Esercitazioni di Fisica Teorica

C. Giunti

Anno Accademico 2001-2002

`http://www.to.infn.it/~giunti/fisteo`

Versione corretta 4 Aprile 2013

Indice

Capitolo 1

Proprietà delle matrici γ di Dirac

Le matrici γ di Dirac sono un set di quattro matrici γ^0, γ^1, γ^2, γ^3 definite dalla relazione di anticommutazione

$$\boxed{\{\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\} = 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}} \qquad (\mu,\nu = 0,1,2,3)\,, \tag{1.1}$$

che garantisce la compatibilità dell'equazione di Dirac

$$(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0 \tag{1.2}$$

con l'equazione di Klein-Gordon, e dalla condizione

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0} \qquad (\mu = 0,1,2,3)\,, \tag{1.3}$$

che permette di dedurre dall'equazione di Dirac un'equazione di continuità con densità di probabilità definita positiva.

Una scelta specifica delle matrici che soddisfano alle (1.1) e (1.3) viene chiamata **rappresentazione delle matrici** γ (vedi il Capitolo 3).

Proprietà delle matrici γ di Dirac:

1-A. Prendendo $\mu \neq \nu$, le relazioni di anticommutazione (1.1) implicano che le quattro matrici γ^μ anticommutano tra di loro. Per $\mu = \nu$, le relazioni di anticommutazione (1.1) implicano che i quadrati delle matrici γ sono dati da

$$\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbb{1}\,, \tag{1.4a}$$

$$\left(\gamma^k\right)^2 = -\mathbb{1} \qquad (k = 1,2,3)\,. \tag{1.4b}$$

1-B. Dalle (1.1) e (1.3), segue che la matrice γ^0 è hermitiana,

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0\,, \tag{1.5a}$$

e le γ^k sono anti-hermitiane,

$$\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k\,. \tag{1.5b}$$

1-C. Le matrici di Dirac restano costanti per trasformazioni di Lorentz. Infatti, la loro definizione e' indipendente dal sistema di riferimento. Le matrici di Dirac con l'indice in basso (γ_0, γ_1, γ_2, γ_3) sono legate a quelle con l'indice in alto (γ^0, γ^1, γ^2, γ^3) dalla relazione

$$\gamma_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} \gamma^\nu = g_{\mu\mu} \gamma^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{1.6}$$

Perciò si ha

$$\gamma_0 = \gamma^0\,, \tag{1.7a}$$
$$\gamma_k = -\gamma^k \qquad (k = 1, 2, 3)\,. \tag{1.7b}$$

1-D. Le matrici γ hanno traccia nulla

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0\,. \tag{1.8}$$

Infatti, per esempio, utilizzando le relazioni di anticommutazione (1.1), per la traccia delle γ^k si ha (nella traccia dei prodotti di 3 matrici γ prima permutiamo circolarmente[1] e poi commutiamo tra di loro γ^0 e γ^k)

$$\mathrm{Tr}\big[\gamma^k\big] = \mathrm{Tr}\big[\gamma^0\gamma^0\gamma^k\big] = \mathrm{Tr}\big[\gamma^0\gamma^k\gamma^0\big] = -\mathrm{Tr}\big[\gamma^0\gamma^0\gamma^k\big] = -\mathrm{Tr}\big[\gamma^k\big] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\big[\gamma^k\big] = 0\,. \tag{1.9}$$

Per le tracce di prodotti di matrici γ si veda il Capitolo 8.

1-E. La dimensione N delle matrici γ è pari. Infatti, consideriamo per esempio la relazione

$$\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0 = (-\mathbb{1})\,\gamma^k\gamma^0\,. \tag{1.10}$$

Prendendone il determinante si ottiene

$$\mathrm{Det}\gamma^0\,\mathrm{Det}\gamma^k = (-1)^N\,\mathrm{Det}\gamma^k\,\mathrm{Det}\gamma^0\,. \tag{1.11}$$

Essendo $\mathrm{Det}\gamma^0 \neq 0$ e $\mathrm{Det}\gamma^k \neq 0$ (γ^0 e γ^k ammettono gli inversi), si trova

$$1 = (-1)^N \qquad \Longrightarrow \qquad N \quad \text{pari}\,. \tag{1.12}$$

1-F. La dimensione minima delle matrici γ è $N = 4$. Infatti, nel caso $N = 2$ esistono solo tre matrici mutuamente anticommutanti, le matrici di Pauli.

1-G. Poichè la matrice γ^0 è hermitiana e le matrici γ^k sono anti-hermitiane, le matrici γ possono essere diagonalizzate (non tutte simultaneamente, ma una alla volta, perchè anticommutano). Dalle relazioni (1.4) si ricava che gli autovalori della matrice γ^0 sono ± 1 e gli autovalori delle matrici γ^k sono $\pm i$.

---

[1] $\mathrm{Tr}[ABC] = \sum_\alpha (ABC)_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,\rho} A_{\alpha\beta} B_{\beta\rho} C_{\rho\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,\rho} B_{\beta\rho} C_{\rho\alpha} A_{\alpha\beta} = \sum_\beta (BCA)_{\beta\beta} = \mathrm{Tr}[BCA]$

È utile definire[2] la matrice γ^5:

$$\gamma^5 \equiv -i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,. \tag{1.13}$$

È importante notare che l'indice della γ^5 non è un indice di Lorentz e può stare indifferentemente in alto o in basso:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5\,. \tag{1.14}$$

Dalle proprietà delle matrici γ si ottiene che

$$\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0 \tag{1.15a}$$

$$\left(\gamma^5\right)^2 = \mathbb{1} \tag{1.15b}$$

$$\left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5 \tag{1.15c}$$

È anche utile definire le matrici

$$\alpha^k \equiv \gamma^0\,\gamma^k\,, \tag{1.16a}$$

$$\beta \equiv \gamma^0\,, \tag{1.16b}$$

che permettono di scrivere l'equazione di Dirac in forma hamiltoniana:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbb{H}\,\psi\,, \tag{1.17}$$

con[3]

$$\mathbb{H} = -i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta\,m\,. \tag{1.19}$$

Le matrici β e α^k sono hermitiane

$$\beta^\dagger = \beta\,, \qquad \left(\alpha^k\right)^\dagger = \alpha^k\,, \tag{1.20}$$

per cui l'hamiltoniana di Dirac (1.19) è hermitiana. Le matrici β e α^k soddisfano le relazioni di anticommutazione

$$\alpha^i\,\alpha^j + \alpha^j\,\alpha^i = 2\,\delta^{ij}\,\mathbb{1}\,, \tag{1.21a}$$

$$\alpha^i\,\beta + \beta\,\alpha^i = 0\,, \tag{1.21b}$$

$$\beta^2 = \mathbb{1}\,. \tag{1.21c}$$

▶ Esercizio 1.1

Dimostrare le relazioni (1.15).

[2]Notare che la nostra definizione di γ^5 differisce di un segno rispetto a quella di alcuni autori (ad esempio Bjorken & Drell e Itzykson & Zuber).

[3]Ricordiamo che

$$\nabla^k \equiv \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\,. \tag{1.18}$$

Capitolo 2

Prodotti di matrici γ: matrici Γ

Definiamo le 16 matrici Γ^a ($a = 1, 2, \ldots, 16$) ottenute da prodotti di matrici γ:

$$\Gamma^1 \qquad \mathbb{1} \tag{2.1a}$$

$$\Gamma^2 - \Gamma^5 \qquad \gamma^\mu \tag{2.1b}$$

$$\Gamma^6 - \Gamma^{11} \qquad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \qquad \text{(prodotti di 2 matrici } \gamma) \tag{2.1c}$$

$$\Gamma^{12} - \Gamma^{15} \qquad \gamma^\mu\,\gamma^5 \qquad \text{(prodotti di 3 matrici } \gamma) \tag{2.1d}$$

$$\Gamma^{16} \qquad \gamma^5 \qquad \text{(prodotto di 4 matrici } \gamma) \tag{2.1e}$$

L'ordinamento delle 16 matrici Γ^a è esplicitato nella tabella 2.1.

Proprietà delle matrici Γ:

2-A. Dato un prodotto di matrici γ, tutte le coppie di matrici uguali possono essere eliminate utilizzando le relazioni di anticommutazione (1.1) e le proprietà (1.4) sui quadrati delle matrici di Dirac. Utilizzando questo metodo, un prodotto di k matrici γ contenente ℓ copie di matrici uguali viene ridotto ad un prodotto di $k - 2\ell$ matrici γ.

2-B. Poichè il numero di matrici γ è 4, tutti i prodotti di più di quattro matrici γ sono riducibili al prodotto di un numero minore o uguale a 4 di matrici γ.

2-C. Dalle relazioni di anticommutazione (1.1) segue che prodotti contenenti le stesse matrici γ in ordini diversi sono uguali a meno di un segno. Perciò il numero di prodotti indipendenti di k matrici gamma è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{4}{k} = \frac{4!}{k!\,(4-k)!}\,. \tag{2.2}$$

2-D. Le matrici Γ rappresentano tutti i prodotti non riducibili di matrici γ. Infatti:

2-D-1. La matrice $\Gamma^1 = \mathbb{1}$ è l'unico prodotto indipendente di zero matrici γ ($\binom{4}{0} = 1$).

2-D-2. Le quattro matrici $\Gamma^2 - \Gamma^5 = \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ sono banalmente i prodotti indipendenti di una matrice γ $(\binom{4}{1} = 4)$.

2-D-3. Le sei[1] matrici $\Gamma^6 - \Gamma^{11} = \sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}, \sigma^{12}, \sigma^{23}, \sigma^{31}$, rappresentano tutti i prodotti indipendenti di due matrici γ $(\binom{4}{2} = 6)$. Infatti, si ha

$$\sigma^{\mu\nu} = i\gamma^\mu\gamma^\nu \qquad (\mu \neq \nu)\,. \tag{2.3}$$

Perciò è evidente che le sei matrici $\sigma^{\mu\nu}$ rappresentano, a meno di un fattore di proporzionalità $\pm i$, tutti i prodotti di 2 matrici γ non riducibili ad un multiplo dell'identità.

2-D-4. Le quattro matrici $\Gamma^{12} - \Gamma^{15} = \gamma^0\,\gamma^5, \gamma^1\,\gamma^5, \gamma^2\,\gamma^5, \gamma^3\,\gamma^5$ rappresentano, a meno di un fattore di proporzionalità $\pm i$, tutti i prodotti di tre matrici γ non riducibili ad un multiplo di una matrice γ $(\binom{4}{3} = 4)$. Infatti si ha

$$\gamma^0\gamma^5 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,, \tag{2.4a}$$
$$\gamma^1\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^3\,, \tag{2.4b}$$
$$\gamma^2\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^3\gamma^1\,, \tag{2.4c}$$
$$\gamma^3\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\,, \tag{2.4d}$$

cioè

$$\gamma^\alpha\gamma^5 = \frac{i}{3!}\, g^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\mu\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\,. \tag{2.5}$$

2-D-5. La matrice γ^5 è, a meno di un fattore di proporzionalità $\pm i$, l'unico prodotto di quattro matrici γ non riducibile al prodotto di un numero minore di matrici γ $(\binom{4}{4} = 1)$.

2-E. Qualsiasi prodotto di matrici γ è proporzionale a una delle 16 matrici Γ, con un fattore di proporzionalità uguale a ± 1 o $\pm i$.

2-F. In particolare, il prodotto di due matrici Γ è proporzionale ad una matrice Γ: per ogni coppia Γ^a, Γ^b con $a \neq b$ esiste una matrice $\Gamma^c \neq \mathbb{1}$ tale che

$$\Gamma^a\,\Gamma^b = \alpha\,\Gamma^c \qquad \text{con} \qquad \alpha = \pm 1, \pm i\,. \tag{2.6}$$

Infatti, poichè $\Gamma^a \neq \Gamma^b$, il prodotto $\Gamma^a\,\Gamma^b$ contiene almeno una matrice γ^μ in numero dispari. Poichè un numero dispari di γ^μ non può essere semplificato usando le proprietà (1.4), si ha $\Gamma^c \neq \mathbb{1}$.

2-G. Il quadrato di ciascuna matrice Γ^a è $\pm\mathbb{1}$:

$$(\Gamma^a)^2 = s_a\mathbb{1}\,, \quad \text{con} \quad s_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\big[(\Gamma^a)^2\big] = \pm 1\,. \tag{2.7}$$

I valori di s_a per le 16 matrici Γ^a sono elencati nella tabella 2.1.

[1] Per definizione, le matrici $\sigma^{\mu\nu}$ sono antisimmetriche negli indici μ, ν, per cui il numero di matrici $\sigma^{\mu\nu}$ indipendenti è $n(n-1)/2 = 6$ per $n = 4$.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Γ^a	$\mathbb{1}$	γ^0	γ^1	γ^2	γ^3	σ^{01}	σ^{02}	σ^{03}	σ^{12}	σ^{23}	σ^{31}	$\gamma^0\gamma^5$	$\gamma^1\gamma^5$	$\gamma^2\gamma^5$	$\gamma^3\gamma^5$	γ^5
s_a	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1

Tabella 2.1: Ordinamento delle Γ^a e valori di $s_a = \text{sign}(\Gamma^a)^2$.

2-H. Per ogni $\Gamma^a \neq \mathbb{1}$ esiste almeno una Γ^b tale che

$$\Gamma^a\Gamma^b = -\Gamma^b\Gamma^a \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\Gamma^a\,,\,\Gamma^b\right\} = 0\,. \tag{2.8}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
&\Gamma^a = \gamma^0 && (a=2) && \Longrightarrow && \Gamma^b = \gamma^k, \gamma^5 && (b=3,4,5,16)\,, && (2.9a)\\
&\Gamma^a = \gamma^k && (a=3,4,5) && \Longrightarrow && \Gamma^b = \gamma^0, \gamma^5 && (b=1,16)\,, && (2.9b)\\
&\Gamma^a = \sigma^{\mu\nu} && (a=6-11) && \Longrightarrow && \Gamma^b = \sigma^{\mu\rho} && \rho \neq \nu\,, && (2.9c)\\
&\Gamma^a = \gamma^0\gamma^5 && (a=12) && \Longrightarrow && \Gamma^b = \gamma^k\gamma^5 && (b=13,14,15)\,, && (2.9d)\\
&\Gamma^a = \gamma^k\gamma^5 && (a=13,14,15) && \Longrightarrow && \Gamma^b = \gamma^0\gamma^5 && (b=12)\,, && (2.9e)\\
&\Gamma^a = \gamma^5 && (a=16) && \Longrightarrow && \Gamma^b = \gamma^\mu && (b=2,3,4,5)\,. && (2.9f)
\end{aligned}$$

2-I. Le matrici Γ^a con $a > 1$ hanno traccia nulla:

$$\text{Tr}[\Gamma^a] = 0 \qquad \text{per} \qquad a > 1\,. \tag{2.10}$$

Infatti, utilizzando la matrice Γ^b che anticommuta con la matrice Γ^a, si ha (prima commutiamo e poi permutiamo circolarmente)

$$\text{Tr}[\Gamma^a] = s_b\text{Tr}\left[\Gamma^a\left(\Gamma^b\right)^2\right] = -s_b\text{Tr}\left[\Gamma^b\Gamma^a\Gamma^b\right] = -s_b\text{Tr}\left[\left(\Gamma^b\right)^2\Gamma^a\right] = -\text{Tr}[\Gamma^a]\,. \tag{2.11}$$

2-J. Dalle proprietà (2.6), (2.7) e (2.10) segue che

$$\text{Tr}\left[\Gamma^a\,\Gamma^b\right] = 4\,s_a\,\delta_{ab}\,. \tag{2.12}$$

2-K. Le matrici Γ sono linearmente indipendenti, ossia una relazione

$$\sum_a c_a\,\Gamma^a = 0 \tag{2.13}$$

implica $c_a = 0$ ($a = 1, \ldots, 16$). Infatti, se prendiamo la traccia della (2.13), utilizzando la (2.10) troviamo $c_1 = 0$. Analogamente, prendendo la traccia di

$$\Gamma^b\left(\sum_a c_a\,\Gamma^a\right) = 0\,, \qquad \text{per} \qquad b = 2, \ldots, 16\,, \tag{2.14}$$

e utilizzando la (2.12) si trova $c_b = 0$ ($b = 2, \ldots, 16$).

2-L. Per la proprietà precedente la dimensione minima delle matrici Γ è 4×4 (esistono solo 4 matrici 2×2 indipendenti: la matrice identità e le tre matrici di Pauli, mutuamente anticommutanti); la rappresentazione 4×4 è quindi irriducibile.

2-M. Dalle proprietà precedenti segue che qualsiasi matrice X di dimensione 4×4 può essere scritta come una combinazione lineare delle matrici Γ:

$$X = \sum_a x_a \, \Gamma^a \, , \tag{2.15}$$

con

$$x_a = \frac{s_a}{4} \, \mathrm{Tr}[X \, \Gamma^a] \; . \tag{2.16}$$

Perciò le 16 matrici Γ^a costituiscono una base nello spazio vettoriale delle matrici 4×4.

2-N. L'algebra generata dalle matrici γ prende il nome di algebra di Clifford.

▶ Esercizio 2.1

Dimostrare le relazioni (2.4).

▶ Esercizio 2.2

Ridurre $\sigma^{01}\gamma^2\gamma^5$.

Soluzione:

$$\sigma^{01}\gamma^2\gamma^5 = -\gamma^3.$$

▶ Esercizio 2.3

Ridurre $\sigma^{12}\gamma^1\gamma^5$.

Soluzione:

$$\sigma^{12}\gamma^1\gamma^5 = i \, \gamma^2\gamma^5.$$

▶ Esercizio 2.4

Ridurre $\gamma^0\gamma^5\gamma^1\gamma^5$.

Soluzione:

$$\gamma^0\gamma^5\gamma^1\gamma^5 = -i \, \sigma^{01}.$$

▶ Esercizio 2.5

Dimostrare le proprietà (2.7).

▶ Esercizio 2.6

Dimostrare la proprietà (2.9c).

Soluzione:

Scrivendo $\sigma^{\mu\nu}$ e $\sigma^{\mu\rho}$ come

$$\sigma^{\mu\nu} = i\gamma^\mu\gamma^\nu \, , \quad \sigma^{\mu\rho} = i\gamma^\mu\gamma^\rho \, , \quad \text{con} \quad \mu \neq \nu \neq \rho \, , \tag{2.17}$$

si ha

$$\begin{aligned} \{\sigma^{\mu\nu} \, , \, \sigma^{\mu\rho}\} &= -\{\gamma^\mu\gamma^\nu \, , \, \gamma^\mu\gamma^\rho\} = -\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \\ &= \gamma^\mu\gamma^\mu \left(\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\right) = 0 \, , \end{aligned} \tag{2.18}$$

perchè $\nu \neq \rho$, per cui $\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu = \{\gamma^\nu \, , \, \gamma^\rho\} = 2g^{\nu\rho}\mathbb{1} = 0$.

