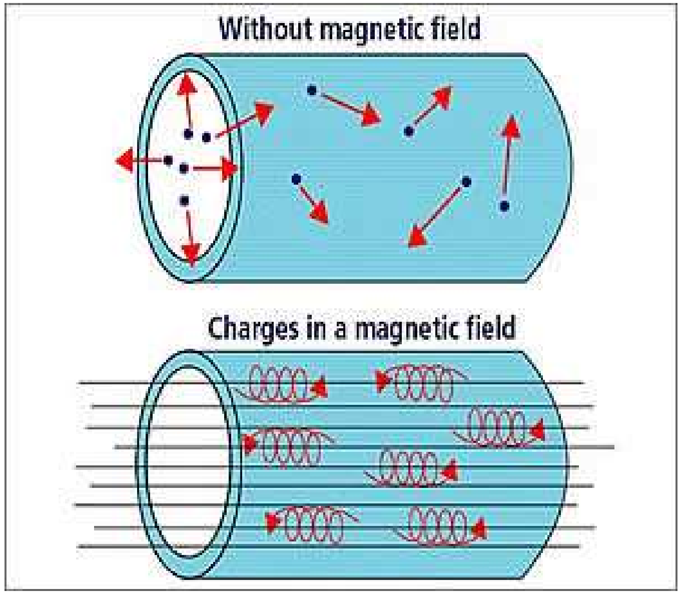
Lezione 5
Moti di particelle in un campo magnetico

G. Bosia
Universita' di Torino

Moto di una particella carica in un campo magnetico

Il “confinamento” del plasma a distanze sufficientemente grandi da ridurre ad un valore accettabile l’ interazione con contenitori meccanici può essere effettuato utilizzando la proprietà del moto delle particelle cariche in campi magnetici, che tendono ad “orbitare” attorno le linee di forza del campo.



Se le orbite hanno un raggio piccolo rispetto alle dimensioni del plasma e le linee di forza del campo si richiudono su se stesse, come in una geometria toroidale, in linea di principio particelle singole dovrebbero rimanere “intrappolate” dal campo

Il confinamento magnetico del plasma in un volume definito e’ un problema complesso,

- per il grande numero di particelle in gioco,
- per il fatto che, come abbiamo visto, l’ insieme delle particelle che costituiscono il plasma ha un comportamento collettivo, perché
- si verificano moti di **diffusione** dovuti alle collisioni e, (come vedremo) di **deriva**, attraverso le linee del campo magnetico campo.

Inizieremo studiando il moto di particelle singole in varie topologie di campo magnetico e sotto l’ azione di campi di forze diversi.

Confinamento magnetico di un plasma

La dinamica di un plasma e' complicata perché il moto di elettroni e ioni e' determinato non solo da campi elettrici e magnetici esterni, ma perché l'azione dei campi esterni e' modificata dal moto delle cariche stesse. In queste prime lezioni considereremo il moto di particelle "singole" in campi magnetici ed elettrici esterni, con l' ipotesi che questi non siano modificati dal moto delle cariche.

Una particella di massa m, dotata di una carica q, sottoposta all'azione di un campo elettrico (**E**) e di un campo magnetico di induzione (**B**), risente, come è ben noto, di una forza elettrica q **E** e di una forza di Lorentz q **v**∧**B**, quindi l'equazione del moto della particella può essere espressa come:

(V-1)
$$\underbrace{m\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{\text{variazione della quantita' di moto}} = \underbrace{\underset{\text{carica}}{q}\,(\underset{\text{campo elettrico}}{\mathbf{E}} + \underset{\text{velocita'}}{\mathbf{v}} \wedge \underset{\text{campo magnetico}}{\mathbf{B}})}$$

dove **v** è la velocità istantanea della particella. Si noti che questa equazione vale in generale anche se i campi **E** e **B** sono variabili nel tempo e non uniformi nello spazio.

