

*Lezione 14*  
*Moti di particelle in un campo magnetico*

G. Bosia  
Universita' di Torino

## *Confinamento magnetico*

La difficoltà della fisica di un sistema a confinamento magnetico è che le equazioni di stato del plasma devono essere risolte ed avere soluzione in uno spazio definito.

Questo significa che i campi EM che compaiono nelle equazioni di stato debbono avere una topologia definita e consistente con limiti tecnologici (variazioni di flusso, intensità di correnti valore massimo di campi magnetici....)

Le strutture magnetiche devono essere stabili durante tutto il processo di riscaldamento del plasma, i cui parametri macroscopici (temperatura, densità ...) variano durante il processo di riscaldamento.

Nelle prossime lezioni analizzeremo le proprietà di topologie magnetiche di confinamento sulla base di una analisi del moto "a particella singola", ossia studiando il moto di una particella (di riferimento) nel campo magnetico prodotto unicamente dalla struttura esterna. Questo calcolo non è corretto perché non tiene conto del contributo ai campi EM dovuto alle particelle del plasma che si muovono attorno alla particella di riferimento

Questa analisi è tuttavia sufficiente a predire effetti statici e dinamici calcolabili con modelli collettivi più elaborati

## *Moto di una particella carica in un campo magnetico*

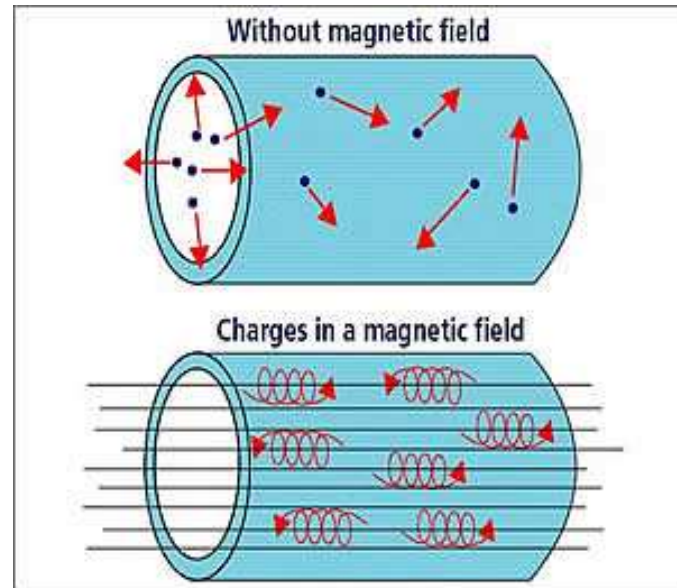
Il “confinamento” del plasma a distanze sufficientemente grandi da ridurre ad un valore accettabile l’interazione con contenitori meccanici può essere effettuato utilizzando la proprietà del moto delle particelle cariche in campi magnetici, che tendono ad “orbitare” attorno le linee di forza del campo.

Se le orbite hanno un raggio piccolo rispetto alle dimensioni del plasma e le linee di forza del campo si richiudono su se stesse, come in una geometria toroidale, in linea di principio particelle singole dovrebbero rimanere “intrappolate” dal campo

Il confinamento magnetico del plasma in un volume definito e’ un problema complesso,

- per il grande numero di particelle in gioco,
- per il fatto che, come abbiamo visto, l’insieme delle particelle che costituiscono il plasma ha un comportamento collettivo, perché
- si verificano moti di **diffusione** dovuti alle collisioni e, (come vedremo) di **deriva**, attraverso le linee del campo magnetico.

Inizieremo studiando il moto di particelle singole in varie topologie di campo magnetico e sotto l’azione di campi di forze diversi.