Capitolo 3

Rappresentazioni delle matrici di Dirac

Le matrici γ sono definite dalle relazioni di anticommutazione (1.1),

$$\boxed{\{\gamma^\mu \, , \, \gamma^\nu\} = 2 \, g^{\mu\nu} \, \mathbb{1}} \, , \tag{3.1}$$

e dalle condizioni (1.3)

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \, \gamma^\mu \, \gamma^0} \, . \tag{3.2}$$

Una scelta specifica delle matrici che soddisfano le relazioni (3.1) e (3.2) viene chiamata **rappresentazione delle matrici γ di Dirac**.

Teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac[1]: Dati due insiemi di quattro matrici γ^μ e γ'^μ di dimensione 4×4 che soddisfano le relazioni di anticommutazione (3.1),

$$\{\gamma^\mu \, , \, \gamma^\nu\} = 2 \, g^{\mu\nu} \, \mathbb{1} \, , \tag{3.3a}$$

$$\left\{\gamma'^\mu \, , \, \gamma'^\nu\right\} = 2 \, g^{\mu\nu} \, \mathbb{1} \, , \tag{3.3b}$$

esiste una matrice S non-singolare (cioè tale che esiste la matrice inversa S^{-1}) che connette le due rappresentazioni tramite la relazione di equivalenza

$$\boxed{\gamma'^\mu = S \, \gamma^\mu \, S^{-1}} \, . \tag{3.4}$$

Ciò è consistente con il fatto che la trasformazione (3.4) preserva le relazioni di anticommutazione (3.1):

$$\left\{\gamma'^\mu \, , \, \gamma'^\nu\right\} = S \, \{\gamma^\mu \, , \, \gamma^\nu\} \, S^{-1} = 2 \, g^{\mu\nu} \, \mathbb{1} \, . \tag{3.5}$$

[1] Vedi, per esempio, J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, pag. 308, oppure W. Grenier, Relativistic Quantum Mechanics, pag. 104.

La matrice S è definita univocamente a meno di un fattore di proporzionalità. Per soddisfare anche le relazioni (3.2),

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \,, \tag{3.6a}$$

$$\gamma'^{\mu\dagger} = \gamma'^0 \gamma'^\mu \gamma'^0 \,, \tag{3.6b}$$

la matrice S deve essere unitaria:

$$\boxed{S^\dagger = S^{-1}} \,. \tag{3.7}$$

Infatti, utilizzando la (3.6a) e la relazione inversa della (3.4),

$$\gamma^\mu = S^{-1} \, \gamma'^\mu \, S \,, \tag{3.8}$$

dalla relazione (3.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \gamma'^{\mu\dagger} & \underset{(3.4)}{=} (S^{-1})^\dagger \, \gamma^{\mu\dagger} \, S^\dagger \\ & \underset{(3.6a)}{=} (S^{-1})^\dagger \, \gamma^0 \, \gamma^\mu \, \gamma^0 \, S^\dagger \\ & \underset{(3.8)}{=} (S^{-1})^\dagger \, S^{-1} \, \gamma'^0 \, \gamma'^\mu \, \gamma'^0 \, S \, S^\dagger = (S S^\dagger)^{-1} \, \gamma'^0 \, \gamma'^\mu \, \gamma'^0 \, (S S^\dagger) \,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Per soddisfare la relazione (3.6b), si deve avere

$$S \, S^\dagger = \mathbb{1} \,. \tag{3.10}$$

Analogamente, utilizzando la (3.6b) e la (3.4), dalla relazione (3.8) si ottiene

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\dagger} & \underset{(3.8)}{=} S^\dagger \, \gamma'^{\mu\dagger} \, (S^{-1})^\dagger \\ & \underset{(3.6b)}{=} S^\dagger \, \gamma'^0 \, \gamma'^\mu \, \gamma'^0 \, (S^{-1})^\dagger \\ & \underset{(3.4)}{=} S^\dagger \, S \, \gamma^0 \, \gamma^\mu \, \gamma^0 \, S^{-1} \, (S^{-1})^\dagger = (S^\dagger S) \, \gamma^0 \, \gamma^\mu \, \gamma^0 \, (S^\dagger S)^{-1} \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Per soddisfare la relazione (3.6a), deve essere

$$S^\dagger \, S = \mathbb{1} \,. \tag{3.12}$$

Le relazioni (3.10) e (3.12) implicano la relazione di unitarietà (3.7).

Perciò, dalle relazioni (3.4) e (3.7) segue che la matrice S è definita univocamente a meno di una fase.

Il teorema fondamentale di Pauli si riassume dicendo che tutte le rappresentazioni delle matrici di Dirac sono **unitariamente equivalenti**.

Notiamo che

3-A. Tutti i prodotti di matrici γ si trasformano tramite la (3.4). In particolare le matrici Γ^a:

$$\Gamma'^a = S \, \Gamma^a \, S^{-1} \,. \tag{3.13}$$

3-B. Se γ^μ è una rappresentazione delle matrici di Dirac, lo sono anche

$$-\gamma^\mu\,, \quad \pm(\gamma^\mu)^T\,, \quad \pm\gamma^{\mu\dagger}\,. \tag{3.14}$$

Le matrici unitarie di trasformazione sono rispettivamente

$$S=\gamma^5\,, \quad S=\gamma^5\mathcal{C}\,,\,\mathcal{C}\,, \quad S=\gamma^0\,,\,\gamma^0\gamma^5\,. \tag{3.15}$$

La matrice unitaria $\mathcal{C}$ è detta **matrice di coniugazione di carica** (vedi il Capitolo 5), ed è definita (a meno di una fase arbitraria) dalla relazione

$$\mathcal{C}\,(\gamma^\mu)^T\,\mathcal{C}^{-1}=-\gamma^\mu\,. \tag{3.16}$$

L'esistenza della matrice di coniugazione di carica $\mathcal{C}$ è garantita dal teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici γ. Nel cambiamento di rappresentazione (3.4) la matrice $\mathcal{C}$ diventa

$$\mathcal{C}'=\eta\,S\,\mathcal{C}\,S^T\,, \tag{3.17}$$

dove η è una fase arbitraria (vedi l'esercizio 3.14).

Per trovare la trasformazione delle funzioni d'onda per cambiamento di rappresentazione, consideriamo l'equazione di Dirac nella rappresentazione γ':

$$\big(i\gamma'^\mu\partial_\mu-m\big)\,\psi'=0\,. \tag{3.18}$$

Utilizzando la (3.4) e moltiplicando a sinistra per S^{-1}, si ottiene

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\,S^{-1}\,\psi'=0\,. \tag{3.19}$$

Affinchè questa equazione sia equivalente all'equazione di Dirac nella rappresentazione γ,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\,\psi=0\,, \tag{3.20}$$

le funzioni d'onda ψ e ψ' devono essere legate dalla relazione

$$\boxed{\psi'=S\,\psi}\,. \tag{3.21}$$

Questa è la trasformazione degli spinori per cambiamento di rappresentazione. La trasformazione degli spinori aggiunti è

$$\overline{\psi'}=\psi'^\dagger\,\gamma^0=\psi^\dagger\,S^\dagger\,S\,\gamma^0\,S^{-1}=\overline{\psi}\,S^{-1}\,. \tag{3.22}$$

L'equivalenza unitaria delle rappresentazioni delle matrici di Dirac implica che **tutte le proprietà fisiche sono indipendenti dalla scelta della rappresentazione**, perchè le forme bilineari $\overline{\psi}\Gamma^a\psi$ sono invarianti per cambiamento di rappresentazione: dalle (3.13), (3.21) e (3.22) si ottiene

$$\overline{\psi'}\,\Gamma^a\,\psi'=\psi^\dagger\,S^{-1}\,S\,\Gamma^a\,S^{-1}\,S\,\psi=\overline{\psi}\,\Gamma^a\,\psi\,. \tag{3.23}$$

Grazie all'equivalenza unitaria delle rappresentazioni delle matrici di Dirac, in ciascun calcolo specifico nel quale si desidera esplicitare la struttura spinoriale delle soluzioni dell'equazione di Dirac, è possibile sciegliere la rappresentazione più conveniente.

Nel seguito consideriamo le tre rappresentazioni più usate: la rappresentazione di Dirac, quella di Majorana e quella chirale.

3.1 Rappresentazione di Dirac

Questa rappresentazione viene anche chiamata **rappresentazione standard** ed è utile per discutere il limite non-relativistico dell'equazione di Dirac.

$$\gamma^0_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \qquad \gamma^k_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.24}$$

$$\gamma^5_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} , \qquad \alpha^k_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.25}$$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{D}} = i\,\gamma^2_{\mathrm{D}}\,\gamma^0_{\mathrm{D}} = -i\,\alpha^2_{\mathrm{D}} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.26}$$

$$\sigma^{0k}_{\mathrm{D}} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^{ij}_{\mathrm{D}} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} , \tag{3.27}$$

$$\gamma^0_{\mathrm{D}}\,\gamma^5_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^k_{\mathrm{D}}\,\gamma^5_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} . \tag{3.28}$$

3.2 Rappresentazione di Majorana

Questa rappresentazione rende reale l'equazione di Dirac scambiando[2] tra loro α^2_{D} (l'unica matrice complessa nella rappresentazione di Dirac) e β_{D}:

$$\beta_{\mathrm{M}} = \alpha^2_{\mathrm{D}} \,, \tag{3.29a}$$
$$\alpha^2_{\mathrm{M}} = \beta_{\mathrm{D}} \,. \tag{3.29b}$$

Infatti l'equazione di Dirac in forma hamiltoniana può essere scritta come

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\,\beta\,m \right) \psi = 0 \,, \tag{3.30}$$

da cui si vede che l'equazione di Dirac è reale se le α^k sono reali e β è immaginaria.

Le trasformazioni $\alpha^2_{\mathrm{D}} \to \beta_{\mathrm{M}}$ e $\beta_{\mathrm{D}} \to \alpha^2_{\mathrm{M}}$ è realizzata dalla trasformazione di equivalenza

$$\gamma^\mu_{\mathrm{M}} = S_{\mathrm{M}}\,\gamma^\mu_{\mathrm{D}}\,S^{-1}_{\mathrm{M}} \tag{3.31}$$

con

$$S_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\gamma^0_{\mathrm{D}} + \gamma^0_{\mathrm{D}}\,\gamma^2_{\mathrm{D}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{3.32}$$

[2] È chiaro che lo scambio $\alpha^2 \leftrightarrows \beta$ è compatibile con le relazioni di anticommutazione (1.21) e con le relazioni di hermiticità (1.20).

Notare che

$$\beta^2 = (\alpha^k)^2 = \mathbb{1} \quad \Longrightarrow \quad S_{\mathrm{M}}^{-1} = S_{\mathrm{M}} \,, \tag{3.33}$$

$$\beta^\dagger = \beta \,, \quad \alpha^{k\dagger} = \alpha^k \quad \Longrightarrow \quad S_{\mathrm{M}}^\dagger = S_{\mathrm{M}} \,, \tag{3.34}$$

per cui è evidente che S_{M} è una matrice unitaria:

$$S_{\mathrm{M}}^\dagger = S_{\mathrm{M}}^{-1} \,. \tag{3.35}$$

Le matrici α_{M}^1 e α_{M}^3 nella rappresentazione di Majorana sono date da

$$\alpha_{\mathrm{M}}^1 = -\,\alpha_{\mathrm{D}}^1 \,, \tag{3.36a}$$

$$\alpha_{\mathrm{M}}^3 = -\,\alpha_{\mathrm{D}}^3 \,. \tag{3.36b}$$

Le matrici γ^k nella rappresentazione di Majorana sono date da

$$\gamma_{\mathrm{M}}^1 = \gamma_{\mathrm{D}}^2\,\gamma_{\mathrm{D}}^1 \,, \tag{3.37a}$$

$$\gamma_{\mathrm{M}}^2 = -\gamma_{\mathrm{D}}^2 \,, \tag{3.37b}$$

$$\gamma_{\mathrm{M}}^3 = \gamma_{\mathrm{D}}^2\,\gamma_{\mathrm{D}}^3 \,. \tag{3.37c}$$

Esplicitamente, nella rappresentazione di Majorana si ha

$$\gamma_{\mathrm{M}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \gamma_{\mathrm{M}}^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} , \tag{3.38}$$

$$\gamma_{\mathrm{M}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \gamma_{\mathrm{M}}^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} , \tag{3.39}$$

$$\alpha_{\mathrm{M}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \alpha_{\mathrm{M}}^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \tag{3.40}$$

$$\alpha_{\mathrm{M}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_{\mathrm{M}}^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} , \tag{3.41}$$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{M}} = -i\,\gamma_{\mathrm{M}}^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.42}$$

3.3 Rappresentazione chirale

Questa rappresentazione è costruita in modo da avere γ^5 diagonale. Si chiama "rappresentazione chirale" perchè γ^5 è l'operatore di chiralità.

La rappresentazione chirale è utile per studiare il limite estremamente relativistico dell'equazione di Dirac, in particolare nel caso di fermioni di massa nulla.

La rappresentazione chirale si ottiene dalla rappresentazione di Dirac con una trasformazione di equivalenza tale che

$$\gamma^5_{\mathrm{C}} = \gamma^0_{\mathrm{D}} \,, \tag{3.43a}$$
$$\gamma^0_{\mathrm{C}} = -\gamma^5_{\mathrm{D}} \,. \tag{3.43b}$$

Il segno negativo nella (3.43b) è cruciale per soddisfare la definizione della γ^5 nella rappresentazione chirale: $\gamma^5_{\mathrm{C}} = -i\gamma^0_{\mathrm{C}}\gamma^1_{\mathrm{C}}\gamma^2_{\mathrm{C}}\gamma^3_{\mathrm{C}}$.

La trasformazione di equivalenza dalla rappresentazione di Dirac a quella chirale è data da

$$\gamma^\mu_{\mathrm{C}} = S_{\mathrm{C}}\, \gamma^\mu_{\mathrm{D}}\, S^{-1}_{\mathrm{C}} \,, \tag{3.44}$$

con

$$S_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{1} + \gamma^0_{\mathrm{D}}\, \gamma^5_{\mathrm{D}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Notare che

$$S^\dagger_{\mathrm{C}} = S^T_{\mathrm{C}} = S^{-1}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{1} - \gamma^0_{\mathrm{D}}\, \gamma^5_{\mathrm{D}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \,, \tag{3.46}$$

per cui S_{C} è una matrice unitaria.

Le matrici γ^k nella rappresentazione chirale sono uguali alle corrispondenti matrici nella rappresentazione di Dirac:

$$\gamma^k_{\mathrm{C}} = \gamma^k_{\mathrm{D}} \,. \tag{3.47}$$

Esplicitamente, nella rappresentazione chirale si ha

$$\gamma^0_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \,, \qquad \gamma^k_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{3.48}$$

$$\gamma^5_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \,, \qquad \alpha^k_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \,, \tag{3.49}$$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{C}} = -i\, \alpha^2_{\mathrm{C}} = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \,, \quad \Sigma^k_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \,, \tag{3.50}$$

$$\sigma^{0k}_{\mathrm{C}} = i \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \,, \qquad \sigma^{kj}_{\mathrm{C}} = \epsilon^{kj\ell} \begin{pmatrix} \sigma^\ell & 0 \\ 0 & \sigma^\ell \end{pmatrix} \,, \tag{3.51}$$

$$\gamma^0_{\mathrm{C}}\gamma^5_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \,, \qquad \gamma^k_{\mathrm{C}}\gamma^5_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{3.52}$$

▶ Esercizio 3.1

Dimostrare che se γ^μ è una rappresentazione delle matrici di Dirac, lo sono anche $-\gamma^\mu$, $\pm(\gamma^\mu)^T$, $\pm\gamma^{\mu\dagger}$.

▶ Esercizio 3.2

Date le γ^μ_{D} nella rappresentazione di Dirac, derivare la forma esplicita di γ^5_{D}, α^k_{D}, $\sigma^{\mu\nu}_{\mathrm{D}}$, $\gamma^\mu_{\mathrm{D}}\gamma^5_{\mathrm{D}}$ (equazioni (3.25)–(3.28)).

▶ Esercizio 3.3

Dimostrare le relazioni (3.29) utilizzando la matrice S_{M} nell'Eq. (3.32).

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathrm{M}} = S_{\mathrm{M}}\,\beta_{\mathrm{D}}\,S_{\mathrm{M}}^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\beta_{\mathrm{D}}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\beta_{\mathrm{D}}\right)\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + 2\,\alpha^2_{\mathrm{D}} + -\beta_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \alpha^2_{\mathrm{D}}\,, \qquad (3.53a) \\
\alpha^2_{\mathrm{M}} = S_{\mathrm{M}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}}\,S_{\mathrm{M}}^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\alpha^2_{\mathrm{D}}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}} + \mathbb{1}\right)\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}}\,\beta_{\mathrm{D}} + \beta_{\mathrm{D}} + \beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\alpha^2_{\mathrm{D}} + 2\,\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right) \\
&= \beta_{\mathrm{D}}\,. \qquad (3.53b)
\end{aligned}$$

▶ Esercizio 3.4

Dimostrare le relazioni (3.36) utilizzando la matrice S_{M} nell'Eq. (3.32).

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\alpha^1_{\mathrm{M}} &= S_{\mathrm{M}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,S^{-1}_{\mathrm{M}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\alpha^1_{\mathrm{D}}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\right)\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,\beta_{\mathrm{D}} + \beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\alpha^1_{\mathrm{D}} + \beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}} - \beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}} - \alpha^1_{\mathrm{D}}\right)\\
&= -\,\alpha^1_{\mathrm{D}}\,, \qquad (3.54\text{a})\\
\alpha^3_{\mathrm{M}} &= S_{\mathrm{M}}\,\alpha^3_{\mathrm{D}}\,S^{-1}_{\mathrm{M}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\alpha^3_{\mathrm{D}}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^3_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\alpha^3_{\mathrm{D}}\right)\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}}\alpha^3_{\mathrm{D}}\beta_{\mathrm{D}} + \beta_{\mathrm{D}}\alpha^3_{\mathrm{D}}\alpha^2_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\alpha^3_{\mathrm{D}}\beta_{\mathrm{D}} + \alpha^2_{\mathrm{D}}\alpha^3_{\mathrm{D}}\alpha^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\alpha^3_{\mathrm{D}} + \beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^3_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}} - \beta_{\mathrm{D}}\,\alpha^3_{\mathrm{D}}\,\alpha^2_{\mathrm{D}} - \alpha^3_{\mathrm{D}}\right)\\
&= -\,\alpha^3_{\mathrm{D}}\,. \qquad (3.54\text{b})
\end{aligned}
$$

▶ Esercizio 3.5

Dimostrare le relazioni (3.37) sapendo che $\vec{\gamma}_{\mathrm{M}} = \beta_{\mathrm{M}}\,\vec{\alpha}_{\mathrm{M}}$.

