

Dinamica dei fluidi viscosi

Secondo l'equazione di Bernoulli, quando un fluido scorre con regime stazionario in un lungo e stretto condotto orizzontale avente sezione trasversale costante, la pressione lungo il condotto è costante. In pratica, viceversa, si osserva un calo di pressione nella direzione del flusso. In altre parole, è necessaria una differenza di pressione per spingere un fluido lungo un condotto orizzontale.

Questa differenza di pressione è necessaria perché allontanandosi dalla superficie del condotto, la velocità di strati adiacenti del fluido è leggermente maggiore della velocità dello strato immediatamente più esterno, e ciascuno strato è trattenuto dalle forze esercitate su di esso dallo strato più interno che ha un moto leggermente più lento. Queste forze tra strati di fluido adiacenti sono dette **forze viscosi**. Come conseguenza delle forze viscosi, la velocità del fluido non è costante attraverso un diametro del condotto. Risulta infatti maggiore vicino al centro del condotto e tende a zero dove il fluido si trova a contatto con le pareti del condotto, come sarà mostrato in seguito.

Abbiamo visto nella Lezione 2 che il **tensore degli sforzi** , che esprime le *forze di superficie all'interno di un fluido ideale* può essere scritto nella forma:

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j \quad 6.1)$$

dove $\rho u_i u_j$ rappresenta **sforzi di taglio**, e descrive matematicamente il fenomeno *reversibile* di trasferimento di momento, dovuto al trasporto meccanico di differenti elementi fluidi da una posizione all'altra dello spazio.

Abbiamo anche visto che l'equazione del moto di un elemento fluido si può scrivere (come l'equazione di continuità e dell'energia) nella forma di un'equazione di conservazione del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{array}{c} \text{quantità} \\ \text{fisica} \end{array} \right) + \text{divergenza (flusso di } \begin{array}{c} \text{quantità} \\ \text{fisica} \end{array}) = 0 \quad 3.24)$$

ad esempio per la massa per unità di volume:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Nel caso della **quantità di moto** $\rho \mathbf{u}$, che è una quantità vettoriale, il tensore degli sforzi

$$P_{ij} = p \delta_{ij} + \rho u_i u_j$$

compare come

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

e assume il significato fisico di **flusso della densità di momento** dato che

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathbf{u} \, dV = - \int \nabla \cdot \mathbf{P} \, dV = - \int_S \mathbf{P} \, dS$$

↑
quantità di moto per
unità di volume

↑
flusso della quantità
di moto per unità di
volume

La **viscosità** o attrito interno tra elementi fluidi è invece dovuta a un altro tipo di *trasferimento (irreversibile) di momento tra punti dove la velocità è elevata a punti in cui è inferiore*. Il profilo di velocità nello strato di contatto tra due fluidi che si muovono a differenti velocità è schematizzato in Figura. 6.1 . Gli strati del fluido più veloce vengono rallentati a causa degli sforzi tangenziali con strati più lenti, mentre questi ultimi vengono trascinati a velocità maggiori.

Esiste dunque una forza lungo la direzione del flusso (x) che agisce sulla superficie con normale nella direzione perpendicolare (y) di cui è necessario tenere conto aggiungendo un termine al tensore degli sforzi ossia :

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j + \Pi_{ij} \quad (6.2)$$

dove σ'_{ij} è detto *tensore di stress viscoso*

Come si è visto la forza di attrito è tanto maggiore quanto maggiore è la differenza di velocità, per cui, in prima approssimazione, si potrà porre

$$\Pi_{xy} = -\eta \frac{du_x}{dy} \quad (6.3)$$

dove η è il coefficiente di viscosità e il segno negativo indica che la direzione della forza è contraria alla direzione del gradiente di velocità. Fluidi che soddisfano questa relazione empirica sono detti **fluidi newtoniani**;

Dati sperimentali di laboratorio mostrano che la condizione (4.2) è molto ben verificata.

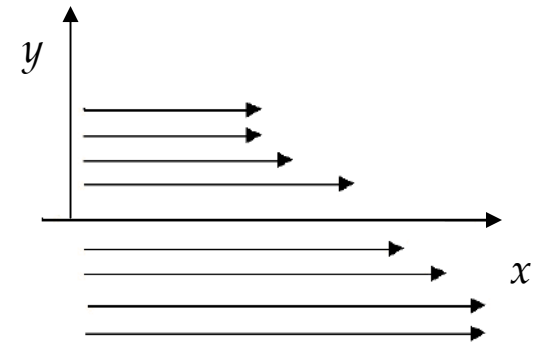


Figura. 6.1

Scriviamo ora, nel limite newtoniano e in un caso bidimensionale, un' espressione generica per il tensore degli sforzi Π_{ij} , che 1) *deve contenere solo termini del tipo $\partial u_i / \partial x_j$* in quanto **deve annullarsi per $\mathbf{u} = \text{costante}$** . 2) **deve pure annullarsi per il caso di rotazione uniforme**, perché anche in tal caso non esistono attriti interni nel fluido. Nel caso di rotazione uniforme, le velocità sono eguali a $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, dove $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare. Le somme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (6.4)$$