## *Confinamento magnetico di un plasma*

La dinamica di un plasma e' complicata perché il moto di elettroni e ioni e' determinato non solo da campi elettrici e magnetici esterni, ma perché l'azione dei campi esterni e' modificata dal moto delle cariche stesse. In queste prime lezioni considereremo il moto di particelle "singole" in campi magnetici ed elettrici esterni, con l'ipotesi che questi non siano modificati dal moto delle cariche.

Una particella di massa  $m$ , dotata di una carica  $q$ , sottoposta all'azione di un campo elettrico ( $\mathbf{E}$ ) e di un campo magnetico di induzione ( $\mathbf{B}$ ), risente, come è ben noto, di una forza elettrica  $q \mathbf{E}$  e di una forza di Lorentz  $q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , quindi l'equazione del moto della particella può essere espressa come:

$$(XIV-1) \quad \underbrace{m \frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{\text{variazione della quantita' di moto}} = \underbrace{q \left( \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right)}_{\substack{\text{carica campo elettrico} \\ \text{velocita' campo magnetico}}}$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità istantanea della particella. Si noti che questa equazione vale in generale anche se i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono variabili nel tempo e non uniformi nello spazio.

Cominciamo a considerare il caso più semplice di una particella carica che si muove solo sotto l'influenza di un campo magnetico statico, cioè costante nel tempo

## *Moto in un campo magnetico $B = \text{cost}$*

L'equazione del moto una particella che si muove in un campo magnetico con velocità  $\mathbf{v}$ , e':

$$(XIV-2) \quad m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

La componente della velocità  $\mathbf{v}$  nel piano perpendicolare a  $\mathbf{B}$  ( $v_{\perp}$ ) e' parallela alla traiettoria del moto e l' accelerazione e' perpendicolare alla traiettoria. Il moto e' avviene in condizione di equilibrio tra la forza centrifuga e della forza di Lorentz  $m\frac{v_{\perp}^2}{r_L} = |q|v_{\perp}B$

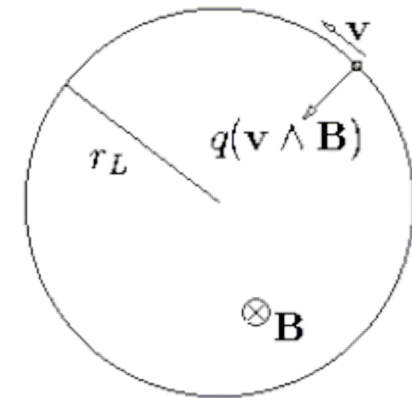
$$(XIV-3) \quad mr_L\Omega^2 = m\frac{v_{\perp}^2}{r_L} = |q|v_{\perp}B$$

Dove  $r_L$  e' il raggio della curvatura della traiettoria. Se  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}$  sono costanti,  $r_L$  e' costante e la traiettoria e' un cerchio di raggio  $r_L$  nel piano perpendicolare a  $\mathbf{B}$  (vedi figura) .

Dalla (XIV-3) deduciamo due quantità im

$$(XIV-4) \quad \Omega^2 = v_{\perp}^2 / r_L^2 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \Omega &= \frac{|q|B}{m} \\ r_L &= \frac{v_{\perp}}{\Omega} \end{aligned}$$

ha le dimensioni di una frequenza angolare e viene chiamata **frequenza (angolare) di ciclotrone** e  $r_L$  **raggio di Larmor**



## *Moto in un campo magnetico costante*

L'energia cinetica della particella e' costante: infatti moltiplicando entrambi i membri della (XIV-2) scalarmente per  $m\mathbf{v}$  si ottiene

$$(XIV-5) \quad m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0.$$

Per un moto con velocità in direzione arbitraria rispetto al campo magnetico conviene separare le componenti parallela  $\mathbf{v}_{//}$  e perpendicolare  $\mathbf{v}_{\perp}$  al campo magnetico.  $\mathbf{v}_{//} = \text{cost}$ , dato che  $a_{//} \propto \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = 0$ , a cui corrisponderà un moto uniforme nella direzione del campo magnetico  $\mathbf{B}$ .