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\gamma^1_{\mathrm{M}} &= \beta_{\mathrm{M}}\,\alpha^1_{\mathrm{M}} = -\alpha^2_{\mathrm{D}}\,\alpha^1_{\mathrm{D}} = \gamma^2_{\mathrm{D}}\,\gamma^1_{\mathrm{D}}\,, \qquad (3.55\text{a})\\
\gamma^2_{\mathrm{M}} &= \beta_{\mathrm{M}}\,\alpha^2_{\mathrm{M}} = \alpha^2_{\mathrm{D}}\,\beta_{D} = -\gamma^2_{\mathrm{D}}\,, \qquad (3.55\text{b})\\
\gamma^3_{\mathrm{M}} &= \beta_{\mathrm{M}}\,\alpha^3_{\mathrm{M}} = -\alpha^2_{\mathrm{D}}\,\alpha^3_{\mathrm{D}} = \gamma^2_{\mathrm{D}}\,\gamma^3_{\mathrm{D}}\,. \qquad (3.55\text{c})
\end{aligned}
$$

▶ Esercizio 3.6

Verificare le relazioni (3.37) usando la regola di trasformazione (3.4).

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\gamma^k_{\mathrm{M}} = S_{\mathrm{M}}\,\gamma^k_{\mathrm{D}}\,S^{-1}_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^0_{\mathrm{D}} + \gamma^0_{\mathrm{D}}\,\gamma^2_{\mathrm{D}}\right)\gamma^k_{\mathrm{D}}\left(\gamma^0_{\mathrm{D}} + \gamma^0_{\mathrm{D}}\,\gamma^2_{\mathrm{D}}\right)\\
&= \gamma^2_{\mathrm{D}}\,\gamma^k_{\mathrm{D}} + \left(\mathbb{1} - \gamma^2_{\mathrm{D}}\right)\delta^{k2}\,. \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

▶ Esercizio 3.7

Dimostrare che la matrice di coniugazione di carica nella rappresentazione di Majorana è data da

$$\mathcal{C}_{\mathrm{M}} = \eta\, S_{\mathrm{M}}\, \mathcal{C}_{\mathrm{D}}\, S_{\mathrm{M}}^T = -i\gamma_{\mathrm{M}}^0 \,, \tag{3.57}$$

sapendo che nella rappresentazione di Dirac $\mathcal{C}_{\mathrm{D}} = -i\alpha_{\mathrm{D}}^2$.

Soluzione:

Poichè $\beta_{\mathrm{D}}^T = \beta_{\mathrm{D}}$ e $(\alpha_{\mathrm{D}}^2)^T = -\alpha_{\mathrm{D}}^2$ si ha

$$S_{\mathrm{M}}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta_{\mathrm{D}} - \alpha_{\mathrm{D}}^2\right) . \tag{3.58}$$

Perciò otteniamo

$$\mathcal{C}_{\mathrm{M}} = \eta\, S_{\mathrm{M}}\, \mathcal{C}_{\mathrm{D}}\, S_{\mathrm{M}}^T = \eta\,\frac{1}{2}\left(\beta_{\mathrm{D}} + \alpha_{\mathrm{D}}^2\right)\left(-i\alpha_{\mathrm{D}}^2\right)\left(\beta_{\mathrm{D}} - \alpha_{\mathrm{D}}^2\right) = i\,\eta\,\alpha_{\mathrm{D}}^2 = i\,\eta\,\beta_{\mathrm{M}} = i\,\eta\,\gamma_{\mathrm{M}}^0 . \tag{3.59}$$

Scegliamo la fase arbitraria $\eta = -1$ in modo da ottenere la (3.57).

▶ Esercizio 3.8

Dimostrare le relazioni (3.43) utilizzando la matrice S_{C} nell'Eq. (3.45).

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{C}}^0 = S_{\mathrm{C}}\,\gamma_{\mathrm{D}}^0\,S_{\mathrm{C}}^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\gamma_{\mathrm{D}}^0\left(\mathbb{1} - \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_{\mathrm{D}}^0 + \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\,\gamma_{\mathrm{D}}^0 - \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5 - \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\,\gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_{\mathrm{D}}^0 - \gamma_{\mathrm{D}}^5 - \gamma_{\mathrm{D}}^5 - \gamma_{\mathrm{D}}^0\right)\\
&= -\,\gamma_{\mathrm{D}}^5 \,,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{C}}^5 = S_{\mathrm{C}}\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\,S_{\mathrm{C}}^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\gamma_{\mathrm{D}}^5\left(\mathbb{1} - \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_{\mathrm{D}}^5 + \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\,\gamma_{\mathrm{D}}^5 - \gamma_{\mathrm{D}}^5\,\gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5 - \gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\,\gamma_{\mathrm{D}}^0\,\gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_{\mathrm{D}}^5 + \gamma_{\mathrm{D}}^0 + \gamma_{\mathrm{D}}^0 - \gamma_{\mathrm{D}}^5\right)\\
&= \gamma_{\mathrm{D}}^0 \,.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

▶ Esercizio 3.9

Dimostrare le relazioni (3.47) utilizzando la matrice S_{C} nell'Eq. (3.45).

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\gamma^k_{\rm C} = S_{\rm C}\,\gamma^k_{\rm D}\,S_{\rm C}^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\right)\gamma^k_{\rm D}\left(\mathbb{1} - \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^k_{\rm D} + \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\,\gamma^k_{\rm D} - \gamma^k_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D} - \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\,\gamma^k_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^k_{\rm D} + \gamma^k_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D} - \gamma^k_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D} - \gamma^k_{\rm D}\right) \\
&= \gamma^k_{\rm D}\,.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

▶ Esercizio 3.10

Dimostrare che la matrice di coniugazione di carica nella rappresentazione chirale è data da

$$
\mathcal{C}_{\rm C} = \eta\,S_{\rm C}\,\mathcal{C}_{\rm D}\,S_{\rm C}^T = -i\,\alpha^2_{\rm C}\,, \tag{3.63}
$$

sapendo che nella rappresentazione di Dirac $\mathcal{C}_{\rm D} = i\gamma^2_{\rm D}\gamma^0_{\rm D}$.

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\rm C} = \eta\,S_{\rm C}\,\mathcal{C}_{\rm D}\,S_{\rm C}^T &= \eta\,\frac{i}{2}\left(\mathbb{1} + \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\right)\gamma^2_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D}\left(\mathbb{1} - \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\right) \\
&= \eta\,\frac{i}{2}\left(\gamma^2_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D} + \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\,\gamma^2_{\rm D}\,\gamma^0_{\rm D} - \gamma^2_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D} - \gamma^0_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\,\gamma^2_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D}\right) \\
&= \;-i\,\eta\,\gamma^2_{\rm D}\,\gamma^5_{\rm D} = i\,\eta\,\gamma^2_{\rm C}\,\gamma^0_{\rm C} = -i\,\eta\,\alpha^2_{\rm C}\,.
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Scegliamo la fase arbitraria $\eta = 1$ in modo da ottenere la (3.63).

▶ Esercizio 3.11

Trovare la matrice unitaria S tale che $\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}$ con

$$
\gamma'^0 = -\gamma^0\,, \quad \gamma'^k = \gamma^k\,. \tag{3.65}
$$

Soluzione:

$$
S = \gamma^0\,\gamma^5 \qquad (S^{-1} = S^\dagger = \gamma^5\,\gamma^0).
$$

▶ Esercizio 3.12

Trovare la matrice unitaria S tale che $\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}$ con

$$
\gamma'^0 = \gamma^0\,, \quad \gamma'^1 = \gamma^1\,, \quad \gamma'^2 = \gamma^2\,, \quad \gamma'^3 = -\gamma^3\,. \tag{3.66}
$$

Soluzione:

$$
S = \gamma^3\,\gamma^5 \qquad (S^{-1} = S^\dagger = -\gamma^5\,\gamma^3).
$$

▶ Esercizio 3.13

Dimostrare che $S_{\rm C}^\dagger = S_{\rm C}^T = S_{\rm C}^{-1}$.

▶ Esercizio 3.14

Dimostrare la regola di trasformazione (3.17) della matrice di coniugazione di carica.

Soluzione:

Utilizzando le (3.4) e (3.16) si ottiene

$$\begin{aligned}\gamma'^{\mu} &= S\,\gamma^{\mu}\,S^{-1} \\ &= -\,S\,\mathcal{C}\,(\gamma^{\mu})^{T}\,\mathcal{C}^{-1}\,S^{-1} \\ &= -\,S\,\mathcal{C}\,S^{T}\,\underbrace{S^{T^{-1}}\,(\gamma^{\mu})^{T}\,S^{T}}_{(\gamma'^{\mu})^{T}}\,S^{T^{-1}}\,\mathcal{C}^{-1}\,S^{-1} \\ &= -\,\left(S\,\mathcal{C}\,S^{T}\right)(\gamma'^{\mu})^{T}\left(S^{T^{-1}}\,\mathcal{C}^{-1}\,S^{-1}\right) .\end{aligned} \tag{3.67}$$

Confrontando questa equazione con la relazione

$$\gamma'^{\mu} = -\mathcal{C}'\,(\gamma'^{\mu})^{T}\,\mathcal{C}'^{-1} , \tag{3.68}$$

si vede che deve essere

$$\mathcal{C}' \propto S\,\mathcal{C}\,S^{T} . \tag{3.69}$$

Inoltre, affinchè la matrice $\mathcal{C}'$ sia unitaria, il coefficiente di proporzionalità nella (3.69) può essere solamente una fase (poichè S e $\mathcal{C}$ sono unitarie), per cui si ottiene la (3.17).

▶ Esercizio 3.15

Date le matrici γ^{μ} nella rappresentazione di Dirac, dimostrare che il set di matrici γ'^{μ}

$$\gamma'^{0} = \gamma^{1}\gamma^{0} , \quad \gamma'^{1} = \gamma^{1} , \quad \gamma'^{2} = \gamma^{1}\gamma^{2} , \quad \gamma'^{3} = \gamma^{1}\gamma^{3} \tag{3.70}$$

costituisce una rappresentazione delle matrici di Dirac. (Suggerimento: considerare le matrici β, α^{k}.)

Trovare la matrice unitaria S che effettua la trasformazione di equivalenza

$$\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1} . \tag{3.71}$$

Soluzione:

Le matrici β', α'^{k} sono date da

$$\beta' = \gamma'^{0} = \gamma^{1}\gamma^{0} = -\alpha^{1} , \tag{3.72}$$

$$\alpha'^{1} = \gamma'^{0}\gamma'^{1} = \gamma^{1}\gamma^{0}\gamma^{1} = \gamma^{0} = \beta , \tag{3.73}$$

$$\alpha'^{2} = \gamma'^{0}\gamma'^{2} = \gamma^{1}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2} = \gamma^{0}\gamma^{2} = \alpha^{2} , \tag{3.74}$$

$$\alpha'^{3} = \gamma'^{0}\gamma'^{3} = \gamma^{1}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{3} = \gamma^{0}\gamma^{3} = \alpha^{3} . \tag{3.75}$$

Poichè

$$\beta^{2} = \mathbb{1} , \quad \{\beta, \alpha^{k}\} = 0 , \quad \{\alpha^{k}, \alpha^{j}\} = 2\delta^{kj}\mathbb{1} , \tag{3.76}$$

è evidente che si ha anche

$$\beta'^2 = \mathbb{1}\,, \quad \{\beta', \alpha'^k\} = 0\,, \quad \{\alpha'^k, \alpha'^j\} = 2\delta^{kj}\mathbb{1}\,, \tag{3.77}$$

per cui le matrici β', α'^k costituiscono una rappresentazione delle matrici di Dirac.

La matrice unitaria S che effettua la trasformazione di equivalenza $\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$ è

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{1} + \gamma^1\right)\,. \tag{3.78}$$

▶ Esercizio 3.16

Ricavare, in rappresentazione di Dirac, lo spinore coniugato di carica di uno spinore che in rappresentazione di chiralità è scritto

$$\psi_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}\,. \tag{3.79}$$

Interpretare le proprietà fisiche dello spinore trovato.

Soluzione:

La trasformazione degli spinori dalla rappresentazione chirale a quella di Dirac è data da

$$\psi_{\mathrm{D}} = S_{\mathrm{C}}^{-1}\,\psi_{\mathrm{C}}\,, \tag{3.80}$$

con la matrice unitaria S_{C} data dalla (3.45):

$$S_{\mathrm{C}}^{-1} = S_{\mathrm{C}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\,. \tag{3.81}$$

Perciò si ottiene

$$\psi_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}\,, \tag{3.82}$$

che è la funzione d'onda nel sistema a riposo di un elettrone con polarizzazione $+1$ nella direzione dell'asse z. Utilizzando l'espressione esplicita (3.26) della matrice di coniugazione di carica nella rappresentazione di Dirac,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{D}} = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{3.83}$$

si ottiene lo spinore coniugato di carica

$$\psi_{\mathrm{D}}^c = \mathcal{C}_{\mathrm{D}}\,\overline{\psi}_{\mathrm{D}}^T = \mathcal{C}_{\mathrm{D}}\,\gamma^0\,\psi_{\mathrm{D}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}\,. \tag{3.84}$$

Questa è la funzione d'onda nel sistema a riposo di un elettrone con energia negativa e polarizzazione -1 nella direzione dell'asse z. Nella teoria del mare di Dirac l'assenza di questo stato è interpretata come un positrone a riposo con polarizzazione $+1$ nella direzione dell'asse z.

▶ Esercizio 3.17

Trovare la matrice S che connette tramite una relazione di equivalenza la rappresentazione γ^μ delle matrici di Dirac alla rappresentazione γ'^μ tale che

$$\gamma'^0 = -\gamma^0 \,, \quad \gamma'^1 = \gamma^1 \,, \quad \gamma'^2 = -\gamma^2 \,, \quad \gamma'^3 = \gamma^3 \,. \tag{3.85}$$

Soluzione:

$$S = S^{-1} = \gamma^0 \, \gamma^2 \,. \tag{3.86}$$

▶ Esercizio 3.18

Sapendo che la matrice di coniugazione di carica nella rappresentazione di Dirac è data da

$$\mathcal{C}_\mathrm{D} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{3.87}$$

calcolare la matrice di coniugazione di carica $\mathcal{C}'$ nella rappresentazione tale che

$$\gamma'^0 = -\gamma^0_\mathrm{D} \,, \qquad \gamma'^k = \gamma^k_\mathrm{D} \quad (k = 1, 2, 3) \,. \tag{3.88}$$

Soluzione:

La matrice che effettua la trasformazione di equivalenza $\gamma'^\mu = S \, \gamma^\mu_\mathrm{D} \, S^{-1}$ è

$$S = \gamma^0_\mathrm{D} \, \gamma^5_\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S^T = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{3.89}$$

per cui

$$\mathcal{C}' = S \, \mathcal{C}_\mathrm{D} \, S^T = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}_\mathrm{D} \,. \tag{3.90}$$

▶ Esercizio 3.19

Dato un insieme di quattro matrici di Dirac γ_μ, quali dei seguenti insiemi costituiscono insiemi di matrici di Dirac?

3.19-1. $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$,

3.19-2. $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5$,

3.19-3. $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^1$.

Soluzione:

3.19-1. Dal teorema fondamentale di Pauli sappiamo che se

$$\gamma'^{\mu} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{3.91}$$

è un insieme di matrici di Dirac, deve esistere una matrice unitaria S che effettua la trasformazione di equivalenza

$$\gamma'^{\mu} = S\, \gamma^\mu_{\mathrm{D}}\, S^{-1}\,. \tag{3.92}$$

Dal confronto delle (3.91) e (3.92) si vede che

$$S = \gamma^0\,. \tag{3.93}$$

Perciò le matrici γ'^{μ} costituiscono un insieme di matrici di Dirac.

3.19-2. In questo caso la trasformazione

$$\gamma'^{\mu} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \tag{3.94}$$

non ha esplicitamente la forma (3.92) di una trasformazione di equivalenza. Perciò è possibile che le matrici γ' non formino un insieme di matrici di Dirac. Per verificarlo calcoliamo

$$\begin{aligned}
\left\{\gamma'^{\mu}\,,\,\gamma'^{\nu}\right\} &= \left\{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\,,\,\gamma^0\gamma^\nu\gamma^5\right\} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\gamma^\nu\gamma^5 + \gamma^0\gamma^\nu\gamma^5\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5 \\
&= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^\nu \underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} + \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^\mu \underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} \\
&= \gamma^0\left(2g^{\mu 0}\mathbb{1} - \gamma^0\gamma^\mu\right)\gamma^\nu + \gamma^0\left(2g^{\nu 0}\mathbb{1} - \gamma^0\gamma^\nu\right)\gamma^\mu \\
&= 2g^{\mu 0}\gamma^0\gamma^\nu - \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^\mu\gamma^\nu + 2g^{\nu 0}\gamma^0\gamma^\mu - \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= 2g^{\mu 0}\gamma^0\gamma^\nu + 2g^{\nu 0}\gamma^0\gamma^\mu - \left\{\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\right\} \\
&= 2g^{\mu 0}\gamma^0\gamma^\nu + 2g^{\nu 0}\gamma^0\gamma^\mu - 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}\,.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Il valore di questo anticommutatore è diverso da $2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$. Ad esempio, per $\mu\nu = k$ si ha

$$\left\{\gamma'^{k}\,,\,\gamma'^{k}\right\} = 2\mathbb{1} \neq -2\mathbb{1}\,. \tag{3.96}$$

Perciò, le matrici γ' non formano un insieme di matrici di Dirac.

3.19-3. Anche in questo caso la trasformazione

$$\gamma'^{\mu} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^1 \tag{3.97}$$

non ha esplicitamente la forma (3.92) di una trasformazione di equivalenza ed è possibile che le matrici γ' non formino un insieme di matrici di Dirac. Per verificarlo calcoliamo

$$\begin{aligned}
\{\gamma'^{\mu}\,,\,\gamma'^{\nu}\} &= \{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^1\,,\,\gamma^0\gamma^\nu\gamma^1\} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^1\gamma^0\gamma^\nu\gamma^1 + \gamma^0\gamma^\nu\gamma^1\gamma^0\gamma^\mu\gamma^1 \\
&= -\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^\nu\gamma^1 - \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^1\gamma^\mu\gamma^1 \\
&= -\left(2g^{\mu0}\mathbb{1} - \gamma^\mu\gamma^0\right)\gamma^0\gamma^1\left(2g^{\nu1}\mathbb{1} - \gamma^1\gamma^\nu\right) \\
&\quad -\left(2g^{\nu0}\mathbb{1} - \gamma^\nu\gamma^0\right)\gamma^0\gamma^1\left(2g^{\mu1}\mathbb{1} - \gamma^1\gamma^\mu\right) \\
&= -\left(2g^{\mu0}\gamma^0 - \gamma^\mu\right)\left(2g^{\nu1}\gamma^1 + \gamma^\nu\right) - \left(2g^{\nu0}\gamma^0 - \gamma^\nu\right)\left(2g^{\mu1}\gamma^1 + \gamma^\mu\right) \\
&= -4g^{\mu0}g^{\nu1}\gamma^0\gamma^1 - 2g^{\mu0}\gamma^0\gamma^\nu + 2g^{\nu1}\gamma^\mu\gamma^1 + \gamma^\mu\gamma^\nu \qquad (3.98) \\
&\quad -4g^{\nu0}g^{\mu1}\gamma^0\gamma^1 - 2g^{\nu0}\gamma^0\gamma^\mu + 2g^{\mu1}\gamma^\nu\gamma^1 + \gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} - 4\left(g^{\mu0}g^{\nu1} + g^{\nu0}g^{\mu1}\right)\gamma^0\gamma^1 \\
&\quad -2\gamma^0\left(g^{\mu0}\gamma^\nu + g^{\nu0}\gamma^\mu\right) + 2\left(g^{\nu1}\gamma^\mu + g^{\mu1}\gamma^\nu\right)\gamma^1\,. \qquad (3.99)
\end{aligned}$$

Il valore di questo anticommutatore è diverso da $2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$. Ad esempio, per $\mu = \nu = 0$ si ha

$$\left\{\gamma'^0\,,\,\gamma'^0\right\} = -2\mathbb{1} \neq 2\mathbb{1}\,. \qquad (3.100)$$

Perciò, le matrici γ' non formano un insieme di matrici di Dirac.