sono combinazioni lineari delle componenti del gradiente della velocità che si annullano per $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ con $\boldsymbol{\Omega} = \text{costante}$. Pertanto il più generale tensore di rango due che soddisfi le suddette condizioni è:

$$\Pi_{ij} = a \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + b \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (6.5)$$

con a e b indipendenti dalla velocità. Il termine $b \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}$ è un tensore diagonale, quindi del tipo $p \delta_{ij}$. È possibile usare una forma leggermente diversa con nuove costanti in modo da separare la parte di tensore a traccia nulla da quella diagonale:

$$\Pi_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (6.6)$$

Le costanti η e ζ sono i **coefficiente di viscosità**, ambedue sono positivi.

$$\Pi_{ij} = a \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + b \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$\Pi = a \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Pi_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$\Pi = \eta \cdot \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \zeta \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Alcuni autori includono direttamente l'ultimo termine della (6.6) nella parte diagonale di \mathbf{P}_{ij} , insieme a $p \delta_{ij}$, distinguendone in tal modo la parte isotropa solo diagonale da quella tangenziale a traccia nulla.

Dal punto di vista sperimentale queste due possibilità sono indistinguibili; dal punto di vista teorico va invece notato che la pressione isotropa normale che compare anche nell'equazione dell'energia risulta incrementata da questo contributo degli attriti interni.

Il termine $\partial/\partial x_i(\Pi_{ij})$ diventa:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \mathbf{u}) \quad (6.8)$$

con $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ e $\Delta \cdot u_k = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2}$ (6.9)

Utilizzando l'espressione del tensore degli sforzi ora ricavata, possiamo riscrivere l'equazione di Eulero come

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho \mathbf{f} \quad (6.10)$$

con

$$P_{ij} = p \delta_{ij} + \rho u_i u_j + \Pi_{ij} \quad (6.11)$$

nel caso di **fluidi viscosi** nella forma:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \quad (6.12)$$

Poiché i coefficienti di viscosità possono essere considerati praticamente costanti nella maggior parte delle applicazioni, otteniamo l' **equazione di Navier-Stokes**:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (6.13)$$

dove l'ultimo termine compare solo per fluidi compressibili dato che per fluidi incompressibili si è visto che $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Per fluidi incompressibili otteniamo la cosiddetta equazione di Navier-Stokes (1822-43):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6.14)$$

La quantità

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (6.15)$$

è detta *viscosità cinematica*, mentre η è spesso chiamata *viscosità dinamica* e si verifica sperimentalmente che varia rapidamente con la temperatura.

Equazione di Navier -Stokes

Tipici valori dei coefficienti di viscosità per alcuni liquidi sono riportati nella tabella

	η (g/cm sec)	ν (cm ² /sec)
Water	0.010	0.010
Air	0.00018	0.150
Alcohol	0.018	0.022
Glycerine	8.5	6.8
Mercury	0.0156	0.0012

L'equazione di Navier-Stokes è dal punto di vista matematico molto differente dall'equazione di Eulero per fluidi non viscosi in quanto contiene derivate spaziali del second'ordine; e richiede quindi un maggior numero di condizioni al contorno.

La tipica condizione che si impone al contatto con superfici solide è che *la velocità di flusso si annulli* $\mathbf{u} = 0$: gli esperimenti mostrano infatti che fluidi viscosi aderiscono alle pareti (si pensi alla difficoltà di pulire una superficie impolverata semplicemente soffiando aria). La stessa condizione sulla velocità nel caso dell'equazione di Eulero sovra condizionerebbe il problema; infatti, come abbiamo visto, *nei fluidi ideali è richiesto solo l'annullarsi della velocità normale alla superficie di contatto* $\mathbf{u}_n = 0$.

La forza agente sull'area elementare di una superficie a contatto con il fluido; è uguale al flusso di momento (non c'è trasferimento di momento dovuto alla velocità perché sulla superficie di contatto si assume $\mathbf{u} = 0$):

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbb{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (6.16)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale uscente dal fluido ed entrante nella superficie; il primo termine è dato dalla normale pressione del fluido, il secondo dagli sforzi di taglio, cioè dagli effetti di attrito interno o viscosità.

