

**Lezioni di**  
**Meccanica Quantistica Relativistica**

**A. Bottino e C. Giunti**

Anno Accademico 2006 – 2007



# Indice

|   |            |
|---|------------|
| <b>Indice</b>   | <b>iii</b> |
| <b>1 Equazione di Dirac</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 Introduzione . . . . .  | 1          |
| 1.2 L'equazione di Dirac . . . . .  | 3          |
| 1.2.1 Proprietà delle matrici $\gamma^\mu$ . . . . .  | 6          |
| 1.2.2 Prodotti di matrici $\gamma$ : matrici $\Gamma^a$ . . . . .   | 7          |
| 1.2.3 Teorema fondamentale sulle rappresentazioni delle matrici $\gamma$ . . . . .                            | 8          |
| 1.2.4 Equazione di Dirac in versione hamiltoniana . . . . .   | 9          |
| 1.2.5 Rappresentazione di Dirac delle matrici $\gamma$ . . . . .  | 10         |
| 1.3 Covarianza dell'equazione di Dirac . . . . .  | 10         |
| 1.3.1 Rotazione attorno all'asse $x^k$ . . . . .  | 12         |
| 1.3.2 Trasformazione di velocità nella direzione $x^k$ . . . . .  | 14         |
| 1.3.3 Matrice coniugata hermitiana di $\mathcal{S}_\Lambda$ . . . . .   | 14         |
| 1.4 Trasformazioni discrete . . . . .   | 15         |
| 1.4.1 Inversione spaziale (parità) . . . . .  | 15         |
| 1.4.2 Inversione temporale . . . . .  | 16         |
| 1.5 Forme bilineari con spinori di Dirac . . . . .  | 17         |
| 1.5.1 Proprietà di trasformazione dello spinore aggiunto . . . . .  | 18         |
| 1.5.2 Trasformazioni di forme bilineari per trasformazioni di Lorentz proprie e inversioni spaziali . . . . . | 18         |
| <b>2 Soluzioni libere dell'equazione di Dirac</b>   | <b>20</b>  |
| 2.1 Soluzioni libere nel sistema di riposo della particella . . . . .   | 20         |
| 2.2 Soluzioni libere in un sistema di riferimento generico . . . . .  | 22         |
| 2.3 Limite non-relativistico ( $v \ll c$ ) . . . . .  | 25         |
| 2.4 Normalizzazione delle soluzioni libere . . . . .  | 26         |
| 2.5 Pacchetti d'onda . . . . .  | 27         |
| 2.6 Proiettori su stati ad energia positiva e su stati ad energia negativa . . . . .                          | 28         |
| <b>3 Operatori momenti angolari in teoria di Dirac</b>  | <b>32</b>  |
| 3.1 Operatore di spin . . . . .   | 32         |
| 3.2 Conservazione del momento angolare totale . . . . .   | 34         |
| <b>4 Interazione elettrone-campo elettromagnetico</b>   | <b>36</b>  |
| 4.1 Qualche richiamo sul campo elettromagnetico . . . . .   | 36         |
| 4.2 Interazione elettrone-campo elettromagnetico . . . . .  | 37         |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.3      | Invarianza di gauge . . . . .   | 37        |
| 4.4      | Hamiltoniana di interazione elettrone–campo elettromagnetico . . . . .  | 38        |
| 4.5      | Interazione elettromagnetica nel limite non-relativistico . . . . .   | 39        |
| 4.6      | Approssimazione non-relativistica in un campo elettrostatico . . . . .  | 42        |
| <b>5</b> | <b>Elettrone in un campo a simmetria sferica</b>  | <b>46</b> |
| 5.1      | Costanti del moto . . . . .   | 46        |
| 5.2      | Riduzione a spinori a due componenti . . . . .  | 48        |
| 5.3      | Separazione delle variabili . . . . .   | 49        |
| 5.4      | Soluzione delle equazioni radiali per un atomo idrogenoide . . . . .  | 52        |
| <b>6</b> | <b>Coniugazione di carica</b>   | <b>60</b> |
| 6.1      | Mare di Dirac . . . . .   | 60        |
| 6.2      | Coniugazione di carica . . . . .  | 63        |
| <b>7</b> | <b>Spinori chirali</b>  | <b>65</b> |
| 7.1      | Autofunzioni dell’operatore chiralità . . . . .   | 65        |
| 7.2      | Proprietà di elicità per $m = 0$ . . . . .  | 69        |
| 7.3      | Equazioni di Weyl . . . . .   | 70        |
| 7.4      | Neutrini e antineutrini . . . . .   | 70        |
| 7.5      | Operazioni $C, P, T$ sulle equazioni di Weyl . . . . .  | 72        |
| 7.6      | Covarianti bilineari con spinori chirali . . . . .  | 74        |
| 7.7      | Spinori di Majorana . . . . .   | 75        |
| <b>8</b> | <b>Funzioni di Green e processi di scattering</b>   | <b>76</b> |
| 8.1      | Funzione di Green in teoria non-relativistica . . . . .   | 76        |
| 8.2      | Funzione di Green per l’equazione di Dirac libera . . . . .   | 78        |
| 8.3      | Funzione di Green per l’equazione di Dirac con interazione . . . . .  | 79        |
| 8.4      | Applicazione: scattering Rutherford . . . . .   | 81        |
| <b>A</b> | <b>Unità naturali</b>   | <b>85</b> |
| <b>B</b> | <b>Quadri-vettori – metrica</b>   | <b>86</b> |
| <b>C</b> | <b>Tracce di prodotti di matrici <math>\gamma</math></b>  | <b>88</b> |
| <b>D</b> | <b>Rappresentazioni delle matrici <math>\gamma</math></b>   | <b>90</b> |
| D.1      | Proprietà generali . . . . .  | 90        |
| D.1.1    | Rappresentazione di Dirac . . . . .   | 91        |
| D.1.2    | Rappresentazione di Majorana . . . . .  | 91        |
| D.1.3    | Rappresentazione chirale . . . . .  | 92        |
| <b>E</b> | <b>Trasformazioni di forme bilineari per inversione temporale</b>   | <b>94</b> |
| <b>F</b> | <b>Dimostrazione della proprietà <math>\vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \ell_x (\ell_x + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi</math></b> | <b>96</b> |
| <b>G</b> | <b>Densità Lagrangiana di Dirac</b>   | <b>98</b> |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| H | Rappresentazione integrale della funzione di Green per l'equazione di Dirac libera | 101 |
| I | Calcolo di sezioni d'urto  | 103 |



# Capitolo 1

## Equazione di Dirac

### 1.1 Introduzione

Nella meccanica quantistica non-relativistica l'equazione di Schrödinger per una particella libera

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (1.1)$$

può essere ottenuta dalla relazione classica non-relativistica tra energia  $E$  ed impulso  $\vec{p}$

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (1.2)$$

mediante sostituzione delle grandezze classiche  $E$  e  $\vec{p}$  con i corrispondenti operatori differenziali, ossia

$$E \longrightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.3a)$$

$$\vec{p} \longrightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (1.3b)$$

Associata all'equazione di Schrödinger vi è l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.4)$$

dove  $\rho$  (densità di probabilità) e  $\vec{j}$  (densità di corrente di probabilità) sono date da

$$\rho(t, \vec{x}) = |\psi(t, \vec{x})|^2, \quad (1.5)$$

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \psi^* (\vec{\nabla} \psi) - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right]. \quad (1.6)$$

L'equazione di continuità (1.4) ha un ruolo cruciale nell'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica. Dato un volume  $V$  nello spazio, utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = - \int_S \vec{j} \cdot \vec{n}_S dS, \quad (1.7)$$

dove  $S$  è la superficie che racchiude il volume  $V$  e  $\vec{n}_S$  è il versore normale alla superficie  $S$ . Quindi la variazione di probabilità nel volume  $V$  è uguale al flusso del vettore  $\vec{j}$  attraverso la superficie  $S$ . Per un volume infinito  $\int_S \vec{j} \cdot \vec{n}_S dS = 0$ ; ne segue la conservazione globale della probabilità, ossia

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = 0, \quad (1.8)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

In analogia a quanto fatto nel caso non-relativistico, un'equazione quantistica relativistica può essere ottenuta dalla relazione classica relativistica tra energia e impulso

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.9)$$

mediante la sostituzione (1.3).

In unità naturali ( $\hbar = c = 1$ ) e con notazioni covarianti<sup>1</sup> si ha che l'espressione (1.9), ossia

$$p^\mu p_\mu = m^2, \quad (1.10)$$

mediante sostituzione

$$p^\mu \longrightarrow \hat{p}^\mu = i \partial^\mu \quad (1.11)$$

viene trasformata nella relazione operatoriale

$$-\partial^\mu \partial_\mu = m^2. \quad (1.12)$$

In queste espressioni  $p^\mu$  indica il quadri-vettore energia-impulso  $p^\mu = (E, \vec{p})$  e  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ . Data la proprietà di invarianza dell'operatore  $\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \equiv \square + m^2$  per trasformazioni di Lorentz, ne segue che l'equazione

$$\boxed{(\square + m^2) \psi = 0} \quad \text{equazione di Klein-Gordon} \quad (1.13)$$

è appropriata per la descrizione di particelle scalari (ossia, di spin nullo).

Notiamo che l'equazione di Klein-Gordon ammette soluzioni nella forma di onde piane. Infatti, sostituendo nella (1.13) la soluzione

$$\psi_p(x) = e^{-ip \cdot x} \equiv e^{-ip_\mu x^\mu}, \quad (1.14)$$

si ritrova la relazione (1.10), ossia la (1.9). L'equazione agli autovalori per l'operatore energia è

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_p(x) = p_0 \psi_p(x) = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \psi_p(x). \quad (1.15)$$

Siamo quindi in presenza di stati ad energia positiva e di stati ad energia negativa. Questi ultimi stati non possono essere eliminati dalla teoria, ma ne costituiscono parte integrante. Nello schema della meccanica quantistica, interazioni con campi esterni possono indurre transizioni della particella (elettrone) tra tutti i livelli energetici.

Sottraendo dall'equazione di Klein-Gordon (1.13), moltiplicata per  $\psi^*$ , la sua complessa coniugata, moltiplicata per  $\psi$ , si ottiene l'equazione di continuità scritta in forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.16)$$

---

<sup>1</sup>Vedi Appendici A e B.



con la quadri-corrente

$$j^\mu = \frac{i}{2m} [\psi^* (\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*) \psi] . \quad (1.17)$$

Osserviamo che la componente temporale  $j^0$  della quadri-corrente

$$j^0 = \frac{i}{2m} \left[ \psi^* \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi \right] \quad (1.18)$$

non è una quantità definita positiva e non può quindi essere interpretata come densità di probabilità. Questo problema dell'equazione di Klein-Gordon si presenta solo nell'ambito della meccanica quantistica (teoria ad una particella). La struttura (1.17) della quadri-corrente è invece perfettamente interpretabile nell'ambito della teoria dei campi<sup>2</sup>. Notiamo ancora che la struttura particolare della  $\rho$  nella teoria di Klein-Gordon è attribuibile al fatto che l'equazione in questione è del second'ordine nella derivata temporale (nell'equazione di Schrödinger la derivata temporale è invece del prim'ordine).

## 1.2 L'equazione di Dirac

Poniamoci ora il problema di determinare la struttura matematica di un'equazione quantistica relativistica adeguata alla descrizione di una particella di spin 1/2. Vogliamo che, associata all'equazione d'onda, vi sia un'equazione di continuità con densità di probabilità definita positiva. Come abbiamo visto precedentemente, questa richiesta implica che l'equazione d'onda sia del prim'ordine nella derivata temporale.

Vediamo di elencare tutte le proprietà a cui deve soddisfare l'equazione che cerchiamo (equazione di Dirac):

1. Per avere una corretta equazione di continuità, l'equazione dev'essere del prim'ordine nella derivata temporale;
2. per covarianza relativistica, l'equazione dev'essere del prim'ordine anche nelle derivate spaziali;
3. per il principio di sovrapposizione, l'equazione dev'essere lineare ed omogenea;
4. la funzione d'onda deve descrivere anche gradi di libertà di spin e deve quindi essere a più componenti:  $\psi_\ell(x)$ , con  $\ell = 1, 2, \dots, N$  (nella teoria non relativistica di Pauli le componenti sono 2);
5. l'equazione d'onda dev'essere compatibile con l'equazione di Klein-Gordon;
6. dall'equazione si deve poter dedurre un'equazione di continuità con densità di probabilità data da  $\rho = \sum_{\ell=1}^N \psi_\ell^* \psi_\ell$ .

---

<sup>2</sup>Vedi, ad esempio, Bjorken & Drell e Itzykson & Zuber.

Per usare espressioni al più possibile compatte, conviene utilizzare per la funzione d'onda una notazione matriciale

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Questo spinore generalizza lo spinore a 2 componenti di Pauli. Conseguentemente, la densità di probabilità si scrive  $\rho = \psi^\dagger \psi$ .

Un'equazione che soddisfa ai primi quattro punti è la seguente

$$\boxed{i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0} \quad \text{equazione di Dirac.} \quad (1.20)$$

Data la natura matriciale della  $\psi$ , i coefficienti  $\gamma^\mu$  che compaiono nella (1.20) vanno intesi come matrici di costanti. Quindi una scrittura esplicita dell'equazione (1.20) è

$$i \sum_{n=1}^N (\gamma^\mu)_{\ell n} (\partial_\mu \psi_n) - m \psi_\ell = 0 \quad (\ell = 1, \dots, N), \quad (1.21)$$

da cui si vede come l'equazione di Dirac è in realtà equivalente a un sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle componenti  $\psi_\ell$ .

Per scrivere l'equazione (1.20) abbiamo fatto uso delle condizioni 1-4. Determiniamo ora alcune proprietà generali delle matrici  $\gamma^\mu$ , che discendono dalle condizioni 5-6.

Richiediamo innanzi tutto che dall'equazione di Dirac discenda quella di Klein-Gordon. Per far ciò, moltiplichiamo a sinistra l'equazione di Dirac (1.20) per l'operatore

$$i\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}. \quad (1.22)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi \\ &= -\left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right]\psi. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Affinchè questa equazione coincida con l'equazione di Klein-Gordon (1.13) è necessario che le matrici  $\gamma$  soddisfino alle relazioni

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}}. \quad (1.24)$$

Queste condizioni implicano che le quattro matrici  $\gamma^\mu$  anticommutano tra di loro ed inoltre che i loro quadrati sono dati da

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.25)$$

Dalla precedente derivazione discende anche che il coefficiente  $m$  nell'operatore di Dirac dev'essere identificato con la massa della particella. Notiamo che l'equazione di Dirac realizza una *linearizzazione* dell'equazione di Klein-Gordon.

Passiamo ora all'esame dell'equazione di continuità. Per ricavarla conviene considerare innanzi tutto l'equazione hermitiana coniugata dell'equazione di Dirac (1.20):

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = 0, \quad (1.26)$$

e quindi sottrarre dalla (1.20) moltiplicata a sinistra per  $\psi^\dagger\gamma^0$  la (1.26) moltiplicata a destra per  $\gamma^{0\dagger}\psi$ . Otteniamo così

$$i \left[ \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu (\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi \right] - m \left[ \psi^\dagger\gamma^0\psi - \psi^\dagger\gamma^{0\dagger}\psi \right] = 0. \quad (1.27)$$

Per ottenere una struttura appropriata a un'equazione di continuità è necessario che l'ultimo termine nella (1.27) si annulli, ossia che la matrice  $\gamma^0$  sia hermitiana:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0. \quad (1.28)$$

Il primo termine nella (1.27) può essere identificato con una divergenza solo se le matrici  $\gamma$  sono tali che il prodotto  $\gamma^0\gamma^\mu$  sia una matrice hermitiana:

$$\gamma^0\gamma^\mu = \gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger} = (\gamma^0\gamma^\mu)^\dagger. \quad (1.29)$$

In questo caso si ottiene l'equazione di continuità (1.16) con la corrente  $j^\mu$  data da

$$j^\mu = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi. \quad (1.30)$$

Osserviamo che la componente temporale della corrente è data da

$$j^0 = \psi^\dagger\psi, \quad (1.31)$$

in virtù della proprietà  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$  precedentemente dimostrata. Dalle (1.28) e (1.29) si ottiene che le hermitiane delle matrici  $\gamma^\mu$  sono date da

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}, \quad (1.32)$$

da cui discende in particolare che le  $\gamma^k$  sono anti-hermitiane:

$$\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k. \quad (1.33)$$

La quadri-corrente  $j^\mu$  verrà nel seguito riscritta come

$$\boxed{j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi}, \quad (1.34)$$

dove è stato introdotto lo *spinore aggiunto*  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ . Questo spinore aggiunto  $\bar{\psi}$  soddisfa all'equazione

$$i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad (1.35)$$

come si può dimostrare moltiplicando la (1.26) a destra per  $\gamma^0$  ed utilizzando la (1.32) e la proprietà  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ .

## 1.2.1 Proprietà delle matrici $\gamma^\mu$

Dalle proprietà precedentemente viste per le matrici  $\gamma^\mu$  altre seguono.

1. Le matrici  $\gamma$  hanno traccia nulla

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0. \quad (1.36)$$

Infatti, per esempio, utilizzando la proprietà (1.24), per la traccia delle  $\gamma^k$  si ha (nella traccia dei prodotti di 3 matrici  $\gamma$  prima permutiamo circolarmente e poi commutiamo tra di loro  $\gamma^0$  e  $\gamma^k$ )

$$\text{Tr}[\gamma^k] = \text{Tr}[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^k] = \text{Tr}[\gamma^0 \gamma^k \gamma^0] = -\text{Tr}[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^k] = -\text{Tr}[\gamma^k] \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}[\gamma^k] = 0.$$

Per le tracce di prodotti di matrici  $\gamma$  si veda l'Appendice C.

2. La dimensione  $N$  delle matrici  $\gamma$  è pari. Infatti, consideriamo per esempio la relazione

$$\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0 = (-\mathbb{1}) \gamma^k \gamma^0. \quad (1.37)$$

Prendendone il determinante si ottiene

$$\text{Det}\gamma^0 \text{Det}\gamma^k = (-1)^N \text{Det}\gamma^k \text{Det}\gamma^0. \quad (1.38)$$

Essendo  $\text{Det}\gamma^0 \neq 0$  e  $\text{Det}\gamma^k \neq 0$  ( $\gamma^0$  e  $\gamma^k$  ammettono gli inversi), si trova

$$1 = (-1)^N \quad \Rightarrow \quad N \text{ pari}. \quad (1.39)$$

3. La dimensione minima delle matrici  $\gamma$  è  $N = 4$ . Infatti, nel caso  $N = 2$  esistono solo tre matrici mutuamente anticommutanti, le matrici di Pauli.
4. Poichè la matrice  $\gamma^0$  è hermitiana e le matrici  $\gamma^k$  sono anti-hermitiane, le matrici  $\gamma$  possono essere diagonalizzate (non tutte simultaneamente, ma una alla volta, perchè anticommutano). Dalle relazioni (1.25) si ricava che gli autovalori della matrice  $\gamma^0$  sono  $\pm 1$  e gli autovalori delle matrici  $\gamma^k$  sono  $\pm i$ .

Definiamo una matrice  $\gamma^5$  tale che <sup>3</sup>

$$\gamma^5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (1.40)$$

(si utilizzerà anche la notazione  $\gamma_5$  con l'intesa che  $\gamma_5 = \gamma^5$ ). Dalle proprietà delle matrici  $\gamma$  si ottiene che

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (1.41a)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (1.41b)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (1.41c)$$

---

<sup>3</sup>Notare che la nostra definizione di  $\gamma^5$  differisce di un segno rispetto a quella di alcuni autori (ad esempio Bjorken & Drell e Itzykson & Zuber).

## 1.2.2 Prodotti di matrici $\gamma$ : matrici $\Gamma^a$

Definiamo le 16 matrici  $\Gamma^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 16$ ) ottenute da prodotti di matrici  $\gamma$ :

$$\Gamma^1 = \mathbb{1} \quad (1.42a)$$

$$\Gamma^2 - \Gamma^5 = \gamma^\mu \quad (1.42b)$$

$$\Gamma^6 - \Gamma^{11} = \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{prodotti di 2 matrici } \gamma) \quad (1.42c)$$

$$\Gamma^{12} - \Gamma^{15} = \gamma^\mu \gamma^5 \quad (\text{prodotti di 3 matrici } \gamma) \quad (1.42d)$$

$$\Gamma^{16} = \gamma^5 \quad (\text{prodotto di 4 matrici } \gamma) \quad (1.42e)$$

Le matrici  $\Gamma$  godono delle seguenti proprietà:

1. Qualsiasi prodotto di matrici  $\gamma$  è proporzionale ad una delle  $\Gamma^a$ , con un fattore di proporzionalità uguale a  $\pm 1$  o  $\pm i$ .
2. Per ogni coppia  $\Gamma^a, \Gamma^b$  con  $a \neq b$  esiste una matrice  $\Gamma^c \neq \mathbb{1}$  tale che

$$\Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c \quad \text{con} \quad \alpha = \pm 1, \pm i. \quad (1.43)$$

Infatti, poichè  $\Gamma^a \neq \Gamma^b$ , il prodotto  $\Gamma^a \Gamma^b$  contiene almeno una matrice  $\gamma^\mu$  in numero dispari. Poichè un numero dispari di  $\gamma^\mu$  non può essere semplificato usando le proprietà (1.25), si ha  $\Gamma^c \neq \mathbb{1}$ .

