:

$$J_{3/2}(z) = \frac{N_{3/2}}{\sqrt{z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) \quad (2.55)$$

$$J_{-3/2}(z) = \frac{N_{-3/2}}{\sqrt{z}} \left(-\frac{\cos z}{z} - \sin z \right) . \quad (2.56)$$