Capitolo 4

Proprietà delle matrici $\vec{\Sigma}$

Le matrici Σ^k $(k = 1, 2, 3)$, definite come

$$\Sigma^k \equiv \frac{1}{2} \sum_{j,\ell} \epsilon^{kj\ell} \sigma^{j\ell} \,, \tag{4.1}$$

intervengono nella trasformazione degli spinori per rotazioni spaziali e $\vec{\Sigma}/2$ rappresenta l'operatore di spin nello spazio degli spinori di Dirac.

Dalla (4.1) si ha

$$\Sigma^1 = \sigma^{23} \,, \qquad \Sigma^2 = \sigma^{31} \,, \qquad \Sigma^3 = \sigma^{12} \,, \tag{4.2}$$

ovvero

$$\Sigma^k = \sigma^{j\ell} \qquad (k, j, \ell \text{ ciclici}) \,. \tag{4.3}$$

Poichè $\sigma^{j\ell} = i\gamma^j\gamma^\ell$ $(j \leq \ell)$, si ha

$$\Sigma^k = i\gamma^j\gamma^\ell \qquad (k, j, \ell \text{ ciclici}) \,, \tag{4.4}$$

cioè

$$\Sigma^k = \frac{i}{2} \sum_{j,\ell} \epsilon^{kj\ell} \gamma^j\gamma^\ell \,. \tag{4.5}$$

Esplicitamente si ha

$$\Sigma^1 = i\gamma^2\gamma^3 \,, \qquad \Sigma^2 = i\gamma^3\gamma^1 \,, \qquad \Sigma^3 = i\gamma^1\gamma^2 \,. \tag{4.6}$$

▶ Esercizio 4.1

Dimostrare che è possibile scrivere Σ^k come

$$\Sigma^k = -\gamma^0\gamma^k\gamma^5 = -\alpha^k\gamma^5 \,. \tag{4.7}$$

Soluzione:

Utilizzando la (4.4), si ha

$$\begin{aligned}
\Sigma^k &= i\gamma^j\gamma^\ell \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k, j, \ell \text{ ciclici}) \\
&= i\,\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^j\gamma^\ell = -i\gamma^0\,\underbrace{\gamma^k\gamma^k}_{-\mathbb{1}}\gamma^0\gamma^j\gamma^\ell \\
&= i\gamma^0\gamma^k\gamma^0\gamma^k\gamma^j\gamma^\ell = -\gamma^0\gamma^k(\underbrace{-i\gamma^0\gamma^k\gamma^j\gamma^\ell}_{\gamma^5}) \\
&= -\gamma^0\gamma^k\gamma^5\,.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

L'ultima eguaglianza discende dalla ciclicità degli indici k, j, ℓ:

$$\begin{aligned}
\gamma^5 &\equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^3\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^3\gamma^1\gamma^2 \\
&= -i\gamma^0\gamma^k\gamma^j\gamma^\ell \qquad (k, j, \ell \text{ ciclici})\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

▶ Esercizio 4.2

Dimostrare che le matrici Σ^k soddisfano le regole di commutazione dei momenti angolari,

$$\left[\Sigma^k, \Sigma^j\right] = 2i\sum_\ell \epsilon^{kj\ell}\Sigma^\ell\,, \tag{4.10}$$

come deve essere se $\vec{\Sigma}/2$ rappresenta l'operatore di spin nello spazio degli spinori di Dirac.

Soluzione:

Utilizzando l'espressione (4.7), si ha

$$\begin{aligned}
\left[\Sigma^k, \Sigma^j\right] &= \left[\gamma^0\gamma^k\gamma^5, \gamma^0\gamma^j\gamma^5\right] = \gamma^0\gamma^k\gamma^5\gamma^0\gamma^j\gamma^5 - \gamma^0\gamma^j\gamma^5\gamma^0\gamma^k\gamma^5 \\
&= \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^k\gamma^5\gamma^j\gamma^5 - \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^j\gamma^5\gamma^k\gamma^5 = \gamma^k\gamma^5\gamma^j\gamma^5 - \gamma^j\gamma^5\gamma^k\gamma^5 \\
&= -\gamma^k\gamma^j\,\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} + \gamma^j\gamma^k\,\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} = -\gamma^k\gamma^j + \gamma^j\gamma^k \\
&= -\sum_{m,n}(\underbrace{\delta^{km}\delta^{jn} - \delta^{kn}\delta^{jm}}_{\sum_\ell \epsilon^{kj\ell}\epsilon^{\ell mn}\ [(A.3c)]})\gamma^m\gamma^n = -\sum_\ell \epsilon^{kj\ell}\underbrace{\sum_{m,n}\epsilon^{\ell mn}\gamma^m\gamma^n}_{-2i\Sigma^\ell\ [(4.5)]} \\
&= 2i\sum_\ell \epsilon^{kj\ell}\Sigma^\ell\,.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

▶ Esercizio 4.3

Dimostrare che le matrici Σ^k soddisfano le regole di anticommutazione

$$\left\{\Sigma^k, \Sigma^j\right\} = 2\delta^{kj}\mathbb{1}\,. \tag{4.12}$$

Soluzione:
Utilizzando l'espressione (4.7), si ha

$$\begin{aligned}\left\{\Sigma^k, \Sigma^j\right\} &= \left\{\gamma^0\gamma^k\gamma^5, \gamma^0\gamma^j\gamma^5\right\} = \gamma^0\gamma^k\gamma^5\gamma^0\gamma^j\gamma^5 + \gamma^0\gamma^j\gamma^5\gamma^0\gamma^k\gamma^5 \\ &= \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^k\gamma^5\gamma^j\gamma^5 + \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^j\gamma^5\gamma^k\gamma^5 = \gamma^k\gamma^5\gamma^j\gamma^5 + \gamma^j\gamma^5\gamma^k\gamma^5 \\ &= -\gamma^k\gamma^j\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} - \gamma^j\gamma^k\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} = -(\gamma^k\gamma^j + \gamma^j\gamma^k) \\ &= -2g^{kj}\mathbb{1} = 2\delta^{kj}\mathbb{1}\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

▶ Esercizio 4.4
Dimostrare che

$$\Sigma^k\Sigma^j = \delta^{kj}\mathbb{1} + i\sum_\ell \epsilon^{kj\ell}\Sigma^\ell\,. \tag{4.14}$$

Soluzione:
Utilizzando le (4.10) e (4.12) si ha

$$\begin{aligned}\Sigma^k\Sigma^j &= \frac{1}{2}\left\{\Sigma^k, \Sigma^j\right\} + \frac{1}{2}\left[\Sigma^k, \Sigma^j\right] \\ &= \delta^{kj}\mathbb{1} + i\sum_\ell \epsilon^{kj\ell}\Sigma^\ell\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Commento: Dalla (4.14) è evidente che

$$\left(\Sigma^k\right)^2 = \mathbb{1}\,. \tag{4.16}$$

▶ Esercizio 4.5
Trovare l'espressione delle matrici $\vec{\Sigma}$ nella rappresentazione di Dirac.

Soluzione:

$$\vec{\Sigma}_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}\,. \tag{4.17}$$

Commento: Le matrici γ nella rappresentazione di Dirac sono scelte in modo da ottenere l'espressione (4.17) per $\vec{\Sigma}_{\mathrm{D}}$, che costituisce una diretta generalizzazione dell'espressione non relativistica $\vec{\sigma}$ dell'operatore di spin. Inoltre, dalle proprietà (A.5f)–(A.5h) delle matrici di Pauli, le proprietà di commutazione (4.10), di anticommutazione (4.12) e la proprietà (4.14) delle matrici $\vec{\Sigma}_{\mathrm{D}}$ sono ovvie.

▶ Esercizio 4.6

Utilizzando l'ovvia validità delle proprietà di commutazione (4.10) delle matrici Σ nella rappresentazione di Dirac,

$$\left[\Sigma_{\mathrm{D}}^{k}, \Sigma_{\mathrm{D}}^{j}\right] = 2i \sum_{\ell} \epsilon^{kj\ell} \Sigma_{\mathrm{D}}^{\ell} \,, \tag{4.18}$$

dimostrare che tali proprietà di commutazione valgono in una rappresentazione generica γ.

Soluzione:

Per il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac, una rappresentazione generica γ è connessa alla rappresentazione di Dirac γ_{D} dalla trasformazione di equivalenza

$$\gamma^{\mu} = S \gamma_{\mathrm{D}}^{\mu} S^{-1} \,, \tag{4.19}$$

con un'opportuna matrice unitaria S. Ne segue che

$$\Sigma^{k} = S \Sigma_{\mathrm{D}}^{k} S^{-1} \,, \tag{4.20}$$

per cui

$$\begin{aligned} \left[\Sigma^{k}, \Sigma^{j}\right] &= S \underbrace{\left[\Sigma_{\mathrm{D}}^{k}, \Sigma_{\mathrm{D}}^{j}\right]}_{2i \sum_{\ell} \epsilon^{kj\ell} \Sigma_{\mathrm{D}}^{\ell}\ [(4.18)]} S^{-1} = 2i \sum_{\ell} \epsilon^{kj\ell} \underbrace{S \Sigma_{\mathrm{D}}^{\ell} S^{-1}}_{\Sigma^{\ell}\ [(4.20)]} \\ &= 2i \sum_{\ell} \epsilon^{kj\ell} \Sigma^{\ell} \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

▶ Esercizio 4.7

Trovare l'espressione esplicita delle matrici Σ nella rappresentazione di Majorana.

Soluzione:

$$\Sigma_{\mathrm{M}}^{1} = -\alpha_{\mathrm{M}}^{1} \gamma_{\mathrm{M}}^{5} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^{3} \\ -i\sigma^{3} & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{4.22a}$$

$$\Sigma_{\mathrm{M}}^{2} = -\alpha_{\mathrm{M}}^{2} \gamma_{\mathrm{M}}^{5} = \begin{pmatrix} \sigma^{2} & 0 \\ 0 & \sigma^{2} \end{pmatrix} \,, \tag{4.22b}$$

$$\Sigma_{\mathrm{M}}^{3} = -\alpha_{\mathrm{M}}^{3} \gamma_{\mathrm{M}}^{5} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^{1} \\ -i\sigma^{1} & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{4.22c}$$

▶ Esercizio 4.8

Trovare la relazione tra le matrici Σ_{C} nella rappresentazione chirale e le matrici Σ_{D} nella rappresentazione di Dirac.

Soluzione:

Le matrici γ_{C} nella rappesentazione chirale sono legate a quelle nella rappresentazione di Dirac da

$$\gamma_{\mathrm{C}}^{0} = -\gamma_{\mathrm{D}}^{5} \,, \qquad \gamma_{\mathrm{C}}^{5} = \gamma_{\mathrm{D}}^{0} \,, \qquad \vec{\gamma}_{\mathrm{C}} = \vec{\gamma}_{\mathrm{D}} \,, \tag{4.23}$$

per cui

$$\vec{\Sigma}_{\mathrm{C}} = -\gamma^0_{\mathrm{C}}\vec{\gamma}_{\mathrm{C}}\gamma^5_{\mathrm{C}} = \gamma^5_{\mathrm{D}}\vec{\gamma}_{\mathrm{D}}\gamma^0_{\mathrm{D}} = \vec{\gamma}_{\mathrm{D}}\gamma^0_{\mathrm{D}}\gamma^5_{\mathrm{D}} = -\gamma^0_{\mathrm{D}}\vec{\gamma}_{\mathrm{D}}\gamma^5_{\mathrm{D}} = \vec{\Sigma}_{\mathrm{D}} \,. \tag{4.24}$$

▶ Esercizio 4.9

Dimostrare che

$$[\mathbb{H}, \mathbb{K}] = 0 \,, \tag{4.25}$$

con

$$\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r) \,, \tag{4.26a}$$

$$\mathbb{K} = \beta\vec{\Sigma} \cdot \vec{J} - \frac{\hbar}{2}\,\beta \,, \tag{4.26b}$$

dove $V(r)$ è un potenziale centrale.

Soluzione:

Poichè $V(r)$ è un potenziale centrale il momento angolare totale $\vec{J}$ è conservato,

$$\left[\mathbb{H}, \vec{J}\right] = 0 \,, \tag{4.27}$$

e si ha

$$\begin{aligned}[]
[\mathbb{H}, \mathbb{K}] &= \sum_{\ell} \left[\mathbb{H}, \beta\Sigma^\ell\right] J^\ell - \frac{\hbar}{2}\,[\mathbb{H}, \beta] \\
&= \sum_{k\ell} \left[\alpha^k, \beta\Sigma^\ell\right] p^k J^\ell + m \sum_{\ell} \left[\beta, \beta\Sigma^\ell\right] J^\ell - \frac{\hbar}{2} \sum_{k} \left[\alpha^k, \beta\right] p^k \,.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Tenendo conto dell'espressione (4.7) per $\vec{\Sigma}$, si ottiene

$$\begin{aligned}[]
[\mathbb{H}, \mathbb{K}] &= -\sum_{k\ell} \underbrace{\left[\gamma^0\gamma^k, \gamma^\ell\gamma^5\right]}_{2g^{k\ell}\gamma^0\gamma^5\ [(A.1a)]} p^k J^\ell + m \sum_{\ell} \underbrace{\left[\gamma^0, \gamma^\ell\gamma^5\right]}_{0\ [(A.1b)]} J^\ell - \frac{\hbar}{2} \sum_{k} \underbrace{\left[\alpha^k, \beta\right]}_{-2\gamma^k} p^k \\
&= 2\gamma^0\gamma^5\vec{p} \cdot \vec{J} + \hbar\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \,,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

dove sono state utilizzate le relazioni (A.1a) e (A.1b) e il fatto che l'unico anticommutatore non nullo è $\left\{\gamma^k, \gamma^\ell\right\} = 2g^{k\ell}\mathbb{1}$. Esprimendo ora il momento angolare totale come

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\,\vec{\Sigma} \tag{4.30}$$

e tenendo conto che $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}[]
[\mathbb{H}, \mathbb{K}] &= \hbar\gamma^0\gamma^5\vec{\Sigma} \cdot \vec{p} + \hbar\vec{\gamma} \cdot \vec{p} = -\hbar(-\gamma^0\gamma^5\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^5 + \vec{\gamma}) \cdot \vec{p} \\
&= -\hbar(-\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\vec{\gamma}\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}} + \vec{\gamma}) \cdot \vec{p} = 0 \,.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Capitolo 5

Matrice di coniugazione di carica

La matrice di coniugazione di carica $\mathcal{C}$ è una matrice unitaria,

$$\boxed{\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}}\,, \tag{5.1}$$

definita dalla relazione (3.16):

$$\boxed{\mathcal{C}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu}\,, \tag{5.2}$$

che implica

$$-(\gamma^\mu)^T = \mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}\,. \tag{5.3}$$

5-A. **La matrice $\mathcal{C}$ esiste**, perchè se le matrici γ^μ costituiscono una rappresentazione delle matrici di Dirac, le matrici $-(\gamma^\mu)^T$ costituiscono un'altra rappresentazione delle matrici di Dirac. Infatti,

$$\{-(\gamma^\mu)^T\,,\,-(\gamma^\nu)^T\} = \{(\gamma^\mu)^T\,,\,(\gamma^\nu)^T\} = (\{\gamma^\nu\,,\,\gamma^\mu\})^T = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}\,, \tag{5.4}$$

e

$$(-\gamma^0)^T(-\gamma^\mu)^T(-\gamma^0)^T = -(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0)^T = -\left[(\gamma^\mu)^\dagger\right]^T = \left[-(\gamma^\mu)^T\right]^\dagger\,. \tag{5.5}$$

Il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac garantisce l'esistenza di una matrice $\mathcal{C}$ unitaria che opera la trasformazione di equivalenza (5.3) e quindi soddisfa la condizione (5.2). Inoltre, il teorema di Pauli garantisce che **la matrice $\mathcal{C}$ è definita univocamente, a meno di un fattore di fase arbitrario**.

5-B. La trasformazione della matrice di coniugazione di carica $\mathcal{C}$ per un cambiamento della rappresentazione delle matrici di Dirac del tipo (3.4) è dato da

$$\mathcal{C}' = \eta\,S\,\mathcal{C}\,S^T\,, \tag{5.6}$$

dove η è una fase arbitraria, come dimostrato nell'esercizio 3.14.

▶ Esercizio 5.1

Dimostrare che la matrice di inversione temporale $\mathcal{B}$ unitaria e tale da soddisfare le relazioni

$$\mathcal{B}(\gamma^\mu)^T\mathcal{B}^{-1} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu \tag{5.7}$$

è data da

$$\mathcal{B} \equiv \eta_T\gamma^0\gamma^5\mathcal{C}\,, \tag{5.8}$$

dove η_T è un fattore di fase arbitrario ($|\eta_T|^2 = 1$).

Soluzione:

Tenendo conto che $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$, $(\gamma^5)^{-1} = \gamma^5$ e della proprietà (5.2), si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\gamma^\mu)^T\mathcal{B}^{-1} &= \gamma^0\gamma^5\mathcal{C}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C}^{-1}\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}}\gamma^0 \\ &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = g^{\mu\mu}\gamma^\mu\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Tenendo conto che $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ e della proprietà (5.1), si dimostra che la matrice $\mathcal{B}$ è unitaria:

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^\dagger = \gamma^0\gamma^5\underbrace{\mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger}_{\mathbb{1}}(\gamma^5)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}\,, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{B}^\dagger\mathcal{B} = \mathcal{C}^\dagger(\gamma^5)^\dagger\underbrace{(\gamma^0)^\dagger\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^5\mathcal{C} = \mathcal{C}^\dagger\underbrace{\gamma^5\gamma^5}_{\mathbb{1}}\mathcal{C} = \mathcal{C}^\dagger\mathcal{C} = \mathbb{1}\,. \tag{5.11}$$

▶ Esercizio 5.2

Determinare la forma esplicita di $\mathcal{C}$ nella rappresentazione di Dirac.

Soluzione:

Scriviamo $\mathcal{C}$ come

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\,, \tag{5.12}$$

dove A, B, C, D sono quattro matrici 2×2. Determiniamo le matrici A, B, C, D in modo da soddisfare le condizioni (5.1) e (5.2) che definiscono $\mathcal{C}$.