3. Il quadrato di ciascuna matrice  $\Gamma^a$  è  $\pm \mathbb{1}$ :

$$(\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{1} \quad (1.44)$$

4. Per ogni  $\Gamma^a \neq \mathbb{1}$  esiste almeno una  $\Gamma^b$  tale che

$$\Gamma^a \Gamma^b = -\Gamma^b \Gamma^a. \quad (1.45)$$

5. Le matrici  $\Gamma^a$  con  $a > 1$  hanno traccia nulla:

$$\text{Tr}[\Gamma^a] = 0 \quad \text{per} \quad a > 1. \quad (1.46)$$

Infatti, utilizzando la matrice  $\Gamma^b$  che anticommute con la matrice  $\Gamma^a$ , si ha (prima commutiamo e poi permutiamo circolarmente)

$$\text{Tr}[\Gamma^a] = \pm \text{Tr}[\Gamma^a (\Gamma^b)^2] = \mp \text{Tr}[\Gamma^b \Gamma^a \Gamma^b] = \mp \text{Tr}[(\Gamma^b)^2 \Gamma^a] = -\text{Tr}[\Gamma^a]. \quad (1.47)$$

6. Dalle proprietà (1.43) e (1.46) segue che

$$\text{Tr}[\Gamma^a \Gamma^b] = 0 \quad \text{per} \quad a \neq b. \quad (1.48)$$

7. Le matrici  $\Gamma$  sono linearmente indipendenti, ossia una relazione

$$\sum_a c_a \Gamma^a = 0 \quad (1.49)$$

implica  $c_a = 0$  ( $a = 1, \dots, 16$ ). Infatti, se prendiamo la traccia della (1.49) troviamo  $c_1 = 0$ . Analogamente, prendendo la traccia di

$$\Gamma^b \left( \sum_a c_a \Gamma^a \right) = 0, \quad \text{per } b = 2, \dots, 16, \quad (1.50)$$

e utilizzando le (1.44) e (1.48) si trova  $c_b = 0$  ( $b = 2, \dots, 16$ ).

8. Per la proprietà precedente la dimensione minima delle matrici  $\Gamma$  è  $4 \times 4$  (esistono solo 4 matrici  $2 \times 2$  indipendenti: la matrice identità e le tre matrici di Pauli, mutuamente anticommutanti); la rappresentazione  $4 \times 4$  è quindi irriducibile.

9. Dalle proprietà precedenti segue che qualsiasi matrice  $X$  di dimensione  $4 \times 4$  può essere scritta come una combinazione lineare delle matrici  $\Gamma$ :

$$X = \sum_a x_a \Gamma^a, \quad \text{con } x_a = \frac{1}{\text{Tr}[(\Gamma^a)^2]} \text{Tr}[X \Gamma^a]. \quad (1.51)$$

10. L'algebra generata dalle matrici  $\gamma$  prende il nome di algebra di Clifford.

### 1.2.3 Teorema fondamentale sulle rappresentazioni delle matrici $\gamma$

Data una rappresentazione  $4 \times 4$  delle matrici  $\gamma$ , ogni altra rappresentazione  $\gamma'$  o è riducibile,

$$\Gamma'^a \longrightarrow \begin{pmatrix} \Gamma^a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma^a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma^a \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

o è equivalente, ossia è legata alla precedente tramite la relazione di similitudine

$$\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}. \quad (1.53)$$

Il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac afferma appunto che, dati due insiemi  $\gamma, \gamma'$  di matrici  $4 \times 4$  che soddisfano alle relazioni di anticommutazione (1.24), esiste una matrice non-singolare  $S$  tale che la relazione (1.53) è soddisfatta<sup>4</sup>. Ciò è consistente con il fatto che la trasformazione (1.53) preserva le relazioni di anticommutazione (1.24):

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = S \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} S^{-1} = 2 g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (1.54)$$

---

<sup>4</sup>Si veda, per esempio, W. Grenier, *Relativistic Quantum Mechanics*, pag.104.

È evidente che in un cambiamento di rappresentazione tutti i prodotti di matrici  $\gamma$  si trasformano tramite la (1.53). In particolare le matrici  $\Gamma^a$ :

$$\Gamma'^a = S \Gamma^a S^{-1}. \quad (1.55)$$

Se si richiede che nelle due rappresentazioni valgano anche le relazioni (vedi la (1.32))

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad \text{e} \quad \gamma'^{\mu\dagger} = \gamma'^0 \gamma'^\mu \gamma'^0, \quad (1.56)$$

allora la matrice  $S$  di trasformazione è unitaria (si veda l'Appendice D). Questa proprietà garantisce l'invarianza delle forme bilineari  $\bar{\psi} \Gamma^a \psi$  per le trasformazioni di equivalenza (1.53):

$$\bar{\psi}' \Gamma'^a \psi' = \bar{\psi} \Gamma^a \psi. \quad (1.57)$$

Per dimostrare questa relazione è necessario determinare la trasformazione delle funzioni d'onda per cambiamento di rappresentazione. Consideriamo l'equazione di Dirac nella rappresentazione  $\gamma'^\mu$ :

$$(i\gamma'^\mu \partial_\mu - m) \psi' = 0. \quad (1.58)$$

Utilizzando la (1.53) e moltiplicando a sinistra per  $S^{-1}$ , si ottiene

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S^{-1} \psi' = 0. \quad (1.59)$$

Affinchè questa equazione sia equivalente all'equazione di Dirac nella rappresentazione  $\gamma^\mu$ , data nell'equazione (1.20), le funzioni d'onda  $\psi$  e  $\psi'$  devono essere legate dalla relazione

$$\psi' = S \psi. \quad (1.60)$$

La trasformazione degli spinori aggiunti è data da

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger \gamma'^0 = \psi^\dagger S^\dagger S \gamma^0 S^{-1} = \bar{\psi} S^{-1}. \quad (1.61)$$

La relazione di invarianza (1.57) segue immediatamente dalle (1.55), (1.60) e (1.61).

## 1.2.4 Equazione di Dirac in versione hamiltoniana

L'equazione di Dirac può essere scritta nella forma hamiltoniana

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbb{H} \psi \quad (1.62)$$

dove<sup>5</sup>

$$\boxed{\mathbb{H} = -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m}. \quad (1.63)$$

Le matrici  $\alpha^k$  sono date da

$$\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k \quad (1.64)$$

---

<sup>5</sup>Ricordiamo che

$$\nabla^k \equiv \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

e la matrice  $\beta$  è semplicemente una notazione alternativa per la matrice  $\gamma^0$  ( $\beta = \gamma^0$ ). Dalle proprietà delle matrici  $\gamma$  si vede che le matrici  $\beta$  e  $\alpha^k$  sono hermitiane

$$\beta^\dagger = \beta, \quad (\alpha^k)^\dagger = \alpha^k, \quad (1.65)$$

per cui l'hamiltoniana di Dirac (1.63) è hermitiana. Le matrici  $\beta$  e  $\alpha^k$  soddisfano alle seguenti proprietà:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2 \delta^{ij} \mathbb{1}, \quad (1.66a)$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \quad (1.66b)$$

$$\beta^2 = \mathbb{1}. \quad (1.66c)$$

### 1.2.5 Rappresentazione di Dirac delle matrici $\gamma$

Si chiama rappresentazione di Dirac quella rappresentazione delle matrici  $\gamma$  in cui  $\gamma^0$  è diagonale. La forma delle altre matrici  $\gamma$  segue dalle proprietà generali di anticommutazione. Si ha quindi

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.67a)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.67b)$$

Le matrici  $\sigma^k$  sono le matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Questa rappresentazione è utile per discutere il limite non-relativistico dell'equazione di Dirac. Per altre rappresentazioni si veda l'Appendice D.

## 1.3 Covarianza dell'equazione di Dirac

Consideriamo due sistemi di coordinate inerziali  $x$  e  $x' = \Lambda x$ , nei quali l'equazione di Dirac si scrive, rispettivamente,

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (1.69a)$$

$$(i \gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0. \quad (1.69b)$$

Le coordinate e i gradienti nei due sistemi di riferimento sono connessi da una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  (vedi l'Appendice B):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu, \quad (1.70a)$$

$$\partial'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu, \quad \partial_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu. \quad (1.70b)$$



Assumendo che le funzioni d'onda  $\psi(x)$  e  $\psi'(x')$  siano connesse da una trasformazione lineare del tipo<sup>6</sup>

$$\psi'(x') = \mathcal{S}_\Lambda \psi(x), \quad (1.71)$$

l'equazione (1.69b) può essere scritta come

$$(i\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m) \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = 0. \quad (1.72)$$

Per ricondurre questa equazione alla (1.69a), la moltiplichiamo a sinistra per  $\mathcal{S}_\Lambda^{-1}$ :

$$(i \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m) \psi(x) = 0. \quad (1.73)$$

Si ha quindi invarianza se

$$\mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda \Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu. \quad (1.74)$$

Moltiplicando per  $\Lambda^\rho{}_\nu$  e tenendo conto che

$$\Lambda^\rho{}_\nu \Lambda_\mu{}^\nu = g_\mu{}^\rho, \quad (1.75)$$

si ottiene

$$\boxed{\mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu}. \quad (1.76)$$

Data una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ , esiste una matrice  $\mathcal{S}_\Lambda$  che soddisfa la (1.76). Infatti, le matrici  $\gamma'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$  soddisfano alle stesse relazioni di anticommutazione delle matrici  $\gamma^\mu$ :

$$\begin{aligned} \gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \gamma^\sigma + \Lambda^\nu{}_\sigma \gamma^\sigma \Lambda^\mu{}_\rho \gamma^\rho \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho) \\ &= 2 g^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \mathbf{1} = 2 g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Perciò esiste una relazione di equivalenza (1.76) che connette le matrici  $\gamma^\mu$  e le matrici  $\gamma'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ .

Per trovare l'espressione di  $\mathcal{S}_\Lambda$  per trasformazioni di Lorentz proprie (trasformazioni connesse con la trasformazione identica: rotazioni spaziali e trasformazioni di velocità (*boosts*)), consideriamo una trasformazione infinitesima,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g_\nu{}^\mu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \text{con} \quad |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1. \quad (1.78)$$

Dalla proprietà (1.75) si ha

$$\omega^\mu{}_\nu = -\omega_\nu{}^\mu. \quad (1.79)$$

Poniamo

$$\mathcal{S}_\Lambda = \mathbf{1} + a \omega^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu}, \quad (1.80)$$

dove  $\mathcal{O}_{\mu\nu}$  deve avere la struttura di una matrice  $4 \times 4$ . Per determinare la forma esplicita di  $\mathcal{O}_{\mu\nu}$  e il coefficiente  $a$ , sostituiamo la (1.80) e la sua inversa,

$$\mathcal{S}_\Lambda^{-1} = \mathbf{1} - a \omega^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu}, \quad (1.81)$$

---

<sup>6</sup>Questa proprietà si applica a trasformazioni di Lorentz proprie e all'inversione spaziale; non si applica invece all'inversione temporale (vedi la Sezione 1.4.2).

nella (1.76), con la  $\Lambda^\mu{}_\nu$  data dalla (1.78):

$$(\mathbb{1} - a \omega^{\alpha\beta} \mathcal{O}_{\alpha\beta}) \gamma^\mu (\mathbb{1} + a \omega^{\alpha\beta} \mathcal{O}_{\alpha\beta}) = (g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) \gamma^\nu. \quad (1.82)$$

Al prim'ordine in  $\omega^\mu{}_\nu$  si ottiene

$$\gamma^\mu + a \omega^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \mathcal{O}_{\alpha\beta}] = \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.83)$$

Dobbiamo quindi avere

$$a \omega^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \mathcal{O}_{\alpha\beta}] = \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.84)$$

Questa relazione è soddisfatta da  $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$  e  $a = -i/4$ . Per dimostrarlo, calcoliamo il commutatore  $[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}]$  tenendo conto che

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbb{1} - i \sigma^{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\alpha\beta} = i (\gamma^\alpha \gamma^\beta - g^{\alpha\beta} \mathbb{1}), \quad (1.85)$$

e che  $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ ; per cui

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] &= i [\gamma^\mu, \gamma_\alpha \gamma_\beta - g_{\alpha\beta} \mathbb{1}] = i [\gamma^\mu, \gamma_\alpha \gamma_\beta] = i \{ \gamma^\mu, \gamma_\alpha \} \gamma_\beta - i \gamma_\alpha \{ \gamma^\mu, \gamma_\beta \} \\ &= 2i (g_\alpha^\mu \gamma_\beta - g_\beta^\mu \gamma_\alpha), \end{aligned} \quad (1.86)$$

e si ha

$$-\frac{i}{4} \omega^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.87)$$

Abbiamo quindi trovato che per trasformazioni di Lorentz proprie infinitesime la matrice di trasformazione spinoriale è

$$\mathcal{S}_\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (1.88)$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie finite si ha

$$\boxed{\mathcal{S}_\Lambda = e^{-\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}}}. \quad (1.89)$$

Esaminiamo ora separatamente le rotazioni spaziali e le trasformazioni di velocità.

### 1.3.1 Rotazione attorno all'asse $x^k$

Consideriamo prima una rotazione infinitesima di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $x^1$ . La matrice di rotazione è

$$\begin{aligned} (R_1)^\mu{}_\nu(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= g^\mu{}_\nu + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) = g^\mu{}_\nu + \theta (r_1)^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned} \quad (1.90)$$

dove

$$(r_1)^\mu{}_\nu = \left. \frac{d(R_1)^\mu{}_\nu(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

è il generatore delle rotazioni infinitesime attorno all'asse  $x^1$ . Poichè le uniche componenti non nulle di  $(r_1)^\mu{}_\nu$  sono  $(r_1)^2{}_3 = +1$  e  $(r_1)^3{}_2 = -1$ , ossia  $(r_1)_{23} = -1$  e  $(r_1)_{32} = +1$ , si ha

$$(r_1)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{23} + \sigma^{32} = -2\sigma^{23}, \quad (1.92)$$

ossia  $\omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -2\theta \sigma^{23}$ . Perciò, per una rotazione finita di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $x^1$  si ha

$$\mathcal{S}_{R_1}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta \sigma^{23}}. \quad (1.93)$$

Introduciamo le matrici  $\Sigma^k$  definite da ( $\epsilon^{ijk}$  è un tensore completamente antisimmetrico con  $\epsilon^{123} = +1$ )<sup>7</sup>

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \Sigma^k \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \sigma^{ij} \quad (1.94)$$

Ne segue che  $\sigma^{23} = \Sigma^1$  e la (1.93) può essere scritta come

$$\mathcal{S}_{R_1}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^1}. \quad (1.95)$$

Per una rotazione finita di un angolo  $\theta$  attorno ad un generico asse  $x^k$  si ha

$$\boxed{\mathcal{S}_{R_k}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^k} = \mathbb{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \Sigma^k \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (1.96)$$

Lo sviluppo dell'esponenziale si ottiene nel seguente modo:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{2}\theta \Sigma^k\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{2}\theta \Sigma^k\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{2}\theta \Sigma^k\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2n}}{(2n)!} + i \Sigma^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbb{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \Sigma^k \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

poichè

$$(\Sigma^k)^{2n} = \mathbb{1}, \quad (\Sigma^k)^{2n+1} = \Sigma^k, \quad i^{2n} = (-1)^n, \quad (1.98)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (1.99)$$

Notare che

$$\mathcal{S}_{R_k}(\theta + 2\pi) = -\mathcal{S}_{R_k}(\theta), \quad (1.100)$$

e quindi  $\mathcal{S}_{R_k}$  è una funzione a due valori delle rotazioni.

<sup>7</sup>Notare che le matrici  $\Sigma^k$  possono anche essere scritte come  $\Sigma^k = -\gamma^0 \gamma^k \gamma^5$

### 1.3.2 Trasformazione di velocità nella direzione $x^k$

Consideriamo prima un boost con velocità  $v$  nella direzione  $x^1$ , per il quale si ha

$$\begin{cases} x'^0 = \cosh \varphi x^0 - \sinh \varphi x^1, \\ x'^1 = -\sinh \varphi x^0 + \cosh \varphi x^1, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3, \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \cosh \varphi = \gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}, \\ \sinh \varphi = \gamma v. \end{cases} \quad (1.101)$$

Per un boost infinitesimo nella direzione  $x^1$  si ha

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)^\mu{}_\nu(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi & 0 & 0 \\ -\varphi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varphi^2) \\ &= g_\nu^\mu + \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varphi^2) = g_\nu^\mu + \varphi (\lambda_1)^\mu{}_\nu + O(\varphi^2), \end{aligned} \quad (1.102)$$

dove

$$(\lambda_1)^\mu{}_\nu = \left. \frac{d(\Lambda_1)^\mu{}_\nu(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

è il generatore dei boosts infinitesimi lungo l'asse  $x^1$ . Poichè le uniche componenti non nulle di  $(\lambda_1)^\mu{}_\nu$  sono  $(\lambda_1)^0{}_1 = -1$  e  $(\lambda_1)^1{}_0 = -1$ , ossia  $(\lambda_1)_{01} = -1$  e  $(\lambda_1)_{10} = +1$ , si ha

$$(\lambda_1)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{01} + \sigma^{10} = -2\sigma^{01}, \quad (1.104)$$

ossia  $\omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -2\varphi \sigma^{01}$ . Perciò, per un boost finito lungo l'asse  $x^1$  si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda_1}(\varphi) = e^{\frac{i}{2}\varphi \sigma^{01}}. \quad (1.105)$$

Tenendo conto che

$$\sigma^{0k} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^k] = i\gamma^0 \gamma^k = i\alpha^k, \quad (1.106)$$

per un boost finito lungo un generico asse  $x^k$  si ha

$$\boxed{\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) = e^{-\frac{i}{2}\varphi \alpha^k} = \mathbb{1} \cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \alpha^k \sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (1.107)$$

### 1.3.3 Matrice coniugata hermitiana di $\mathcal{S}_\Lambda$

Consideriamo la matrice coniugata hermitiana di  $\mathcal{S}_\Lambda$  per una trasformazione di Lorentz propria:

$$\mathcal{S}_\Lambda^\dagger = e^{\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^\dagger}. \quad (1.108)$$

Poichè  $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ , si ha

$$\gamma^0 \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 [\gamma_\nu^\dagger, \gamma_\mu^\dagger] \gamma^0 = -\frac{i}{2} [\gamma_\nu, \gamma_\mu] = \sigma_{\mu\nu}, \quad (1.109)$$

da cui discende che

$$\gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^\dagger \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}}, \quad (1.110)$$

ossia

$$\boxed{\gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^\dagger \gamma^0 = \mathcal{S}_\Lambda^{-1}}. \quad (1.111)$$

Esaminiamo separatamente le rotazioni spaziali e i boosts:

1. Per una rotazione spaziale di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $x^k$  si ha

$$\mathcal{S}_{R_k}(\theta) = e^{\frac{i}{2} \theta \Sigma^k}. \quad (1.112)$$

Poichè  $\Sigma^k$  è hermitiano, si ottiene

$$\mathcal{S}_{R_k}^\dagger(\theta) = e^{-\frac{i}{2} \theta \Sigma^{k\dagger}} = e^{-\frac{i}{2} \theta \Sigma^k} = \mathcal{S}_{R_k}^{-1}(\theta) \quad (1.113)$$

Quindi  $\mathcal{S}_{R_k}(\theta)$  è unitaria. Dalla (1.113) e dalla proprietà  $\Sigma^k \gamma^0 = \gamma^0 \Sigma^k$  segue la (1.111).

2. Per un boost lungo l'asse  $x^k$  si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^k}. \quad (1.114)$$

Poichè  $\alpha^k$  è hermitiano, si ottiene

$$\mathcal{S}_{\Lambda_k}^\dagger(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^{k\dagger}} = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^k} = \mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) \quad (1.115)$$

Quindi  $\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi)$  è hermitiano. Dalla (1.115) e dalla proprietà  $\alpha^k \gamma^0 = -\gamma^0 \alpha^k$  segue la (1.111).

## 1.4 Trasformazioni discrete

### 1.4.1 Inversione spaziale (parità)

Per inversione spaziale  $x \xrightarrow{P} x' = (x^0, -\vec{x})$  si ha

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x') = \mathcal{S}_P \psi(x) \quad (1.116)$$

e l'equazione di Dirac

$$\left( i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (1.117)$$

si trasforma in

$$\left( i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \mathcal{S}_P \psi(x) = 0. \quad (1.118)$$

Moltiplicando a sinistra per  $\mathcal{S}_P^{-1}$ , si ottiene

$$\left( i \mathcal{S}_P^{-1} \gamma^0 \mathcal{S}_P \frac{\partial}{\partial t} - i \mathcal{S}_P^{-1} \vec{\gamma} \mathcal{S}_P \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi(x) = 0. \quad (1.119)$$

Quindi, per riottenere l'equazione di Dirac (1.117) si deve avere

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_P^{-1} \gamma^0 \mathcal{S}_P = \gamma^0 \\ \mathcal{S}_P^{-1} \vec{\gamma} \mathcal{S}_P = -\vec{\gamma} \end{array} \right\} \implies \boxed{\mathcal{S}_P = \eta_P \gamma^0}, \quad (1.120)$$

dove  $\eta_P$  è una costante moltiplicativa. La condizione di invarianza della densità di probabilità

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) &= \psi'^\dagger(t, -\vec{x}) \psi'(t, -\vec{x}) = [\eta_P^* \psi^\dagger(t, \vec{x}) \gamma^0] [\eta_P \gamma^0 \psi(t, \vec{x})] \\ &= |\eta_P|^2 \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.121)$$

impone la condizione  $|\eta_P|^2 = 1$ , ossia  $\eta_P = e^{i\phi}$  con  $\phi$  reale. Il fattore di fase  $\eta_P$  dipende dalla natura della particella di spin 1/2 che si sta considerando ed è chiamato *parità intrinseca*. Il valore di  $\eta_P$  non è misurabile in assoluto, ma le parità relative dei fermioni possono essere misurate sperimentalmente. Convenzionalmente si sceglie  $\eta_P = +1$  per l'elettrone. Notiamo esplicitamente che  $\mathcal{S}_P$  è una matrice unitaria, come richiesto dalla condizione di invarianza della densità di probabilità.