Per studiare il moto nel piano perpendicolare assumiamo  $\mathbf{B}$  diretto come  $z$  e scomponiamo la (XIV-2) lungo gli assi  $x$  e  $y$ .

$$(XIV-6) \quad m\dot{v}_x = qv_y B, \quad m\dot{v}_y = -qv_x B$$

ossia:

$$(XIV-7) \quad \ddot{v}_x = \frac{qB}{m} \dot{v}_y = - \left( \frac{qB}{m} \right)^2 v_x = -\Omega^2 v_x$$

La soluzione, assumendo la fase iniziale nulla:

$$v_x = v_{\perp} \cos \Omega t$$

## *Moto in un campo magnetico costante*

Sostituendo nella (XIV-6-2)

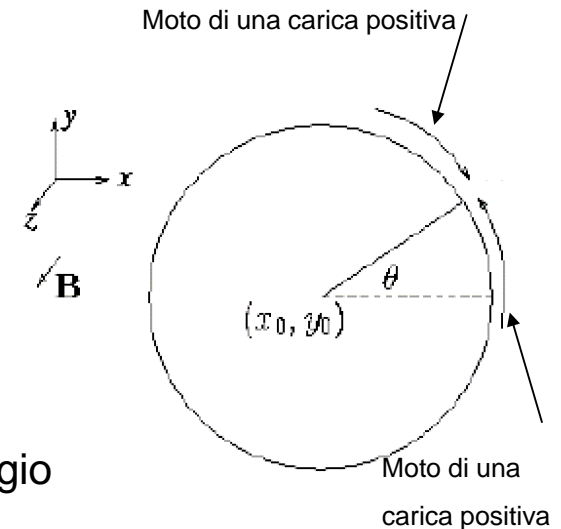
$$(XIV-8) \quad v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = -\frac{|q|}{q} v_{\perp} \sin \Omega t$$

Le (XIV-7) e (XIV-8) integrate rispetto al tempo danno:

$$(XIV-9) \quad x = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \Omega t \quad , \quad y = y_0 + \frac{q}{|q|} \frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos \Omega t$$

Che rappresenta un cerchio con centro di coordinate  $x_0, y_0$  e raggio

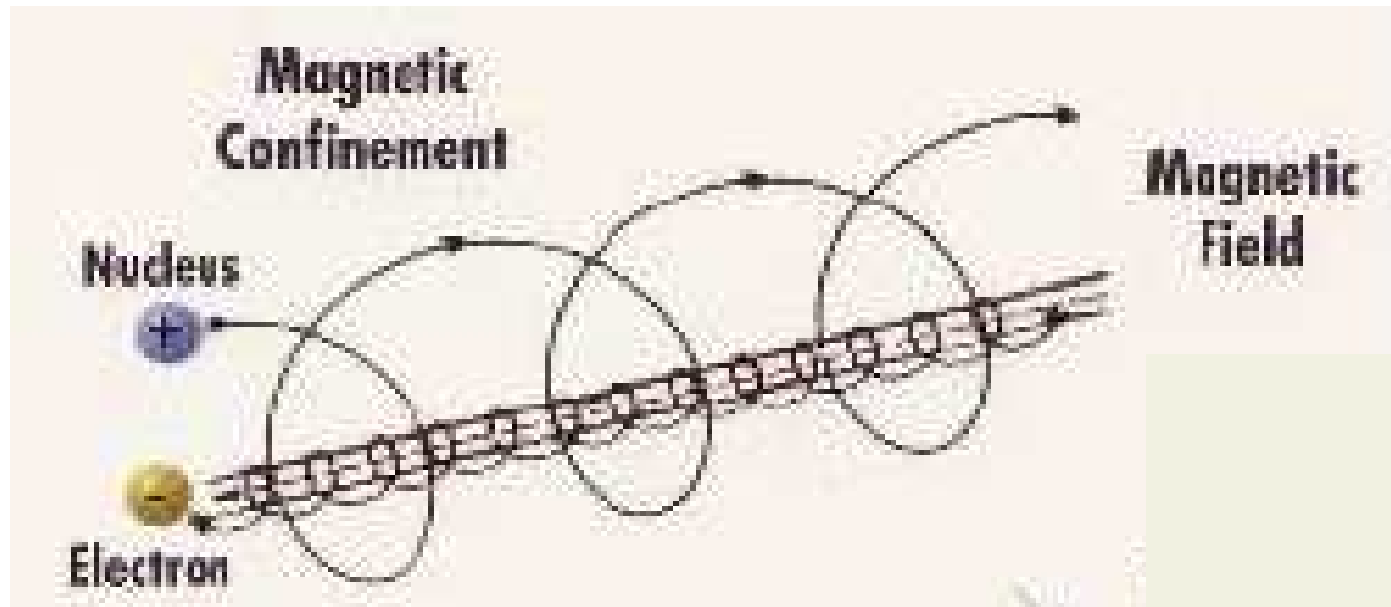
$$(XIV-10) \quad r_L = v_{\perp} / \Omega$$