Passiamo ora all'analisi dell'equazione della vorticità in presenza dei termini viscosi: prendendo il rotore della (6.14) si ottiene per fluidi incompressibili o barotropici:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad . (6.17)$$

Il teorema di Kelvin **non si applica** a questa espressione perché ora le forze viscosse possono creare vorticità. Invece rimangono valide le considerazioni circa la possibilità di trattare la dinamica dei fluidi incompressibili senza utilizzare l'equazione dell'energia che risulta ridondante; i problemi possono essere risolti utilizzando la (6,17) insieme le equazioni alle:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$$

quando sia noto il coefficiente di viscosità η

Nella trattazione macroscopica i coefficienti di viscosità possono essere solo dedotti da misure sperimentali, perché il modello non consente di entrare nei dettagli delle forze che agiscono a livello microscopico tra le componenti di fluidi diversi.

Come esempio dell'applicazione dell'equazione di Navier-Stokes studiamo **il moto stazionario** ($\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{0}$) **di un fluido viscoso all'interno di un tubo orizzontale di lunghezza l** a sezione circolare di raggio a . Si assume un sistema di coordinate spaziali r, θ, x , e una simmetria assiale, $\partial / \partial \theta = 0$. Siano $\underline{u}(r, \theta, x)$ e $\underline{v}(r, \theta, x)$ componenti assiale e radiale della velocità \mathbf{u}

L' equazione di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6.18)$$

si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

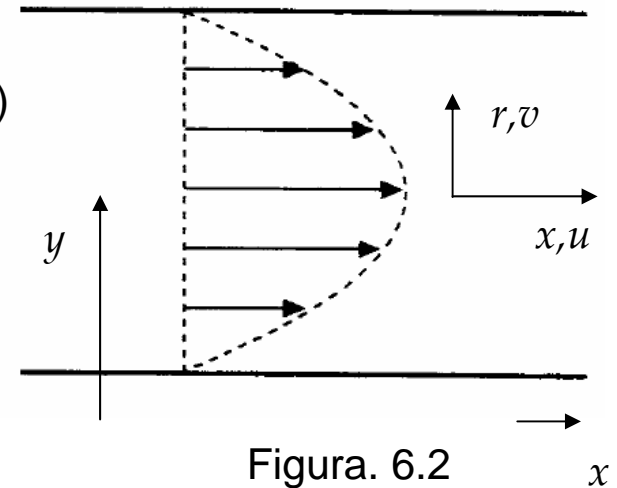


Figura. 6.2

Non essendovi forze esterne agenti, il moto del fluido sarà prodotto da una differenza di pressione Δp alle due estremità. Si assume il moto del flusso sia in regime laminare per cui anche la componente radiale velocità $v = 0$. Pertanto *vi sarà un moto solo nella direzione z con profilo (con un valore massimo per $r = 0$)*. Le equazioni (6.19) si riducono

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad \longrightarrow \quad u = u(r) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad \longrightarrow \quad P = P(x) \end{aligned} \quad \text{e} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (6.20)$$

η

La componente x dell'equazione di Navier-Stokes si riduce a :

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{dP}{dx} = 0. \quad (6.21)$$

Con $\eta = \nu/\rho$

Definita una variabile $G = -\frac{dP}{dx} \frac{1}{\eta}$ moltiplicando per r

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = -Gr \quad \text{ossia} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -Gr \quad (6.22)$$

Integrando una volta:

$$r \frac{du}{dr} = -\frac{1}{2} Gr^2 + c_1 \quad \text{ossia} \quad \frac{du}{dr} = -\frac{1}{2} Gr + \frac{c_1}{r} \quad (6.23)$$

E integrando una seconda volta:

$$u(r) = -\frac{G}{4} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (6.24)$$

Le costanti di integrazione si ottengono applicando *la condizione al contorno* di parete solida in corrispondenza del raggio R del tubo e una condizione al contorno di simmetria al centro del tubo stesso ($r = 0$).

$$u = 0 \quad \text{a} \quad r = R \quad \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{a} \quad r = 0 \quad (6.25)$$

Si ricava

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = \frac{G}{4} R^2 \qquad (6.26)$$

da cui risulta che il profilo di velocità nel tubo:

$$u(r) = \frac{-\frac{dP}{dx}}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

è parabolico..La velocità massima si ottiene in corrispondenza dell'asse del tubo e vale:

$$u_{max} = \frac{-\frac{dP}{dx}}{4\eta} R^2 \qquad (6.27)$$

La velocità media si ottiene integrando la (9.3.24) sulla superficie πR^2 della sezione del

$$u_{med} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r) r dr d\theta \quad \longrightarrow \quad u_{med} = \frac{-\frac{dP}{dx}}{8\eta} R^2 = \frac{1}{2} u_{max} \qquad (6.28)$$

Per una $\Delta x = l$ del condotto:

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \qquad (6.29)$$

corrispondente a un profilo parabolico, come illustrato in Fig. 4.1. La portata attraverso il tubo è:

$$Q = \int_0^a \rho u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} a^4 \qquad (6.30)$$

che è la ben nota **equazione di Hagen-Poiseuille** (1839-40).