Le condizioni (1.120) possono anche essere ottenute dalla formula (1.76), tenendo conto che per inversione spaziale

$$\Lambda = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.122)$$

## 1.4.2 Inversione temporale

Per inversione temporale  $x \xrightarrow{T} x' = (-x^0, \vec{x})$  la legge di trasformazione della funzione d'onda deve contenere l'operazione di coniugazione complessa<sup>8</sup>. Per tenere conto anche dell'inversione dello spin, scriviamo la legge di trasformazione dello spinore nel modo seguente<sup>9</sup>:

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(x') = \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x), \quad (1.123)$$

dove  $\mathcal{B}$  è una matrice unitaria, affinché la densità di probabilità  $\psi^\dagger \psi$  sia invariante per inversione temporale. Determiniamo  $\mathcal{B}$  in modo che la teoria sia invariante per inversione temporale. Dall'equazione di Dirac

$$\left( i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (1.124)$$

<sup>8</sup>Vedi Landau & Lifshitz, *Meccanica Quantistica*.

<sup>9</sup>Notare che la matrice  $\mathcal{B}$  non può essere determinata mediante la formula (1.76) perchè la (1.123) differisce dall'espressione (1.71).

per inversione temporale si ottiene

$$\left(-i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - m\right)\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\psi}(x) = 0. \quad (1.125)$$

Trasponendo la (1.125) si ha

$$-i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\mathcal{B}\tilde{\gamma}^0 + i\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\mathcal{B}\tilde{\vec{\gamma}} - m\bar{\psi}\mathcal{B} = 0. \quad (1.126)$$

Moltiplicando a destra per  $\mathcal{B}^{-1}$  si ottiene

$$-i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\left(\mathcal{B}\tilde{\gamma}^0\mathcal{B}^{-1}\right) + i\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\left(\mathcal{B}\tilde{\vec{\gamma}}\mathcal{B}^{-1}\right) - m\bar{\psi} = 0. \quad (1.127)$$

Imponendo che questa equazione sia uguale all'equazione di Dirac per  $\bar{\psi}$

$$i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\gamma^0 + i\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\vec{\gamma} + m\bar{\psi} = 0, \quad (1.128)$$

si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} \mathcal{B}\tilde{\gamma}^0\mathcal{B}^{-1} = \gamma^0, \\ \mathcal{B}\tilde{\vec{\gamma}}\mathcal{B}^{-1} = -\vec{\gamma}. \end{cases} \quad (1.129)$$

Tenendo conto che

$$(\gamma^0\gamma^5)\gamma^0(\gamma^0\gamma^5)^{-1} = -\gamma^0, \quad (1.130)$$

$$(\gamma^0\gamma^5)\vec{\gamma}(\gamma^0\gamma^5)^{-1} = \vec{\gamma}, \quad (1.131)$$

se definiamo una matrice  $\mathcal{C}$  tale che

$$\boxed{\mathcal{C}\tilde{\gamma}^\mu\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu}, \quad (1.132)$$

si ottiene che le equazioni (1.129) sono soddisfatte dalla matrice

$$\boxed{\mathcal{B} = \eta_T\gamma^0\gamma^5\mathcal{C}}, \quad (1.133)$$

dove  $\eta_T$  è un fattore di fase arbitrario. Come si vedrà successivamente, la matrice  $\mathcal{C}$  interviene nella legge di trasformazione degli spinori per coniugazione di carica.

## 1.5 Forme bilineari con spinori di Dirac

Vogliamo ora studiare le proprietà di trasformazione di forme bilineari del tipo

$$\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x), \quad \text{con} \quad \Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma^5, \gamma^5, \quad (1.134)$$

per trasformazioni di Lorentz.

Dobbiamo preliminarmente ricavare le proprietà di trasformazione dello spinore aggiunto  $\bar{\psi}$  a partire dalle formule di trasformazione dello spinore  $\psi$ .

## 1.5.1 Proprietà di trasformazione dello spinore aggiunto

### Trasformazioni di Lorentz proprie ed inversione spaziale

Dalla formula

$$\psi'(x') = \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) \quad (1.135)$$

si ha

$$\overline{\psi}'(x') \equiv \psi'^{\dagger}(x') \gamma^0 = \psi^{\dagger}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{\dagger} \gamma^0 = \overline{\psi}(x) \gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^{\dagger} \gamma^0. \quad (1.136)$$

Utilizzando la relazione

$$\gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^{\dagger} \gamma^0 = \mathcal{S}_\Lambda^{-1}, \quad (1.137)$$

si ottiene

$$\boxed{\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1}}, \quad (1.138)$$

### Inversione temporale

Il trasformato di  $\overline{\psi}$  è

$$\overline{\psi}'(x') = \left( \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\overline{\psi}}(x) \right)^{\dagger} \gamma^0 = \left( \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\psi}^{\dagger}(x) \right)^{\dagger} \gamma^0 = \tilde{\psi}(x) \tilde{\gamma}^0 \tilde{\mathcal{B}}^{\dagger} \gamma^0. \quad (1.139)$$

Dalle proprietà della matrice  $\mathcal{B}$  si può dedurre che  $\tilde{\gamma}^0 \tilde{\mathcal{B}}^{\dagger} \gamma^0 = \tilde{\mathcal{B}}^{-1}$ , e quindi

$$\boxed{\overline{\psi}'(x') = \tilde{\psi}(x) \tilde{\mathcal{B}}^{-1}}. \quad (1.140)$$

## 1.5.2 Trasformazioni di forme bilineari per trasformazioni di Lorentz proprie e inversioni spaziali

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz proprie e le inversioni spaziali. Tenendo conto delle (1.71), (1.76) e (1.138) si ha:

1.  $\Gamma^a = \mathbb{1}$ .

$$\overline{\psi}'(x') \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \overline{\psi}(x) \psi(x). \quad (1.141)$$

Quindi questo bilineare è uno scalare.

2.  $\Gamma^a = \gamma^\mu$ .

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x). \quad (1.142)$$

Quindi l'insieme di questi quattro bilineari costituisce un quadri-vettore polare.

3.  $\Gamma^a = \sigma^{\mu\nu}$ .

$$\overline{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \sigma^{\mu\nu} \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \overline{\psi}(x) \sigma^{\alpha\beta} \psi(x). \quad (1.143)$$

Segue che questi bilineari costituiscono un tensore di rango 2.



4.  $\Gamma^a = \gamma^\mu \gamma^5$ .

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu (\mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda) \psi(x). \quad (1.144)$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_\Lambda = e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}} \\ [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \end{array} \right\} \implies \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda = \gamma^5. \quad (1.145)$$

Per inversioni spaziali

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_P = \gamma^0 \\ \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0 \end{array} \right\} \implies \mathcal{S}_P^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_P = -\gamma^5. \quad (1.146)$$

Perciò  $\overline{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x)$  si trasforma come un vettore assiale. Infatti, per trasformazioni di Lorentz proprie

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x), \quad (1.147)$$

mentre per inversioni spaziali

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = -\Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x) = \begin{cases} -\overline{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = 0, \\ +\overline{\psi}(x) \gamma^k \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = k. \end{cases} \quad (1.148)$$

5.  $\Gamma^a = \gamma^5$ .

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda \psi(x). \quad (1.149)$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie si ha

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x), \quad (1.150)$$

mentre per inversioni spaziali

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = -\overline{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x). \quad (1.151)$$

Ossia  $\overline{\psi} \gamma^5 \psi$  è uno pseudoscalare.

Per le proprietà di trasformazione delle forme bilineari per inversione temporale vedi Appendice E.

# Capitolo 2

## Soluzioni libere dell'equazione di Dirac

### 2.1 Soluzioni libere nel sistema di riposo della particella

Cerchiamo una soluzione dell'equazione di Dirac

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

che sia anche autofunzione del quadri-impulso  $p_\mu$ , con valore positivo dell'energia ( $p_0 > 0$ ). Questa soluzione, che indichiamo con  $\psi_p(x)$ , può essere scritta in forma fattorizzata, con un fattore  $e^{-i p \cdot x} \equiv e^{-i p_\mu x^\mu}$ , che contiene la dipendenza spazio-temporale tipica di un'onda piana, e un fattore  $u(\vec{p})$  che descrive le proprietà spinoriali della particella

$$\psi_{p,+}(x) = e^{-i p \cdot x} u(\vec{p}) \quad \text{con } p_0 > 0. \quad (2.2)$$

Determiniamo la forma esplicita dello spinore  $u(\vec{p})$  nella rappresentazione di Dirac. Dall'equazione

$$\partial_\mu \psi_{p,+}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_{p,+}(x) = -i p_\mu \psi_{p,+}(x), \quad (2.3)$$

si ottiene

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(\vec{p}) = 0, \quad (2.4)$$

oppure, come anche si scrive,<sup>1</sup>

$$\boxed{(\not{p} - m) u(\vec{p}) = 0}. \quad (2.5)$$

Per lo spinore aggiunto si ha

$$\bar{u}(\vec{p}) (\not{p} - m) = 0. \quad (2.6)$$

Se  $m \neq 0$ , nel sistema di riposo della particella, dove  $p_\mu = (m, \vec{0})$ , l'equazione (2.5) diventa

$$(\gamma^0 - \mathbb{1}) u(0) = 0. \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Usiamo la notazione "slash" per indicare la contrazione di un generico quadri-vettore  $v^\mu$  con  $\gamma^\mu$ , ossia  $\not{v} \equiv \gamma^\mu v_\mu$ .

Scrivendo

$$u(0) = \begin{pmatrix} \chi_+(0) \\ \varphi_+(0) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

e tenendo conto dell'espressione della  $\gamma^0$  nella rappresentazione di Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(0) \\ \varphi_+(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Quest'equazione ha due soluzioni indipendenti:

$$\chi_+^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_+^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \varphi_+(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

ossia

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

È naturale interpretare le due soluzioni indipendenti  $u^{(r)}(0)$  ( $r = 1, 2$ ) nel sistema di riposo della particella come gli stati corrispondenti alle due proiezioni di spin 1/2 della particella stessa. Ciò è in completa analogia con la descrizione alla Pauli. La conferma della correttezza di questa interpretazione deriverà dallo studio dell'operatore di spin in teoria di Dirac.

Passiamo ora allo studio delle soluzioni libere dell'equazione di Dirac con energia negativa, ossia tali che

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{p,-}(x) = -|p_0| \psi_{p,-}(x). \quad (2.13)$$

Scriviamole nel modo seguente:

$$\psi_{p,-}(x) = e^{i p \cdot x} v(\vec{p}) \quad \text{con} \quad p_0 > 0. \quad (2.14)$$

Per sostituzione nella (2.1) si ha

$$\boxed{(\not{p} + m) v(\vec{p}) = 0}. \quad (2.15)$$

L'analogia equazione per lo spinore aggiunto è

$$\bar{v}(\vec{p}) (\not{p} + m) = 0. \quad (2.16)$$

Se  $m \neq 0$ , nel sistema di riposo della particella, l'equazione (2.15) diventa

$$(\gamma^0 + \mathbb{1}) v(0) = 0. \quad (2.17)$$

Scrivendo

$$v(0) = \begin{pmatrix} \chi_-(0) \\ \varphi_-(0) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

nella rappresentazione di Dirac si ottiene l'equazione

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_-(0) \\ \varphi_-(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Quest'equazione ha due soluzioni indipendenti:

$$\varphi_-^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_-^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \chi_-(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

ossia

$$v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Anche in questo caso l'esistenza di due soluzioni indipendenti è da mettersi in relazione con le due configurazioni di spin della particella.

Si nota inoltre che gli stati  $u$  sono ortogonali agli stati  $v$ . Dalla derivazione precedente si può concludere che la dimensione 4 alla base della struttura spinoriale alla Dirac è dovuta al fatto che lo spinore di Dirac descrive proprietà intrinseche di spin  $1/2$  e stati energetici di duplice segno.

## 2.2 Soluzioni libere in un sistema di riferimento generico

Determiniamo la forma degli spinori  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  in un sistema di riferimento generico, deducendoli da quelli nel sistema di riposo precedentemente ricavati.

Osserviamo innanzi tutto che vale la seguente identità:

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = p^2 - m^2. \quad (2.22)$$

Per una particella fisica si ha  $p^2 = m^2$  e quindi dalla (2.22) si ottiene

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = 0 \quad (2.23)$$

Ciò consente di scrivere

$$(\not{p} - m) [(\not{p} + m) u^{(r)}(0)] = 0, \quad \text{con} \quad r = 1, 2. \quad (2.24)$$

Quindi le soluzioni dell'equazione (2.5) possono essere messe nella forma

$$u^{(r)}(\vec{p}) = C (\not{p} + m) u^{(r)}(0), \quad (2.25)$$

dove  $C$  è una opportuna costante di normalizzazione. Nella rappresentazione di Dirac

$$\begin{aligned}
u^{(r)}(\vec{p}) &= C (\not{p} + m) u^{(r)}(0) \\
&= C \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= C \begin{pmatrix} E + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= C \begin{pmatrix} (E + m) \chi_+^{(r)}(0) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_+^{(r)}(0) \end{pmatrix} \\
&= C (E + m) \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_+^{(r)}(0) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Determiniamo la costante  $C$  in modo che

$$\boxed{\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = \delta_{rs}}. \tag{2.27}$$

Poichè

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= |C|^2 (E + m)^2 \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0)^\dagger & -\chi_+^{(r)}(0)^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_+^{(s)}(0) \\ \chi_+^{(s)}(0) \end{pmatrix} \\
&= |C|^2 (E + m)^2 \left( 1 - \frac{\vec{p}^2}{(E + m)^2} \right) \delta_{rs} \\
&= |C|^2 2m (E + m) \delta_{rs},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

la condizione di normalizzazione è soddisfatta se prendiamo

$$C = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}, \tag{2.29}$$

per cui

$$\boxed{u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}} u^{(r)}(0)}, \tag{2.30a}$$

$$\boxed{\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(r)}(0) \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}}. \tag{2.30b}$$

Si noti che il legame stabilito dalle equazioni (2.30a) e (2.30b) tra gli spinori  $u^{(r)}(\vec{p})$  e  $\bar{u}^{(r)}(\vec{p})$  e i loro corrispondenti nel sistema di riposo non dipende dalla rappresentazione delle  $\gamma$ .

Nella rappresentazione di Dirac gli spinori  $u^{(r)}(\vec{p})$  sono dati da

$$u^{(r)}(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(\vec{p}) \\ \varphi_+^{(r)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_+^{(r)}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Esplicitamente si ha

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$u^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Per le soluzioni a energia negativa si può seguire lo stesso procedimento. Si ha

$$v^{(r)}(\vec{p}) = C(-\not{p} + m)v^{(r)}(0). \quad (2.34)$$

Nella rappresentazione di Dirac si ha

$$\begin{aligned} v^{(r)}(\vec{p}) &= C(-\not{p} + m)v^{(r)}(0) \\ &= C \left[ - \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} \\ &= C(E+m) \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_-^{(r)}(0) \\ \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) &= |C|^2(E+m)^2 \left( \varphi_-^{(r)}(0)^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} - \varphi_-^{(r)}(0)^\dagger \right) \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_-^{(s)}(0) \\ \varphi_-^{(s)}(0) \end{pmatrix} \\ &= |C|^2(E+m)^2 \left( \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} - 1 \right) \delta_{rs} \\ &= -|C|^2 2m(E+m) \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Se poniamo la condizione di normalizzazione

$$\boxed{\bar{v}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = -\delta_{rs}}, \quad (2.37)$$

la costante  $C$  è data dalla (2.29) e si ottiene quindi

$$\boxed{v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}v^{(r)}(0)}, \quad (2.38a)$$

$$\boxed{\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(r)}(0) \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}}. \quad (2.38b)$$

Nella rappresentazione di Dirac gli spinori  $v^{(r)}(\vec{p})$  sono dati da

$$v^{(r)}(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \chi_-^{(r)}(\vec{p}) \\ \varphi_-^{(r)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_-^{(r)}(0) \\ \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Esplicitamente si ha

$$v^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$v^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni di ortogonalità:

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.42a)$$

$$\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0. \quad (2.42b)$$

Notiamo che le condizioni di normalizzazione per gli spinori sono state scritte in termini di invarianti, per esempio  $\bar{u}u$ , come ha da essere. Osserviamo che prodotti del tipo  $u^\dagger u$  si trasformano invece come componenti temporali di quadri-vettori. Infatti, utilizzando l'equazione  $\not{p}u = mu$  e la sua aggiunta, si ha

$$\begin{aligned} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \frac{\not{p} \gamma^0 + \gamma^0 \not{p}}{2m} u^{(s)}(\vec{p}) \\ &= \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \frac{g^{\mu 0} p_\mu}{m} u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Questa proprietà è in accordo con la richiesta che la probabilità  $\psi_{p,+}^\dagger(x) \psi_{p,+}(x) d^3x$  mantenga, per trasformazione di Lorentz, il valore che la stessa ha nel sistema di riposo della particella. Dal momento che, nella trasformazione, l'elemento di volume subisce la contrazione  $d^3x' = \sqrt{1-v^2/c^2} d^3x$ , la densità di probabilità  $\rho = \psi_{p,+}^\dagger(x) \psi_{p,+}(x) = u^\dagger(p) u(p)$  deve trasformarsi come  $\rho' = \rho / \sqrt{1-v^2/c^2} = \rho E/m$ , ossia come ottenuto nella (2.43).

## 2.3 Limite non-relativistico ( $v \ll c$ )

Per le soluzioni ad energia positiva, nella rappresentazione di Dirac, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_+^{(r)\dagger}(\vec{p}) \varphi_+^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{E+m}{2m} \chi_+^{(r)\dagger}(0) \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E+m)^2} \chi_+^{(r)}(0) = \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \chi_+^{(r)\dagger}(\vec{p}) \chi_+^{(r)}(\vec{p}) \\ &= \frac{\vec{p}^2 c^2}{(E+m c^2)^2} \chi_+^{(r)\dagger}(\vec{p}) \chi_+^{(r)}(\vec{p}) \quad \text{in unità ordinarie.} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Per il limite non-relativistico sono utili le relazioni

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \vec{v} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad (2.45)$$

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad (2.46)$$

$$\frac{\vec{p}^2 c^2}{(E + m c^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad (2.47)$$

dalle quali si ottiene

$$\varphi_+^{(r)\dagger}(\vec{p}) \varphi_+^{(r)}(\vec{p}) \simeq \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \chi_+^{(r)\dagger}(\vec{p}) \chi_+^{(r)}(\vec{p}). \quad (2.48)$$

Quindi, nel limite non-relativistico, negli spinori ad energia positiva  $u^{(r)}(\vec{p})$  vi è dominanza degli spinori a due componenti  $\chi_+^{(r)}(\vec{p})$  rispetto a quelli  $\varphi_+^{(r)}(\vec{p})$ ; il fattore di soppressione degli spinori  $\varphi_+^{(r)}(\vec{p})$  rispetto a quelli  $\chi_+^{(r)}(\vec{p})$  è di ordine  $(v/c)^2$ . Di qui segue la usuale denominazione di “grandi componenti” per le  $\chi_+^{(r)}(\vec{p})$  e di “piccole componenti” per le  $\varphi_+^{(r)}(\vec{p})$ .

Per le soluzioni ad energia negativa i ruoli delle  $\chi$  e  $\varphi$  sono scambiati: le componenti  $\chi_-^{(r)}(\vec{p})$  vengono chiamate “piccole componenti” e quelle  $\varphi_-^{(r)}(\vec{p})$  vengono chiamate “grandi componenti”.

## 2.4 Normalizzazione delle soluzioni libere

Occupiamoci ora della normalizzazione delle soluzioni libere ad energia positiva  $\psi_{p,+}^{(r)}(x)$ , che riscriviamo come

$$\psi_{p,+}^{(r)}(x) = N e^{-i p \cdot x} u^{(r)}(\vec{p}), \quad (2.49)$$

dove  $N$  è un fattore di normalizzazione. Adotteremo le seguenti condizioni di normalizzazione:

$$\int_V d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = \delta_{rs} \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \quad (2.50)$$

nel caso di normalizzazione in un volume  $V$  finito e

$$\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.51)$$

nel caso di normalizzazione in un volume infinito.

Per il caso di un volume finito si ha

$$\int_V d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = |N|^2 u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(p') \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \int_V d^3x = |N|^2 \frac{E}{m} V \delta_{rs} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad (2.52)$$

per cui

$$N = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}}. \quad (2.53)$$



Per la normalizzazione in un volume infinito si ha

$$\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = |N|^2 u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(p') \int d^3x e^{i(p-p')\cdot x} = |N|^2 \frac{E}{m} \delta_{rs} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}'), \quad (2.54)$$

per cui

$$N = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}}. \quad (2.55)$$

Analoghe normalizzazioni verranno adottate per le soluzioni libere ad energia negativa. Avremo quindi

$$\psi_{p,-}^{(r)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} e^{ip\cdot x} v^{(r)}(\vec{p}) \quad (2.56)$$

nel caso di normalizzazione in un volume finito e

$$\psi_{p,-}^{(r)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} e^{ip\cdot x} v^{(r)}(\vec{p}) \quad (2.57)$$

nel caso di normalizzazione in un volume infinito.