Cominciamo a considerare il caso più semplice di una particella carica che si muove solo sotto l'influenza di un campo magnetico statico, cioè costante nel tempo

∧

Moto in un campo magnetico B = cost

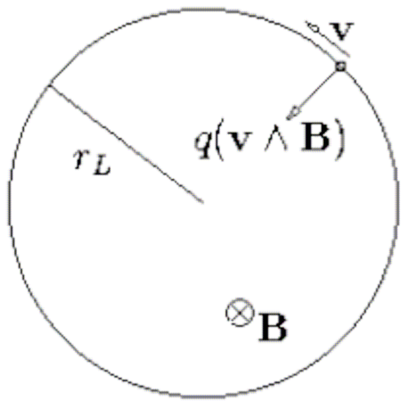
L'equazione del moto una particella che si muove in un campo magnetico con velocità **v**, e':

(V-2) $$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

La componente della velocità **v** nel piano perpendicolare a **B** ($v_\perp$) e' parallela alla traiettoria del moto e l' accelerazione e' perpendicolare alla traiettoria. Il moto e' avviene in condizione di equilibrio tra la forza centrifuga e della forza di Lorentz $m\frac{v_\perp^2}{r_L} = |q|v_\perp B$

(V-3) $$m r_L \Omega^2 = m\frac{v_\perp^2}{r_L} = |q|v_\perp B$$

Dove r_L e' il raggio della curvatura della traiettoria. Se **B** e **v** sono costanti, r_L e' costante e la traiettoria e' un cerchio di raggio r_L nel piano perpendicolare a **B** (vedi figura) .



Dalla (V-3) deduciamo due quantità impo

(V-4) $$\Omega^2 = v_\perp^2 / r_L^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{|q|B}{m} \qquad r_l = \frac{v_\perp}{\Omega}$$

ha le dimensioni di una frequenza angolare e viene chiamata **frequenza (angolare) di ciclotrone e** r_L **raggio di Larmor**

Moto in un campo magnetico costante

L'energia cinetica della particella e' costante: infatti moltiplicando entrambi i membri della (V-2) scalarmente per m**v** si ottiene

(V-5)

$$m\mathbf{v}.\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = q\mathbf{v}.(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) = 0.$$

Per un moto con velocità in direzione arbitraria rispetto al campo magnetico conviene separare le componenti parallela $\mathbf{v}_{//}$ e perpendicolare $\mathbf{v}_{\perp}$ al campo magnetico. $\mathbf{v}_{//}$ = cost, dato che $a_{//} \propto \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ = 0, a cui corrisponderà un moto uniforme nella direzione del campo magnetico **B.**

Per studiare il moto nel piano perpendicolare assumiamo **B** diretto come z e scomponiamo la (V-2) lungo gli assi x e y.

(V-6)

$$m\dot{v}_x = qv_yB \quad , \quad m\dot{v}_y = -qv_xB$$

ossia:

(V-7)

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = -\Omega^2 v_x$$

La soluzione, assumendo la fase iniziale nulla:

$$v_x = v_{\perp}\cos\Omega t$$

Moto in un campo magnetico costante

Sostituendo nella (V-6-2)

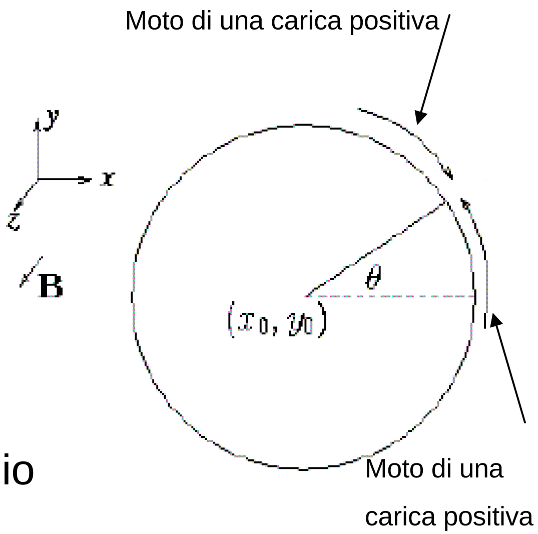
(V-8) $$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = -\frac{|q|}{q}v_\perp \sin \Omega t$$

Le (V-7) e (V-8) integrate rispetto al tempo danno:

(V-9) $$x = x_0 + \frac{v_\perp}{\Omega}\sin \Omega t \quad , \quad y = y_0 + \frac{q}{|q|}\frac{v_\perp}{\Omega} \cos \Omega t$$