La richiesta che $\mathcal{C}$ sia una matrice unitaria ($\mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger = \mathbb{1}$) impone i vincoli

$$AA^\dagger + BB^\dagger = \mathbb{1}\,, \tag{5.13a}$$

$$AC^\dagger + BD^\dagger = 0\,, \tag{5.13b}$$

$$CC^\dagger + DD^\dagger = \mathbb{1}\,. \tag{5.13c}$$

(L'equazione $CA^\dagger + DB^\dagger = 0$ è equivalente alla (5.13b).) Imponiamo ora la condizione

$$\mathcal{C}(\gamma^0)^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^0\,, \tag{5.14}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & D^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{5.15}$$

Si ottengono i vincoli

$$AA^\dagger - BB^\dagger = -\mathbb{1} \, , \tag{5.16a}$$
$$AC^\dagger - BD^\dagger = 0 \, , \tag{5.16b}$$
$$CC^\dagger - DD^\dagger = \mathbb{1} \, . \tag{5.16c}$$

(L'equazione $CA^\dagger - DB^\dagger = 0$ è equivalente alla (5.16b).) Sommando e sottraendo l'eq. (5.13b) e l'eq. (5.16b) si ottiene

$$\text{Eq. (5.13b)} + \text{Eq. (5.16b)} \quad \longrightarrow \quad AC^\dagger = 0 \, , \tag{5.17a}$$
$$\text{Eq. (5.13b)} - \text{Eq. (5.16b)} \quad \longrightarrow \quad BD^\dagger = 0 \, . \tag{5.17b}$$

Considerando la possibilità più semplice, cerchiamo se esistono soluzioni delle equazioni (5.17) con due matrici nulle. Ci sono quattro possibilità:

5.2-1. $A = B = 0$. In questo caso si ha

$$\begin{cases} \text{Eq. (5.13a)} & \longrightarrow & 0 = \mathbb{1} & \text{Impossibile!} \\ \text{Eq. (5.16a)} & \longrightarrow & 0 = -\mathbb{1} & \text{Impossibile!} \end{cases} \tag{5.18}$$

Quindi questa soluzione è esclusa.

5.2-2. $C = D = 0$. In questo caso si ha

$$\begin{cases} \text{Eq. (5.13c)} & \longrightarrow & 0 = \mathbb{1} & \text{Impossibile!} \\ \text{Eq. (5.16c)} & \longrightarrow & 0 = \mathbb{1} & \text{Impossibile!} \end{cases} \tag{5.19}$$

Quindi anche questa soluzione è esclusa.

5.2-3. $B = C = 0$. In questo caso si ha

$$\left.\begin{cases} \text{Eq. (5.13c)} & \longrightarrow & DD^\dagger = \mathbb{1} \\ \text{Eq. (5.16c)} & \longrightarrow & -DD^\dagger = \mathbb{1} \end{cases}\right\} \text{Impossibile!} \tag{5.20}$$

Quindi anche questa soluzione è esclusa.

5.2-4. $A = D = 0$. In questo caso si ha

$$\left.\begin{cases} \text{Eq. (5.13a)} & \longrightarrow & BB^\dagger = \mathbb{1} \\ \text{Eq. (5.16a)} & \longrightarrow & -BB^\dagger = -\mathbb{1} \end{cases}\right\} \text{OK} \tag{5.21a}$$

$$\left.\begin{cases} \text{Eq. (5.13c)} & \longrightarrow & CC^\dagger = \mathbb{1} \\ \text{Eq. (5.16c)} & \longrightarrow & CC^\dagger = \mathbb{1} \end{cases}\right\} \text{OK} \tag{5.21b}$$

Quindi questa soluzione è accettabile.

Consideriamo quindi la matrice (5.12) con $A = D = 0$:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.22}$$

Poichè la matrice (5.22) è stata ottenuta dai vincoli (5.13b), (5.16b), restano da soddisfare i vincoli (5.13a), (5.13c), (5.16a), (5.16c). Per $A = D = 0$ il vincolo (5.13a) è equivalente al vincolo (5.16a) e il vincolo (5.13c) è equivalente al vincolo (5.16c) Perciò restano i vincoli

$$BB^\dagger = \mathbb{1} , \tag{5.23a}$$

$$CC^\dagger = \mathbb{1} , \tag{5.23b}$$

cioè B e C devono essere matrici unitarie.

Imponiamo ora la condizione

$$\mathcal{C}(\gamma^k)^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^k , \tag{5.24}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -(\sigma^k)^T \\ (\sigma^k)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C^\dagger \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.25}$$

Si ottengono i due vincoli

$$B(\sigma^k)^T C^\dagger = -\sigma^k , \tag{5.26a}$$

$$C(\sigma^k)^T B^\dagger = -\sigma^k , \tag{5.26b}$$

che sono equivalenti, perchè le σ^k sono hermitiane ($(\sigma^k)^\dagger = \sigma^k$). Questi vincoli sono soddisfatti se

$$B = C = \eta\sigma^2 , \tag{5.27}$$

dove η è un fattore di fase arbitrario ($|\eta|^2 = 1$). Infatti, si ha

$$\sigma^2 \underbrace{(\sigma^1)^T}_{\sigma^1} \underbrace{(\sigma^2)^\dagger}_{\sigma^2} = \sigma^2 \underbrace{\sigma^1\sigma^2}_{i\sigma^3} = i\,\underbrace{\sigma^2\sigma^3}_{i\sigma^1} = -\sigma^1 , \tag{5.28a}$$

$$\sigma^2 \underbrace{(\sigma^2)^T}_{-\sigma^2} \underbrace{(\sigma^2)^\dagger}_{\sigma^2} = -\sigma^2 \underbrace{\sigma^2\sigma^2}_{1} = -\sigma^2 , \tag{5.28b}$$

$$\sigma^2 \underbrace{(\sigma^3)^T}_{\sigma^3} \underbrace{(\sigma^2)^\dagger}_{\sigma^2} = \underbrace{\sigma^2\sigma^3}_{i\sigma^1}\sigma^2 = i\,\underbrace{\sigma^1\sigma^2}_{i\sigma^3} = -\sigma^3 . \tag{5.28c}$$

La scelta (5.27) soddisfa anche i vincoli (5.23a), (5.23b), perchè σ^2 è una matrice unitaria

$$\sigma^2(\sigma^2)^\dagger = \sigma^2\sigma^2 = \mathbb{1} . \tag{5.29}$$

In conclusione abbiamo ottenuto che nella rappresentazione di Dirac la matrice

$$\mathcal{C} = \eta \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

è una soluzione delle equazioni (5.1) e (5.2) che definiscono la matrice di coniugazione di carica. Non abbiamo dimostrato che questa soluzione è unica, ma questa proprietà è garantita dal teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici γ (vedi il punto **5-A**).

Nella rappresentazione di Dirac si sceglie

$$\eta = -i\,, \tag{5.31}$$

per cui

$$\mathcal{C}_\mathrm{D} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.32}$$

Ne segue che nella rappresentazione di Dirac la matrice $\mathcal{C}$ è data da

$$\mathcal{C}_\mathrm{D} = -i\alpha^2_\mathrm{D} = -i\gamma^0_\mathrm{D}\gamma^2_\mathrm{D} = i\gamma^2_\mathrm{D}\gamma^0_\mathrm{D}\,. \tag{5.33}$$

▶ Esercizio 5.3

Trovare il valore di

5.3-1. $\mathcal{C}\,(\sigma^{\mu\nu})^T\,\mathcal{C}^{-1}$,

5.3-2. $\mathcal{C}\,(\gamma^5)^T\,\mathcal{C}^{-1}$,

5.3-3. $\mathcal{C}\,(\gamma^5)^T\,(\gamma^\mu)^T\,\mathcal{C}^{-1}$.

Soluzione:

5.3-1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\,(\sigma^{\mu\nu})^T\,\mathcal{C}^{-1} &= \frac{i}{2}\mathcal{C}\,([\gamma^\mu,\gamma^\nu])^T\,\mathcal{C}^{-1} = \frac{i}{2}\mathcal{C}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^T\,\mathcal{C}^{-1} \\
&= \frac{i}{2}\mathcal{C}\left[(\gamma^\nu)^T(\gamma^\mu)^T - (\gamma^\mu)^T(\gamma^\nu)^T\right]\mathcal{C}^{-1} \\
&= \frac{i}{2}\Big[\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^\nu)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^\nu}\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^\mu} - \underbrace{\mathcal{C}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^\mu}\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^\nu)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^\nu}\Big] \\
&= \frac{i}{2}\,(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = -\frac{i}{2}\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = -\sigma^{\mu\nu}\,,
\end{aligned}$$

5.3-2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\,(\gamma^5)^T\,\mathcal{C}^{-1} &= -\,i\mathcal{C}\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right)^T\mathcal{C}^{-1} = -i\mathcal{C}(\gamma^3)^T(\gamma^2)^T(\gamma^1)^T(\gamma^0)^T\mathcal{C}^{-1} \\
&= -\,i\,\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^3)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^3}\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^2)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^2}\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^1)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^1}\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^0)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^0} \\
&= -\,i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5\,,
\end{aligned}$$

5.3-3.

$$\mathcal{C}\,(\gamma^5)^T\,(\gamma^\mu)^T\,\mathcal{C}^{-1} = \underbrace{\mathcal{C}(\gamma^5)^T\mathcal{C}^{-1}}_{\gamma^5}\underbrace{\mathcal{C}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C}^{-1}}_{-\gamma^\mu} = -\gamma^5\gamma^\mu\,,$$

Perciò

$$\mathcal{C}\,(\sigma^{\mu\nu})^T\,\mathcal{C}^{-1} = -\sigma^{\mu\nu}\,, \tag{5.34a}$$

$$\mathcal{C}\,(\gamma^5)^T\,\mathcal{C}^{-1} = \gamma^5\,, \tag{5.34b}$$

$$\mathcal{C}\,(\gamma^5)^T\,(\gamma^\mu)^T\,\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^5\,\gamma^\mu\,. \tag{5.34c}$$

Commento: Queste proprietà sono utili perchè sono indipendenti dalla rappresentazione delle matrici di Dirac. Infatti, sono state ottenute usando le proprietà generali delle matrici γ e le relazioni (5.1) e (5.2) che definiscono la matrice di coniugazione di carica $\mathcal{C}$.

▶ Esercizio 5.4

Per una particella di spin 1/2 e di carica nulla, scriviamo la funzione d'onda spinoriale in rappresentazione di chiralità come

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}\,. \tag{5.35}$$

Trovare la relazione che deve intercorrere tra i due spinori a 2 componenti χ_1, χ_2 affinchè valga la proprietà di autoconiugazione

$$\psi^c = \psi\,. \tag{5.36}$$

Soluzione:

Poichè

$$\psi^c = \mathcal{C}\overline{\psi}^T\,, \tag{5.37}$$

dove $\mathcal{C}$ è la matrice di coniugazione di carica, la cui espressione nella rappresentazione chirale è

$$\mathcal{C} = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}\,. \tag{5.38}$$

Calcoliamo $\overline{\psi}^T$ usando l'espressione (5.35) nella rappresentazione chirale:

$$\overline{\psi}^T = (\gamma^0)^T\,\psi^* = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1^* \\ \chi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_2^* \\ \chi_1^* \end{pmatrix}\,. \tag{5.39}$$

Perciò, per ψ^c si ottiene

$$\psi^c = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_2^* \\ \chi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,\sigma^2\,\chi_2^* \\ -i\,\sigma^2\,\chi_1^* \end{pmatrix}\,. \tag{5.40}$$

Il vincolo (5.36) implica le relazioni

$$\begin{cases} \chi_1 = i\,\sigma^2\,\chi_2^* \\ \chi_2 = -i\,\sigma^2\,\chi_1^* \end{cases} . \tag{5.41}$$

Si dimostra facilmente che queste due equazioni sono equivalenti (moltiplicando per σ^2, prendendo l'equazione complessa coniugata e tenendo conto che $(\sigma^2)^2 = \mathbb{1}$ e $(\sigma^2)^* = -\sigma^2$). Perciò basta, per esempio, la seconda equazione, che implica

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ -i\,\sigma^2\,\chi_1^* \end{pmatrix} . \tag{5.42}$$

Capitolo 6

Soluzioni dell'equazione di Dirac

Soluzione dell'equazione di Dirac (1.2) autofunzione del quadri-impulso p_μ con valore positivo dell'energia:

$$\psi_{p,+}^{(r)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}}\, e^{-i\,p\cdot x}\, u^{(r)}(p) \quad \text{con} \quad p_0 > 0\,, \quad r = 1, 2\,, \tag{6.1}$$

con lo spinore $u^{(r)}(p)$ tale che

$$(\not{p} - m)\, u^{(r)}(p) = 0\,. \tag{6.2}$$

Soluzione dell'equazione di Dirac (1.2) autofunzione del quadri-impulso p_μ con valore negativo dell'energia:

$$\psi_{p,-}^{(r)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}}\, e^{i\,p\cdot x}\, v^{(r)}(p) \quad \text{con} \quad p_0 > 0\,, \quad r = 1, 2\,. \tag{6.3}$$

con lo spinore $v^{(r)}(p)$ tale che

$$(\not{p} + m)\, v^{(r)}(p) = 0\,. \tag{6.4}$$

Relazioni di ortonormalizzazione degli spinori:

$$\overline{u}^{(r)}(p)\, u^{(s)}(p) = \delta_{rs} \qquad \Leftrightarrow \qquad {u^{(r)}}^\dagger(p)\, u^{(s)}(p) = \frac{E}{m}\, \delta_{rs}\,, \tag{6.5a}$$

$$\overline{v}^{(r)}(p)\, v^{(s)}(p) = -\delta_{rs} \qquad \Leftrightarrow \qquad {v^{(r)}}^\dagger(p)\, v^{(s)}(p) = \frac{E}{m}\, \delta_{rs}\,, \tag{6.5b}$$

$$\overline{u}^{(r)}(p)\, v^{(s)}(p) = 0\,, \tag{6.5c}$$

$$\overline{u}^{(r)}(p)\, v^{(s)}(p) = 0\,, \tag{6.5d}$$

Relazioni di ortonormalizzazione delle funzioni d'onda spinoriali:

$$\int \mathrm{d}^3x \, \psi_{p,+}^{(r)\,\dagger}(x) \, \psi_{p',+}^{(s)}(x) = \delta_{rs} \, \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) \,, \tag{6.6a}$$

$$\int \mathrm{d}^3x \, \psi_{p,-}^{(r)\,\dagger}(x) \, \psi_{p',-}^{(s)}(x) = \delta_{rs} \, \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) \,, \tag{6.6b}$$

$$\int \mathrm{d}^3x \, \psi_{p,+}^{(r)\,\dagger}(x) \, \psi_{p',-}^{(s)}(x) = 0 \,, \tag{6.6c}$$

$$\int \mathrm{d}^3x \, \psi_{p,-}^{(r)\,\dagger}(x) \, \psi_{p',+}^{(s)}(x) = 0 \,. \tag{6.6d}$$

Nella rappresentazione di Dirac gli spinori $u^{(r)}(p)$ e $v^{(r)}(p)$ autofunzioni dell'operatore di spin lungo l'asse z

$$S_z = \frac{\Sigma^3}{2} \tag{6.7}$$

nel sistema di riferimento a riposo sono

$$u^{(r)}(p) \equiv \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(p) \\ \varphi_+^{(r)}(p) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\chi_+^{(r)} \end{pmatrix} \,, \tag{6.8a}$$

$$v^{(r)}(p) \equiv \begin{pmatrix} \chi_-^{(r)}(p) \\ \varphi_-^{(r)}(p) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}} \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\varphi_-^{(r)} \\ \varphi_-^{(r)} \end{pmatrix} \,, \tag{6.8b}$$

con

$$\chi_+^{(1)} = \varphi_-^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \qquad \chi_+^{(2)} = \varphi_-^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,. \tag{6.9}$$

– $u^{(1)}(p)$ rappresenta un fermione con energia positiva e spin $+1/2$ nella direzione dell'asse z nel sistema di riferimento a riposo.

– $u^{(2)}(p)$ rappresenta un fermione con energia positiva e spin $-1/2$ nella direzione dell'asse z nel sistema di riferimento a riposo.

– $v^{(1)}(p)$ rappresenta un fermione con energia negativa e spin $+1/2$ nella direzione dell'asse z nel sistema di riferimento a riposo.

– $v^{(2)}(p)$ rappresenta un fermione con energia negativa e spin $-1/2$ nella direzione dell'asse z nel sistema di riferimento a riposo.

Proiettori su stati ad energia positiva e negativa:

$$\Lambda_+(p) \equiv \sum_{r=1,2} u^{(r)}(p) \, \overline{u^{(r)}}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m} \,, \tag{6.10a}$$

$$\Lambda_-(p) \equiv - \sum_{r=1,2} v^{(r)}(p) \, \overline{v^{(r)}}(p) = \frac{-\not{p} + m}{2m} \,. \tag{6.10b}$$

Proprietà dei proiettori:

$$\begin{aligned}
\left[\Lambda_+(p)\right]^2 &= \Lambda_+(p)\,, && (6.11a)\\
\left[\Lambda_-(p)\right]^2 &= \Lambda_-(p)\,, && (6.11b)\\
\Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) &= \mathbb{1}\,, && (6.11c)\\
\Lambda_+(p)\,\Lambda_-(p) &= \Lambda_-(p)\,\Lambda_+(p) = 0\,. && (6.11d)
\end{aligned}$$

▶ Esercizio 6.1

Dimostrare che

$$u^{(r)\dagger}(p_0, +\vec{p})\, v^{(s)}(p_0, -\vec{p}) = 0\,. \tag{6.12}$$

Soluzione:

Definiamo

$$p \equiv (p_0, +\vec{p})\,, \quad \widetilde{p} \equiv (p_0, -\vec{p})\,. \tag{6.13}$$

Per la definizione di $u^{(r)}(p)$ si ha

$$(\not{p} - m)\, u^{(r)}(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^{(r)}(p) = \frac{\not{p}}{m}\, u^{(r)}(p) \quad \Rightarrow \quad u^{(r)\dagger}(p) = u^{(r)\dagger}(p)\, \frac{\not{p}^\dagger}{m}\,. \tag{6.14}$$

Utilizzando le (1.5), si ha

$$\not{p}^\dagger = p^0 \gamma^{0\dagger} - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}^\dagger = p^0\gamma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\gamma} = \widetilde{\not{p}}\,. \tag{6.15}$$

Perciò la (6.14) si può scrivere come

$$u^{(r)\dagger}(p) = u^{(r)\dagger}(p)\, \frac{\widetilde{\not{p}}}{m}\,. \tag{6.16}$$

D'altra parte, per la definizione di $v^{(s)}(\widetilde{p})$ si ha

$$\left(\widetilde{\not{p}} + m\right) v^{(s)}(\widetilde{p}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\widetilde{\not{p}}}{m}\, v^{(s)}(\widetilde{p}) = -v^{(s)}(\widetilde{p})\,. \tag{6.17}$$

Dalle (6.16) e (6.17) si ottiene

$$u^{(r)\dagger}(p)\, v^{(s)}(\widetilde{p}) = u^{(r)\dagger}(p)\, \frac{\widetilde{\not{p}}}{m}\, v^{(s)}(\widetilde{p}) = -u^{(r)\dagger}(p)\, v^{(s)}(\widetilde{p}) \quad \Rightarrow \quad u^{(r)\dagger}(p)\, v^{(s)}(\widetilde{p}) = 0\,. \tag{6.18}$$

Commento: La proprietà (6.12) permette di dimostrare la relazione di ortogonalità (6.6c):

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x\, \psi^{(r)\,\dagger}_{p,+}(x)\, \psi^{(s)}_{p',-}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{m}{E} \int \mathrm{d}^3x\, e^{i(p+p')\cdot x}\, u^{(r)\dagger}(p)\, v^{(s)}(p')\\
&= \frac{m}{E}\,\delta^3(\vec{p} + \vec{p}')\, u^{(r)\dagger}(p)\, v^{(s)}(p') = \frac{m}{E}\,\delta^3(\vec{p} - \vec{\widetilde{p}})\, u^{(r)\dagger}(p)\, v^{(s)}(\widetilde{p}) = 0\,.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Analogamente, la relazione ottenuta dalla (6.12) per coniugazione hermitiana,

$$v^{(r)\dagger}(p_0,+\vec{p})\,u^{(s)}(p_0,-\vec{p})=0\,, \tag{6.20}$$

permette di dimostrare la relazione di ortogonalità (6.6d).