Le funzioni  $\psi_{p,+}^{(r)}(x)$  e  $\psi_{p,-}^{(r)}(x)$  sono ortogonali, ossia

$$\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',-}^{(s)}(x) = 0. \quad (2.58)$$

Infatti, dalle (2.30b) e (2.38b) si ricava che

$$u^{(r)\dagger}(\vec{\tilde{p}}) = u^{(r)\dagger}(0) \frac{\not{\tilde{p}} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}, \quad (2.59a)$$

$$v^{(r)\dagger}(\vec{\tilde{p}}) = v^{(r)\dagger}(0) \frac{-\not{\tilde{p}} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}, \quad (2.59b)$$

dove  $\tilde{p}^\mu = (p^0, \vec{\tilde{p}}) = (p^0, -\vec{p})$ , e quindi dalla proprietà (2.23) discendono le relazioni

$$u^{(r)\dagger}(\vec{\tilde{p}}) v^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.60a)$$

$$v^{(r)\dagger}(\vec{\tilde{p}}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0. \quad (2.60b)$$

## 2.5 Pacchetti d'onda

Le soluzioni libere  $\psi_{p,+}^{(r)}(x)$  e  $\psi_{p,-}^{(r)}(x)$  costituiscono un insieme completo ortonormale e quindi la più generale soluzione può essere scritta come

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_r \int d^3p \left[ b_{\vec{p}}^{(r)} \psi_{p,+}^{(r)}(x) + d_{\vec{p}}^{(r)*} \psi_{p,-}^{(r)}(x) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \left[ b_{\vec{p}}^{(r)} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} + d_{\vec{p}}^{(r)*} v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip\cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

I coefficienti  $b_{\vec{p}}^{(r)}$  e  $d_{\vec{p}}^{(r)*}$  dello sviluppo sono in generale dei numeri complessi (le notazioni qui adottate seguono le convenzioni standard usualmente utilizzate).

La formula (2.61) fa riferimento a stati normalizzati in un volume infinito. La corrispondente espressione per una normalizzazione in un volume finito si ottiene sostituendo

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}}. \quad (2.62)$$

Per le proprietà di ortonormalizzazione viste nel paragrafo precedente, si ha che la condizione di normalizzazione della  $\psi(x)$ , ossia

$$\int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = 1, \quad (2.63)$$

implica che

$$\sum_r \int d^3p \left[ |b_{\vec{p}}^{(r)}|^2 + |d_{\vec{p}}^{(r)}|^2 \right] = 1. \quad (2.64)$$

Uno studio dettagliato delle proprietà del pacchetto d'onda (2.61) ne mette in evidenza due proprietà importanti<sup>2</sup>:

1. la presenza simultanea degli stati ad energia positiva e di quelli ad energia negativa nello sviluppo (2.61) è indispensabile per realizzare, mediante la descrizione del pacchetto d'onda, una buona localizzazione della particella (dimensione lineare del volume di localizzazione  $\ll$  lunghezza d'onda Compton della particella);
2. l'evoluzione temporale del pacchetto d'onda mostra che l'interferenza tra stati ad energia positiva e stati ad energia negativa genera delle oscillazioni rapide che si sovrappongono al moto rettilineo uniforme di una particella libera (*Zitterbewegung*).

## 2.6 Proiettori su stati ad energia positiva e su stati ad energia negativa

In numerose applicazioni che comportano un calcolo spinoriale è utile definire dei proiettori su stati ad energia positiva e su quelli ad energia negativa.

Definiamo come proiettore su stati ad energia positiva la matrice

$$\Lambda_+(\vec{p}) \equiv \sum_{r=1,2} u^{(r)}(\vec{p}) \overline{u^{(r)}(\vec{p})}, \quad (2.65)$$

ossia, più esplicitamente,

$$(\Lambda_+(\vec{p}))_{\alpha\beta} \equiv \sum_{r=1,2} u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \overline{u_\beta^{(r)}(\vec{p})}. \quad (2.66)$$

Il ruolo di  $\Lambda_+(\vec{p})$  come proiettore risulta dalle relazioni

$$\sum_{\beta} (\Lambda_+(\vec{p}))_{\alpha\beta} u_\beta^{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1,2} u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \sum_{\beta} \overline{u_\beta^{(r)}(\vec{p})} u_\beta^{(s)}(\vec{p}) = u_\alpha^{(s)}(\vec{p}) \quad (2.67)$$

---

<sup>2</sup>Per la dimostrazione si veda, per esempio, J.J. Sakurai: *Advanced Quantum Mechanics*.

e

$$\Lambda_+(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = 0. \quad (2.68)$$

$\Lambda_+(\vec{p})$  soddisfa anche la proprietà di idempotenza

$$(\Lambda_+(\vec{p}))^2 = \Lambda_+(\vec{p}) \quad (2.69)$$

caratteristica degli operatori di proiezione. Infatti,

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \sum_{r=1,2} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \overline{u_{\rho}^{(r)}(\vec{p})} \sum_{s=1,2} u_{\rho}^{(s)}(\vec{p}) \overline{u_{\beta}^{(s)}(\vec{p})} &= \sum_{r,s} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \underbrace{\sum_{\rho} \overline{u_{\rho}^{(r)}(\vec{p})} u_{\rho}^{(s)}(\vec{p}) \overline{u_{\beta}^{(s)}(\vec{p})}}_{\delta_{rs}} \\ &= \sum_{r=1,2} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \overline{u_{\beta}^{(r)}(\vec{p})}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Analogamente, definiamo come proiettore sugli stati ad energia negativa la matrice

$$\Lambda_-(\vec{p}) \equiv - \sum_{r=1,2} v^{(r)}(\vec{p}) \overline{v^{(r)}(\vec{p})}, \quad (2.71)$$

con le proprietà

$$\sum_{\beta} (\Lambda_-(\vec{p}))_{\alpha\beta} v_{\beta}^{(s)}(\vec{p}) = v_{\alpha}^{(s)}(\vec{p}), \quad (2.72)$$

$$\Lambda_-(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.73)$$

$$(\Lambda_-(\vec{p}))^2 = \Lambda_-(\vec{p}). \quad (2.74)$$

Un'espressione per  $\Lambda_+(\vec{p})$  utile nelle applicazioni può essere ottenuta dalla formula

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{1}{2m(E+m)} (\not{p} + m) \underbrace{\sum_{r=1,2} u^{(r)}(0) \overline{u^{(r)}(0)} (\not{p} + m)}_{\Lambda_+(0)}, \quad (2.75)$$

ricavabile dalla definizione (2.65) e dalle formule (2.30).  $\Lambda_+(0)$  può essere determinato tenendo presente che dalle equazioni (2.7) e (2.6) discende

$$(\gamma^0 - \mathbf{1}) \Lambda_+(0) = 0, \quad (2.76a)$$

$$\Lambda_+(0) (\gamma^0 - \mathbf{1}) = 0. \quad (2.76b)$$

Dalle (2.76) e dalla proprietà

$$(\Lambda_+(0))^2 = \Lambda_+(0) \quad (2.77)$$

si trova che

$$\Lambda_+(0) = \frac{1 + \gamma^0}{2}. \quad (2.78)$$

Per la dimostrazione basta porre  $\Lambda_+(0) = \frac{1 + \gamma^0}{2} + B$  e dimostrare che dalle equazioni (2.76) e (2.77) segue che  $B = 0$ . Quindi, dalle (2.75) e (2.78) si ha

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{1}{2m(E+m)} (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\not{p} + m). \quad (2.79)$$

Tenendo conto delle relazioni

$$\begin{aligned}
(\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p} + m) &= (\not{p} + m) (\gamma^0 p_0 - \gamma^k p_k + m) \gamma^0 \\
&= (\not{p} + m) (-\not{p} + m + 2 \gamma^0 p_0) \gamma^0 \\
&= 2 E (\not{p} + m) ,
\end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned}
(\not{p} + m) (\not{p} + m) &= (\not{p} + m) (\not{p} - m + 2 m) \\
&= 2 m (\not{p} + m) ,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$(\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\not{p} + m) = (E + m) (\not{p} + m) , \tag{2.82}$$

si ottiene

$$\boxed{\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2 m}} . \tag{2.83}$$

Per la  $\Lambda_+(\vec{p})$  vale inoltre la relazione

$$(\Lambda_+(\vec{p}))^\dagger = \frac{\not{p}^\dagger + m}{2 m} = \gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2 m} \gamma^0 = \gamma^0 \Lambda_+(\vec{p}) \gamma^0 . \tag{2.84}$$

Analogamente, per il proiettore  $\Lambda_-(\vec{p})$  si ottiene

$$\boxed{\Lambda_-(\vec{p}) = \frac{-\not{p} + m}{2 m}} . \tag{2.85}$$

Il proiettore  $\Lambda_-(\vec{p})$  soddisfa alla relazione

$$(\Lambda_-(\vec{p}))^\dagger = \gamma^0 \Lambda_-(\vec{p}) \gamma^0 . \tag{2.86}$$

Inoltre, si ha

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = \mathbb{1} , \tag{2.87}$$

$$\Lambda_+(\vec{p}) \Lambda_-(\vec{p}) = \Lambda_-(\vec{p}) \Lambda_+(\vec{p}) = 0 . \tag{2.88}$$

L'utilità dei proiettori  $\Lambda_\pm$  deriva dal fatto che l'ampiezza di un processo nel quale interviene una particella di spin 1/2 ha la forma

$$\mathcal{M} = \overline{u^{(r)}}(p_f) \Omega u^{(s)}(p_i) , \tag{2.89}$$

dove  $\Omega$  è una matrice  $4 \times 4$  che in generale può essere scritta come combinazione lineare di matrici  $\Gamma$ , e quindi come combinazione lineare di prodotti di matrici  $\gamma$ . La probabilità di transizione del processo è proporzionale al modulo quadro di  $\mathcal{M}$ . Per calcolare  $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M} \mathcal{M}^*$ , osserviamo innanzi tutto che

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^* &= \left[ \overline{u^{(r)}}(p_f) \Omega u^{(s)}(p_i) \right]^* = \left[ u^{(r)\dagger}(p_f) \gamma^0 \Omega u^{(s)}(p_i) \right]^* \\
&= u^{(s)\dagger}(p_i) \Omega^\dagger \gamma^{0\dagger} u^{(r)}(p_f) = \overline{u^{(s)}}(p_i) (\gamma^0 \Omega^\dagger \gamma^0) u^{(r)}(p_f) \\
&= \overline{u^{(s)}}(p_i) \Omega' u^{(r)}(p_f) ,
\end{aligned} \tag{2.90}$$

con

$$\Omega' = \gamma^0 \Omega^\dagger \gamma^0,$$

e quindi

$$|\mathcal{M}|^2 = \overline{u^{(r)}}(p_f) \Omega u^{(s)}(p_i) \overline{u^{(s)}}(p_i) \Omega' u^{(r)}(p_f) = \overline{u^{(s)}}(p_i) \Omega' u^{(r)}(p_f) \overline{u^{(r)}}(p_f) \Omega u^{(s)}(p_i). \quad (2.91)$$

Se non si è interessati allo spin dello stato finale (cioè lo spin dello stato finale non viene misurato), si deve sommare sugli stati finali di polarizzazione  $r$ :

$$\sum_{r=1,2} |\mathcal{M}|^2 = \overline{u^{(s)}}(p_i) \Omega' \left( \sum_{r=1,2} u^{(r)}(p_f) \overline{u^{(r)}}(p_f) \right) \Omega u^{(s)}(p_i) = \overline{u^{(s)}}(p_i) \Omega' \Lambda_+(p_f) \Omega u^{(s)}(p_i), \quad (2.92)$$

dove  $\Lambda_+(p)$  è il proiettore sugli stati a energia positiva

$$\Lambda_+(p) \equiv \sum_{r=1,2} u^{(r)}(p) \overline{u^{(r)}}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (2.93)$$

Se lo stato iniziale non è polarizzato, si deve mediare sugli stati iniziali di polarizzazione  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r,s=1,2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1,2} \sum_{\alpha\beta=1}^4 \left( \overline{u^{(s)}}(p_i) \right)_\alpha (\Omega' \Lambda_+(p_f) \Omega)_{\alpha\beta} (u^{(s)}(p_i))_\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^4 \sum_{s=1,2} (u^{(s)}(p_i))_\beta \left( \overline{u^{(s)}}(p_i) \right)_\alpha (\Omega' \Lambda_+(p_f) \Omega)_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^4 (\Lambda_+(p_i))_{\beta\alpha} (\Omega' \Lambda_+(p_f) \Omega)_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^4 (\Lambda_+(p_i) \Omega' \Lambda_+(p_f) \Omega)_{\beta\beta} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\Lambda_+(p_i) \Omega' \Lambda_+(p_f) \Omega], \end{aligned} \quad (2.94)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono indici di Dirac. Quest'ultima formula consente di ricondurre la valutazione della somma e media di  $|\mathcal{M}|^2$  ad un calcolo di tracce di prodotti di matrici  $\gamma$ .

Analogamente, l'ampiezza di un processo nel quale interviene una antiparticella di spin 1/2 ha la forma

$$\mathcal{M} = \overline{v^{(s)}}(p_i) \Omega v^{(r)}(p_f), \quad (2.95)$$

per cui la corrispondente probabilità di transizione nel caso in cui lo stato iniziale non è polarizzato e lo spin dello stato finale non viene misurato è proporzionale a

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s=1,2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}[\Lambda_-(p_f) \Omega' \Lambda_-(p_i) \Omega], \quad (2.96)$$

dove  $\Lambda_-(p)$  è il proiettore sugli stati a energia negativa

$$\Lambda_-(p) \equiv \sum_{r=1,2} v^{(r)}(p) \overline{v^{(r)}}(p) = \frac{-\not{p} + m}{2m}. \quad (2.97)$$

# Capitolo 3

## Operatori momenti angolari in teoria di Dirac

### 3.1 Operatore di spin

Riprendiamo in considerazione la trasformazione dello spinore  $\psi(x)$  per una rotazione infinitesima di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $x^3$ :

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \\ x'^1 = x^1 + \theta x^2 \\ x'^2 = -\theta x^1 + x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \implies \begin{cases} \delta x^0 = 0 \\ \delta x^1 = \theta x^2 \\ \delta x^2 = -\theta x^1 \\ \delta x^3 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Combinando la legge di trasformazione per una rotazione infinitesima di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $x^3$  (vedi la (1.96))

$$\psi'(x') = \left( \mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta \Sigma^3 \right) \psi(x) \quad (3.2)$$

con lo sviluppo della  $\psi'(x')$  in serie di Taylor (al prim'ordine in  $\theta$ )

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \psi'(x) + \delta x^1 \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x^1} + \delta x^2 \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x^2} \\ &= \psi'(x) + \theta \left( x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \psi(x) \\ &= \psi'(x) - i \theta L^3 \psi(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

si ottiene

$$\psi'(x) = \left( \mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta \Sigma^3 + i \theta L^3 \right) \psi(x), \quad (3.4)$$

dove  $L^3$  è la terza componente del momento angolare orbitale  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}$  (ricordiamo che stiamo utilizzando unità naturali). Identificando questa formula con l'espressione generale che fornisce la trasformazione della forma funzionale della  $\psi(x)$  per rotazioni

$$\psi'(x) = (1 + i \theta J^3) \psi(x), \quad (3.5)$$

si ottiene

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}}. \quad (3.6)$$

L'operatore momento angolare orbitale  $\vec{L}$  trasforma la parte spaziale della  $\psi$ , mentre l'operatore  $\vec{\Sigma}/2$  agisce sulle variabili di spin.

L'operatore  $\vec{\Sigma}/2$  deve quindi essere interpretato come *operatore di spin* per particelle di spin 1/2 ed è una generalizzazione dell'operatore di Pauli  $\vec{\sigma}/2$ . In unità ordinarie

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma}. \quad (3.7)$$

### ► Autovalori di $\Sigma^3$

Nella rappresentazione di Dirac la matrice  $\vec{\Sigma}$  è data da

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

e quindi, nel sistema di riposo della particella, abbiamo

$$\Sigma^3 u^{(r)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^3 \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \chi_+^{(1)}(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\chi_+^{(2)}(0) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$\Sigma^3 v^{(r)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^3 \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_-^{(1)}(0) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi_-^{(2)}(0) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.9b)$$

Perciò

$$\Sigma^3 u^{(1)}(m, \vec{0}) = +u^{(1)}(m, \vec{0}) \quad (3.10a)$$

$$\Sigma^3 u^{(2)}(m, \vec{0}) = -u^{(2)}(m, \vec{0}) \quad (3.10b)$$

$$\Sigma^3 v^{(1)}(m, \vec{0}) = +v^{(1)}(m, \vec{0}) \quad (3.10c)$$

$$\Sigma^3 v^{(2)}(m, \vec{0}) = -v^{(2)}(m, \vec{0}) \quad (3.10d)$$

Quindi le quattro funzioni ortonormali  $u^{(r)}(m, \vec{0})$  e  $v^{(r)}(m, \vec{0})$ , con  $r = 1, 2$ , sono autofunzioni dell'operatore energia  $i\partial/\partial t$  e dell'operatore  $\Sigma^3$  (con autovalori  $\pm p_0$  per l'energia,  $\pm 1/2$  per la proiezione di spin).

### ► Commutatori dell'operatore di spin

Dimostriamo che le componenti di  $\vec{\Sigma}$  soddisfano le proprietà generali di commutazione dei momenti angolari

$$[\Sigma^j, \Sigma^k] = 2i \epsilon^{jkl} \Sigma^l, \quad (3.11)$$

Per verificare la (3.11) si può procedere nel modo seguente: per  $j \neq k$  si ha

$$[\Sigma^j, \Sigma^k] = [\gamma^0 \gamma^j \gamma^5, \gamma^0 \gamma^k \gamma^5] = -[\gamma^j, \gamma^k] = -2\gamma^j \gamma^k.$$

Moltiplicando la definizione (1.94) delle matrici  $\Sigma^j$

$$\Sigma^j = \frac{1}{2} \epsilon^{jmn} \sigma^{mn} = \frac{i}{2} \epsilon^{jmn} \gamma^m \gamma^n,$$

per  $\epsilon^{jkl}$  e sommando su  $j$  si ottiene

$$\epsilon^{jkl} \Sigma^j = \frac{i}{2} \epsilon^{jkl} \epsilon^{jmn} \gamma^m \gamma^n = \frac{i}{2} (\delta^{km} \delta^{ln} - \delta^{kn} \delta^{lm}) \gamma^m \gamma^n = \frac{i}{2} (\gamma^k \gamma^\ell - \gamma^\ell \gamma^k) = i \gamma^k \gamma^\ell,$$

per cui

$$\gamma^j \gamma^k = -i \epsilon^{jkl} \Sigma^\ell$$

e si ottiene la regola di commutazione (3.11).

## 3.2 Conservazione del momento angolare totale

Vogliamo ora determinare quali siano le leggi di conservazione dei momenti angolari in teoria di Dirac.

Ricordiamo che in rappresentazione di Heisenberg un generico operatore  $\Omega^{(H)}$  soddisfa all'equazione

$$\frac{d\Omega^{(H)}}{dt} = i [\mathbb{H}, \Omega^{(H)}] + \frac{\partial \Omega^{(H)}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

$\Omega^{(H)}$  è deducibile dall'operatore indipendente dal tempo  $\Omega^{(S)}$  in rappresentazione di Schrödinger mediante la relazione

$$\Omega^{(H)}(t) = e^{i\mathbb{H}t} \Omega^{(S)} e^{-i\mathbb{H}t}. \quad (3.13)$$

Come abbiamo visto nel Capitolo 1, in teoria di Dirac l'Hamiltoniana libera è

$$\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (3.14)$$

### ► Momento angolare orbitale $\vec{L}$

L'evoluzione temporale di  $L^j$  è data da

$$\begin{aligned} \frac{dL^j}{dt} &= i [\mathbb{H}, L^j] = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, L^j] = i \alpha^k [p^k, L^j] \\ &= \epsilon^{jkl} \alpha^k p^\ell = (\vec{\alpha} \times \vec{p})^j, \end{aligned} \quad (3.15)$$

per cui

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{p}}. \quad (3.16)$$

Quindi, a differenza di quanto avviene nella teoria di Schrödinger, per una particella di Dirac libera  $\vec{L}$  non è una costante del moto.



► **Momento angolare di spin  $\vec{\Sigma}/2$**

L'evoluzione temporale di  $\Sigma^j$  è data da

$$\frac{d\Sigma^j}{dt} = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \Sigma^j] = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \Sigma^j], \quad (3.17)$$

dove si è tenuto conto che  $[\beta, \vec{\Sigma}] = 0$ . Per il calcolo del commutatore  $[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \Sigma^j]$  è utile usare la proprietà  $\vec{\Sigma} = -\vec{\alpha} \gamma^5$  e le proprietà di anticommutazione (3.11):

$$\begin{aligned} i [\alpha^k p^k, \Sigma^j] &= i p^k [-\Sigma^k \gamma^5, \Sigma^j] = -i p^k [\Sigma^k, \Sigma^j] \gamma^5 = 2 p^k \epsilon^{kj\ell} \Sigma^\ell \gamma^5 \\ &= -2 \epsilon^{kj\ell} p^k \alpha^\ell = -2 (\vec{\alpha} \times \vec{p})^j. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quindi si ha

$$\boxed{\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = -2 \vec{\alpha} \times \vec{p}} \quad (3.19)$$

e ne segue che neppure l'operatore  $\vec{\Sigma}$  è una costante del moto.