Che rappresenta un cerchio con centro di coordinate x_0, y_0.e raggio

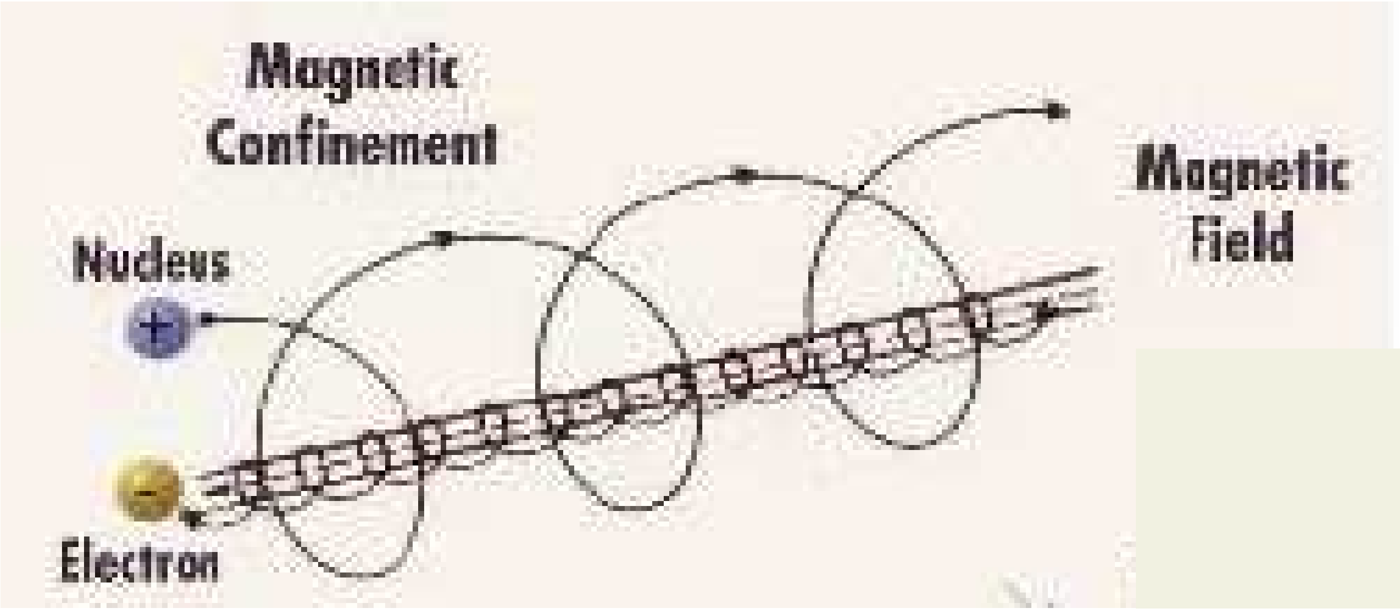
(V-10) $$r_L = v_\perp / \Omega$$



Dall' equazione del moto di deduce anche che **cariche positive ruotano in senso orario** e **cariche negative in senso anti-orario**. Questa proprietà fa si che i campi magnetici prodotto dal moto di entrambe le componenti di un plasma (elettroni e ioni) si oppongano al campo magnetico esterno. (diamagnetismo del plasma).

Moto in un campo magnetico costante

In conclusione il moto di una particella carica in u n campo magnetico costante e' un'elica che si avvolge attorno alle linee di campo. E' evidente come il campo magnetico abbia proprietà di confinamento del moto di particelle cariche



Raggi di girazione e frequenze ciclotroniche

Nota : Il raggio di girazione degli elettroni e' molto più piccolo di quello degli ioni . Se assumiamo come $v_\perp \sim v_{th} = (kT/m_i)^{1/2}$

$$\Omega = \frac{|q|B}{m}$$

$R_i \sim (v_{th.i}/\Omega_i)$; $R_e \sim (v_{th.e}/\Omega_e)$ e $R_i / R_e = (m_i/m_e)^{1/2} >> 1$

$R_i = v_{th.i}/\Omega_i = 100\,(m_i/m_p)^{1/2} Z_i^{-1} [kT^{1/2}(eV)]\,[B\,(Gauss)^{-1}]$ m_p = massa protone