La corrente laminare stazionaria che si sviluppa in un condotto coassiale, caratterizzato da un raggio interno R_i e da un raggio esterno R_e , soddisfa alla stessa equazione

$$u(r) = -\frac{G}{4}r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (6.31)$$

con diverse condizioni al contorno che sono di parete solida $du/dr = 0$ sia all' interno che all' esterno. Pertanto:

$$c_1 = \frac{-G(R_e^2 - R_i^2)}{4 \ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} \quad c_2 = \frac{G}{4}R_e^2 + \frac{-G(R_e^2 - R_i^2)}{4 \ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} \ln(R_e) \quad (6.32)$$

Il profilo di velocità risulta quindi:

$$u(r) = \frac{G}{4}(R_e^2 - r^2) + \frac{-G(R_e^2 - R_i^2)}{4 \ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} \ln\left(\frac{R_e}{r}\right) \quad (6.33)$$

La portata di massa si può calcolare come flusso di massa nella sezione anulare:

$$\dot{m} = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \rho u(r) r dr d\theta \quad (6.34)$$

ovvero

$$\dot{m} = \frac{\pi \rho G}{2} \int_{R_i}^{R_e} \left[r R_e^2 - r^3 + \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} r \ln\left(\frac{R_e}{r}\right) \right] dr \quad (6.35)$$

:Dato che

$$\int r \ln \left(\frac{R_e}{r} \right) = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{R_e}{r} \right) + \frac{r^2}{4}, \quad (6.36)$$

si ottiene infine

$$\dot{m} = \frac{\pi \rho G}{8} \left[R_e^4 - R_i^4 + \frac{(R_e^2 - R_i^2)^2}{\ln \left(\frac{R_i}{R_e} \right)} \right] \quad (6.37)$$

Queste formule sono verificate sperimentalmente nel caso di flussi a bassa velocità ed esperimenti basati su di esse sono in effetti utilizzati per misure di viscosità.

Nel 1833 Reynolds ha mostrato che all'aumentare di Δp e quindi della velocità, il flusso diventa irregolare nello spazio e nel tempo, con creazione di vortici, con il passaggio dal regime regolare (laminare) a quello irregolare (turbolento).

Quando il **numero di Reynolds** caratteristico di una corrente in un tubo, basato sul diametro D (o sull'altezza) e sulla velocità media u_{med} ,

$$R := \frac{u_{med} D}{\nu}, \quad (6.38)$$

è inferiore a 30, la corrente di Poiseuille rappresenta correttamente il flusso in *tutto* il tubo.

Se invece il valore di R caratteristico è maggiore di 30, pur mantenendosi inferiore al valore critico, possiamo ritenere valida la soluzione di Poiseuille solo ad una certa distanza dall'ingresso del tubo. Infatti si può in questo caso ritenere che il profilo di velocità in corrispondenza della sezione di ingresso sia praticamente uniforme e che il profilo parabolico si sviluppi gradatamente lungo il tubo a causa della presenza delle pareti solide (fig. 9.7).

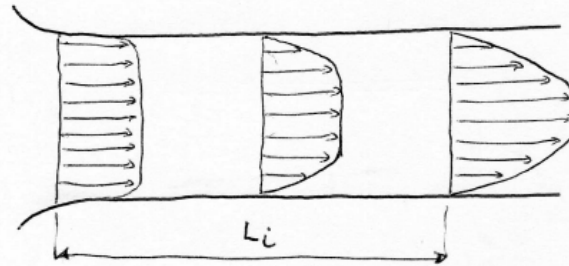


Figura. 6.3

Il profilo di velocità di ingresso uniforme, considerato inizialmente uniforme, si modifica di esso a causa della condizione di aderenza tra fluido e parete iniziando in prossimità della parete per poi propagarsi verso il centro del tubo mano a mano che aumenta la distanza dall'ingresso. Contemporaneamente, la velocità sull'asse del tubo deve aumentare per soddisfare il principio di conservazione della massa.

La lunghezza L_i rispetto all'entrata del tubo in cui si stabilisce il profilo di velocità parabolico (che rimane da lì in poi invariato) è detta lunghezza di ingresso (entry length) e può essere valutata con la formula empirica:

$$\frac{L_i}{D} \cong ARe$$

I valori di A riportati in letteratura sono $0,03 < A < 0,06$.