Se però consideriamo l'operatore  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$ , tenendo conto che  $[\mathbb{H}, \vec{p}] = 0$ , troviamo

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = i [\mathbb{H}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = i [\mathbb{H}, \vec{\Sigma}] \cdot \vec{p}. \quad (3.20)$$

Ma, per la dimostrazione precedente,  $[\mathbb{H}, \vec{\Sigma}] = 2i \vec{\alpha} \times \vec{p}$  e quindi

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = 0}. \quad (3.21)$$

Ossia l'operatore *elicità*

$$\hat{s} \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (3.22)$$

è una costante del moto.

► **Momento angolare totale  $\vec{J}$**

Dalle equazioni (3.16) e (3.19) si ottiene infine

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \right) = 0}, \quad (3.23)$$

ossia il momento angolare totale  $\vec{J}$  è una costante del moto.

# Capitolo 4

## Interazione elettrone–campo elettromagnetico

### 4.1 Qualche richiamo sul campo elettromagnetico

Il campo elettrico  $\vec{E}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  possono essere espressi mediante il quadri-potenziale  $A^\mu$  nel modo seguente

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0, \quad (4.1a)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.1b)$$

Il tensore (antisimmetrico) del campo elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  è definito come

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}, \quad (4.2)$$

e quindi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Il quadri-potenziale  $A^\mu$  non è unicamente definito a partire dai campi elettrico  $\vec{E}$  e magnetico  $\vec{B}$  (ossia da  $F^{\mu\nu}$ ); esso è definito solo a meno del quadri-gradiente di una funzione arbitraria. Infatti,  $F^{\mu\nu}$  resta invariante per la trasformazione

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x). \quad (4.4)$$

Questa trasformazione è chiamata *trasformazione di gauge* su  $A_\mu(x)$ .

Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in forma quadri-vettoriale:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \end{array} \right\} \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (4.5a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \end{array} \right\} \implies \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0. \quad (4.5b)$$

Nella scrittura di queste equazioni abbiamo fatto uso delle unità (razionalizzate) di Heavyside-Lorentz; in queste unità si ha

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} \quad \text{in unità naturali.} \quad (4.6)$$

Notiamo due importanti proprietà:

1. La natura antisimmetrica di  $F^{\mu\nu}$  implica che la quadri-corrente  $j^\nu$  è conservata: infatti, dalla (4.5a) si ottiene

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

2. In virtù della definizione (4.2),  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , l'equazione (4.5b) è identicamente soddisfatta.

Espressa mediante il quadri-potenziale  $A^\mu$ , l'equazione (4.5a) diventa

$$\boxed{\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu}. \quad (4.8)$$

## 4.2 Interazione elettrone–campo elettromagnetico

Classicamente, per passare dalla trattazione di un elettrone libero a quella di un elettrone in interazione con un campo elettromagnetico si applica la cosiddetta prescrizione di accoppiamento minimo, ossia

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (4.9)$$

dove  $e$  è la carica elettrica dell'elettrone. La regola quantistica corrispondente è

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (4.10)$$

ossia (in unità naturali)

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i e A_\mu. \quad (4.11)$$

Per l'operatore di Dirac  $i\hat{\not{D}} - m$  si ha

$$i\gamma^\mu \partial_\mu - m \rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m \quad (4.12)$$

e quindi l'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico esterno diventa

$$\boxed{(i\hat{\not{D}} - e\hat{A} - m)\psi(x) = 0}. \quad (4.13)$$

## 4.3 Invarianza di gauge

Data una soluzione  $\psi(x)$  dell'equazione di Dirac, anche una generica  $\psi'(x)$ , ottenuta dalla  $\psi(x)$  per una ridefinizione della fase, ossia

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad (4.14)$$

è soluzione della stessa equazione, se  $\alpha$  è una costante. La trasformazione (4.14) viene detta *trasformazione di gauge globale* della  $\psi(x)$ . Nell'ambito di una teoria Lagrangiana di campo si dimostra che l'invarianza per trasformazione di gauge globale di  $\psi$  comporta, in base al teorema di Noether, la conservazione della corrente  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ .

Invece l'equazione di Dirac libera non è invariante per la *trasformazione di gauge locale*

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x). \quad (4.15)$$

Infatti, per questa trasformazione di gauge locale

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi(x)) = ie^{i\alpha(x)}\psi(x)\partial_\mu\alpha(x) + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x), \quad (4.16)$$

e l'equazione di Dirac libera diventa

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x) - m]\psi(x) = 0. \quad (4.17)$$

Invece, l'equazione (4.13) con l'accoppiamento  $\gamma^\mu A_\mu$  è invariante per trasformazioni di gauge locali se il quadri-potenziale  $A_\mu$  si trasforma come nella (4.4), con  $\varphi(x) = -\alpha(x)/e$ :

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (4.18)$$

In tal caso, la trasformazione di gauge su  $\psi(x)$  e quella su  $A_\mu(x)$  si compensano in modo da garantire l'invarianza dell'equazione di Dirac (4.13).

Notare che questa proprietà dipende in modo cruciale dalla prescrizione di accoppiamento minimo, che, come si è visto, consiste nel sostituire la derivata  $\partial_\mu$  con la cosiddetta *derivata covariante*  $D_\mu$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (4.19)$$

Per trasformazioni di gauge

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \end{aligned} \quad (4.20)$$

abbiamo che

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x). \quad (4.21)$$

La proprietà di invarianza di gauge gioca un ruolo importante non solo nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica, ma (in versione generalizzata) nelle moderne teorie dell'interazione elettrodebole e della cromodinamica quantistica.

## 4.4 Hamiltoniana di interazione elettrone–campo elettromagnetico

In questo e nei paragrafi successivi passiamo ad esaminare in dettaglio alcuni dei termini caratteristici di accoppiamento dell'elettrone con il campo elettromagnetico.

Se moltiplichiamo la (4.13)

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - e\gamma^0 A_0 + e\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\right)\psi(x) = 0 \quad (4.22)$$

a sinistra per  $\gamma^0$ , otteniamo

$$\left( i\partial_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e A_0 + e \vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \beta m \right) \psi(x) = 0. \quad (4.23)$$

In forma hamiltoniana si ha quindi

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_{\text{int}}) \psi, \quad (4.24)$$

con

$$\mathbb{H}_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \quad (4.25)$$

$$\mathbb{H}_{\text{int}} = e A_0 - e \vec{\alpha} \cdot \vec{A}. \quad (4.26)$$

Ricordiamo che classicamente l'hamiltoniana di interazione è data da  $e A_0 - e \vec{v} \cdot \vec{A}$ . Quindi l'operatore  $\vec{\alpha}$  risulta essere il corrispettivo del vettore classico velocità  $\vec{v}$ .

Calcoliamo le derivate temporali di  $\vec{r}$  e  $\vec{\pi} = \vec{p} - e \vec{A}$ :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = i [\mathbb{H}, \vec{r}] = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{r}] = \vec{\alpha}, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\pi}}{dt} &= i [\mathbb{H}, \vec{\pi}] - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= i \left[ \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + e A_0 - e \vec{\alpha} \cdot \vec{A}, \vec{p} - e \vec{A} \right] - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= i \left\{ -e [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{A}] + e [A_0, \vec{p}] - e [\vec{\alpha} \cdot \vec{A}, \vec{p}] \right\} - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Utilizzando la formula

$$[f(\vec{r}), \vec{p}] = i \vec{\nabla} f, \quad (4.29)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} [A_0, \vec{p}] &= i \vec{\nabla} A_0, \\ [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{A}] + [\vec{\alpha} \cdot \vec{A}, \vec{p}] &= i \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

per cui

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = e \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e \vec{\nabla} A_0 - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = e \vec{\alpha} \times \vec{B} + e \vec{E}. \quad (4.31)$$

Il secondo membro di questa equazione rappresenta la forza di Lorentz.

## 4.5 Interazione elettromagnetica nel limite non-relativistico

Per stati stazionari l'equazione (4.24) diventa

$$\left[ \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) + \beta m + e A_0 \right] \psi = E \psi \quad (4.32)$$

e quindi, scrivendo

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

nella rappresentazione di Dirac si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \left[ (E - eA^0) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

ossia

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \varphi(x) = (E - eA^0 - m) \chi(x), \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \chi(x) = (E - eA^0 + m) \varphi(x). \end{cases} \quad (4.35)$$

Dalla seconda di queste equazioni, ponendo  $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - e\vec{A}$ , si ottiene

$$\varphi(x) = \frac{1}{E - eA^0 + m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \chi(x) \equiv \frac{1}{E - eA^0 + m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi(x). \quad (4.36)$$

Sostituendo nella prima si ottiene l'equazione per  $\chi(x)$ :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \frac{1}{E - eA^0 + m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi(x) = (E - eA^0 - m) \chi(x). \quad (4.37)$$

Studiamo ora il caso di un elettrone in regime non-relativistico ( $v/c \ll 1$ ) in una regione spaziale in cui valga la condizione  $E \simeq m$ , la quale implica in particolare che

$$|eA^0| \ll m. \quad (4.38)$$

Poniamo

$$E^{(\text{nr})} \equiv E - m \ll m, \quad (4.39)$$

ed approssimiamo la frazione dell'eq.(4.37) nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{1}{E - eA^0 + m} &= \frac{1}{2m + E^{(\text{nr})} - eA^0} \\ &= \frac{1}{2m} \left( 1 - \frac{E^{(\text{nr})} - eA^0}{2m} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

All'ordine zero in  $(E^{(\text{nr})} - eA^0)/2m$  la (4.37) diventa

$$\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \chi(x) = (E^{(\text{nr})} - eA^0) \chi(x). \quad (4.41)$$

Valutiamo  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$  tenendo conto che per le matrici di Pauli si ha

$$\begin{aligned} [\sigma^j, \sigma^k] &= 2i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell \\ \{\sigma^j, \sigma^k\} &= 2\delta^{jk} \mathbb{1} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \sigma^j \sigma^k = \delta^{jk} \mathbb{1} + i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell. \quad (4.42)$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \sigma^j \sigma^k \pi^j \pi^k = (\delta^{jk} + i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell) \pi^j \pi^k \\ &= \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell [\pi^j, \pi^k]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da

$$\begin{aligned} [\pi^j, \pi^k] &= [p^j - eA^j, p^k - eA^k] = -e [A^j, p^k] - e [p^j, A^k] \\ &= -ie \left( \frac{\partial A^j}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} e \epsilon^{jkl} \sigma^l \left( \frac{\partial A^j}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \right) \\ &= \vec{\pi}^2 - e \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

L'equazione (4.41) diventa

$$\left[ \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \chi(x) = E^{(nr)} \chi(x). \quad (4.46)$$

I termini  $eA^0$  e  $\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2$  sono quelli che vengono comunemente trovati in teoria quantistica non-relativistica per l'elettrone in interazione con un campo elettromagnetico, quando nell'equazione di Schrödinger si effettua la sostituzione di accoppiamento minimo

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - eA_\mu. \quad (4.47)$$

Il termine

$$-\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad \left( -\frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \text{ in unità ordinarie} \right) \quad (4.48)$$

descrive l'interazione della particella con il campo magnetico esterno tramite l'operatore di spin. Se riscriviamo il termine (4.48) come

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (4.49)$$

possiamo identificare l'operatore  $\vec{\mu}$  (*momento magnetico* dell'elettrone) come

$$\vec{\mu} \equiv \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \equiv 2 \frac{e}{2mc} \left( \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right) = g \frac{e}{2mc} \vec{s}, \quad (4.50)$$

con

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}, \quad \text{spin}, \quad (4.51)$$

$$g = 2, \quad \text{rapporto giromagnetico}. \quad (4.52)$$

L'unità di misura del momento magnetico è il *magnetone di Bohr*  $\mu_B$  dato da

$$\mu_B \equiv \frac{|e|\hbar}{2mc} = 0.579 \times 10^{-14} \text{ MeV gauss}^{-1}. \quad (4.53)$$

L'accoppiamento  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  che in teoria di Dirac è contenuto nella  $\mathbb{H}_{\text{int}}$  di eq.(4.26), in teoria di Schrödinger deve essere aggiunto tramite il formalismo di spin di Pauli. Il valore del rapporto giromagnetico  $g = 2$ , trovato nell'ambito della teoria di Dirac, è molto prossimo al valore sperimentale. Correzioni al valore  $g = 2$  sono valutabili nella Elettrodinamica Quantistica (QED); all'ordine  $\alpha$  si ha

$$g = 2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right]. \quad (4.54)$$

Questi effetti sono chiamati “correzioni radiative”.

Con le approssimazioni (4.38), (4.39) l'equazione (4.36) diventa

$$\varphi(x) \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A})}{2m} \chi(x). \quad (4.55)$$

## 4.6 Approssimazione non-relativistica in un campo elettrostatico

Consideriamo l'equazione (4.37) con lo sviluppo (4.40) nel caso  $\vec{A} = 0$ :

$$\left[ \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left( 1 - \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{2m} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + e A^0 \right] \chi(x) = E^{(\text{nr})} \chi(x). \quad (4.56)$$

Notiamo che lo sviluppo (4.40) è da interpretarsi come sviluppo in serie nel parametro  $v^2/c^2$ . Infatti,  $E^{(\text{nr})} - e A^0 \simeq mv^2/2$ , ossia

$$\frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{m c^2} = \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (4.57)$$

Se vogliamo studiare termini di accoppiamento sino all'ordine  $(v^2/c^2)^2$ , occorre che l'equazione sia riscritta mediante uno spinore a due componenti che, includendo termini di ordine  $v^2/c^2$ , sia normalizzato a uno. Osserviamo che per ipotesi la funzione d'onda rigorosamente normalizzata a uno è la  $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}$ , ossia  $\int d^3x \psi^\dagger \psi = 1$ . Da questa condizione si ottiene

$$1 = \int d^3x (\chi^\dagger \chi + \varphi^\dagger \varphi) \simeq \int d^3x \chi^\dagger \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{4m^2} \right) \chi. \quad (4.58)$$

Nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la (4.55), che per  $\vec{A} = 0$  diventa

$$\varphi(x) \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \chi(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \sim \frac{v}{c} \chi(x). \quad (4.59)$$

Quindi, una funzione d'onda spinoriale a due componenti correttamente normalizzata a uno, a meno di termini di ordine superiore a  $v^2/c^2$  non è la  $\chi$ , ma la funzione spinoriale

$$X = \Omega \chi, \quad \text{con} \quad \Omega = 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2}. \quad (4.60)$$



Infatti

$$\int d^3x X^\dagger X = \int d^3x \chi^\dagger \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) \chi = 1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right). \quad (4.61)$$

Moltiplicando la (4.56) a sinistra per  $\Omega^{-1}$  e sostituendo  $\chi = \Omega^{-1}X$  si ottiene

$$\Omega^{-1} \left[ \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 - \frac{E^{(\text{nr})} - eA^0}{2m}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + eA^0 \right] \Omega^{-1} X(x) = E^{(\text{nr})} \Omega^{-2} X(x). \quad (4.62)$$

Tenuto conto che

$$\Omega^{-1} \simeq 1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}, \quad (4.63)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) \left[ \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 - \frac{E^{(\text{nr})} - eA^0}{2m}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + eA^0 \right] \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) X(x) \\ & \qquad \qquad \qquad = E^{(\text{nr})} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) X(x), \\ & \left[ \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) \left( \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m} + eA^0 \right) \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{E^{(\text{nr})} - eA^0}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] X(x) \\ & \qquad \qquad \qquad = E^{(\text{nr})} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) X(x), \\ & \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + eA^0 - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3} - \left\{ \frac{\vec{p}^2}{8m^2}, eA^0 \right\} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{E^{(\text{nr})} - eA^0}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] X(x) \\ & \qquad \qquad \qquad = E^{(\text{nr})} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) X(x). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Se scriviamo  $E^{(\text{nr})} \vec{p}^2$  come  $\{E^{(\text{nr})}, \vec{p}^2\}/2$ , otteniamo

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + eA^0 - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3} + \frac{1}{8m^2} (\{\vec{p}^2, E^{(\text{nr})} - eA^0\} - 2\vec{\sigma} \cdot \vec{p} (E^{(\text{nr})} - eA^0) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \right] X(x) \\ & \qquad \qquad \qquad = E^{(\text{nr})} X(x). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Utilizziamo ora l'identità  $\{A^2, B\} - 2ABA = [A, [A, B]]$  per ottenere

$$\begin{aligned} & \{\vec{p}^2, E^{(\text{nr})} - eA^0\} - 2\vec{\sigma} \cdot \vec{p} (E^{(\text{nr})} - eA^0) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, E^{(\text{nr})} - eA^0]] \\ & \qquad \qquad \qquad = [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, -eA^0]]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} & [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, -eA^0] = -ie\vec{\sigma} \cdot \vec{E}, \\ & [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}] = \sigma^j \sigma^k [p^j, E^k] + [\sigma^j, \sigma^k] E^k p^j \\ & \qquad \qquad \qquad = (\delta^{jk} + i\epsilon^{jkl} \sigma^\ell) [p^j, E^k] + 2i\epsilon^{jkl} \sigma^\ell E^k p^j \\ & \qquad \qquad \qquad = -i\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 2i\vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}). \end{aligned}$$

Notare che il termine  $\epsilon^{jk\ell} \sigma^\ell [p^j, E^k]$ , con  $E^k = -\frac{\partial A^0}{\partial x^k}$ , è identicamente nullo.

Sostituendo questi risultati nella (4.65) ricaviamo l'equazione

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + eA^0 - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right] X(x) = E^{(\text{nr})} X(x), \quad (4.67)$$

dove abbiamo ripristinato le unità ordinarie.

I termini di questa equazione hanno il seguente significato:

1.  $eA^0$  energia elettrostatica.

2.  $\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2}$  termine cinetico con correzione relativistica:

$$\begin{aligned} \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 &= m c^2 \left( 1 + \frac{\vec{p}^2 c^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2} - m c^2 \\ &\simeq m c^2 \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^4 c^4} \right) - m c^2 \\ &\simeq \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

3.  $-\frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p})$  termine di interazione spin-orbita (termine di Thomas). Questo termine descrive l'interazione tra il campo magnetico generato dal moto dell'elettrone

$$\vec{B} = \vec{E} \times \frac{\vec{p}}{m c} \quad (4.69)$$

e il momento di dipolo magnetico dell'elettrone

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m c} \vec{\sigma}, \quad (4.70)$$

con un fattore di riduzione 1/2 dovuto alla precessione dello spin (Thomas).

Nel caso di un campo elettrico a simmetria sferica

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dA^0}{dr}, \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) &= -\frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = -\frac{2}{\hbar} \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \left( \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right) \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= -\frac{2}{\hbar} \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \vec{s} \cdot \vec{\ell}, \end{aligned}$$

e quindi

$$-\frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) = \frac{e}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \vec{s} \cdot \vec{\ell}. \quad (4.71)$$

Questo è l'accoppiamento di spin-orbita, che è importante in fisica atomica.

4.  $-\frac{e \hbar^2}{8 m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  termine di Darwin. Questo termine è da mettersi in relazione con la variazione dell'energia elettrostatica dovuta alle fluttuazioni della posizione dell'elettrone su dimensioni lineari dell'ordine della lunghezza d'onda Compton (Zitterbewegung):

$$A^0(\vec{r} + \delta\vec{r}) = A^0(\vec{r}) + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} A^0 + \frac{1}{2} \delta x^i \delta x^j \frac{\partial^2 A^0}{\partial x^i \partial x^j},$$

$$\langle A^0(\vec{r} + \delta\vec{r}) \rangle = A^0(\vec{r}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^0}{\partial x^i \partial x^j} \langle \delta x^i \delta x^j \rangle,$$

$$\langle \delta x^i \delta x^j \rangle = \frac{1}{3} \langle (\delta r)^2 \rangle \delta_{ij} \sim \frac{1}{3} \left( \frac{\hbar}{m c} \right)^2 \delta_{ij},$$

$$\delta(eA^0) \sim \frac{e \hbar^2}{6 m^2 c^2} \Delta A^0 = -\frac{e \hbar^2}{6 m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.$$

# Capitolo 5

## Elettrone in un campo a simmetria sferica

### 5.1 Costanti del moto

Consideriamo l'hamiltoniana

$$\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r), \quad (5.1)$$

relativa ad un elettrone in un generico campo a simmetria sferica.

Discutiamo le costanti del moto. Dal momento che sia  $\vec{L}$  che  $\vec{\Sigma}$  commutano con  $V(r)$ , anche in questo caso, come nel moto libero,  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\Sigma}/2$  è una costante del moto.