Il valore del raggio di girazione per un deutone in un plasma termonucleare $(m_i/m_p) = 2$: per $T_e = 10$ keV , B = 30 KGauss : $R_i \sim 0.5$ cm. Il raggio di girazione di un elettrone nelle stesse condizioni e'

$$(2\ 1840)^{-1/2} \sim 1/60 \text{ volte inferiore.}$$

La rotazione delle varie componenti ioniche di un plasma magnetizzato da' origine a frequenze tipiche (**frequenze ciclotroniche**) che sono legate al valore del campo magnetico confinante

Dalla definizione si ottengono le seguenti formule:

Frequenza ciclotronica ionica : $\Omega_{ci} = 9.58\ 10^3\ Z\,(m_p/m_i)\,B\,(Gauss)$ s^{-1}

Frequenza ciclotronica elettronica : $\Omega_{ce} = 1.75\ 10^7\ B\,(Gauss)$ s^{-1}

Da confrontare con la frequenza di plasma $\omega_{pe} = 5.64\ 10^4\ n_e^{1/2}\,(cm^{-3})\ s^{-1}$

Moto in B uniforme e E ≠ 0

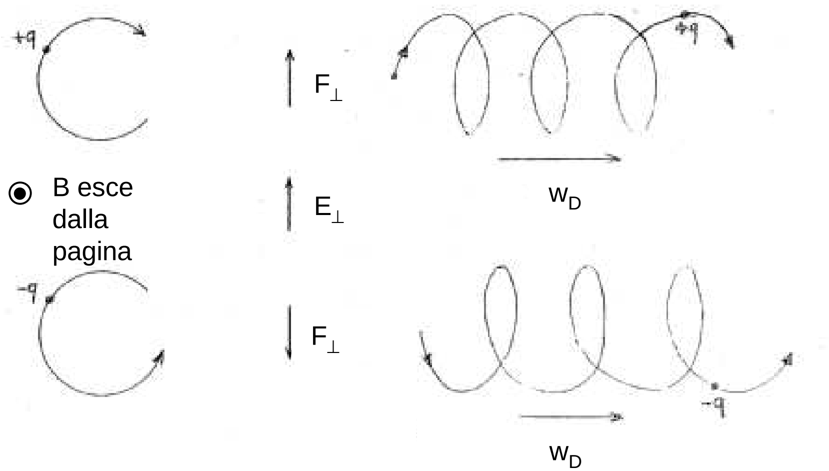
Equazione del moto:

(V-11)
$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

Se ancora si scompone il moto in direzione parallela e perpendicolare a B, in direzione parallela:

(V-12)
$$\dot{v}_{||} = \frac{qE_{||}}{m}$$

A cui corrisponde in moto uniformemente accelerato in direzione parallela alle linee di campo magnetico. Nel piano perpendicolare il campo elettrico e', per q > 0 accelerante verso l' alto per e ritardante verso il basso. Pertanto il raggio di curvature e' maggiore in alto. Le orbite non sono più circolari e si osserva un moto di deriva in direzione ortogonale a B e ad E.



Per cariche negative il raggio di curvatura e' maggiore in basso e il moto di deriva avviene nella stessa direzione

Moto in B uniforme e E ≠ 0

Matematicamente il problema e' ridotto a trovare una velocità di deriva tale che:

(V-13) $$\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B} = 0$$

Infatti la somma di questa velocità più la velocità di girazione

(V-14) $$\mathbf{v}_L = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_L e^{i\Omega(t-t_0)}]$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

calcolata per **E**=0 soddisferà alla (V-1). Se si moltiplica la (V-13) per $\wedge \mathbf{B}$

(V-15) $$0 = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} + (v_d.\mathbf{B})\mathbf{B} - B^2 \mathbf{v}_d$$

Si ottiene l' espressione della velocità di deriva elettrica :