Numero di Reynolds

Consideriamo correnti fluide in regime viscoso intorno a oggetti geometricamente simili ma di diverse dimensioni. Le equazioni dinamiche possono essere scalate utilizzando:

- a lunghezza tipica L degli oggetti come unità di lunghezza,
- la velocità tipica V della corrente come unità di velocità,
- il tempo L/V come unità di tempo e
- V/L come unità della vorticità.

Si può pertanto operare un'adimensionalizzazione delle equazioni con:

$$x' = x/L, \quad \nabla' = L\nabla, \quad u' = u/V, \quad t' = tV/L, \quad \omega' = \omega L/V. \quad (6.39)$$

L'equazione della vorticità diventa:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} = \nabla' \times (\mathbf{u}' \times \omega') + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla'^2 \omega' \quad (6.40)$$

dove:

$$\mathcal{R} = \frac{LV}{\nu} \quad (6.41)$$

è un numero adimensionale chiamato **numero di Reynolds**.

Correnti fluide intorno a oggetti geometricamente simili, ma con lo stesso \mathcal{R} , soddisfano la stessa equazione e quindi avranno lo stesso profilo scalato per i differenti valori delle unità di misura.

Questo fatto va sotto il nome di **legge di similarità** (Reynolds 1883).

Per studiare il flusso aerodinamico intorno ad un'automobile oppure intorno ad un aereo, se ne può simulare l'andamento costruendo un modello in miniatura e generare un flusso che abbia lo stesso \mathcal{R} .

La legge di similarità è quindi un mezzo molto potente per esperimenti di fluidodinamica. È sufficiente eseguire esperimenti che per una data struttura coprano un intervallo significativo di numeri di Reynolds e i risultati danno un quadro completo per qualunque combinazione di L , V , ν .

Per $\mathcal{R} > 3000$ la situazione cambia drasticamente; si passa da un regime di flusso laminare stabile ad una situazione instabile con formazione di turbolenza.

In tal senso il caso di alti numeri Reynolds non corrisponde al limite di basse viscosità e quindi al regime di fluido ideale, come sembrerebbe suggerire la (6.14); ciò è dovuto proprio al diverso ordine dell'equazione differenziale. Alti numeri di Reynolds comportano sempre, anche per piccola viscosità, instabilità del flusso con generazione di vorticità.

Significato fisico di R

Il significato fisico del numero di Reynold si ricava direttamente dall'analisi dimensionale dell'equazione di N-S che, per un fluido incompressibile, in regime stazionario ed in assenza di forze esterne e di pressioni interne, assume la forma.

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

dove, come già notato, il termine al 1° membro rappresenta le forze inerziali applicate all'elemento fluido e il secondo le forze viscosse

L'analisi dimensionale da'

$$\frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} = \frac{|\mathbf{u}|}{\nu} \frac{|\mathbf{u}|}{L} = \frac{|\mathbf{u}|^2}{\nu L}$$

che indica l'importanza relativa degli effetti inerziali e viscosi:

$R \ll 1$ $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx 0$ Il moto avviene con un sostanziale equilibrio tra forze di pressione e viscosse (moto iniziale o creeping motion).

Caratteristiche :

1. il moto è reversibile: se esiste una soluzione per la velocità del fluido \mathbf{u} è anche vera la stessa soluzione con velocità $-\mathbf{u}$ se i gradienti di pressione sono scambiati.
2. L'interazione viscosa si estende su grandi distanze da un ostacolo

$R \gg 1$ Le forze viscosse possono essere trascurate perché dominate da quelle inerziali

Come notato, il caso di alti numeri Reynolds non corrisponde al limite di basse viscosità e quindi al regime di fluido ideale, come sembrerebbe suggerire la (6.14); perché se si trascura il termine viscoso si riduce di un ordine l'equazione differenziale, modificando in un modo essenziale la descrizione dinamica del moto, in particolare quella delle condizioni al contorno.

Quello che fisicamente succede è che il termine viscoso, pur diventando trascurabile nella maggior parte del volume occupato, mantiene valori elevati in vicinanza di un confine R si

Moto per fluidi incompressibili intorno a corpi solidi

Iniziamo a studiare moti a basso numero di Reynolds, $\mathcal{R} \ll 1$. L'equazione della vorticità diventa semplicemente:

$$\nabla'^2 \omega' = 0 \quad (6.42)$$

che, come mostrato da Stokes (1841), ammette una soluzione analitica nel caso di flusso intorno ad una sfera. Non analizziamo qui in dettaglio il calcolo, per il quale rimandiamo ad esempio al testo di Landau e Lifshitz (Fluid Mechanics 1987, § 20).