Cerchiamo ora un'altra costante del moto. In una teoria non relativistica vi sarebbe la proiezione dello spin su  $\vec{J}$ :  $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$ . Infatti,  $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$  può essere riscritto come

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\hbar} \left( \vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{3}{4} \hbar^2 \right); \quad (5.2)$$

tutti e due i momenti angolari sono costanti del moto e quindi lo è anche  $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$ . La generalizzazione alla teoria di Dirac di  $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$  dovrebbe essere  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$ , oppure  $\beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$  (che ha lo stesso limite non-relativistico di  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$ , ma commutatori più semplici). Si può dimostrare che

$$[\mathbb{H}, \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{J}] = \frac{1}{2} \hbar [\mathbb{H}, \beta], \quad (5.3)$$

e quindi una costante del moto è

$$\boxed{K \equiv \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{J} - \frac{1}{2} \hbar \beta}. \quad (5.4)$$

Infatti, poichè  $V(r)$  è un potenziale centrale, il momento angolare totale  $\vec{J}$  è conservato ( $[\mathbb{H}, \vec{J}] = 0$ ) e si ha

$$\begin{aligned} [\mathbb{H}, K] &= \sum_{\ell} [\mathbb{H}, \beta \Sigma^{\ell}] J^{\ell} - \frac{\hbar}{2} [\mathbb{H}, \beta] \\ &= \sum_{k\ell} [\alpha^k, \beta \Sigma^{\ell}] p^k J^{\ell} + m \sum_{\ell} [\beta, \beta \Sigma^{\ell}] J^{\ell} - \frac{\hbar}{2} \sum_k [\alpha^k, \beta] p^k. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Poiché  $\Sigma^k = -\gamma^0 \gamma^k \gamma^5$ , si ottiene

$$\begin{aligned} [\mathbb{H}, \mathbb{K}] &= - \sum_{k\ell} \underbrace{[\gamma^0 \gamma^k, \gamma^\ell \gamma^5]}_{2g^{k\ell} \gamma^0 \gamma^5} p^k J^\ell + m \sum_{\ell} \underbrace{[\gamma^0, \gamma^\ell \gamma^5]}_0 J^\ell - \frac{\hbar}{2} \sum_k \underbrace{[\alpha^k, \beta]}_{-2\gamma^k} p^k \\ &= 2\gamma^0 \gamma^5 \vec{p} \cdot \vec{J} + \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{p}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Esprimendo ora il momento angolare totale come

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} \quad (5.7)$$

e tenendo conto che  $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$ , si ottiene

$$[\mathbb{H}, \mathbb{K}] = \hbar \gamma^0 \gamma^5 \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} + \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = -\hbar(-\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5 + \vec{\gamma}) \cdot \vec{p} = 0. \quad (5.8)$$

$K$  può anche essere scritto come

$$\begin{aligned} K &= \beta \vec{\Sigma} \cdot \left( \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma} \right) - \frac{1}{2} \hbar \beta \\ &= \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \beta \underbrace{\vec{\Sigma}^2}_3 - \frac{1}{2} \hbar \beta \\ &= \beta \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si ha inoltre che  $\vec{J}$  e  $K$  commutano tra loro:

$$[\vec{J}, K] = 0. \quad (5.10)$$

Quindi per un elettrone in un campo centrale gli operatori  $\mathbb{H}$ ,  $\vec{J}^2$ ,  $J^3$ ,  $K$  ammettono un insieme comune di autofunzioni che scriviamo come

$$\begin{cases} \mathbb{H} \psi = E \psi, \\ \vec{J}^2 \psi = \hbar^2 j(j+1) \psi, \\ J^3 \psi = \hbar j_3 \psi, \\ K \psi = -\hbar \kappa \psi. \end{cases} \quad (5.11)$$

Esiste una semplice relazione tra  $K^2$  e  $\vec{J}^2$ . Per derivarla cominciamo a calcolare  $K^2$ :

$$K^2 = \beta \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) \beta \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) = \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right).$$

Dalla relazione

$$\left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{a} \right) \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{b} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\Sigma} \cdot \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \quad (5.12)$$

discende

$$\left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \right) \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \right) = \vec{L}^2 + i \vec{\Sigma} \cdot \underbrace{\left( \vec{L} \times \vec{L} \right)}_{i\hbar \vec{L}} = \vec{L}^2 - \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L},$$

e quindi

$$K^2 = \vec{L}^2 - \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 2\hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar^2. \quad (5.13)$$

Inoltre si ha

$$\vec{J}^2 = \left( \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma} \right)^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{4} \hbar^2. \quad (5.14)$$

Quindi

$$K^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4} \hbar^2. \quad (5.15)$$

Questa relazione operatoriale comporta la seguente relazione tra autovalori:

$$\hbar^2 \kappa^2 = \hbar^2 j(j+1) + \frac{1}{4} \hbar^2 = \hbar^2 \left( j + \frac{1}{2} \right)^2,$$

per cui

$$\boxed{\kappa = \pm \left( j + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.16)$$

## 5.2 Riduzione a spinori a due componenti

Nella rappresentazione di Dirac  $K$  può essere scritto come

$$\begin{aligned} K &= \beta \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \hbar \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dall'equazione agli autovalori  $K\psi = -\hbar\kappa\psi$ , scrivendo

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

si ha

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = -\hbar\kappa \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}, \\ &\begin{cases} \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) \chi = -\hbar\kappa \chi, \\ \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) \varphi = \hbar\kappa \varphi, \end{cases} \\ &\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \chi = -\hbar(1 + \kappa) \chi, \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \varphi = -\hbar(1 - \kappa) \varphi. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Osserviamo ora che  $\chi$  e  $\varphi$ , essendo autofunzioni di  $\vec{J}^2$  e di  $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ , sono anche autofunzioni di  $\vec{L}^2$ . Infatti, gli operatori  $\vec{J}^2$  e  $\vec{L}^2$ , quando operano su  $\chi$  e  $\varphi$ , sono legati dalla relazione

$$\vec{J}^2 = \left( \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right)^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{4} \hbar^2,$$

ossia

$$\vec{L}^2 = \vec{J}^2 - \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} \hbar^2, \quad (5.20)$$

Da questa relazione e dalle (5.19) si ricava

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \chi &= \left( \vec{J}^2 - \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) \chi = \left[ \hbar^2 j(j+1) + \hbar^2 (1 + \kappa) - \frac{3}{4} \hbar^2 \right] \chi \\ &= \hbar^2 \left[ j(j+1) + \kappa + \frac{1}{4} \right] \chi \\ &\equiv \hbar^2 \ell_\chi (\ell_\chi + 1) \chi, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \varphi &= \left( \vec{J}^2 - \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) \varphi = \left[ \hbar^2 j(j+1) + \hbar^2 (1 - \kappa) - \frac{3}{4} \hbar^2 \right] \varphi \\ &= \hbar^2 \left[ j(j+1) - \kappa + \frac{1}{4} \right] \varphi \\ &\equiv \hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1) \varphi. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Quindi le funzioni d'onda spinoriali a due componenti  $\chi$  e  $\varphi$  sono autofunzioni di  $\vec{L}^2$  ma, a fissi  $j$  e  $\kappa$ , hanno due diversi valori di  $\ell$ :  $\ell_\chi \neq \ell_\varphi$ . Questo spiega perchè lo spinore a quattro componenti  $\psi$  non può essere autofunzione di  $\vec{L}^2$ . Dalle (5.21), (5.22) si trova

$$\begin{cases} \ell_\chi (\ell_\chi + 1) = j(j+1) + \kappa + \frac{1}{4}, \\ \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1) = j(j+1) - \kappa + \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Utilizzando la (5.16) si ha

$$\kappa = + \left( j + \frac{1}{2} \right) \implies \begin{cases} \ell_\chi = j + \frac{1}{2}, \\ \ell_\varphi = j - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\kappa = - \left( j + \frac{1}{2} \right) \implies \begin{cases} \ell_\chi = j - \frac{1}{2}, \\ \ell_\varphi = j + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5.25)$$

Da questo risultato si vede in particolare che, a  $\kappa$  fisso,  $\chi$  e  $\varphi$  hanno parità opposta.

### 5.3 Separazione delle variabili

Dalle proprietà viste nel paragrafo precedente segue che, per risolvere l'equazione di Dirac per stati stazionari nel caso di un potenziale centrale,

$$[c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m c^2 + V(r)] \psi(x) = E \psi(x), \quad (5.26)$$

conviene innanzi tutto farne una riduzione a spinori a due componenti, ossia scrivere

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

per ottenere, con passaggi analoghi a quelli del paragrafo 4.5, in rappresentazione di Dirac

$$\begin{cases} c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi(x) = (E - V - m c^2) \chi(x), \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi(x) = (E - V + m c^2) \varphi(x). \end{cases} \quad (5.28)$$

È conveniente scrivere la  $\chi(x)$  e la  $\varphi(x)$  mediante le seguenti fattorizzazioni:

$$\begin{cases} \chi = g(r) \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}, \\ \varphi = i f(r) \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}, \end{cases} \quad (5.29)$$

dove le funzioni  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell}$  sono le funzioni ortonormali di angolo-spin (autofunzioni di  $\vec{J}^2$ ,  $J_3$ ,  $\vec{L}^2$ ,  $\vec{S}^2$ )

$$\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell} = \sum_{m_\ell, m_s} \langle \ell m_\ell s m_s | j j_3 \rangle Y_{\ell, m_\ell} \chi_{s, m_s}. \quad (5.30)$$

Quando sostituiamo le (5.29) nelle (5.28) dobbiamo saper valutare il risultato dell'applicazione dell'operatore  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  sugli spinori  $\chi$  e  $\varphi$ . Riscriviamo allora quest'operatore nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}), \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) &= \vec{r} \cdot \vec{p} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = -i \hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left( -i \hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Si ottiene quindi, per esempio,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi &= i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left( -\hbar r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) \varphi = i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left( -\hbar r \frac{\partial}{\partial r} - \hbar (1 - \kappa) \right) \varphi \\ &= \hbar \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi} \left( \frac{df}{dr} + \frac{(1 - \kappa)}{r} f \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Notiamo ora che il risultato dell'applicazione dell'operatore  $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$  (invariante per rotazione di spazio, ma pseudoscalare per riflessione spaziale) sulla funzione  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}$  (autofunzione di  $\vec{J}^2$ ,  $J_3$ ,  $\vec{L}^2$  con autovalori  $\hbar^2 j(j+1)$ ,  $\hbar j_3$ ,  $\hbar^2 \ell_\varphi(\ell_\varphi+1)$ ) dev'essere quello di generare un'autofunzione  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell}$  di  $\vec{J}^2$ ,  $J_3$ ,  $\vec{L}^2$ . Gli autovalori di quest'ultima per  $\vec{J}^2$  e  $J_3$  sono gli stessi della  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}$ , mentre il valore di  $\ell$  deve avere una parità opposta a quella di  $\ell_\varphi$ , a causa del cambiamento di parità indotto dalla natura pseudoscalare di  $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$ . Deve quindi essere  $\ell = \ell_\chi$  (per una dimostrazione analitica di questa proprietà, si veda l'Appendice F). Possiamo allora scrivere

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi} = \eta_1 \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}, \quad (5.33)$$



dove  $\eta_1$  è un fattore di fase (dal momento che le funzioni  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell}$  sono normalizzate e  $(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r})^2 = 1$ ). Analogamente, si deve avere

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r}\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi} = \eta_2\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}. \quad (5.34)$$

Per compatibilità tra le due equazioni (5.33) e (5.34), dev'essere  $\eta_1\eta_2 = +1$ . Definendo opportunamente la fase relativa tra le due funzioni  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}$  e  $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}$ , che è arbitraria, possiamo scegliere  $\eta_1 = \eta_2 = -1$ . Abbiamo quindi

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r}\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi} = -\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}, \quad \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r}\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi} = -\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}. \quad (5.35)$$

Sostituendo la prima di queste espressioni nella (5.32) otteniamo

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi = -\hbar\left(\frac{df}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}f\right)\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}. \quad (5.36)$$

Analogamente si ha

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi = i\hbar\left(\frac{dg}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}g\right)\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}. \quad (5.37)$$

Usando queste relazioni, le equazioni del moto (5.28) diventano

$$\begin{cases} -\hbar c\left(\frac{df}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}f\right) = (E - V - m c^2)g, \\ \hbar c\left(\frac{dg}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}g\right) = (E - V + m c^2)f. \end{cases} \quad (5.38)$$

Il problema è stato quindi ricondotto a quello del calcolo delle funzioni d'onda radiali  $f(r)$  e  $g(r)$ , una volta che sia stata precisata la forma funzionale del potenziale  $V(r)$ . Come si vede, anche nel caso dell'equazione di Dirac, un potenziale centrale consente la separazione nella funzione d'onda tra dipendenza angolare (e di spin) e dipendenza radiale. Una importante differenza con il caso dell'equazione di Schrödinger è che adesso abbiamo due equazioni differenziali radiali accoppiate, anzichè una sola equazione. Normalmente conviene ridefinire le due funzioni radiali come segue:

$$F(r) = r f(r), \quad G(r) = r g(r), \quad (5.39)$$

e quindi si ha

$$\begin{cases} \hbar c\left(\frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r}F\right) = -(E - V - m c^2)G, \\ \hbar c\left(\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r}G\right) = (E - V + m c^2)F. \end{cases} \quad (5.40)$$

## 5.4 Soluzione delle equazioni radiali per un atomo idrogenoide

Utilizziamo ora il formalismo precedente per ricavare lo spettro energetico di un atomo idrogenoide. In questo caso il potenziale centrale è

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{Z e^2}{r}. \quad (5.41)$$

Poniamo

$$z_1 = \frac{m c^2 + E}{\hbar c}, \quad z_2 = \frac{m c^2 - E}{\hbar c}, \quad (5.42)$$

$$\gamma = \frac{Z e^2}{4\pi \hbar c} \equiv Z \alpha,$$

ed introduciamo la variabile adimensionale

$$\rho = \sqrt{z_1 z_2} r. \quad (5.43)$$

Notiamo che  $z_1 z_2 = \frac{(m c^2)^2 - E^2}{(\hbar c)^2} \geq 0$ , perchè consideriamo stati legati.

Le equazioni radiali (5.40) diventano

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} F = \left( \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} - \frac{\gamma}{\rho} \right) G, \\ \frac{dG}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} G = \left( \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} + \frac{\gamma}{\rho} \right) F. \end{cases} \quad (5.44)$$

Dalle equazioni (5.44), per  $\rho \rightarrow \infty$ , si ha

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\rho} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} G, \\ \frac{dG}{d\rho} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} F, \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d^2 F}{d\rho^2} = F, \\ \frac{d^2 G}{d\rho^2} = G, \end{cases} \quad (5.45)$$

con soluzioni asintotiche (per  $\rho \rightarrow \infty$ )

$$F(\rho) \sim \rho^m e^{\pm\rho}, \quad G(\rho) \sim \rho^{m'} e^{\pm\rho}, \quad (5.46)$$

per qualunque valore finito di  $m$  e di  $m'$ . Per uno stato legato, occorre scegliere

$$F(\rho) \sim \rho^m e^{-\rho}, \quad G(\rho) \sim \rho^{m'} e^{-\rho}. \quad (5.47)$$

Studiamo ora il comportamento delle soluzioni a piccolo  $\rho$ . Dalle (5.40), per  $\rho \rightarrow 0$ , si ha

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} F = -\frac{\gamma}{\rho} G, \\ \frac{dG}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} G = \frac{\gamma}{\rho} F. \end{cases} \quad (5.48)$$

Ponendo

$$F \sim c \rho^s, \quad G \sim c' \rho^{s'}, \quad (5.49)$$

otteniamo

$$\begin{cases} c(s - \kappa) \rho^{s-1} = -c' \gamma \rho^{s'-1}, \\ c'(s + \kappa) \rho^{s'-1} = c \gamma \rho^{s-1}. \end{cases} \quad (5.50)$$

Per esempio, dalla prima di queste espressioni si ha

$$\rho^{s-s'} = -\frac{c'}{c} \frac{\gamma}{s - \kappa}. \quad (5.51)$$

Il secondo membro non dipende da  $\rho$  e quindi deve essere  $s = s'$ . Dalle (5.50), moltiplicando membro a membro, si ricava inoltre

$$s^2 - \kappa^2 = -\gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad s = \pm \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}. \quad (5.52)$$

I due integrali

$$\int d\rho |F(\rho)|^2, \quad \int d\rho |G(\rho)|^2$$

devono essere convergenti e quindi  $s > -1/2$ . Questa condizione è incompatibile con il segno negativo nella (5.52), tenendo conto che

$$\kappa^2 - \gamma^2 \geq 1 - (Z\alpha)^2.$$

Dobbiamo quindi scegliere

$$s = +\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}. \quad (5.53)$$

Avendo determinato i comportamenti asintotici delle funzioni  $F$  e  $G$  a piccole e grandi distanze, cerchiamo delle soluzioni nella forma

$$F(\rho) = \rho^s e^{-\rho} \sum_n a_n \rho^n, \quad G(\rho) = \rho^s e^{-\rho} \sum_n b_n \rho^n. \quad (5.54)$$

Sostituendo nelle equazioni (5.44) ed eguagliando i coefficienti dei termini  $\rho^s e^{-\rho} \rho^{n-1}$ , si trovano le relazioni di ricorrenza

$$(s + n - \kappa) a_n - a_{n-1} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n-1} - \gamma b_n, \quad (5.55a)$$

$$(s + n + \kappa) b_n - b_{n-1} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_{n-1} + \gamma a_n. \quad (5.55b)$$

Moltiplicando la (5.55a) per  $z_1$ , la (5.55b) per  $\sqrt{z_1 z_2}$  e sottraendo membro a membro, si ottiene una relazione che coinvolge una sola coppia di coefficienti ( $a_n$  e  $b_n$ ):

$$(z_1 (s + n - \kappa) + \sqrt{z_1 z_2} \gamma) a_n - (\sqrt{z_1 z_2} (s + n + \kappa) - z_1 \gamma) b_n = 0. \quad (5.56)$$

Notiamo ora che le somme  $\sum_n a_n \rho^n$ ,  $\sum_n b_n \rho^n$ , se illimitate, forniscono, per grandi  $\rho$ , un comportamento asintotico del tipo  $e^{2\rho}$ . Infatti, per  $n \rightarrow \infty$ , dalle equazioni (5.55) si ottiene

$$n a_n - a_{n-1} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n-1} - \gamma b_n, \quad (5.57a)$$

$$n b_n - b_{n-1} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_{n-1} + \gamma a_n, \quad (5.57b)$$

e dalla (5.56)

$$b_n = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_n. \quad (5.57c)$$

Dalle equazioni (5.57) si ricava, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{n}, \quad (5.58)$$

e quindi

$$\sum_n a_n \rho^n \sim e^{2\rho} \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (5.59)$$

Analogamente, si ottiene anche

$$\sum_n b_n \rho^n \sim e^{2\rho} \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (5.60)$$

Se le somme  $\sum_n a_n \rho^n$ ,  $\sum_n b_n \rho^n$  fossero illimitate, i comportamenti asintotici delle funzioni  $F(\rho)$ ,  $G(\rho)$  a grandi  $\rho$  sarebbero  $F(\rho) \sim \rho^s e^\rho$ ,  $G(\rho) \sim \rho^s e^\rho$  e quindi non accettabili per stati legati. Ne segue che le due somme (5.54) si devono interrompere a una certa potenza di  $\rho$ . Supponiamo che il primo coefficiente nullo della prima serie sia  $a_{n'+1}$ :

$$a_{n'} \neq 0, \quad a_{n'+1} = 0.$$

Scriviamo le equazioni (5.55) ponendo  $n = n' + 1$ :

$$-a_{n'} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n'} - \gamma b_{n'+1}, \quad (5.61a)$$

$$(s + n' + 1 + \kappa) b_{n'+1} - b_{n'} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_{n'}. \quad (5.61b)$$

Perchè queste equazioni siano compatibili, occorre che  $b_{n'+1} = 0$  e quindi le due serie si interrompano allo stesso ordine, con la relazione

$$a_{n'} = -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n'}. \quad (5.62)$$

Sostituendo questa espressione nella (5.56), scritta per  $n = n'$ , ed eliminando  $b_{n'}$ , si ha

$$2 \sqrt{z_1 z_2} (s + n') = (z_1 - z_2) \gamma. \quad (5.63)$$

| $n'$ | $j$ | $\kappa$ | $\ell$ | $n$ | notazione<br>spettroscopica |
|------|-----|----------|--------|-----|-----------------------------|
| 0    | 1/2 | -1       | 0      | 1   | $1S_{1/2}$                  |
| 0    | 3/2 | -2       | 1      | 2   | $2P_{3/2}$                  |
| 0    | 5/2 | -3       | 2      | 3   | $3D_{5/2}$                  |
| 1    | 1/2 | -1       | 0      | 2   | $2S_{1/2}$                  |
| 1    | 1/2 | +1       | 1      | 2   | $2P_{1/2}$                  |
| 1    | 3/2 | -2       | 1      | 3   | $3P_{3/2}$                  |
| 1    | 3/2 | +2       | 2      | 3   | $3D_{3/2}$                  |
| 2    | 1/2 | -1       | 0      | 3   | $3S_{1/2}$                  |
| 2    | 1/2 | +1       | 1      | 3   | $3P_{1/2}$                  |

} degeneri

} degeneri

} degeneri

Tabella 5.1: Livelli di energia.