▶ Esercizio 6.2

Trovare le funzioni d'onda spinoriali, soluzioni ad energia positiva dell'equazione di Dirac libera nella rappresentazione chirale.

Soluzione:

Metodo 1

La matrice S che effettua la trasformazione di equivalenza

$$\gamma^\mu_{\mathrm{C}}=S_{\mathrm{C}}\,\gamma^\mu_{\mathrm{D}}\,S_{\mathrm{C}}^{-1} \tag{6.21}$$

dalla rappresentazione di Dirac a quella chirale è data da

$$S_{\mathrm{C}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{1}+\gamma^0_{\mathrm{D}}\,\gamma^5_{\mathrm{D}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbb{1} & -\mathbb{1}\\ \mathbb{1} & \mathbb{1}\end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Conoscendo le soluzioni ad energia positiva dell'equazione di Dirac libera nella rappresentazione di Dirac,

$$\psi^{(r)}_{p,+,\mathrm{D}}(x)=u^{(r)}_{\mathrm{D}}(p)\,e^{-ip\cdot x}=\sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix}\chi^{(r)}_+\\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\chi^{(r)}_+\end{pmatrix}e^{-ip\cdot x}\,, \tag{6.23}$$

e sapendo che

$$\psi^{(r)}_{p,+,\mathrm{C}}(x)=S_{\mathrm{C}}\,\psi^{(r)}_{p,+,\mathrm{D}}(x)\,, \tag{6.24}$$

si ottiene

$$\psi^{(r)}_{p,+,\mathrm{C}}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{m}}\begin{pmatrix}\left(1-\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)\chi^{(r)}_+\\ \left(1+\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)\chi^{(r)}_+\end{pmatrix}e^{-ip\cdot x}\,. \tag{6.25}$$

Metodo 2

Alternativamente, si può risolvere l'equazione di Dirac libera nella rappresentazione chirale. Gli spinori $u^{(r)}(p)$ sono dati dall'equazione

$$(\not{p}-m)\,u^{(r)}(p)=0\,, \tag{6.26}$$

che nel sistema di riferimento a riposo diventa

$$\left(\gamma^0-1\right)u^{(r)}(m,\vec{0})=0\,. \tag{6.27}$$

Scrivendo

$$u^{(r)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)} \\ \varphi_+^{(r)} \end{pmatrix} , \tag{6.28}$$

nella rappresentazione chirale si ottiene

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)} \\ \varphi_+^{(r)} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_+^{(r)} = \chi_+^{(r)} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{C}}^{(r)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)} \\ \chi_+^{(r)} \end{pmatrix} . \tag{6.29}$$

Gli spinori $u_{\mathrm{C}}(p)$ in un sistema di riferimento generico sono dati da

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{C}}^{(r)}(p) &= N\,(\not{p} + m)\, u_{\mathrm{C}}^{(r)}(m,\vec{0}) \\ &= N \begin{pmatrix} m & E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)} \\ \chi_+^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= N \begin{pmatrix} (m + E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \chi_+^{(r)} \\ (m + E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \chi_+^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= N\,(E+m) \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \chi_+^{(r)} \\ \left(1 + \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \chi_+^{(r)} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{6.30}$$

Determiniamo la costante di normalizzazione N in modo che

$$\overline{u}_{\mathrm{C}}^{(r)}(p)\, u_{\mathrm{C}}^{(s)}(p) = \delta_{rs} \,. \tag{6.31}$$

Poichè le matrici σ^k sono hermitiane, si ha

$$\begin{aligned} &\overline{u}_{\mathrm{C}}^{(r)}(p)\, u_{\mathrm{C}}^{(s)}(p) \\ &= |N|^2\,(E+m)^2 \left(\chi_+^{(r)\dagger} \left(1 - \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \quad \chi_+^{(r)\dagger} \left(1 + \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \right) \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \chi_+^{(s)} \\ \left(1 + \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \chi_+^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= 2\,|N|^2\,(E+m)^2\, \chi_+^{(r)\dagger} \left[1 - \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m} \right)^2 \right] \chi_+^{(s)} \\ &= 2\,|N|^2\,(E+m)^2 \left[1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right] \chi_+^{(r)\dagger} \chi_+^{(s)} \\ &= 2\,|N|^2 \left[(E+m)^2 - |\vec{p}|^2 \right] \delta_{rs} \\ &= 4\,|N|^2\, m\,(E+m)\, \delta_{rs} \,, \end{aligned} \tag{6.32}$$

e possiamo scegliere

$$N = \frac{1}{2\sqrt{m\,(E+m)}} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{C}}^{(r)}(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E+m}{m}} \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \chi_+^{(r)} \\ \left(1 + \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\right) \chi_+^{(r)} \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

▶ Esercizio 6.3

Siano $u_{\mathrm{D}}^{(r)}(p)$ e $v_{\mathrm{D}}^{(r)}(p)$ gli spinori liberi rispettivamente ad energia positiva e ad energia negativa nella rappresentazione di Dirac $\gamma_{\mathrm{D}}^{\mu}$. Trovare l'espressione esplicita di $u'^{(r)}(p)$ e $v'^{(r)}(p)$ nella nuova rappresentazione

$$\gamma'^{\mu} = \gamma_{\mathrm{D}}^{5}\,\gamma_{\mathrm{D}}^{\mu}\,\gamma_{\mathrm{D}}^{5}\,. \tag{6.34}$$

Soluzione:

Nella rappresentazione di Dirac si ha

$$u_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix} \chi_{+}^{(r)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\chi_{+}^{(r)} \end{pmatrix}, \tag{6.35a}$$

$$v_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\varphi_{-}^{(r)} \\ \varphi_{-}^{(r)} \end{pmatrix}. \tag{6.35b}$$

La matrice che effettua la trasformazione di equivalenza $\gamma'^{\mu} = S\,\gamma_{\mathrm{D}}^{\mu}\,S^{-1}$ è

$$S = S^{-1} = \gamma_{\mathrm{D}}^{5}\,. \tag{6.36}$$

Perciò otteniamo

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{D}}'^{(r)}(p) &= S\,u_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) = \gamma_{\mathrm{D}}^{5}\,u_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0\,\chi_{+}^{(r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_{+}^{(r)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\chi_{+}^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\chi_{+}^{(r)} \\ -\chi_{+}^{(r)} \end{pmatrix} = -v_{\mathrm{D}}^{(r)}(p)\,, \end{aligned} \tag{6.37a}$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) &= S\,v_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) = \gamma_{\mathrm{D}}^{5}\,v_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0\,\chi_{+}^{(r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\varphi_{-}^{(r)} \\ \varphi_{-}^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{E+m}{2\,m}}\begin{pmatrix} -\varphi_{-}^{(r)} \\ -\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\varphi_{-}^{(r)} = -u_{\mathrm{D}}^{(r)}(p) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.37b}$$

perchè $\chi_{+}^{(r)} = \varphi_{-}^{(r)}$.

Capitolo 7

Covarianza dell'Equazione di Dirac

Data una trasformazione di Lorentz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{7.1}$$

che connette un sistema di riferimento S con coordinate x ad un sistema di riferimento S' con coordinate x', le funzioni d'onda $\psi(x)$ e $\psi'(x')$ nei due sistemi di riferimento sono connesse dalla trasformazione lineare

$$\psi'(x') = \mathcal{S}_{\Lambda}\psi(x)\,, \tag{7.2}$$

con

$$\mathcal{S}_{\Lambda}^{-1}\,\gamma^{\mu}\,\mathcal{S}_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\gamma^{\nu}\,. \tag{7.3}$$

Data una trasformazione di Lorentz Λ, esiste una matrice $\mathcal{S}_{\Lambda}$ che soddisfa la (7.3). Infatti, le matrici

$$\gamma'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\gamma^{\nu} \tag{7.4}$$

soddisfano alle stesse relazioni di anticommutazione delle matrici γ^{μ}:

$$\begin{aligned}
\gamma'^{\mu}\,\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\,\gamma'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\gamma^{\rho}\,\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,\gamma^{\sigma} + \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,\gamma^{\sigma}\,\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\gamma^{\rho} \\
&= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,(\gamma^{\rho}\,\gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma}\,\gamma^{\rho}) \\
&= 2\,g^{\rho\sigma}\,\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,\mathbb{1} = 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}\,.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Per la prima parte del teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac (vedi il Capitolo 3), esiste una relazione di equivalenza (7.3) che connette le matrici γ^{μ} e le matrici (7.4). Però, poichè la trasformazione (7.4) non preserva le relazioni (3.2), le matrici γ'^{μ} date dalla (7.4) non costituiscono una rappresentazione delle matrici di Dirac. Inoltre, poichè non si può applicare la seconda parte del teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac, la matrice $\mathcal{S}_{\Lambda}$ può non essere unitaria.

Per trasformazioni di Lorentz proprie si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda} = e^{-\frac{i}{4}\,\omega^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}}\,. \tag{7.6}$$

Per una rotazione di un angolo θ attorno ad un generico asse x^k,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (R_k)^\mu{}_\nu(\theta) = g^\mu_\nu \cos\theta + \left(g^{\mu 0} g_{\nu 0} + g^{\mu k} g_{\nu k}\right)(1-\cos\theta) + \sum_{j,\ell} \epsilon_{kj\ell} g^{\mu j} g_{\nu \ell} \sin\theta\,, \tag{7.7}$$

si ha

$$\mathcal{S}_{R_k}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta\,\Sigma^k} = \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\,\Sigma^k \sin\frac{\theta}{2}\,. \tag{7.8}$$

Questa trasformazione è unitaria.

Per un boost con velocità v lungo un generico asse x^k

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda_k)^\mu{}_\nu(\varphi) = g^\mu_\nu + \left(g^{\mu 0} g_{\nu 0} + g^{\mu k} g_{\nu k}\right)(\cosh\varphi - 1) + \left(g^{\mu 0} g_{\nu k} + g^{\mu k} g_{\nu 0}\right)\sinh\varphi\,, \tag{7.9}$$

con

$$\cosh\varphi = \gamma \equiv \left(1 - v^2\right)^{-1/2}\,, \tag{7.10a}$$

$$\sinh\varphi = \gamma\, v\,, \tag{7.10b}$$

si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\varphi\,\alpha^k} = \mathbb{1}\cosh\!\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \alpha^k \sinh\!\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,, \tag{7.11}$$

oppure, utilizzando la relazione (7.10a) e le formule (A.6b), (A.6c),

$$\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) = \mathbb{1}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} - \alpha^k \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,. \tag{7.12}$$

Questa trasformazione non è unitaria.

Dati due spinori ψ_1 e ψ_2 (che possono essere identici), le matrici Γ^a permettono di costruire i seguenti 5 covarianti di Lorentz bilineari negli spinori (cioè del tipo $\overline{\psi_1}\,\Gamma^a\,\psi_2$):

$\Gamma^a = \mathbb{1}$	$(a = 1)$	$\Longrightarrow$	$\overline{\psi_1}\,\psi_2$	scalare ,	(7.13a)
$\Gamma^a = \gamma^\mu$	$(a = 2-5)$	$\Longrightarrow$	$\overline{\psi_1}\,\gamma^\mu\,\psi_2$	vettore (polare) ,	(7.13b)
$\Gamma^a = \sigma^{\mu\nu}$	$(a = 6-11)$	$\Longrightarrow$	$\overline{\psi_1}\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi_2$	tensore ,	(7.13c)
$\Gamma^a = \gamma^\mu\gamma^5$	$(a = 12-15)$	$\Longrightarrow$	$\overline{\psi_1}\,\gamma^\mu\gamma^5\,\psi_2$	(vettore) assiale ,	(7.13d)
$\Gamma^a = \gamma^5$	$(a = 16)$	$\Longrightarrow$	$\overline{\psi_1}\,\gamma^5\,\psi_2$	pseudoscalare .	(7.13e)

Dati quattro spinori ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4, le matrici Γ^a permettono di costruire i seguenti 5 scalari di Lorentz quadrilineari negli spinori:

$\overline{\psi_1}\,\psi_2\,\overline{\psi_3}\,\psi_4$	scalare–scalare ,	(7.14a)
$\overline{\psi_1}\,\gamma^\mu\,\psi_2\,\overline{\psi_3}\,\gamma_\mu\,\psi_4$	vettore–vettore ,	(7.14b)
$\overline{\psi_1}\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi_2\,\overline{\psi_3}\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi_4$	tensore–tensore ,	(7.14c)
$\overline{\psi_1}\,\gamma^\mu\gamma^5\,\psi_2\,\overline{\psi_3}\,\gamma_\mu\gamma_5\,\psi_4$	assiale–assiale ,	(7.14d)
$\overline{\psi_1}\,\gamma^5\,\psi_2$	pseudoscalare–pseudoscalare .	(7.14e)

▶ Esercizio 7.1

Si scrivano gli spinori di Dirac per un elettrone di impulso $\vec{p}$ e di energia negativa, scegliendo una opportuna rappresentazione di matrici di Dirac.

Se ne ricavino esplicitamente gli spinori trasformati per rotazione spaziale di un angolo $\theta = 60°$ in verso antiorario attorno all'asse y (si prenda l'asse z lungo $\vec{p}$).

Soluzione:

Prendendo $\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|)$, nella rappresentazione di Dirac si ha

$$v^{(r)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \dfrac{|\vec{p}|\,\sigma^3}{E+m}\varphi_-^{(r)}(0) \\ \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

Per rotazione spaziale di un angolo θ in verso antiorario (come una vite destrorsa) attorno all'asse y si ha

$$p^\mu = (R_2)^\mu{}_\nu(\theta)\, p^\nu \,, \tag{7.16}$$

con

$$(R_2)^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{7.17}$$

Lo spinore $v'^{(r)}(p')$ nel sistema ruotato è connesso allo spinore $v^{(r)}(p)$ dalla relazione

$$v'^{(r)}(p') = \mathcal{S}_{R_2}(\theta)\, v^{(r)}(p) \,, \tag{7.18}$$

con

$$\mathcal{S}_{R_2}(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma^2} = \cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma^2 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma^2 \end{pmatrix} . \tag{7.19}$$

Usando l'espressione esplicita (7.15) per $v^{(r)}(p)$, la proprietà $\sigma^2\sigma^3 = i\sigma^1$, e le eguaglianze $E' = E$, $|\vec{p'}| = |\vec{p}|$ per rotazioni, si ottiene

$$v'^{(r)}(p') = \sqrt{\frac{E'+m}{2m}} \begin{pmatrix} \dfrac{|\vec{p'}|}{E'+m}\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\sigma^3 - \sin\frac{\theta}{2}\,\sigma^1\right)\varphi_-^{(r)}(0) \\ \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma^2\right)\varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

Per $\theta = 60°$, si ha $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$, per cui

$$v'^{(r)}(p') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E'+m}{2m}} \begin{pmatrix} \dfrac{|\vec{p'}|}{E'+m}\left(\sqrt{3}\,\sigma^3 - \sigma^1\right)\varphi_-^{(r)}(0) \\ \left(\sqrt{3} + i\,\sigma^2\right)\varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

Tenendo conto che

$$\varphi_-^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_-^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

si ha

$$\begin{aligned} \sigma^1 \varphi_-^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \sigma^1 \varphi_-^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ i\,\sigma^2 \varphi_-^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & i\,\sigma^2 \varphi_-^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\sigma^3 \varphi_-^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 \varphi_-^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

per cui

$$v'^{(1)}(p') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E'+m}{2m}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,\dfrac{|\vec{p}'|}{E'+m} \\ -\dfrac{|\vec{p}'|}{E'+m} \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v'^{(2)}(p') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E'+m}{2m}} \begin{pmatrix} -\dfrac{|\vec{p}'|}{E'+m} \\ -\sqrt{3}\,\dfrac{|\vec{p}'|}{E'+m} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

▶ Esercizio 7.2

Come si trasforma l'insieme delle espressioni bilineari

$$\overline{\psi}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\psi\,, \quad \overline{\psi}\gamma^0\gamma^3\gamma^1\psi\,, \quad \overline{\psi}\gamma^0\gamma^2\gamma^3\psi\,, \quad \overline{\psi}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi \tag{7.26}$$

per trasformazioni di Lorentz proprie e per riflessione spaziale?

Soluzione:

Le quattro forme bilineari (7.26) contengono prodotti di tre matrici γ diverse e sappiamo che qualsiasi prodotto di tre matrici gamma diverse è proporzionale a una delle quattro matrici $\gamma^\mu\gamma^5$. Utilizzando le relazioni (2.4) otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \overline{\psi}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\psi &= i\overline{\psi}\gamma^3\gamma^5\psi \\ \overline{\psi}\gamma^0\gamma^3\gamma^1\psi &= i\overline{\psi}\gamma^2\gamma^5\psi \\ \overline{\psi}\gamma^0\gamma^2\gamma^3\psi &= i\overline{\psi}\gamma^1\gamma^5\psi \\ \overline{\psi}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi &= i\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi \end{aligned}\right\} \implies i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\,. \tag{7.27}$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie e per riflessione spaziale $i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ si trasforma come un quadrivettore assiale:

7.2-1. Per trasformazioni di Lorentz proprie

$$i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \to i\Lambda^\mu{}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi\,. \tag{7.28}$$

7.2-2. Per riflessione spaziale

$$i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \to \begin{cases} -i\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi & \text{per } \mu = 0\,, \\ +i\overline{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi & \text{per } \mu = k = 1,2,3\,. \end{cases} \tag{7.29}$$

▶ Esercizio 7.3

Come si trasforma l'insieme delle espressioni bilineari

$$\overline{\psi}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\psi\,, \quad \overline{\psi}\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi\,, \quad \overline{\psi}\gamma_0\gamma_2\gamma_3\psi\,, \quad \overline{\psi}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi \tag{7.30}$$

per trasformazioni di Lorentz proprie e per riflessione spaziale?