Si ricava che l'espressione per il flusso di un fluido incompressibile intorno ad una sfera di raggio a con velocità $\mathbf{U} = U\mathbf{z}$ all'infinito avrà in coordinate sferiche la forma:

$$u_r = U \cos \theta \left[1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right] \quad (6.43)$$

$$u_\theta = -U \sin \theta \left[1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right] \quad (6.44)$$

e distribuzione di pressione:

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \eta a \frac{\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.45)$$

dove \mathbf{r} è il versore nella direzione del raggio vettore.

Di conseguenza si può calcolare la forza esercitata dal fluido sulla sfera con la

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbb{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (6.46)$$

che diventa

$$F_{drag} = \int_S (-p \cos \theta + \Pi_{rr} \cos \theta - \Pi_{r\theta} \sin \theta) dS \quad (6.47)$$

integrata sull'intera superficie della sfera. Assumendo per asse polare la direzione parallela a \mathbf{U} , con le definizioni

$$\Pi_{rr} = 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \Pi_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (6.48)$$

si ricava che alla superficie della sfera:

$$\Pi_{rr} = 0 \quad \Pi_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2a} U \sin \theta \quad (6.49)$$

e inoltre:

$$p = p_0 - \frac{3\eta}{2a} U \cos \theta \quad (6.50)$$

Per tanto l'integrale per F si riduce a:

$$F_{drag} = \frac{3\eta U}{2a} \int_S dS = 6\pi\eta a U \quad (6.51)$$

che è nota come legge di Stokes; la forza in questione è chiamata drag nella letteratura scientifica. E' così risolto il paradosso di D'Alembert: la forza di drag esiste anche per velocità del flusso costante

Nel caso di moto ad alto numero di Reynolds, $\mathcal{R} \gg 1$, la (6.40) sembrerebbe avvicinarsi al limite dei fluidi ideali. In realtà, come già accennato, gli esperimenti mostrano che la situazione è molto più complessa. Alcuni esempi di flusso intorno ad un cilindro al crescere di \mathcal{R} sono illustrati in Figura. 6.4.

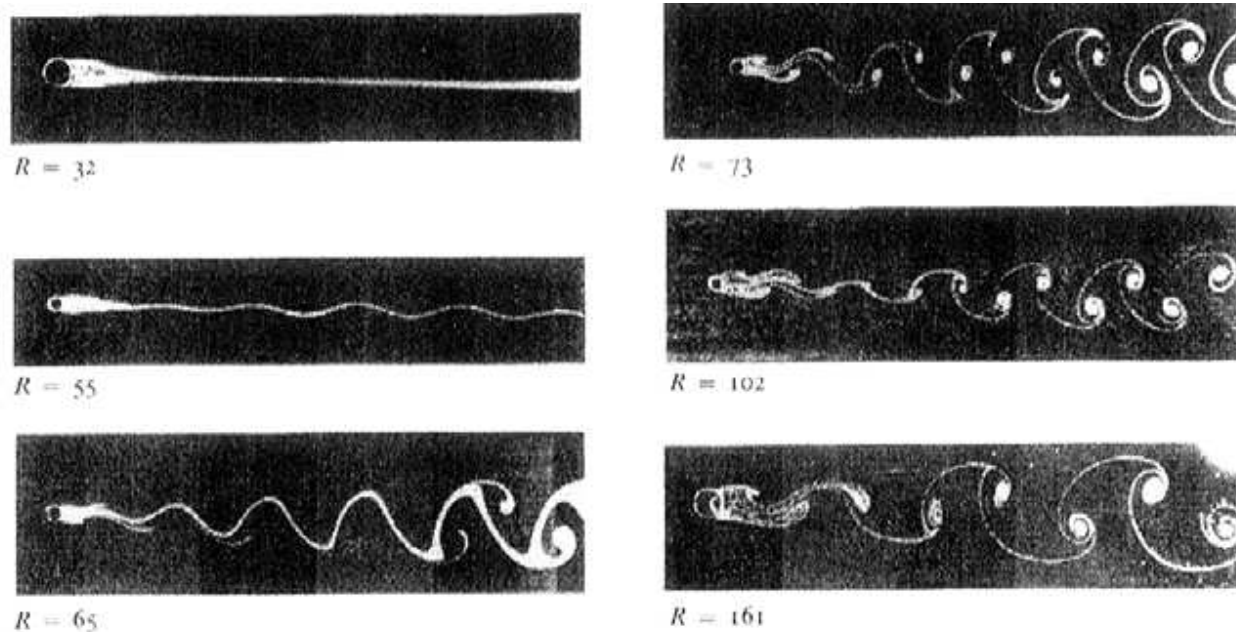


Figure 6.4. Flussi attorno un cilindro a crescenti numeri di Reynolds

Il flusso si mantiene laminare fino a $\mathcal{R} < 20$, successivamente ai lati si sviluppano due vortici a valle del flusso (a destra del cilindro nella figura), che si distaccano alternativamente da un lato e dall'altro a formare una stringa continua:

alla configurazione si dà il nome di cammino di vortici di Kármán, da von Kármán (1911) che ne studiò le caratteristiche.