Dalla definizione di  $z_1$  e  $z_2$  si ottiene

$$\sqrt{z_1 z_2} = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{(m c^2)^2 - E}, \quad (5.64a)$$

$$z_1 - z_2 = \frac{2E}{\hbar c}, \quad (5.64b)$$

e quindi, sostituendo nella (5.63), si ha

$$E^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2}{(s + n')^2} \right) = (m c^2)^2,$$

ossia

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n' + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2}}}. \quad (5.65)$$

I valori di  $E$  dipendono solo dai numeri quantici  $n'$  e  $|\kappa| = j + 1/2$ ; si ha quindi una degenerazione di ordine 2 dovuta ai due segni di  $\kappa = \pm(j + 1/2)$ , che comportano due diversi valori di  $\ell_\chi$ :

$$\kappa = +(j + 1/2) \quad \Longrightarrow \quad \ell_\chi = j + 1/2, \quad (5.66)$$

$$\kappa = -(j + 1/2) \quad \Longrightarrow \quad \ell_\chi = j - 1/2.$$

Notare che, se  $n' = 0$  si ha solo  $\kappa < 0$ ; infatti, dalla (5.55b) e dalla (5.62), per  $n' = 0$  si ha

$$\left. \begin{aligned} (s + \kappa) b_0 &= \gamma a_0, \\ a_0 &= -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_0, \end{aligned} \right\} \Longrightarrow s + \kappa = -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \gamma. \quad (5.67)$$

Essendo  $s > 0$ , deve essere  $\kappa < 0$ .

I livelli vengono abitualmente contraddistinti dalla notazione spettroscopica che fa uso dei numeri quantici  $n, \ell_\chi, j$ , dove  $n$  (numero quantico principale) è definito come

$$n = n' + |\kappa| = n' + \left( j + \frac{1}{2} \right). \quad (5.68)$$

I livelli di energia più bassa sono elencati nella Tabella 5.1 (con  $\ell = \ell_\chi$ ).

Sviluppando la (5.65) in serie nel parametro  $\alpha^2$  si trova

$$E = m c^2 \left[ 1 - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(Z \alpha)^2}{n^2}}_{\text{Balmer}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(Z \alpha)^4}{n^3} \left( \frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right)}_{\text{termine di struttura fine}} + O(\alpha^6) \right]. \quad (5.69)$$

Lo schema dei livelli energetici più bassi dell'atomo di idrogeno è illustrato in Fig.5.1. Lo spettro completo è comunque confinato nella banda energetica  $0 \leq E \leq m c^2$  di Fig.5.2.

### ► Struttura fine

Il termine di ordine  $\alpha^4$  nell'espressione (5.69) rappresenta la cosiddetta separazione di struttura fine: a parità di  $n$ , sono più bassi nella scala energetica gli stati con  $j$  minore. Questo termine rimuove in parte la degenerazione dello spettro non-relativistico per gli atomi idrogenoidi.

L'entità della separazione tra stati con uguale  $n$  e diverso  $j$ , per  $Z = 1$ , è data da

$$\begin{aligned} \Delta E &= m c^2 \frac{1}{2} \frac{\alpha^4}{n^3} \left( \frac{1}{j_{\min} + 1/2} - \frac{1}{j_{\max} + 1/2} \right) \\ &= m c^2 \frac{1}{2} \frac{\alpha^4}{n^3} \frac{j_{\max} - j_{\min}}{(j_{\min} + 1/2)(j_{\max} + 1/2)}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \Delta E(2P) &\equiv E(2P_{3/2}) - E(2P_{1/2}) = \frac{\alpha^4}{2^5} m c^2 \\ &= 8.87 \times 10^{-11} m c^2 = 4.53 \times 10^{-5} \text{ eV}, \end{aligned} \quad (5.71a)$$

$$\nu(2P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\Delta E}{2\pi \times 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV sec}} = 11 \text{ GHz}. \quad (5.71b)$$

### ► Struttura iperfine

Nella trattazione degli atomi idrogenoidi precedentemente adottata, l'interazione tra il nucleo e l'elettrone è stata semplicemente descritta mediante il potenziale coulombiano  $V = -\frac{Ze^2}{4\pi r}$ . È stata in particolare trascurata l'interazione magnetica tra il momento di dipolo magnetico del nucleo e quello dell'elettrone. Introduciamo ora questo termine di

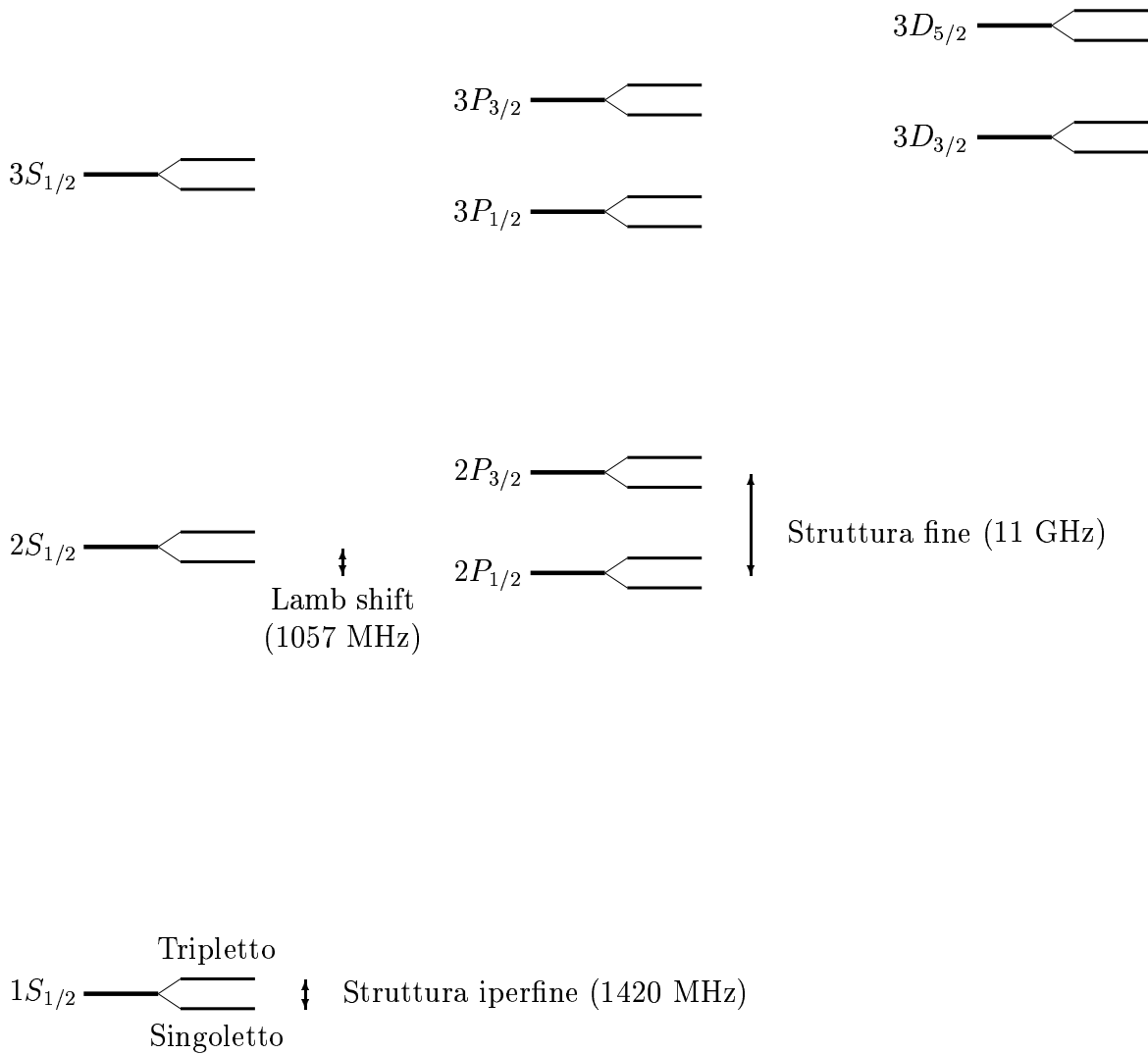


Figura 5.1: Livelli energetici più bassi dell'atomo di idrogeno.

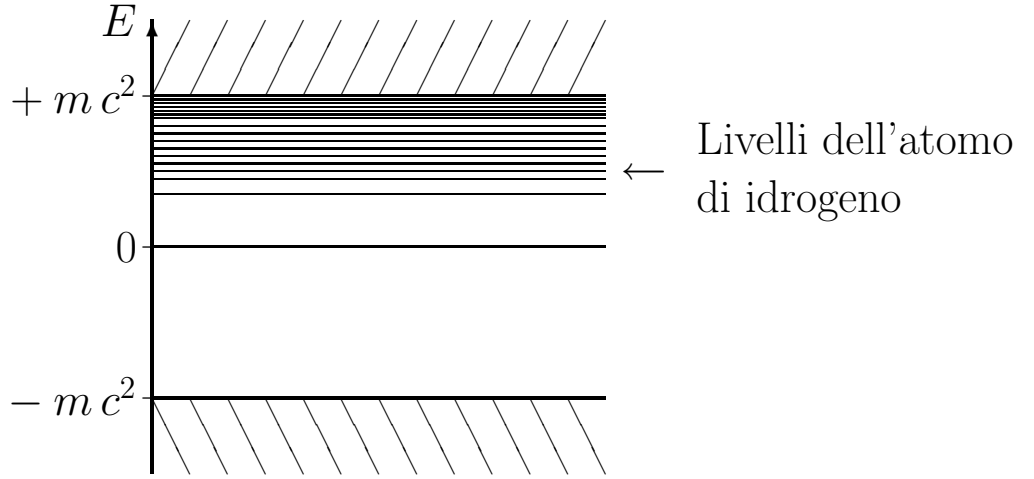


Figura 5.2: Banda energetica dell'atomo di idrogeno.

accoppiamento nel caso dell'atomo di idrogeno. Si può dimostrare che l'hamiltoniana di interazione è<sup>1</sup>

$$H^{\text{hf}} = -\frac{2}{3} \vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p |\psi_n(0)|^2, \quad (5.72)$$

dove  $\psi_n(0)$  è la funzione d'onda dell'elettrone nell'origine,  $\vec{\mu}_e$  è il momento di dipolo magnetico dell'elettrone (vedi la formula (4.50)) e  $\vec{\mu}_p$  è il momento di dipolo magnetico del protone

$$\vec{\mu}_p = (1 + a_p) \frac{|e| \hbar}{2 m_p c} \vec{\sigma}_p. \quad (5.73)$$

$m_p$  è la massa del protone e  $a_p = 1.79$  è il momento anomalo di dipolo magnetico del protone in unità di magnetoni nucleari; un magnetone nucleare  $\mu_N$  è dato da

$$\mu_N \equiv \frac{|e| \hbar}{2 m_p c} = 3.15 \times 10^{-18} \text{ MeV gauss}^{-1}. \quad (5.74)$$

Per la funzione d'onda  $\psi_n$  possiamo utilizzare l'espressione non-relativistica, e quindi

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3 n^3}, \quad \text{dove } a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m c} \text{ è il raggio di Bohr.} \quad (5.75)$$

Perciò otteniamo

$$H^{\text{hf}} = \frac{2}{3} (1 + a_p) \frac{1}{n^3} \frac{m}{m_p} m c^2 \alpha^4 \vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p. \quad (5.76)$$

Tenendo conto che

$$\vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p = \begin{cases} 1 & \text{tripletto,} \\ -3 & \text{singoletto,} \end{cases} \quad (5.77)$$

<sup>1</sup>Per la dimostrazione di questa formula vedi Sakurai, pag.130.



si ha

$$\begin{aligned}\Delta E_{n=1}^{\text{hf}}(\text{trip-sing}) &= \frac{8}{3}(1+a_p)\frac{m}{m_p}m c^2 \alpha^4 \\ &= 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV},\end{aligned}\tag{5.78a}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\Delta E}{2\pi \times 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV sec}} \frac{\text{GHz}}{10^9 \text{ sec}^{-1}} = 1.42 \text{ GHz}.\tag{5.78b}$$

Notare il fattore di riduzione  $m/m_p$  (parzialmente compensato da coefficienti numerici) rispetto al termine di struttura fine.

### ► Lamb shift

La degenerazione prevista dalla teoria di Dirac tra gli stati di uguale  $n$  e uguale  $j$  non si verifica in natura. L'effetto di eliminazione della degenerazione, detto *Lamb shift*, può essere calcolato accuratamente nell'ambito della elettrodinamica quantistica.

# Capitolo 6

## Coniugazione di carica

### 6.1 Mare di Dirac

Un atomo in uno stato eccitato transisce allo stato fondamentale emettendo radiazione. In presenza del continuo di stati ad energia negativa con valori compresi tra  $-mc^2$  e  $-\infty$ , un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno con energia  $mc^2 - E_{\text{leg}}$  potrebbe transire indefinitamente a stati di energia inferiore. Perciò, nel 1930 Dirac formulò la seguente ipotesi: *tutti gli stati ad energia negativa sono occupati*, per cui la stabilità dell'atomo è garantita dal principio di Pauli. Il sistema fisico costituito dall'occupazione completa di tutti gli stati di particella singola ad energia negativa viene chiamato *mare di Dirac*. Nella scala di energia finora adottata, il mare di Dirac ha un'energia infinita negativa. Possiamo però interpretare il mare di Dirac come *stato di vuoto* e ridefinire la scala di energia, associando a questo stato di vuoto il valore di zero.

Consideriamo ora lo stato fisico che si ottiene sottraendo dal mare di Dirac un elettrone di energia  $-\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E} > 0$ ), ossia creando una lacuna nel mare di Dirac, e calcoliamone l'energia. Nella consueta scala di energia si ha

$$E = E_{\text{vuoto}} - (-\mathcal{E}) = E_{\text{vuoto}} + \mathcal{E}, \quad (6.1)$$

dove  $E_{\text{vuoto}}$  è l'energia associata al mare di Dirac. La ridefinizione della scala di energia equivale ad associare allo stato del mare di Dirac con una lacuna il valore di energia (osservata)

$$E_{\text{oss}} = E - E_{\text{vuoto}} = \mathcal{E}. \quad (6.2)$$

Procedendo in modo analogo per la carica, si ha

$$Q = Q_{\text{vuoto}} - e = Q_{\text{vuoto}} + |e|, \quad (6.3)$$

$$Q_{\text{oss}} = Q - Q_{\text{vuoto}} = |e|. \quad (6.4)$$

Quindi lo stato (ad infinite particelle) costituito dal mare di Dirac con una lacuna di elettrone nel livello energetico  $-\mathcal{E}$  può essere interpretato come stato di particella (denominata *positrone*) in un livello energetico  $\mathcal{E}$  e con carica  $-e = |e|$ . La massa del positrone dev'essere uguale a quella dell'elettrone. Il positrone viene anche chiamato *antiparticella* dell'elettrone oppure sua *coniugata di carica*. Particelle con le proprietà del positrone vennero scoperte nei raggi cosmici da Carl Anderson nel 1932.

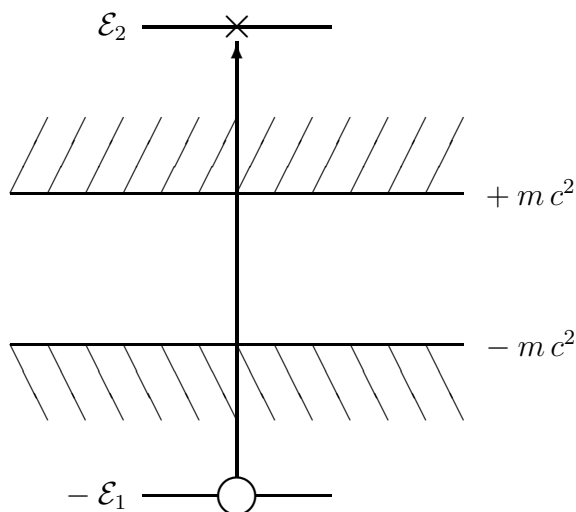


Figura 6.1: Transizione di un elettrone da uno stato di energia negativa ad uno stato di energia positiva

La rimozione di un elettrone da uno stato di energia negativa  $-\mathcal{E}_1$  del mare di Dirac ad uno stato di energia positiva  $\mathcal{E}_2$  può avvenire per esempio ad opera di un fotone di energia  $E = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1$  (vedi Fig.6.1).

Secondo quanto visto precedentemente possiamo descrivere questo processo dicendo che il fotone ha creato una coppia elettrone-positrone con energie (positive)  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_1$  rispettivamente, ossia schematicamente

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+. \quad (6.5)$$

La conservazione dell'energia-momento impedisce che questo processo, con le tre particelle tutte sul loro shell di massa, si realizzi nello spazio libero. Infatti, per il processo

$$\gamma(k) \rightarrow e^-(p_1) + e^+(p_2) \quad (6.6)$$

le relazioni di conservazione di energia-impulso e quelle di shell di massa si scrivono

$$k = p_1 + p_2, \quad k^2 = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2. \quad (6.7)$$

Queste, nel sistema di riposo dell'elettrone ( $\vec{p}_1 = 0$ ), diventano

$$k^0 = p_1^0 + p_2^0, \quad (6.8a)$$

$$\vec{k} = \vec{p}_2, \quad (6.8b)$$

$$k^0 = |\vec{k}|, \quad (6.8c)$$

$$p_1^0 = m, \quad (6.8d)$$

$$p_2^0 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (6.8e)$$

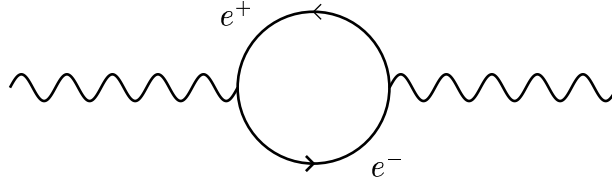


Figura 6.2: Creazione di una coppia virtuale  $e^+e^-$ .

Queste relazioni sono incompatibili, come si vede sostituendo le ultime tre nella prima. Per mantenere la condizione di conservazione di energia-impulso nel vertice di interazione occorre rimuovere la condizione di shell di massa per almeno una delle tre particelle confluenti nel vertice. Questo è quanto avviene in diagrammi con più vertici di interazione, dove le particelle che collegano detti vertici sono particelle *virtuali* (fuori dallo shell di massa).

La creazione di coppie (6.5) può avvenire per esempio nel campo coulombiano di un nucleo; in questo caso uno dei due leptoni viene creato come particella virtuale e diviene elettrone fisico a seguito dell'interazione con il campo coulombiano.

È possibile anche avere il processo inverso del processo (6.5), ossia il processo di annichilazione

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow \dots, \quad (6.9)$$

o anche

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma. \quad (6.10)$$

Queste reazioni vengono per esempio prodotte ai collisionatori elettrone-positrone.

### ► Polarizzazione del vuoto

Secondo quanto visto precedentemente un fotone è soggetto a processi del tipo descritto in Fig.6.2, nei quali una coppia  $e^+e^-$ , creata in modo virtuale dal fotone, si annichila rigenerando il fotone stesso. Ciò implica che l'interazione protone-elettrone (mediata da fotoni) nell'atomo di idrogeno risente della presenza delle coppie virtuali  $e^+e^-$  dovute ai processi di Fig.6.2. È come se l'interazione  $p-e^-$  anziché avvenire nel vuoto, avesse luogo in un mezzo polarizzabile: la carica positiva del protone respinge i positroni virtuali ed attira gli elettroni virtuali (vedi Fig.6.3). Si genera quindi un effetto di parziale schermatura della carica vera (*nuda*) del protone da parte degli elettroni virtuali. L'elettrone dell'atomo di idrogeno risente di questo effetto di schermatura della carica nuda del protone in maggiore o in minore misura a seconda dell'orbita quantistica su cui si trova: la carica elettrica del nucleo "vista" dall'elettrone è più grande a piccole distanze (orbite interne), che non a grandi distanze (orbite esterne), e gli stati  $S$  si abbassano per questo effetto. La polarizzazione del vuoto induce per esempio una separazione  $E(2P_{1/2}) - E(2S_{1/2}) = 27$  MHz tra i livelli  $2S_{1/2}$  e  $2P_{1/2}$ . Quest'effetto, calcolato da Uehling nel 1935, elimina quindi la degenerazione tipica dello spettro dell'atomo di idrogeno in teoria di Dirac. Tuttavia, come si ricava in elettrodinamica quantistica, altri effetti oltre a quello della polarizzazione del vuoto contribuiscono (in maniera più rilevante e con segno opposto) al Lamb shift.