Dall' equazione del moto si deduce anche che **cariche positive ruotano in senso orario** e **cariche negative in senso anti-orario**. Questa proprietà fa sì che i campi magnetici prodotti dal moto di entrambe le componenti di un plasma (elettroni e ioni) si oppongano al campo magnetico esterno. (diamagnetismo del plasma).

## *Moto in un campo magnetico costante*

In conclusione il moto di una particella carica in un campo magnetico costante è un'elica che si avvolge attorno alle linee di campo. È evidente come il campo magnetico abbia proprietà di confinamento del moto di particelle cariche





## *Raggi di girazione e frequenze ciclotroniche*

**Nota** : Il raggio di girazione degli elettroni e' molto più piccolo di quello degli ioni . Se assumiamo come  $v_{\perp} \sim v_{th} = (kT/m_i)^{1/2}$

$$R_i \sim (v_{th,i} / \Omega_i) ; R_e \sim (v_{th,e} / \Omega_e) \quad e \quad R_i / R_e = (m_i / m_e)^{1/2} \gg 1$$

$$\Omega = \frac{|q|B}{m}$$

$$R_i = v_{th,i} / \Omega_i = 100 (m_i / m_p)^{1/2} Z_i^{-1} [kT^{1/2} (eV) [B (Gauss)^{-1}] \quad m_p = \text{massa protone}$$

Il valore del raggio di girazione per un deutone in un plasma termonucleare  $(m_i / m_p) = 2$ : per  $T_e = 10 \text{ keV}$  ,  $B = 30 \text{ KGauss}$  :  $R_i \sim 0.5 \text{ cm}$ . Il raggio di girazione di un elettrone nelle stesse condizioni e'

$$(2 \cdot 1840)^{-1/2} \sim 1/60 \text{ volte inferiore.}$$

La rotazione delle varie componenti ioniche di un plasma magnetizzato da' origine a frequenze tipiche (**frequenze ciclotroniche**) che sono legate al valore del campo magnetico confinante

Dalla definizione si ottengono le seguenti formule:

Frequenza ciclotronica ionica :  $\Omega_{ci} = 9.58 \cdot 10^3 Z (m_p / m_i) B (Gauss) \text{ s}^{-1}$

Frequenza ciclotronica elettronica :  $\Omega_{ce} = 1.75 \cdot 10^7 B (Gauss) \text{ s}^{-1}$

Da confrontare con la frequenza di plasma  $\omega_{pe} = 5.64 \cdot 10^4 n_e^{1/2} (\text{cm}^{-3}) \text{ s}^{-1}$