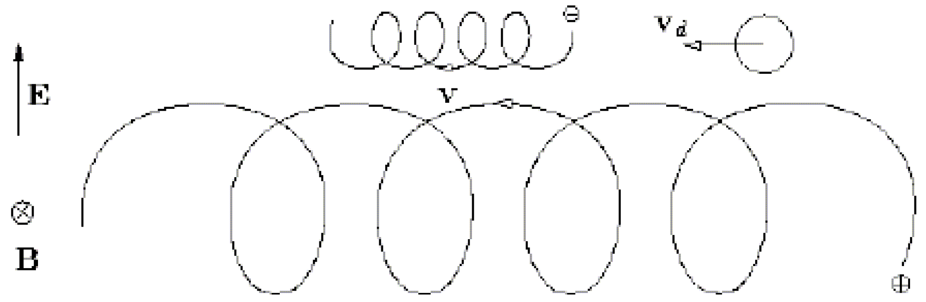
(V-16) $$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

Pertanto la soluzione globale e' $$\boxed{\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v}_{\|}}_{\text{Velocita' parallela}} + \underbrace{\mathbf{v}_d}_{\text{Velocita' di deriva}} + \underbrace{\mathbf{v}_L}_{\text{Velocita' di girazione}}}$$

Moto in B uniforme e E ≠ 0

Il moto di deriva elettrica:

- e’ indipendente dai parametri della particella che deriva (carica, massa, velocita’ o altro)
- avviene nella stessa direzione per ioni ed elettroni
- rappresenta pertanto un moto di insieme del plasma



Derive dovute a forze non elettriche

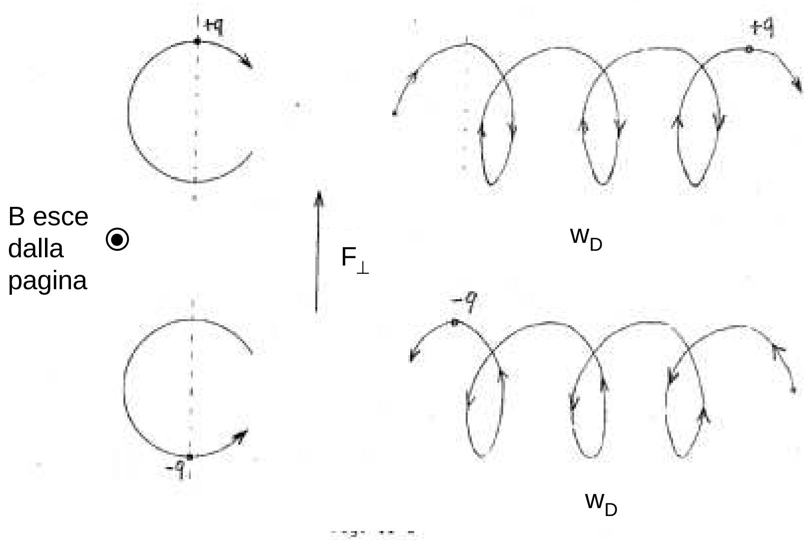
Equazione del moto:

(V-17)
$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + q\ \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = q(\frac{1}{q}\mathbf{F} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

La soluzione e' simile al caso precedente con $\mathbf{F}/q$ che rimpiazza **E**

(V-18)
$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{q}\frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

In questo caso, la deriva delle cariche soggette alla stessa forza e' in direzione opposta,



Derive dovute a disuformità del modulo di B

Le disuniformità del campo magnetico possono essere in modulo (che non e' costante in funzione dello spazio) o dovuta alla curvatura delle linee di forza. In generale le due disuniformità sono associate, perché l'andamento delle linee di forza deve soddisfare le equazioni di Maxwell. Per semplicità considereremo prima separatamente e poi insieme i due effetti.

Il problema e' trattato approssimativamente, assumendo che la variazione del campo magnetica sia piccola sulla lunghezza del raggio di girazione, ossia

(V-19) $$r_L << B/|\nabla B|$$

(orbite quasi circolar). In questo caso il campo magnetico puo' essere espresso con uno sviluppo di Taylor come

(V-20) $$\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r}.\nabla)\mathbf{B}$$

dove B_0 e' costante

Si cerca ancora qui una soluzione di deriva a velocità costante nel piano ortogonale alla linea di forza. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_L$. Sostituendo nella (V-17)

(V-22) $$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\dot{\mathbf{v}}_L = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q[\mathbf{v}_L \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}_0 + (\mathbf{v}_L + \mathbf{v}_d) \wedge (\mathbf{r}.\nabla)\mathbf{B}]$$

Derive dovute a disuformità del modulo di B

ossia:

(V-23) $$m\,\dot{\mathbf{v}}_L = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}.\nabla)\mathbf{B} + \cancel{\mathbf{v}_d \wedge (\mathbf{r}.\nabla)\mathbf{B}}$$

L' ipotesi $r_L << B/|\nabla B|$ implica che anche v_d/v_L << 1, pertanto l' ultimo termine della (V-23) e' del II ordine rispetto ai primi due e può essere trascurato .