Soluzione:

Questo esercizio è simile all'esercizio 7.2, con la differenza che gli indici delle matrici γ sono in basso. Poichè

$$\gamma_0 = \gamma^0\,, \qquad \gamma_k = -\gamma^k\,, \tag{7.31}$$

dalle relazioni (2.4) otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\psi}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\psi = -i\overline{\psi}\gamma_3\gamma_5\psi \\ \overline{\psi}\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi = -i\overline{\psi}\gamma_2\gamma_5\psi \\ \overline{\psi}\gamma_0\gamma_2\gamma_3\psi = -i\overline{\psi}\gamma_1\gamma_5\psi \\ \overline{\psi}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi = -i\overline{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi \end{array}\right\} \implies \quad -i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\,. \tag{7.32}$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie e per riflessione spaziale $-i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ si trasforma come un quadrivettore assiale:

7.3-1. Per trasformazioni di Lorentz proprie

$$-i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \to -i\Lambda_\mu{}^\nu\overline{\psi}\gamma_\nu\gamma_5\psi = -ig_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu}\overline{\psi}\gamma_\nu\gamma_5\psi\,. \tag{7.33}$$

7.3-2. Per riflessione spaziale

$$-i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \to \begin{cases} +i\overline{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi & \text{per } \mu = 0\,, \\ -i\overline{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi & \text{per } \mu = k = 1,2,3\,. \end{cases} \tag{7.34}$$

▶ Esercizio 7.4

Se in un sistema di riferimento lorentziano S la funzione d'onda spinoriale nella rappresentazione di Dirac è data da

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}, \tag{7.35}$$

che espressione ha la funzione d'onda spinoriale nella rappresentazione di Dirac in un sistema S' in velocità relativa v lungo l'asse y rispetto al sistema S?

Soluzione:

Dalla (7.11), in questo caso si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda_2}(\varphi) = \mathbb{1}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} - \alpha^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} & -\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\sigma^2 \\ -\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\sigma^2 & \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \end{pmatrix}, \tag{7.36}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} & 0 & 0 & i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} & -i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} & \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} & 0 \\ -i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,\psi_1(x) + i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\psi_4(x) \\ \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,\psi_2(x) - i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\psi_3(x) \\ \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,\psi_3(x) + i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\psi_2(x) \\ \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,\psi_4(x) - i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\psi_1(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Capitolo 8

Tracce di prodotti di matrici γ

L'utilità del calcolo di tracce di prodotti di matrici γ deriva dal fatto che l'ampiezza di un processo nel quale interviene una particella di spin 1/2 ha la forma

$$\mathcal{M} = \overline{u^{(r)}}(p_f)\,\Omega\,u^{(s)}(p_i)\,, \tag{8.1}$$

dove Ω è una matrice 4×4 che in generale può essere scritta come combinazione lineare di matrici Γ, e quindi come combinazione lineare di prodotti di matrici γ. La probabilità di transizione del processo è proporzionale al modulo quadro di $\mathcal{M}$. Per calcolare $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$, osserviamo innanzi tutto che

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* &= \left[\overline{u^{(r)}}(p_f)\,\Omega\,u^{(s)}(p_i)\right]^* = \left[{u^{(r)}}^\dagger(p_f)\,\gamma^0\,\Omega\,u^{(s)}(p_i)\right]^* \\ &= {u^{(s)}}^\dagger(p_i)\,\Omega^\dagger\,{\gamma^0}^\dagger\,u^{(r)}(p_f) = \overline{u^{(s)}}(p_i)\left(\gamma^0\,\Omega^\dagger\,\gamma^0\right)u^{(r)}(p_f) \\ &= \overline{u^{(s)}}(p_i)\,\Omega'\,u^{(r)}(p_f)\,,\end{aligned} \tag{8.2}$$

con

$$\Omega' = \gamma^0\,\Omega^\dagger\,\gamma^0\,,$$

e quindi

$$|\mathcal{M}|^2 = \overline{u^{(r)}}(p_f)\,\Omega\,u^{(s)}(p_i)\,\overline{u^{(s)}}(p_i)\,\Omega'\,u^{(r)}(p_f) = \overline{u^{(s)}}(p_i)\,\Omega'\,u^{(r)}(p_f)\,\overline{u^{(r)}}(p_f)\,\Omega\,u^{(s)}(p_i)\,. \tag{8.3}$$

Se non si è interessati allo spin dello stato finale (cioè lo spin dello stato finale non viene misurato), si deve sommare sugli stati finali di polarizzazione r:

$$\sum_{r=1,2}|\mathcal{M}|^2 = \overline{u^{(s)}}(p_i)\,\Omega'\left(\sum_{r=1,2}u^{(r)}(p_f)\,\overline{u^{(r)}}(p_f)\right)\Omega\,u^{(s)}(p_i) = \overline{u^{(s)}}(p_i)\,\Omega'\,\Lambda_+(p_f)\,\Omega\,u^{(s)}(p_i)\,, \tag{8.4}$$

dove $\Lambda_+(p)$ è il proiettore sugli stati a energia positiva

$$\Lambda_+(p) \equiv \sum_{r=1,2}u^{(r)}(p)\,\overline{u^{(r)}}(p) = \frac{\not{p}+m}{2m}\,. \tag{8.5}$$

Se lo stato iniziale non è polarizzato, si deve mediare sugli stati iniziali di polarizzazione s:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{r,s=1,2}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{s=1,2}\sum_{\alpha\beta=1}^{4}\Big(\overline{u^{(s)}}(p_i)\Big)_\alpha \left(\Omega'\,\Lambda_+(p_f)\,\Omega\right)_{\alpha\beta}\left(u^{(s)}(p_i)\right)_\beta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{4}\sum_{s=1,2}\left(u^{(s)}(p_i)\right)_\beta \Big(\overline{u^{(s)}}(p_i)\Big)_\alpha \left(\Omega'\,\Lambda_+(p_f)\,\Omega\right)_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{4}\left(\Lambda_+(p_i)\right)_{\beta\alpha}\left(\Omega'\,\Lambda_+(p_f)\,\Omega\right)_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{4}\left(\Lambda_+(p_i)\,\Omega'\,\Lambda_+(p_f)\,\Omega\right)_{\beta\beta} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\Lambda_+(p_i)\,\Omega'\,\Lambda_+(p_f)\,\Omega]\ ,
\end{aligned} \tag{8.6}$$

dove α e β sono indici di Dirac. Perciò il calcolo della probabilità di transizione in un processo nel quale interviene una particella di spin 1/2 comporta il calcolo di tracce di prodotti di matrici γ.

Analogamente, l'ampiezza di un processo nel quale interviene una antiparticella di spin 1/2 ha la forma

$$\mathcal{M} = \overline{v^{(s)}}(p_i)\,\Omega\,v^{(r)}(p_f)\,, \tag{8.7}$$

per cui la corrispondente probabilità di transizione nel caso in cui lo stato iniziale non è polarizzato e lo spin dello stato finale non viene misurato è proporzionale a

$$\frac{1}{2}\sum_{r,s=1,2}|\mathcal{M}|^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\Lambda_-(p_f)\,\Omega'\,\Lambda_-(p_i)\,\Omega]\ , \tag{8.8}$$

dove $\Lambda_-(p)$ è il proiettore sugli stati a energia negativa

$$\Lambda_-(p) \equiv -\sum_{r=1,2} v^{(r)}(p)\,\overline{v^{(r)}}(p) = \frac{-\not{p}+m}{2m}\,. \tag{8.9}$$

Proprietà fondamentali delle tracce di prodotti di matrici γ:

8-A. La traccia del prodotto di un numero n dispari di matrici γ è nulla. Infatti

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}) &= \mathrm{Tr}\Big(\left(\gamma^5\right)^2\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\Big) = \mathrm{Tr}\big(\gamma^5\,\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\,\gamma^5\big) \\
&= (-1)^n\,\mathrm{Tr}\Big(\left(\gamma^5\right)^2\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\Big) = (-1)^n\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n})\ ,
\end{aligned} \tag{8.10}$$

dove γ^5 è stato prima permutato circolarmente e poi commutato con le γ^{μ_k}.

In particolare, per n dispari si ha

$$\mathrm{Tr}\big(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\,\gamma^5\big) = 0\,, \tag{8.11}$$

perchè γ^5 è il prodotto di quattro matrici γ.

8-B. Se il numero n di matrici γ è pari, il numero di fattori può essere progressivamente scalato di 2 utilizzando le proprietà di anticommutazione. Per esempio,

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\,\gamma^\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\,\gamma^\nu + \gamma^\nu\,\gamma^\mu) = g^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = 4\,g^{\mu\nu}\,. \tag{8.12}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\rho\,\gamma^\sigma) - g^{\mu\rho}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\,\gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\,\gamma^\rho)\\ &= 4\left(g^{\mu\nu}\,g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}\,g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\,g^{\nu\rho}\right)\,.\end{aligned} \tag{8.13}$$

La formula generale per ridurre la traccia di un prodotto di n matrici γ, con n pari, alla somma di tracce di prodotti di $n-2$ matrici γ è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\cdots\gamma^{\mu_n}) = {}& g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\cdots\gamma^{\mu_n}] - g^{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\cdots\gamma^{\mu_n}] + \cdots\\ &\cdots + g^{\mu_1\mu_n}\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\cdots\gamma^{\mu_{n-1}}]\,.\end{aligned} \tag{8.14}$$

Notare alcuni casi particolari:

$$\mathrm{Tr}\big(\gamma^5\big) = 0\,, \tag{8.15}$$

$$\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^5\big) = 0\,. \tag{8.16}$$

Infatti

$$\mathrm{Tr}\big((\gamma^\mu)^2\,\gamma^5\big) = -\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\,\gamma^5\,\gamma^\mu\big) = -\mathrm{Tr}\big((\gamma^\mu)^2\,\gamma^5\big) \tag{8.17}$$

e da $(\gamma^\mu)^2 \pm \mathbb{1}$ segue che $\mathrm{Tr}(\gamma^5) = -\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0$. La (8.16) può essere verificata usando la definizione (1.13) della matrice γ^5 e la formula generale (8.14):

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^5\big) &= -\,i\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\big)\\ &= -\,i\,\big[g^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\big) - g^{\mu 0}\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\nu\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\big)\\ &\qquad + g^{\mu 1}\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\nu\,\gamma^0\,\gamma^2\,\gamma^3\big) - g^{\mu 2}\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\nu\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^3\big)\\ &\qquad + g^{\mu 3}\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\nu\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\big)\big] = 0\,,\end{aligned} \tag{8.18}$$

perchè solamente le tracce di prodotti di quattro matrici γ con almeno due coppie di indici uguali sono diverse da zero.

Il prodotto di matrici γ di ordine più basso contenente la γ^5 con traccia non nulla è $\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma\,\gamma^5$:

$$\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma\,\gamma^5\big) = 4\,i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,, \tag{8.19}$$

dove $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore di rango 4 completamente antisimmetrico con $\epsilon^{0123} = +1$. Infatti, la traccia (8.19) è non nulla solamente se tutti gli indici sono diversi (se due indici sono uguali, la correspondenti matrici γ possono essere eliminate ottenendo una traccia del prodotto di due matrici γ e γ^5, che è nulla; vedi la (8.16)). Se tutti gli indici nella traccia (8.19) sono diversi, poichè matrici γ con indici diversi anticommutano, la traccia è antisimmetrica per tutte le permutazioni dispari degli indici μ, ν, ρ, σ. Quindi è proporzionale a $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Per trovare il fattore di propozionalità $4i$ basta considerare[1]

$$\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3}_{i\gamma^5}\,\gamma^5) = i\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^5\gamma^5\big) = 4\,i = 4\,i\,\epsilon^{0123}\,. \tag{8.20}$$

8-C. Per i prodotti di un numero n pari di matrici γ vale la proprietà

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\cdots\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\gamma^{\mu_n}) = \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_n}\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\cdots\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_1})\;. \tag{8.21}$$

Infatti, inserendo tra tutte le coppie di matrici γ l'identità nella forma $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C} = \mathbb{1}$, dove $\mathcal{C}$ è la matrice di coniugazione di carica tale che $\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$, poichè n è pari si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\cdots\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\gamma^{\mu_n}) &= \mathrm{Tr}\big(\mathcal{C}\,\gamma^{\mu_1}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{C}\,\gamma^{\mu_2}\,\mathcal{C}^{-1}\,\cdots\,\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{C}\,\gamma^{\mu_n}\,\mathcal{C}^{-1}\big)\\ &= (-1)^n\,\mathrm{Tr}\big((\gamma^{\mu_1})^T\,(\gamma^{\mu_2})^T\,\cdots\,(\gamma^{\mu_{n-1}})^T\,(\gamma^{\mu_n})^T\big)\\ &= \mathrm{Tr}\Big(\big[\gamma^{\mu_n}\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\cdots\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_1}\big]^T\Big)\\ &= \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_n}\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\cdots\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_1})\;.\end{aligned} \tag{8.22}$$

▶ Esercizio 8.1

Calcolare le tracce

8.1-1. $\mathrm{Tr}[\not{a}\,\gamma^5\,\not{b}\,\not{c}]$

8.1-2. $\mathrm{Tr}[\not{a}\,\not{b}\,\gamma^5\,\not{a}\,\not{c}]$

8.1-3. $\mathrm{Tr}[\Sigma^k\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\Sigma^k]$

8.1-4. $\mathrm{Tr}[\sigma^{\mu\nu}\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta]$

8.1-5. $\mathrm{Tr}[\sigma^{\mu\nu}\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta\,\gamma^5]$

Soluzione:

8.1-1.

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\,\gamma^5\,\not{b}\,\not{c}] = a_\mu\,b_\nu\,c_\rho\,\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\,\gamma^5\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho] = 0\,. \tag{8.23}$$

8.1-2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\not{a}\,\not{b}\,\gamma^5\,\underbrace{\not{a}\,\not{c}}_{2a\cdot c-\not{c}\not{a}}] &= 2\,(a\cdot c)\,\mathrm{Tr}\big[\not{a}\,\not{b}\,\gamma^5\big] - \mathrm{Tr}\big[\not{a}\,\not{b}\,\gamma^5\,\not{c}\,\not{a}\big]\\ &= 2\,(a\cdot c)\,\underbrace{\mathrm{Tr}\big[\not{a}\,\not{b}\,\gamma^5\big]}_{=0} - \mathrm{Tr}\big[\underbrace{\not{a}\,\not{a}}_{a^2}\,\not{b}\,\gamma^5\,\not{c}\big]\\ &= -\,a^2\,\underbrace{\mathrm{Tr}\big[\not{b}\,\gamma^5\,\not{c}\big]}_{=0} = 0\,.\end{aligned} \tag{8.24}$$

[1] Si noti che il segno dipende dalla scelta dei segni nelle definizioni di γ^5 e ϵ^{0123}.

8.1-3.

$$\mathrm{Tr}[\Sigma^k \, \gamma^\mu \, \gamma^\nu \, \Sigma^k] = \mathrm{Tr}[\underbrace{\Sigma^k \, \Sigma^k}_{\mathbb{1}} \gamma^\mu \, \gamma^\nu] = 4 \, g^{\mu\nu} \, . \tag{8.25}$$

8.1-4.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\sigma^{\mu\nu} \, \gamma^\alpha \, \gamma^\beta] &= \frac{i}{2} \left(\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \, \gamma^\nu \, \gamma^\alpha \, \gamma^\beta] - \mathrm{Tr}[\gamma^\nu \, \gamma^\mu \, \gamma^\alpha \, \gamma^\beta] \right) \\ &= 2 \, i \left(g^{\mu\nu} \, g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} \, g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} \, g^{\nu\alpha} - g^{\nu\mu} \, g^{\alpha\beta} + g^{\nu\alpha} \, g^{\mu\beta} - g^{\nu\beta} \, g^{\mu\alpha} \right) \\ &= 4 \, i \left(g^{\mu\beta} \, g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} \, g^{\nu\beta} \right) \, . \end{aligned} \tag{8.26}$$

8.1-5.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\sigma^{\mu\nu} \, \gamma^\alpha \, \gamma^\beta \, \gamma^5] &= \frac{i}{2} \left(\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \, \gamma^\nu \, \gamma^\alpha \, \gamma^\beta \, \gamma^5] - \mathrm{Tr}[\gamma^\nu \, \gamma^\mu \, \gamma^\alpha \, \gamma^\beta \, \gamma^5] \right) \\ &= \; - 2 \left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \right) = -4 \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \, . \end{aligned} \tag{8.27}$$

▶ Esercizio 8.2

Calcolare

$$T = \sum_{r,s} \left| \overline{u^{(s)}}(p_f) \, \not{A} \, u^{(r)}(p_i) \right|^2 \, . \tag{8.28}$$

Soluzione:

Si deve calcolare

$$\begin{aligned} T &= \sum_{r,s} \left[\overline{u^{(s)}}(p_f) \, \not{A} \, u^{(r)}(p_i) \right] \left[\overline{u^{(s)}}(p_f) \, \not{A} \, u^{(r)}(p_i) \right]^* \\ &= \sum_{r,s} \left[\overline{u^{(s)}}(p_f) \, \gamma^\mu \, u^{(r)}(p_i) \right] \left[\overline{u^{(s)}}(p_f) \, \gamma^\nu \, u^{(r)}(p_i) \right]^* A_\mu \, A_\nu^* \, . \end{aligned} \tag{8.29}$$

Utilizzando le proprietà (1.5a) e (1.3) si ha

$$\begin{aligned} \left[\overline{u^{(s)}}(p_f) \, \gamma^\nu \, u^{(r)}(p_i) \right]^* = \; & \left[u^{(s)\dagger}(p_f) \, \gamma^0 \, \gamma^\nu \, u^{(r)}(p_i) \right]^* = u^{(r)\dagger}(p_i) \, \gamma^{\nu\dagger} \, \gamma^0 \, u^{(s)}(p_f) \\ &= u^{(r)\dagger}(p_i) \, \gamma^0 \, \underbrace{\gamma^0 \, \gamma^{\nu\dagger} \, \gamma^0}_{\gamma^\nu} \, u^{(s)}(p_f) = \overline{u^{(r)}}(p_i) \, \gamma^\nu \, u^{(s)}(p_f) \, . \end{aligned} \tag{8.30}$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \sum_{r,s}\left[\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\gamma^\mu\,u^{(r)}(p_i)\right]\left[\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\gamma^\nu\,u^{(r)}(p_i)\right]^* \\
&= \sum_{r,s}\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\gamma^\mu\,u^{(r)}(p_i)\,\overline{u^{(r)}}(p_i)\,\gamma^\nu\,u^{(s)}(p_f) \\
&= \sum_{s=1,2}\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\gamma^\mu\underbrace{\left(\sum_{r=1,2}u^{(r)}(p_i)\,\overline{u^{(r)}}(p_i)\right)}_{\Lambda_+(p_i)}\gamma^\nu\,u^{(s)}(p_f) \\
&= \sum_{s=1,2}\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\gamma^\mu\,\Lambda_+(p_i)\,\gamma^\nu\,u^{(s)}(p_f)\,, \qquad (8.31)
\end{aligned}
$$

dove $\Lambda_+(p_i)$ è il proiettore sugli stati a energia positiva

$$
\Lambda_+(p) = \frac{\not p + m}{2m}\,. \qquad (8.32)
$$

Esplicitando gli indici di Dirac si ha

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \sum_{a,b=1}^{4}\sum_{s=1,2}[\overline{u^{(s)}}(p_f)]_a\,[\gamma^\mu\,\Lambda_+(p_i)\,\gamma^\nu]_{ab}\,[u^{(s)}(p_f)]_b \\
&= \sum_{a,b=1}^{4}\underbrace{\sum_{s=1,2}[u^{(s)}(p_f)]_b\,[\overline{u^{(s)}}(p_f)]_a}_{[\Lambda_+(p_f)]_{ba}}\,[\gamma^\mu\,\Lambda_+(p_i)\,\gamma^\nu]_{ab} \\
&= \sum_{a,b=1}^{4}[\Lambda_+(p_f)]_{ba}\,[\gamma^\mu\,\Lambda_+(p_i)\,\gamma^\nu]_{ab} \\
&= \mathrm{Tr}[\Lambda_+(p_f)\,\gamma^\mu\,\Lambda_+(p_i)\,\gamma^\nu]\;. \qquad (8.33)
\end{aligned}
$$