## *Moto in B uniforme e $E \neq 0$*

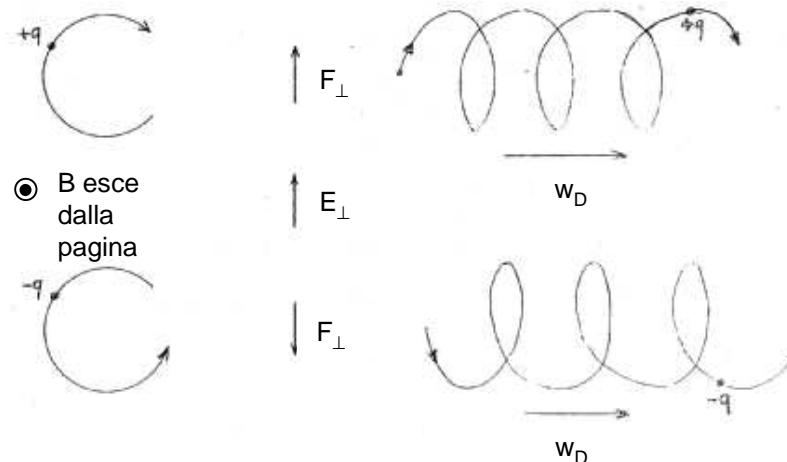
Equazione del moto:

$$(XIV-11) \quad m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

Se ancora si scompone il moto in direzione parallela e perpendicolare a B, in direzione parallela:

$$(XIV-12) \quad \dot{v}_{\parallel} = \frac{qE_{\parallel}}{m}$$

A cui corrisponde in moto uniformemente accelerato in direzione parallela alle linee di campo magnetico. Nel piano perpendicolare il campo elettrico e', per  $q > 0$  accelerante verso l'alto e ritardante verso il basso. Pertanto il raggio di curvatura e' maggiore in alto. Le orbite non sono più circolari e si osserva un moto di deriva in direzione ortogonale a B e ad E.



Per cariche negative il raggio di curvatura e' maggiore in basso e il moto di deriva avviene nella stessa direzione

## *Moto in B uniforme e $E \neq 0$*

Matematicamente il problema e' ridotto a trovare una velocità di deriva tale che:

$$(XIV-13) \quad \mathbf{E} + \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B} = 0$$

Infatti la somma di questa velocità più la velocità di girazione

$$(XIV-14) \quad \mathbf{v}_L = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_L e^{i\Omega(t-t_0)}] \quad \left| \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \right.$$

calcolata per  $\mathbf{E}=0$  soddisferà alla (XIV-1). Se si moltiplica la (XIV-13) per  $\wedge \mathbf{B}$  :

$$(XIV-15) \quad 0 = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} + (v_d \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - B^2 \mathbf{v}_d$$

Si ottiene l' espressione della velocità di deriva elettrica :

$$(XIV-16) \quad \mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

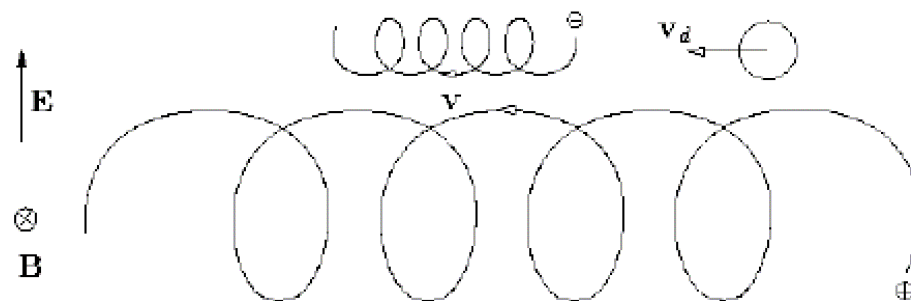
Pertanto la soluzione globale e'

$\mathbf{v} =$	$\mathbf{v}_{\parallel}$	$+$	$\mathbf{v}_d$	$+$	$\mathbf{v}_L$
	Velocità parallela		Velocità di deriva		Velocità di girazione