Sia $\mathbf{v}_L$ che $\mathbf{r}_L$ sono delle quantità periodiche nel tempo. Se si compie la sostituzione :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_L$$

la (V-23) diventa :

(V-24) $$m\,\dot{\mathbf{v}}_L = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}_L.\nabla)\mathbf{B} + \cancel{\mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}_0.\nabla)\mathbf{B}}$$

L' ultimo termine della (V-24) e' un termine del tipo $\propto e^{-i\Omega t}$ Se si prendono i valori medi rispetto ad un periodo della (V-24) si ottene pertanto:

(V-25) $$0 = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B} + \langle \mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}_L.\nabla)\mathbf{B} \rangle$$

Derive dovute a disuformita' del modulo di B

Per calcolare il valor medio del tI termine della (V-25), si utilizzano i valori di $\mathbf{v}_L$ che $\mathbf{r}_L$ ottenuti per on B costante :

(V-26)
$$\mathbf{r}_L = (x_L, y_L) \;=\; \frac{v_\perp}{\Omega}\left(\sin\Omega t, \frac{q}{|q|}\cos\Omega t\right)$$

(V-27)
$$\mathbf{v}_L = (\dot{x}_L, \dot{y}_L) \;=\; v_\perp\left(\cos\Omega t, \frac{-q}{|q|}\sin\Omega t\right)$$

Se si assume che ∇B sia nella direzione y si ottiene :

(V-28)
$$[v_L \wedge (\mathbf{r}.\nabla)\mathbf{B}]_x \;=\; v_y y\frac{d}{dy}B$$

(V-29)
$$[\mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}.\nabla)\mathbf{B}]_y \;=\; -v_x y\frac{d}{dy}B$$

Facendo le medie su un periodo con le assunzioni fatte:

(V-30)
$$\langle v_y y\rangle \;=\; -\langle\cos\Omega t\sin\Omega t\rangle\frac{v_\perp^2}{\Omega} = 0$$

(V-31)
$$\langle v_x y\rangle \;=\; \frac{q}{|q|}\langle\cos\Omega t\cos\Omega t\rangle\frac{v_\perp^2}{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{v_\perp^2}{\Omega}\frac{q}{|q|}$$

Derive dovute a disuformita' del modulo di B

Pertanto la (V-25) diventa :

(V-32)
$$0 = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B} - \frac{q}{|q|}\frac{v_\perp^2}{2\Omega}\nabla B$$

Da cui si ricava la velocità di deriva come nel caso precedente:

(V-33)
$$\mathbf{v}_d = \frac{\left(\frac{-1}{|q|}\frac{v_\perp^2}{2\Omega}\ \nabla B\right) \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \frac{q}{|q|}\frac{v_\perp^2}{2\Omega}\frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^2}$$

ossia :

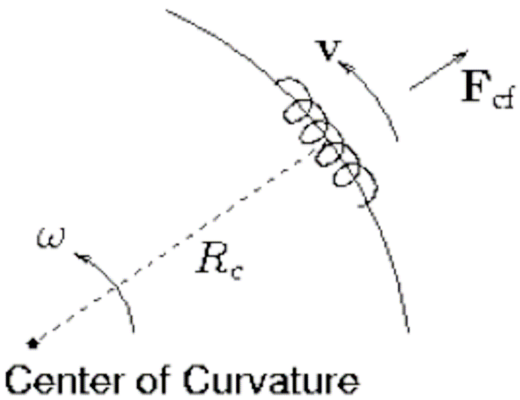
(V-34)
$$\boxed{\mathbf{v}_d = \frac{1}{q}\frac{mv_\perp^2}{2B}\frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^2}}$$

La deriva e' ancora perpendicolare sia a **B** che a ∇**B** e dipende dal segno della carica.