Quindi il calcolo di $T^{\mu\nu}$ implica il calcolo di una traccia. Utilizzando la (8.32) si ha

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4m^2}\mathrm{Tr}[(\not p_f + m)\;\gamma^\mu\;(\not p_i + m)\;\gamma^\nu] \\
&= \frac{1}{4m^2}\Big\{p_{f\alpha}\,p_{i\beta}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha\,\gamma^\mu\,\gamma^\beta\,\gamma^\nu\right] + m^2\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\,\gamma^\nu] \\
&\qquad + m\,p_{f\alpha}\underbrace{\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu]}_{=0} + m\,p_{i\beta}\underbrace{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\,\gamma^\beta\,\gamma^\nu\right]}_{=0}\Big\} \\
&= \frac{1}{4m^2}\Big\{p_{f\alpha}\,p_{i\beta}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha\,\gamma^\mu\,\gamma^\beta\,\gamma^\nu\right] + m^2\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\,\gamma^\nu]\Big\}\,, \qquad (8.34)
\end{aligned}
$$

poichè la traccia di un prodotto dispari di matrici γ è nulla (proprietà **8-A**). Utilizzando le (8.13) e (8.12) si ottiene

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \frac{1}{m^2}\left\{p_{f\alpha}\, p_{i\beta}\left(g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}\, g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}\, g^{\mu\beta}\right) + m^2\, g^{\mu\nu}\right\} \\
&= \frac{1}{m^2}\left\{p_{f\alpha}\, p_{i\beta}\left(g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}\, g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}\, g^{\mu\beta}\right) + m^2\, g^{\mu\nu}\right\} \\
&= \frac{1}{m^2}\left\{p_f^\mu\, p_i^\nu - (p_f \cdot p_i)\, g^{\mu\nu} + p_f^\nu\, p_i^\nu + m^2\, g^{\mu\nu}\right\}. \qquad (8.35)
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$T = \frac{1}{m^2}\left\{\, (p_f \cdot A)\,(p_i \cdot A^*) + (p_f \cdot A^*)\,(p_i \cdot A) + \left[m^2 - (p_f \cdot p_i)\right]\,|A|^2\right\}. \qquad (8.36)$$

▶ Esercizio 8.3

Calcolare

$$T = \sum_{r,s}\left|\overline{u^{(r)}}(p_1)\,\gamma_5\, u^{(s)}(p_2)\right|^2 \qquad (8.37)$$

Soluzione:

Poichè le matrici γ^5 e γ^0 sono hermitiane, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\overline{u^{(r)}}(p_1)\,\gamma_5\, u^{(s)}(p_2)\right)^* &= u^{(s)\dagger}(p_2)\,\gamma_5^\dagger\,\gamma^{0\dagger}\, u^{(r)}(p_1) = u^{(s)\dagger}(p_2)\,\gamma_5\,\gamma^0\, u^{(r)}(p_1) \\
&= -\,\overline{u^{(s)}}(p_2)\,\gamma_5\, u^{(r)}(p_1)\,, \qquad (8.38)
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{r,s} -\overline{u^{(r)}}(p_1)\,\gamma_5\, u^{(s)}(p_2)\,\overline{u^{(s)}}(p_2)\,\gamma_5\, u^{(r)}(p_1) \\
&= -\,\mathrm{Tr}\left[\Lambda_+(p_1)\,\gamma_5\,\Lambda_+(p_2)\,\gamma_5\right] = -\frac{1}{4m^2}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1 + m)\,\gamma_5\,(\not{p}_2 + m)\,\gamma_5\right] \\
&= -\,\frac{1}{4m^2}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1 + m)\,(-\not{p}_2 + m)\right] = -\frac{1}{4m^2}\left(-\mathrm{Tr}\left[\not{p}_1\not{p}_2\right] + m^2\mathrm{Tr}\left[\mathbb{1}\right]\right) \\
&= \frac{p_1 \cdot p_2}{m^2} - 1 \qquad (8.39)
\end{aligned}$$

▶ Esercizio 8.4

Dimostrare che

$$\not{a}\,\not{b} = a \cdot b - i\,\sigma_{\mu\nu}\, a^\mu\, b^\nu\,. \qquad (8.40)$$

Utilizzando questa formula per il caso $a = b$, calcolare la traccia

$$T = \mathrm{Tr}\left[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\not{D}\,(\not{A} + \not{C}\,\gamma_5)\,\not{E}\right]. \qquad (8.41)$$

Soluzione:
Dimostriamo la (8.40):

$$\not{a}\,\not{b} = \frac{1}{2}\,(\not{a}\,\not{b} + \not{b}\,\not{a}) + \frac{1}{2}\,(\not{a}\,\not{b} - \not{b}\,\not{a}) = a \cdot b - i\,\sigma_{\mu\nu}\,a^\mu\,b^\nu\,. \tag{8.42}$$

In particolare, si ha

$$\not{a}\,\not{a} = a^2\,. \tag{8.43}$$

Calcoliamo ora la traccia (8.41):

$$\begin{aligned}
T &= \mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\not{D}\,\underbrace{\not{A}\,\not{E}}_{2A\cdot E - \not{E}\not{A}}\big] + \mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\underbrace{\not{D}\,\not{C}}_{2D\cdot C - \not{C}\not{D}}\gamma_5\,\not{E}\big] \\
&= 2\,(A{\cdot}E)\,\mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\not{D}\big] - \mathrm{Tr}\big[\underbrace{\not{A}\,\not{A}}_{A^2}\,\not{B}\,\not{C}\,\not{D}\,\not{E}\big] \\
&\quad + 2\,(D{\cdot}C)\,\mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\gamma_5\,\not{E}\big] - \mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\underbrace{\not{C}\,\not{C}}_{C^2}\,\not{D}\,\gamma_5\,\not{E}\big] \\
&= 2\,(A{\cdot}E)\,\mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\not{D}\big] - A^2\,\mathrm{Tr}\big[\not{B}\,\not{C}\,\not{D}\,\not{E}\big] \\
&\quad - 2\,(D{\cdot}C)\,\mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{C}\,\not{E}\,\gamma_5\big] + C^2\,\mathrm{Tr}\big[\not{A}\,\not{B}\,\not{D}\,\not{E}\,\gamma_5\big] \\
&= 8\,(A{\cdot}E)\,\big[(A{\cdot}B)\,(C{\cdot}D) + (A{\cdot}C)\,(B{\cdot}D) + (A{\cdot}D)\,(B{\cdot}C)\big] \\
&\quad - 4\,A^2\,\big[(B{\cdot}C)\,(D{\cdot}E) + (B{\cdot}D)\,(C{\cdot}E) + (B{\cdot}E)\,(C{\cdot}D)\big] \\
&\quad - 8\,i\,(D{\cdot}C)\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,A_\mu\,B_\nu\,C_\rho\,E_\sigma + 4\,i\,C^2\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,A_\mu\,B_\nu\,D_\rho\,E_\sigma\,.
\end{aligned} \tag{8.44}$$

▶ Esercizio 8.5

Calcolare

$$T = \sum_{r,s}\left|\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\not{A}\,(1+\gamma_5)\,u^{(r)}(p_i)\right|^2\,. \tag{8.45}$$

Dopo avere ricavato il risultato generale, considerare il caso particolare $A^*_\mu = A_\mu$.

Soluzione:
Poichè

$$\begin{aligned}
\left[\overline{u^{(s)}}(p_f)\,\not{A}\,(1+\gamma_5)\,u^{(r)}(p_i)\right]^* &= \left[u^{(s)\dagger}(p_f)\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,(1+\gamma_5)\,u^{(r)}(p_i)\right]^* A^*_\mu \\
&= u^{(r)\dagger}(p_i)\,(1+\underbrace{\gamma_5^\dagger}_{\gamma^5})\,\gamma^{\mu\dagger}\,\underbrace{\gamma^{0\dagger}}_{\gamma^0}\,u^{(s)}(p_f)\,A^*_\mu \\
&= u^{(r)\dagger}(p_i)\,\gamma^0\,\underbrace{\gamma^0\,(1+\gamma_5)\,\gamma^0}_{1-\gamma_5}\,\underbrace{\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\,\gamma^0}_{\gamma^\mu}\,u^{(s)}(p_f)\,A^*_\mu \\
&= \overline{u^{(r)}}(p_i)\,\underbrace{(1-\gamma_5)\,\gamma^\mu}_{\gamma^\mu(1+\gamma_5)}\,u^{(s)}(p_f)\,A^*_\mu \\
&= \overline{u^{(r)}}(p_i)\,\gamma^\mu\,(1+\gamma_5)\,u^{(s)}(p_f)\,A^*_\mu\,,
\end{aligned} \tag{8.46}$$

si ottiene

$$T = T^{\mu\nu} \, A_\mu \, A^*_\nu \,, \tag{8.47}$$

con

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \sum_{r,s} \overline{u^{(s)}}(p_f) \, \gamma^\mu \, (1+\gamma_5) \, u^{(r)}(p_i) \, \overline{u^{(r)}}(p_i) \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5) \, u^{(s)}(p_f) \\
&= \mathrm{Tr}[\Lambda_+(p_f) \gamma^\mu \, (1+\gamma_5) \, \Lambda_+(p_i) \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5)] \\
&= \frac{1}{4m^2} \mathrm{Tr}[(\not p_f + m) \, \gamma^\mu \, (1+\gamma_5) \, (\not p_i + m) \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5)] \\
&= \frac{1}{4m^2} \Big\{ \mathrm{Tr}\big[\, (\not p_f + m) \, \gamma^\mu \, \underbrace{(1+\gamma_5) \, \not p_i \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5)}_{2 \not p_i \, \gamma^\nu (1+\gamma_5)} \big] \\
&\qquad + m \, \mathrm{Tr}\big[\, (\not p_f + m) \, \gamma^\mu \, \underbrace{(1+\gamma_5) \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5)}_{\gamma^\nu (1-\gamma_5)(1+\gamma_5) = 0} \big] \Big\} \\
&= \frac{1}{2m^2} \mathrm{Tr}\big[\, (\not p_f + m) \, \gamma^\mu \, \not p_i \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5) \, \big] \\
&= \frac{1}{2m^2} \Big\{ \mathrm{Tr}\big[\not p_f \, \gamma^\mu \, \not p_i \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5) \, \big] + m \, \underbrace{\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu \, \not p_i \, \gamma^\nu \, (1+\gamma_5) \, \big]}_{=0} \Big\} \\
&= \frac{1}{2m^2} \Big\{ \mathrm{Tr}\big[\not p_f \, \gamma^\mu \, \not p_i \, \gamma^\nu\big] + \mathrm{Tr}\big[\not p_f \, \gamma^\mu \, \not p_i \, \gamma^\nu \, \gamma_5\big] \Big\} \\
&= \frac{2}{m^2} \Big\{ p_f^\mu \, p_i^\nu - (p_f \cdot p_i) \, g^{\mu\nu} + p_f^\nu \, p_i^\mu + i \, \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \, p_{f\alpha} \, p_{i\beta} \Big\} \,.
\end{aligned} \tag{8.48}$$

Nel caso particolare $A^*_\mu = A_\mu$, si ottiene

$$T = \frac{2}{m^2} \Big\{ 2 \, (p_f \cdot A) \, (p_i \cdot A) - (p_f \cdot p_i) \, A^2 \Big\} \,, \tag{8.49}$$

perchè $\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} A_\mu A_\nu = 0$.

▶ Esercizio 8.6

Calcolare

$$T = \sum_{r,s} \left| \overline{v^{(r)}}(p_f) \, \not q \, u^{(s)}(p_i) \right|^2 \,, \tag{8.50}$$

con $q^* = q$.

Soluzione:

Poichè

$$\left[\overline{v^{(r)}}(p_f) \, \not q \, u^{(s)}(p_i) \right]^* = u^{(s)\dagger}(p_i) \, \not q^\dagger \, \gamma^0 \, v^{(r)}(p_f) = \overline{u^{(s)}}(p_i) \, \not q \, v^{(r)}(p_f) \,, \tag{8.51}$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{r,s} \overline{v^{(r)}}(p_f)\, \not{q}\, u^{(s)}(p_i)\, \overline{u^{(s)}}(p_i)\, \not{q}\, v^{(r)}(p_f) \\
&= -\,\mathrm{Tr}[\Lambda_-(p_f)\, \not{q}\, \Lambda_+(p_i)\, \not{q}] = \frac{1}{4\,m^2}\mathrm{Tr}[(\not{p}_f - m)\, \not{q}\, (\not{p}_i + m)\, \not{q}] \\
&= \frac{1}{4\,m^2}\Big\{\mathrm{Tr}\big[\not{p}_f\, \not{q}\, \not{p}_i\, \not{q}\big] - m^2\, \underbrace{\mathrm{Tr}\big[\not{q}\, \not{q}\big]}_{4q^2} + m\, \underbrace{\mathrm{Tr}\big[\not{p}_f\, \not{q}\, \not{q}\big]}_{=0} - m\, \underbrace{\mathrm{Tr}\big[\not{q}\, \not{p}_i\, \not{q}\big]}_{=0}\Big\} \\
&= \frac{1}{m^2}\left\{(p_f\cdot q)\,(p_i\cdot q) - (p_f\cdot p_i)\,q^2 + (p_f\cdot q)\,(p_i\cdot q) - m^2\,q^2\right\} \\
&= \frac{1}{m^2}\left\{2\,(p_f\cdot q)\,(p_i\cdot q) - \left[(p_f\cdot p_i) + m^2\right] q^2\right\}\ . \qquad (8.52)
\end{aligned}
$$

Appendice A

Formule utili

A-A. Commutatori e anticommutatori.

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - C\{A, D\}B - \{A, C\}BD + CA\{B, D\} \,, \tag{A.1a}$$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \,. \tag{A.1b}$$

A-B. Tensore $\epsilon_{kj} = \epsilon^{kj}$ completamente antisimmetrico nei due indici $k, j = 1, 2$, tale che $\epsilon_{12} = 1$.

$$\sum_{k,j} \epsilon_{kj}\epsilon_{kj} = 2 \,, \tag{A.2a}$$

$$\sum_{j} \epsilon_{kj}\epsilon_{\ell j} = \delta_{k\ell} \,, \tag{A.2b}$$

$$\epsilon_{kj}\epsilon_{\ell m} = \delta_{k\ell}\delta_{jm} - \delta_{km}\delta_{j\ell} \,. \tag{A.2c}$$

A-C. Tensore $\epsilon_{kj\ell} = \epsilon^{kj\ell}$ completamente antisimmetrico nei tre indici $k, j, \ell = 1, 2, 3$, tale che $\epsilon_{123} = 1$.

$$\sum_{k,j,\ell} \epsilon_{kj\ell}\epsilon_{kj\ell} = 3! \,, \tag{A.3a}$$

$$\sum_{j,\ell} \epsilon_{kj\ell}\epsilon_{mj\ell} = 2!\,\delta_{km} \,, \tag{A.3b}$$

$$\sum_{\ell} \epsilon_{kj\ell}\epsilon_{mn\ell} = \delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{kn}\delta_{jm} \,. \tag{A.3c}$$

Commento: La relazione (A.3a) si ricava notando che per k ci sono 3 possibilità (1 o 2 o 3). Fissato k, per j restano solamente 2 possibilità. Infine, fissati k e j per ℓ resta un'unica possibilità. La relazione (A.3b) si ricava notando che, poichè j e ℓ sono uguali, si ottiene un risultato non nullo solamente se $k = m$. Inoltre, fissati $k = m$, per j ci sono solamente 2 possibilità e, fissati $k = m$ e j, per ℓ resta un'unica possibilità. La relazione (A.3c) si ricava notando che, fissati $k \neq j$, per ℓ resta un'unica possibilità. Inoltre, è evidente che il risultato è $+1$ se $k = m$ e $j = n$, mentre il risultato è -1 se $k = n$ e $j = m$.

A-D. Tensore $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ completamente antisimmetrico nei quattro indici $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$, tale che $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$.

$$\sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4! = -24\,, \tag{A.4a}$$

$$\sum_{\nu,\rho,\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = -3!\, g^{\alpha}_{\mu}\,, \tag{A.4b}$$

$$\sum_{\rho,\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2!\left(g^{\alpha}_{\mu}g^{\beta}_{\nu} - g^{\beta}_{\mu}g^{\alpha}_{\nu}\right)\,. \tag{A.4c}$$

A-E. Matrici di Pauli.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.5a}$$

$$\big(\sigma_k\big)^2 = 1 \tag{A.5b}$$

$$\sigma_k = \big(\sigma_k\big)^{\dagger} \tag{A.5c}$$

$$\big(\sigma_k\big)^{T} = \big(\sigma_k\big)^{*} \tag{A.5d}$$

$$\sigma_2\sigma_k\sigma_2 = -\big(\sigma_k\big)^{T} \tag{A.5e}$$

$$[\sigma_k, \sigma_j] = 2i\sum_{\ell} \epsilon_{kj\ell}\sigma_{\ell}\,, \tag{A.5f}$$

$$\{\sigma_k, \sigma_j\} = 2\delta_{kj}\mathbb{1}\,, \tag{A.5g}$$

$$\sigma_k\sigma_j = \delta_{kj}\mathbb{1} + i\sum_{\ell} \epsilon_{kj\ell}\sigma_{\ell}\,, \tag{A.5h}$$

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{ijk} + \delta_{ij}\sigma_k - \delta_{ik}\sigma_j + \delta_{jk}\sigma_i\,. \tag{A.5i}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\sigma_i] = 0 \tag{A.5j}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\sigma_i\sigma_j] = 2\delta_{ij} \tag{A.5k}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\sigma_i\sigma_j\sigma_k] = 2i\epsilon_{ijk} \tag{A.5l}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_{\ell}] = 2\big[\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}\big] \tag{A.5m}$$

Ogni matrice M di dimensioni 2×2 può essere scritta come

$$M = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\,[M] + \mathrm{Tr}\,[M\sigma_k]\,\sigma_k\right) \tag{A.5n}$$

A-F. Funzioni iperboliche.

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1\,, \tag{A.6a}$$

$$\cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh\varphi + 1}{2}}\,, \tag{A.6b}$$

$$\sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh\varphi - 1}{2}}\,. \tag{A.6c}$$