## *Moto in $B$ uniforme e $E \neq 0$*

Il moto di deriva elettrica:

- e' indipendente dai parametri della particella che deriva (carica, massa, velocità o altro)
- avviene nella stessa direzione per ioni ed elettroni
- rappresenta pertanto un moto di insieme del plasma



## *Derive dovute a forze non elettriche*

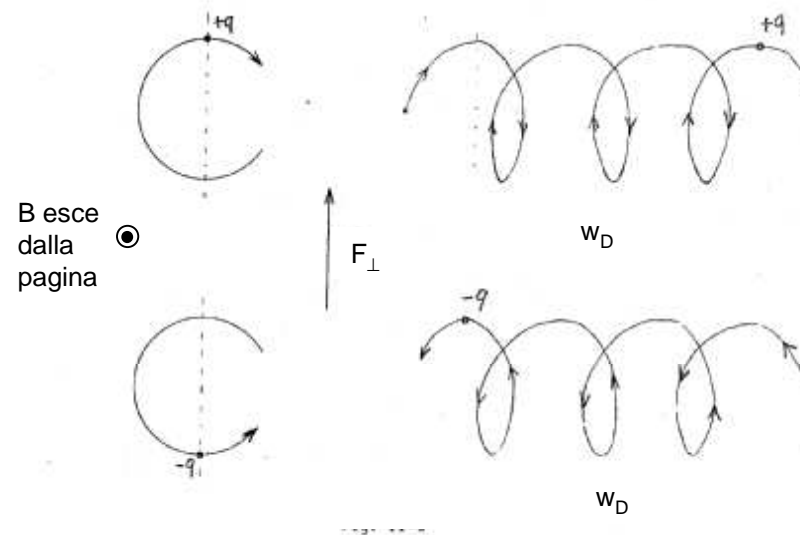
Equazione del moto:

$$(XIV-17) \quad m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = q \left( \frac{1}{q} \mathbf{F} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right)$$

La soluzione e' simile al caso precedente con  $\mathbf{F}/q$  che rimpiazza  $\mathbf{E}$

$$(XIV-18) \quad \mathbf{v}_d = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

In questo caso, la deriva delle cariche soggette alla stessa forza e' in direzione opposta,



## *Derive dovute a disuniformità del modulo di B*

Le disuniformità del campo magnetico possono essere in modulo (che non è costante in funzione dello spazio) o dovuta alla curvatura delle linee di forza. In generale le due disuniformità sono associate, perché l'andamento delle linee di forza deve soddisfare le equazioni di Maxwell. Per semplicità considereremo prima separatamente e poi insieme i due effetti.

Il problema è trattato approssimativamente, assumendo che la variazione del campo magnetico sia piccola sulla lunghezza del raggio di girazione, ossia

$$(XIV-19) \quad r_L \ll B/|\nabla B|$$

(orbite quasi circolari). In questo caso il campo magnetico può essere espresso con uno sviluppo di Taylor come

$$(XIV-20) \quad \mathbf{B} \simeq \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

dove  $\mathbf{B}_0$  è costante

Si cerca ancora qui una soluzione di deriva a velocità costante nel piano ortogonale alla linea di forza.  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_L$ . Sostituendo nella (XIV-17)

$$(XIV-22) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \dot{\mathbf{v}}_L = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q[\mathbf{v}_L \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}_0 + (\mathbf{v}_L + \mathbf{v}_d) \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}]$$

## *Derive dovute a disuniformità del modulo di B*

ossia:

$$(XIV-23) \quad m \dot{\mathbf{v}}_L = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \cancel{\mathbf{v}_d \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}}$$

L'ipotesi  $r_L \ll B/|\nabla B|$  implica che anche  $v_d/v_L \ll 1$ , pertanto l'ultimo termine della (XIV-23) è del II ordine rispetto ai primi due e può essere trascurato.