Quando infine $\mathcal{R} > 10^4$ si forma una **scia turbolenta**, molto più larga di quanto predetto dal modello per $\mathcal{R} \ll 1$. Inoltre si misura sperimentalmente che la forza di frenamento sul cilindro è molto più grande di quella predetta dalla legge di Stokes; l'espressione empirica per il frenamento su una sfera è:

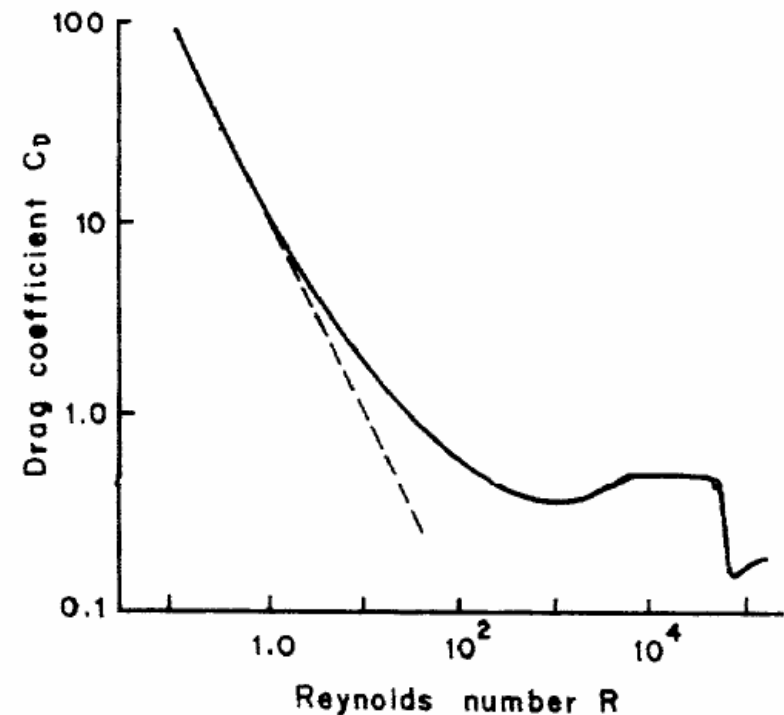
$$F_{drag} = \frac{1}{2} C_{drag} \pi a^2 \rho U^2 \quad (6.52)$$

dove C_{drag} è un fattore adimensionale sperimentale. In Figura 4.3 è riportato l'andamento di C_{drag} in funzione di \mathcal{R} , la legge di Stokes prevedrebbe un andamento

$$C_{drag} = \frac{12\eta}{a\rho U} = \frac{12}{\mathcal{R}}$$

che è indicato dalla linea tratteggiata. Il valore sperimentale si discosta invece sostanzialmente dalla legge di Stokes per $\mathcal{R} > 102$.

La spiegazione di questo comportamento dei fluidi viscosi con $\mathcal{R} \gg 1$ non aderente al comportamento di fluidi ideali risale a Prandtl (1905).



I comportamenti di un fluido ideale e di un fluido viscoso intorno ad un ostacolo solido sono sostanzialmente diversi. Il fluido ideale può avere una velocità tangenziale nelle vicinanze dell'ostacolo molto grande, eguale (a parte qualche fattore geometrico) sostanzialmente a quella della corrente fluida lontano dall'ostacolo. Nel caso del fluido viscoso invece la velocità tangenziale alla superficie dell'ostacolo deve essere nulla; lontano dall'ostacolo la velocità invece sarà molto simile a quella del caso ideale.

Ciò comporta che, quando la velocità del flusso cresce in un ristretto strato del fluido la velocità dovrà rapidamente passare dal valore nullo alla superficie dell'ostacolo al valore tipico nella corrente.

Pertanto in questo strato limite il termine $\nu \nabla^2 \cdot \mathbf{u}$ dell'equazione di Navier-Stokes risulterà sempre importante, anche per viscosità deboli, dati i forti gradienti spaziali della velocità.