Pertanto la deriva dovuta a ∇**B** tende a separare elettroni e ioni e pertanto generare campi elettrici a ll' interno del plasma. Questi a loro volta generano derive **E∧B,** che provocano una deriva ortogonale di entrambe le cariche

Deriva dovute alla curvatura delle linee di campo

Consideriamo ora il caso di una particella che si muove orbitando lungo una linea di forza curva, con raggio di curvatura R_c La sua velocità ha dunque una componente parallela alla linee di campo. Nel sistema di riferimento del centro di guida appare una forza Fcf (centrifuga , che e' dovuta al moto sulla traiettoria curva e, che scritta vettorialmente vale :



(V-35) $$\mathbf{F}_{cf} = m v_{\|}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}$$

Usando la formula precedente per la deriva :

(V-36) $$\mathbf{v}_d = \frac{1}{q}\frac{\mathbf{F}_{cf} \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \frac{m v_{\|}^2}{qB^2}\frac{\mathbf{R}_c \wedge \mathbf{B}}{R_c^2}$$

Deriva dovuto a disuformità di campo (∇B & Rc)

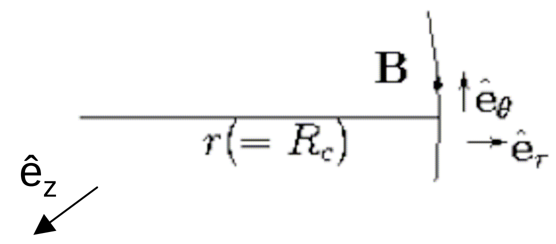
In generale curvatura e gradiente del modulo sono legate fra di loro perché il campo magnetico deve soddisfare alle equazioni di Maxwell. Pertanto le derive di ∇B e $\mathbf{R}_c$ sono in generale associate

Un caso di particolare interesse e' la deriva in una zona dello spazio in cui la densità di corrente e' nulla: **j** = 0 (Campo magnetico nel vuoto)

Nel caso statico sarà

(V-37) $$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0$$

In coordinate polari r,θ,z se si sceglie $B_r = 0$



(V-38) $$0 = (\nabla \wedge \mathbf{B})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)$$

ossia

(V-39) $$= \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r}$$

$$(\nabla B)_r = -\frac{B}{R_c}$$

E' inoltre :

(V-40) $$0 = (\nabla \wedge \mathbf{B})_\theta = \partial B_\theta / \partial z \quad \text{e} \quad (\nabla B)_z = 0]$$

pertanto:

(V-41) $$(\nabla B)_{\text{perp}} = -B\ \mathbf{R}_c / R_c^2.$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = rot(\mathbf{B}) = curl(\mathbf{B}) = \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{r} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\mathbf{B}_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial \phi}\right)\mathbf{z}$$

Deriva dovuto a disuformità di campo (∇B & Rc)

La velocità di deriva globale dovuta al gradiente del campo e' pertanto:

(V-42)

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_\perp^2}{2q}\frac{\mathbf{B}\wedge\nabla B}{B^3} = \frac{m\,\mathrm{v}_\perp^2}{2q}\frac{\mathbf{R}_c\wedge\mathbf{B}}{R_c^2 B^2}$$

e la velocità di deriva totale e':

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{q}\left(mv_\parallel^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2\right)\frac{\mathbf{R}_c\wedge\mathbf{B}}{R_c^2 B^2}\ .$$

(V-43)

Pertanto:

- le derive $R_c \ \& \ \nabla B$ avvengono nella stessa direzione ei loro effetti si sommano
- avvengono in direzioni opposte per cariche opposte
- le velocità di deriva sono proporzionali all' energia cinetica delle particelle
  - curvatura ⇨ energia parallela x2
  - ∇B ⇨ energia perpendicolare

Deriva dovuto a disuformità di campo (∇B & R_c)

Ad esempio la velocità di deriva media di particelle aventi una distribuzione termica maxwelliana dato che e'

$$\langle \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{kT}{2}$$

$$\langle \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \rangle = kT$$ (2 gradi di liberta')

$$\boxed{\langle \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} \rangle = \frac{2T}{q} \frac{\mathbf{R}_c \wedge \mathbf{B}}{R_c^2 B^2}}$$

Esercizio: Calcolare la velocità di deriva di un protone di energia cinetica K= 10 keV .