Sia  $\mathbf{v}_L$  che  $\mathbf{r}_L$  sono delle quantità periodiche nel tempo. Se si compie la sostituzione :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_L$$

la (XIV-23) diventa :

$$(XIV-24) \quad m \dot{\mathbf{v}}_L = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}_L \cdot \nabla) \mathbf{B} + \cancel{\mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}}$$

L'ultimo termine della (XIV-24) è un termine del tipo  $\propto e^{-i\Omega t}$ . Se si prendono i valori medi rispetto ad un periodo della (XIV-24) si ottiene pertanto:

$$(XIV-25) \quad 0 = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B} + \langle \mathbf{v}_L \wedge (\mathbf{r}_L \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle$$

## *Derive dovute a disuniformita' del modulo di B*

Per calcolare il valor medio del tl termine della (XIV-25), si utilizzano i valori di  $\mathbf{v}_L$  che  $\mathbf{r}_L$  ottenuti per on B costante :

$$(XIV-26) \quad \mathbf{r}_L = (x_L, y_L) = \frac{v_\perp}{\Omega} \left( \sin \Omega t, \frac{q}{|q|} \cos \Omega t \right)$$

$$(XIV-27) \quad \mathbf{v}_L = (\dot{x}_L, \dot{y}_L) = v_\perp \left( \cos \Omega t, \frac{-q}{|q|} \sin \Omega t \right)$$

Se si assume che  $\nabla B$  sia nella direzione y si ottiene :

$$(XIV-28) \quad [v_L \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_x = v_y y \frac{d}{dy} B$$

$$(XIV-29) \quad [v_L \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_y = -v_x y \frac{d}{dy} B$$

Facendo le medie su un periodo con le assunzioni fatte:

$$(XIV-30) \quad \langle v_y y \rangle = -\langle \cos \Omega t \sin \Omega t \rangle \frac{v_\perp^2}{\Omega} = 0$$

$$(XIV-31) \quad \langle v_x y \rangle = \frac{q}{|q|} \langle \cos \Omega t \cos \Omega t \rangle \frac{v_\perp^2}{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{\Omega} \frac{q}{|q|}$$



## *Derive dovute a disuniformita' del modulo di B*

Pertanto la (XIV-25) diventa :

$$(XIV-32) \quad 0 = \mathbf{v}_d \wedge \mathbf{B} - \frac{q}{|q|} \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \nabla B$$

Da cui si ricava la velocità di deriva come nel caso precedente:

$$(XIV-33) \quad \mathbf{v}_d = \frac{\left( \frac{-1}{|q|} \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \nabla B \right) \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \frac{q}{|q|} \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^2}$$

ossia :

$$(XIV-34) \quad \mathbf{v}_d = \frac{1}{q} \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^2}$$

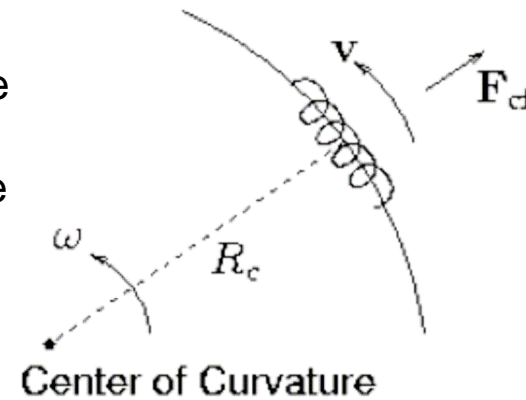
La deriva e' ancora perpendicolare sia a  $\mathbf{B}$  che a  $\nabla B$  e dipende dal segno della carica.