L'allargarsi dello strato limite al contatto con ostacoli nella scia turbolenta a valle del flusso può essere interpretato con analoghe considerazioni. In condizioni di flusso stazionario la componente dell'equazione di Navier-Stokes nella direzione del flusso (Fig. 6.4) è:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad . \quad (6.53)$$

Sulla base delle considerazioni ora fatte, ci si aspetta che i termini $u_x \partial u_x / \partial x$ e $\nu \partial^2 u_x / \partial y^2$ siano dominanti nello **strato limite**, per cui

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \approx \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

o, in ordine di grandezza:

$$\frac{V^2}{L} \approx \nu \frac{V}{\delta^2}$$

dove δ è lo spessore dello strato limite e L la distanza a valle dal bordo dell'ostacolo.

Pertanto

;

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu L}{V}} \quad (6.54)$$

cioè lo spessore dello strato cresce come la radice della distanza verso valle.

La viscosità è chiaramente importante nella formazione della scia turbolenta.

Naturalmente nella scia si formano vortici instabili di varia scala in quanto non è più valido il teorema di Kelvin. L'energia di tali vortici turbolenti è prodotta dall'interazione tra corrente fluida e ostacolo che viene dissipata a valle e questo aumenta pertanto anche la forza di frenamento.

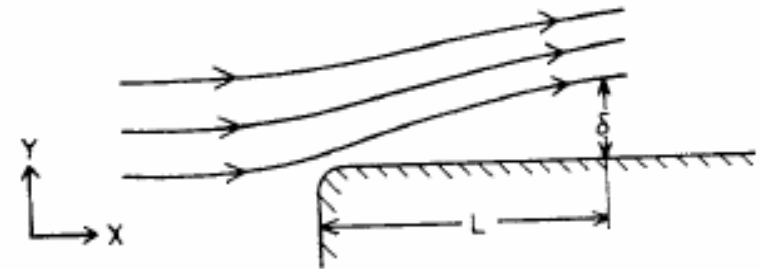
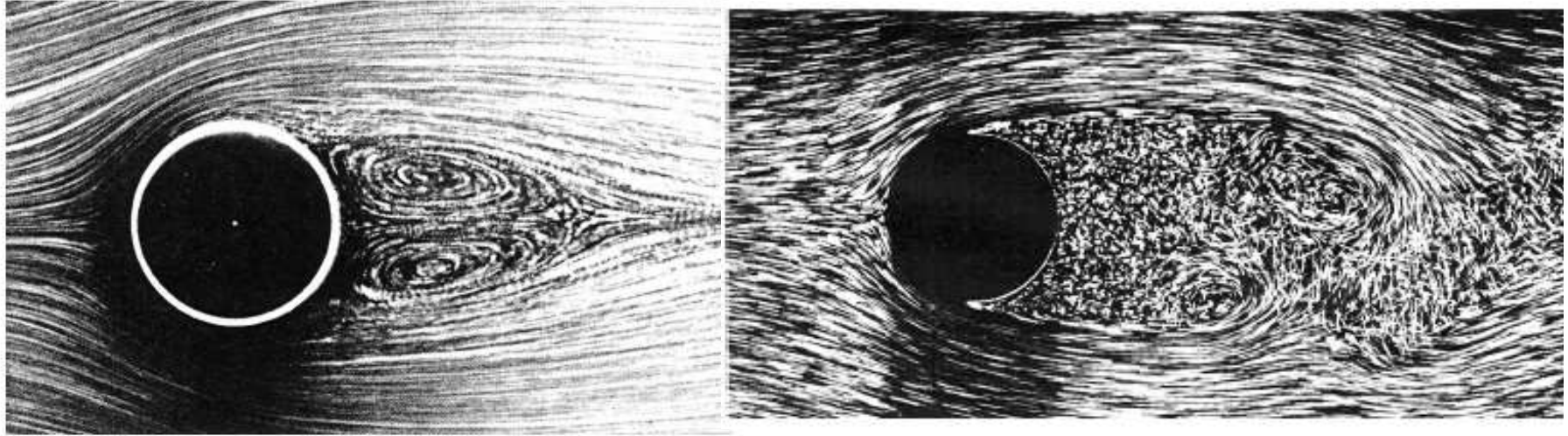


Figura 4.4 Strato limite intorno ad una superficie piana :



Scia dietro un cilindro di 6 mm di diametro, in acqua, visualizzata con bolle di idrogeno.
Sopra: velocità 0.5 cm/s ($Re = 26$), la scia è stazionaria e di lunghezza limitata.
Sotto: velocità 38 cm/s ($Re = 2000$), la scia è non stazionaria, con generazione periodica di vortici controrotanti .