Pertanto la deriva dovuta a  $\nabla B$  tende a separare elettroni e ioni e pertanto generare campi elettrici a ll' interno del plasma. Questi a loro volta generano derive  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , che provocano una deriva ortogonale di entrambe le cariche

## *Deriva dovute alla curvatura delle linee di campo*

Consideriamo ora il caso di una particella che si muove orbitando lungo una linea di forza curva, con raggio di curvatura  $R_c$ . La sua velocità ha dunque una componente parallela alla linea di campo. Nel sistema di riferimento del centro di guida appare una forza  $F_{cf}$  (centrifuga, che è dovuta al moto sulla traiettoria curva e, che scritta vettorialmente vale :

$$(XIV-35) \quad \mathbf{F}_{cf} = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}$$



Usando la formula precedente per la deriva :

$$(XIV-36) \quad \mathbf{v}_d = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_{cf} \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \wedge \mathbf{B}}{R_c^2}$$

## *Deriva dovuto a disuniformità di campo ( $\nabla B$ & $R_c$ )*

In generale curvatura e gradiente del modulo sono legate fra di loro perché il campo magnetico deve soddisfare alle equazioni di Maxwell. Pertanto le derivate di  $\nabla B$  e  $R_c$  sono in generale associate

Un caso di particolare interesse è la deriva in una zona dello spazio in cui la densità di corrente è nulla:  $\mathbf{j} = 0$  (Campo magnetico nel vuoto)

Nel caso statico sarà

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{B}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{r} + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{z}$$

(XIV-37)  $\nabla \wedge \mathbf{B} = 0$

In coordinate polari  $r, \theta, z$  se si sceglie  $B_r = 0$

(XIV-38)

$$0 = (\nabla \wedge \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta)$$

ossia

(XIV-39)

$$= \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \quad \longrightarrow \quad (\nabla B)_r = -\frac{B}{R_c}$$

È inoltre :

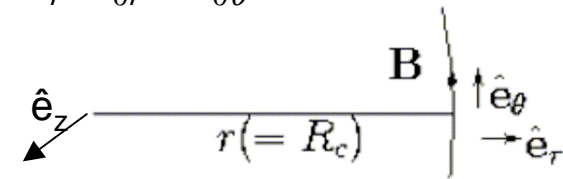
(XIV-40)

$$0 = (\nabla \wedge \mathbf{B})_\theta = \partial B_\theta / \partial z \quad \mathbf{e} \quad [(\nabla B)_z = 0]$$

pertanto:

(XIV-41)

$$(\nabla B)_{\text{perp}} = -B \mathbf{R}_c / R_c^2.$$



## *Deriva dovuto a disuniformità di campo ( $\nabla B$ & $R_c$ )*

La velocità di deriva globale dovuta al gradiente del campo e' pertanto:

$$(XIV-42) \quad \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^3} = \frac{m v_{\perp}^2}{2q} \frac{\mathbf{R}_c \wedge \mathbf{B}}{R_c^2 B^2}$$

e la velocità di deriva totale e':

$$(XIV-43) \quad \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{q} \left( mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R}_c \wedge \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} .$$

Pertanto:

- le derive  $R_c$  &  $\nabla B$  avvengono nella stessa direzione e i loro effetti si sommano
- avvengono in direzioni opposte per cariche opposte
- le velocità di deriva sono proporzionali all' energia cinetica delle particelle
  - curvatura  $\rightarrow$  energia parallela x2
  - $\nabla B$   $\rightarrow$  energia perpendicolare

## *Deriva dovuto a disuniformità di campo ( $\nabla B$ & $R_c$ )*

Ad esempio la velocità di deriva media di particelle aventi una distribuzione termica maxwelliana dato che e'

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right\rangle = \frac{kT}{2}$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right\rangle = k T \quad (2 \text{ gradi di liberta'})$$

$$\langle \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} \rangle = \frac{2T}{q} \frac{\mathbf{R}_c \wedge \mathbf{B}}{R_c^2 B^2}$$

Esercizio: Calcolare la velocità di deriva di un protone di energia cinetica  $K = 10$  keV .