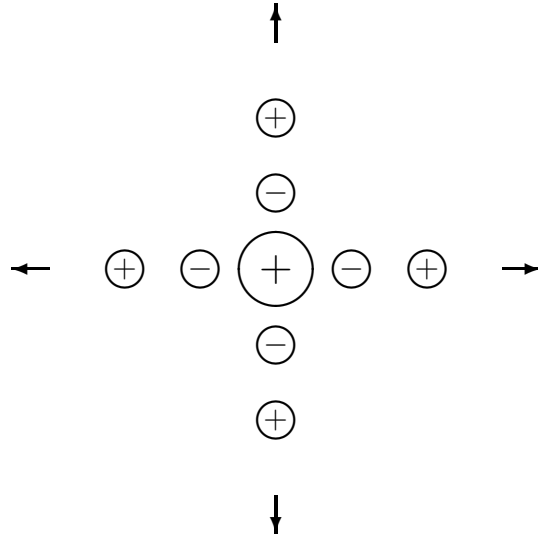


Figura 6.3: Polarizzazione del vuoto

## 6.2 Coniugazione di carica

Secondo la teoria di Dirac, elettroni e positroni (che hanno massa uguale e carica elettrica opposta) devono soddisfare allo stesso tipo di equazione del moto. Per l'elettrone vale l'equazione

$$(i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi(x) = 0. \quad (6.11)$$

Quindi per il positrone deve valere l'equazione

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m) \psi^c(x) = 0. \quad (6.12)$$

Per determinare la funzione  $\psi^c(x)$  prendiamo l'equazione aggiunta della (6.11),

$$-i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - e \bar{\psi} \not{A} - m \bar{\psi} = 0,$$

e trasponiamo,

$$-i \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \tilde{\bar{\psi}} - e \tilde{\gamma}^\mu A_\mu \tilde{\bar{\psi}} - m \tilde{\bar{\psi}} = 0.$$

Se introduciamo una matrice  $\mathcal{C}$  tale che

$$\mathcal{C} \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu, \quad (6.13)$$

otteniamo

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m) \mathcal{C} \tilde{\bar{\psi}}(x) = 0. \quad (6.14)$$

Confrontando questa equazione con la (6.12) deduciamo che il positrone è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi^c(x) = \eta_c \mathcal{C} \tilde{\bar{\psi}}(x), \quad (6.15)$$

dove  $\eta_c$  è un fattore di fase ( $|\eta_c| = 1$ ) costante che dipende dalla natura della particella. Nella rappresentazione di Dirac si ha

$$\mathcal{C} = i \gamma^2 \gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Esempio: un elettrone in uno stato con energia negativa e spin in su è descritto (nel sistema di riposo) dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Poichè

$$\tilde{\psi} = \tilde{\gamma}^0 \psi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\psi^c = -i\eta_c e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\eta_c e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Quindi, in questo caso,  $\psi^c$  descrive una particella (di carica  $|e|$ ) con energia positiva e spin in giù.

### ► Parità relativa particella–antiparticella

Per particelle di spin  $1/2$ , particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte. Infatti, nel sistema di riposo, si ha

- per energie positive

$$\psi_+^{(r)}(x) = e^{-imt} \begin{pmatrix} \chi^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

con

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (6.20)$$

- per energie negative

$$\psi_-^{(r)}(x) = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Per riflessioni spaziali

$$\psi \xrightarrow{P} \psi' = \gamma^0 \psi \implies \begin{cases} \psi_+^{(r)}(x) \xrightarrow{P} +\psi_+^{(r)}(x), \\ \psi_-^{(r)}(x) \xrightarrow{P} -\psi_-^{(r)}(x). \end{cases} \quad (6.22)$$

Per la corrispondenza discussa precedentemente tra lacune in stati di energie negative ed antiparticelle in stati di energie positive discende che elettrone e positrone hanno parità intrinseche opposte.

Le proprietà viste in questo capitolo indicano che una teoria quantistica ad una sola particella non può essere una teoria consistente, come indicato per esempio dagli effetti virtuali di creazione e di annichilazione di particelle. Il formalismo adeguato per trattare in modo sistematico i processi fisici dell'elettrodinamica è quello della teoria dei campi, con l'introduzione di campi quantizzati che creano e distruggono particelle e antiparticelle.

# Capitolo 7

## Spinori chirali

### 7.1 Autofunzioni dell'operatore chiralità

La matrice  $\gamma^5$  è detta operatore di chiralità. Poichè l'operatore  $\gamma^5$  è hermitiano esso è diagonalizzabile; dalla proprietà  $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$  segue che gli autovalori di  $\gamma^5$  sono  $\pm 1$ . Indichiamo con  $\psi_L$  e  $\psi_R$  le autofunzioni di  $\gamma^5$  con autovalori  $+1$  e  $-1$ , rispettivamente; ossia,

$$\gamma^5 \psi_L = + \psi_L, \quad (7.1a)$$

$$\gamma^5 \psi_R = - \psi_R. \quad (7.1b)$$

A partire da uno spinore generico  $\psi$  è possibile generare le due autofunzioni di  $\gamma^5$  nel modo seguente:

$$\psi_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi, \quad (7.2a)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi, \quad (7.2b)$$

come si può immediatamente verificare.

Uno spinore qualsiasi  $\psi$  può essere scomposto nella somma

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (7.3)$$

Conviene definire due operatori di proiezione di chiralità:

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (7.4a)$$

$$P_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad (7.4b)$$

che soddisfano alle proprietà

$$P_L + P_R = \mathbb{1}, \quad (7.5a)$$

$$(P_L)^2 = P_L, \quad (7.5b)$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (7.5c)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0. \quad (7.5d)$$

►  $\psi_L$  e  $\psi_R$  in rappresentazione chirale

La rappresentazione chirale delle matrici  $\gamma$  è definita come la rappresentazione in cui  $\gamma^5$  è diagonale:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

In questa rappresentazione la forma esplicita degli operatori di proiezione di chiralità è particolarmente semplice:

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.7a)$$

$$P_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.7b)$$

Scrivendo un generico spinore  $\psi$  come

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

dove  $\chi_1$  e  $\chi_2$  sono spinori a due componenti, per le autofunzioni (7.2) dell'operatore chiralità si ha

$$\psi_L = P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.9a)$$

$$\psi_R = P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (7.9b)$$

Conviene quindi usare le definizioni

$$\chi_L \equiv \chi_1, \quad \chi_R \equiv \chi_2, \quad (7.10)$$

per cui

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

► **Equazioni del moto per  $\psi_L$  e  $\psi_R$**

Se  $\psi$  è una generica soluzione dell'equazione di Dirac libera, abbiamo

$$\begin{aligned} i \not{\partial} \psi_L &\equiv i \not{\partial} \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \frac{1 - \gamma^5}{2} i \not{\partial} \psi \\ &= \frac{1 - \gamma^5}{2} m \psi \equiv m \psi_R, \end{aligned} \quad (7.13)$$

e analogamente

$$i \not{\partial} \psi_R = m \psi_L. \quad (7.14)$$



Queste sono le due equazioni del moto per  $\psi_L$  e  $\psi_R$ . Esse sono accoppiate dal termine di massa e si disaccoppiano solo se  $m = 0$ . Tale proprietà è da mettersi in relazione con il fatto che la chiralità è un buon numero quantico (ossia  $\gamma^5$  commuta con l'hamiltoniana di Dirac  $\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ ) solo se  $m = 0$ ; infatti,

$$[\gamma^5, \alpha^k] = 0, \quad [\gamma^5, \beta] = 2\gamma^5\beta \neq 0. \quad (7.15)$$

Poichè per una particella di spin 1/2 con  $m = 0$  le equazioni del moto (7.13) e (7.14) per gli spinori  $\psi_L$  e  $\psi_R$  sono disaccoppiate, in questo caso è possibile che per la descrizione della particella sia sufficiente solo uno dei due spinori,  $\psi_L$  o  $\psi_R$ .

### ► Valore medio dell'elicità nello stato descritto dallo spinore $u_L$

L'interazione debole è responsabile di numerosi processi di decadimento come

- il decadimento del muone

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e, \quad (7.16)$$

- il decadimento di pioni carichi in muoni e neutrini

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (7.17)$$

- il decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (7.18)$$

- i decadimenti  $\beta$  nucleari

$$\underbrace{\mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e}_{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \text{ nel nucleo } \mathcal{N}} \quad (\text{decadimento } \beta^-), \quad (7.19)$$

$$\underbrace{\mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu_e}_{p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \text{ nel nucleo } \mathcal{N}; \text{ questo processo è energeticamente impossibile per protoni liberi}} \quad (\text{decadimento } \beta^+); \quad (7.20)$$

Dalle osservazioni sperimentali di numerosi processi di decadimento  $\beta$  si è visto che

- nei decadimenti  $\beta^-$  vengono sempre emessi un elettrone con valore medio dell'elicità  $= -v_e/c$  e un antineutrino elettronico con elicità  $= +1$ ;
- nei decadimenti  $\beta^+$  vengono sempre emessi un positrone con valore medio dell'elicità  $+v_e/c$  e un neutrino elettronico con elicità  $= -1$ .

Queste proprietà implicano che nei decadimenti  $\beta$  la *violazione della parità è massima* e che l'elettrone e il neutrino partecipano a questi processi con lo spinore (nello spazio degli impulsi)

$$u_L \equiv P_L u \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} u. \quad (7.21)$$

Per verificare questa proprietà, calcoliamo il valore medio dell'elicità dell'elettrone nello stato descritto dallo spinore  $u_L$ :

$$\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle_L = \frac{\sum_r u_L^{(r)\dagger}(p_e) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} u_L^{(r)}(p_e)}{\sum_r u_L^{(r)\dagger}(p_e) u_L^{(r)}(p_e)}. \quad (7.22)$$

Calcoliamo il numeratore della (7.22), tenendo conto che  $[\vec{\Sigma}, \gamma^5] = 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{numeratore} &= \frac{1}{4} \sum_r u^{(r)\dagger}(p_e) (1 + \gamma^5) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) u^{(r)}(p_e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_r u^{(r)\dagger}(p_e) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) u^{(r)}(p_e) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) \sum_r u^{(r)}(p_e) u^{(r)\dagger}(p_e) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) \frac{\not{p}_e + m_e}{2m_e} \gamma^0 \right]. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Essendo  $\vec{\Sigma} = -\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5$ , per il numeratore della (7.22) si ottiene

$$\begin{aligned} \text{numeratore} &= \frac{1}{4 m_e} \frac{p_e^k}{|\vec{p}_e|} \text{Tr} [\Sigma^k (1 + \gamma^5) (\not{p}_e + m_e) \gamma^0] \\ &= \frac{1}{4 m_e} \frac{p_e^k}{|\vec{p}_e|} \text{Tr} [(-\gamma^k) (1 + \gamma^5) (\not{p}_e + m_e)] \\ &= -\frac{1}{4 m_e} \frac{p_e^k}{|\vec{p}_e|} \left\{ \underbrace{\text{Tr}[\gamma^k \not{p}_e]}_{4p_e^k} - \underbrace{\text{Tr}[\gamma^k \not{p}_e \gamma^5]}_0 \right\} = -\frac{|\vec{p}_e|}{m_e}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Calcoliamo ora il denominatore della (7.22):

$$\begin{aligned} \text{denominatore} &= \frac{1}{4} \sum_r u^{(r)\dagger}(p_e) (1 + \gamma^5) (1 + \gamma^5) u^{(r)}(p_e) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (1 + \gamma^5) \sum_r u^{(r)}(p_e) u^{(r)\dagger}(p_e) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (1 + \gamma^5) \frac{\not{p}_e + m_e}{2m_e} \gamma^0 \right] = \frac{1}{4 m_e} \text{Tr} [\not{p}_e \gamma^0] = \frac{E_e}{m_e}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Quindi, per il valor medio dell'elicità dell'elettrone si ottiene

$$\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle_L = -\frac{|\vec{p}_e|}{E_e} = -\frac{v_e}{c} \quad (\text{in unità ordinarie}). \quad (7.26)$$

Analogamente, si ottiene che il valore medio dell'elicità in uno stato descritto dallo spinore

$$u_R \equiv P_R u \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} u \quad (7.27)$$

è

$$\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle_R = +\frac{v_e}{c}. \quad (7.28)$$

Se vi fosse conservazione della parità nel decadimento  $\beta^-$ , l'elettrone sarebbe descritto dallo spinore completo  $u = u_L + u_R$  ed il valore medio dell'elicità sarebbe nullo. Dal fatto che sperimentalmente si osserva  $\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle = -\frac{v_e}{c}$  (che è uno dei due valori estremi  $\pm v_e/c$ ), si deduce che nel processo in esame non solo si ha violazione di parità, ma anche che questa violazione è massima.

## 7.2 Proprietà di elicità per $m = 0$

L'equazione di Dirac per  $m = 0$  può essere scritta come

$$\left( i \gamma^0 \partial_0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi = 0. \quad (7.29)$$

Moltiplicandola a sinistra per  $\gamma^5 \gamma^0$  si ha

$$-i \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi = i \gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi,$$

ossia, utilizzando la definizione  $\vec{\Sigma} = -\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5$ ,

$$i \vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla} \psi = \gamma^5 i \partial_0 \psi. \quad (7.30)$$

Sostituendo

$$\psi(x) = e^{-ip \cdot x} u(p) \quad (p^0 = +|\vec{p}|), \quad (7.31)$$

si ottiene

$$\boxed{-\underbrace{\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}}_{\text{operatore di elicità}} u(p) = \underbrace{\gamma^5}_{\text{operatore di chiralità}} u(p)}. \quad (7.32)$$

Quindi le autofunzioni dell'operatore di chiralità sono anche autofunzioni dell'operatore elicità, con autovalori di segno opposto per soluzioni ad energia positiva (per soluzioni ad energia negativa,  $p^0 = -|\vec{p}|$ , gli autovalori sono identici).

### 7.3 Equazioni di Weyl

Nella rappresentazione chirale si ha

$$\vec{\Sigma} = -\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

e quindi l'eq.(7.30) si scrive

$$\begin{pmatrix} i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \\ 0 & i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}. \quad (7.34)$$

Da questa equazione si ottengono le due equazioni disaccoppiate

$$\boxed{i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_L = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_L}, \quad (7.35a)$$

$$\boxed{-i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_R = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_R}. \quad (7.35b)$$

Queste sono le *equazioni di Weyl* e gli spinori a due componenti  $\chi_L$  e  $\chi_R$ , loro soluzioni, sono detti *spinori di Weyl*.

Sostituendo nelle (7.35)

$$\chi_{L,R}(x) = e^{-ip \cdot x} \chi_{L,R}(p), \quad (7.36)$$

si ottiene

$$-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_L(p) = p^0 \chi_L(p), \quad (7.37a)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_R(p) = p^0 \chi_R(p). \quad (7.37b)$$

Queste equazioni implicano che

$$p_0^2 \chi_{L,R}(p) = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \chi_{L,R}(p) = \vec{p}^2 \chi_{L,R}(p), \quad (7.38)$$

da cui segue che  $p_0 = \pm|\vec{p}|$ . Quindi (vedi la Fig.7.1a)

$$\begin{aligned} \chi_L(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } -1 \text{ (sinistrorsa) per } p_0 = +|\vec{p}|, \\ \chi_L(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } +1 \text{ (destrorsa) per } p_0 = -|\vec{p}|, \end{aligned}$$

mentre (vedi la Fig.7.1b)

$$\begin{aligned} \chi_R(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } +1 \text{ (destrorsa) per } p_0 = +|\vec{p}|, \\ \chi_R(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } -1 \text{ (sinistrorsa) per } p_0 = -|\vec{p}|. \end{aligned}$$

### 7.4 Neutrini e antineutrini

Per particelle con  $m \neq 0$  l'elicit\`a non \`e una grandezza Lorentz-invariante. Infatti, per esempio, mediante una trasformazione di Lorentz che manda  $\vec{p}$  in  $-\vec{p}$ , si pu\`o cambiare il segno dell'elicit\`a della particella. Questa operazione non \`e possibile per particelle di

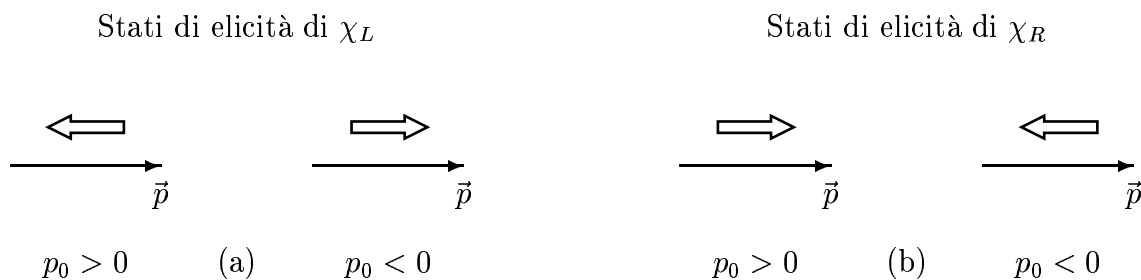


Figura 7.1: Stati di elicità di  $\chi_L$  e  $\chi_R$ .

massa nulla, che si propagano con la velocità della luce; per queste particelle l'elicità è quindi una grandezza Lorentz-invariante.

I neutrini sono particelle neutre con spin  $1/2$  e massa talmente piccola che finora non è stata misurata direttamente<sup>1</sup>. Perciò, in prima approssimazione è possibile considerare i neutrini come particelle a massa nulla. In questo caso i neutrini soddisfano alle equazioni di Weyl e possono essere descritti da spinori a due componenti  $\chi_L$  o  $\chi_R$  (che, attraverso l'eq.(7.11), sono equivalenti agli spinori a quattro componenti  $\psi_L$  e  $\psi_R$ ). Per stabilire quale di queste soluzioni sia realizzata in natura, occorre fare ricorso ai risultati sperimentali sullo studio dei processi deboli. Dalle misure di elicità dei leptoni emessi nei decadimenti  $\beta$  nucleari risulta che i neutrini, emessi nei processi  $\beta^+$  unitamente ai positroni, hanno elicità  $= -1$ . Pertanto i neutrini devono essere associati a spinori sinistrorsi  $\chi_L$ , con i seguenti valori di elicità:

$$\begin{aligned}
 \nu \text{ con } E > 0 & \implies \text{elicità} = -1 \\
 \nu \text{ con } E < 0 & \implies \text{elicità} = +1
 \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, in generale, per una particella di Dirac si ha

|                            | energia | impulso    | spin  | elicità   |
|----------------------------|---------|------------|---|---|
| particella con $E < 0$     | $- E $  | $\vec{p}$  | $\frac{\hbar}{2} \langle \vec{\Sigma} \rangle$  | $\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{ \vec{p} } \right\rangle$ |
| antiparticella con $E > 0$ | $+ E $  | $-\vec{p}$ | $-\frac{\hbar}{2} \langle \vec{\Sigma} \rangle$ | $\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{ \vec{p} } \right\rangle$ |

Ne segue che, se si associa ad un neutrino con energia  $E > 0$  un valore di elicità  $-1$ , allora occorre associare ad un antineutrino ( $\bar{\nu}$ ) con energia  $E > 0$  un valore di elicità  $+1$ .

Quindi  $\nu$  e  $\bar{\nu}$ , oltre ad essere differenziati da valori opposti di numero leptonico, sono anche caratterizzati da valori opposti di elicità (e di chiralità).

<sup>1</sup>Sappiamo però che le masse dei neutrini non sono nulle perchè esse sono responsabili del fenomeno di oscillazione dei neutrini osservato sperimentalmente.

## 7.5 Operazioni $C$ , $P$ , $T$ sulle equazioni di Weyl

Studiamo ora le proprietà di trasformazione delle equazioni di Weyl per le trasformazioni discrete  $C$ ,  $P$ ,  $T$ .

### ► Inversione spaziale

La trasformazione dello spinore  $\psi(x)$  per l'operazione di inversione spaziale  $x = (t, \vec{x}) \xrightarrow{P} x' = (t, -\vec{x})$  è data da

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x') = \gamma^0 \psi(x), \quad (7.39)$$

dove è stato ommesso un possibile fattore di fase  $\eta_P$ . Scrivendo la (7.39) in rappresentazione chirale, si ha

$$\begin{pmatrix} \chi_L(x) \\ \chi_R(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} \chi'_L(x') \\ \chi'_R(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L(x) \\ \chi_R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ \chi_L(x) \end{pmatrix}, \quad (7.40)$$

e quindi, per inversione spaziale,

$$\chi_L(x) \xleftrightarrow{P} \chi_R(x). \quad (7.41)$$

Questa proprietà di trasformazione può essere immediatamente verificata mediante le configurazioni illustrate in Fig.7.1, tenendo conto che l'impulso è un vettore polare e lo spin un vettore assiale.

Per l'operazione di inversione spaziale le due equazioni di Weyl (7.35) si trasformano l'una nell'altra. Per esempio, la (7.35a),

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_L(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_L(x). \quad (7.42)$$

diventa

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}' \chi'_L(x') = i \frac{\partial}{\partial t} \chi'_L(x'). \quad (7.43)$$

Poichè

$$\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}, \quad \chi'_L(x') = \chi_R(x), \quad (7.44)$$

si ottiene

$$-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_R(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_R(x), \quad (7.45)$$

che coincide con la (7.35b). Analogamente, per trasformazione  $P$  la (7.35b) si trasforma nella (7.35a).

Quindi, le singole equazioni di Weyl non sono invarianti per l'operatore  $P$ , ma si trasformano l'una nell'altra.

### ► Coniugazione di carica

La trasformazione dello spinore  $\psi(x)$  per l'operazione di coniugazione di carica è data da

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c = \mathcal{C} \tilde{\psi}, \quad (7.46)$$

dove è stato omesso un possibile fattore di fase  $\eta_C$ . Nella rappresentazione chirale

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (7.47)$$

e, scrivendo  $\psi(x)$  nella forma (7.12), per  $\widetilde{\psi}$  si ha

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\gamma}^0 \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L^* \\ \chi_R^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R^* \\ \chi_L^* \end{pmatrix}, \quad (7.48)$$

per cui

$$\psi^c = \mathcal{C} \widetilde{\psi} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_R^* \\ \chi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 \chi_R^* \\ -i\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

Combinando le operazioni di coniugazione di carica e inversione spaziale si ottiene

$$\psi \xrightarrow{P} \psi^P(x') = \gamma^0 \psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ \chi_L(x) \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

$$\psi(x) \xrightarrow{CP} \mathcal{C} \widetilde{\psi^P}(x') = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \chi_L^*(x) \\ \chi_R^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 \chi_L^*(x) \\ -i\sigma^2 \chi_R^*(x) \end{pmatrix}. \quad (7.51)$$

Le equazioni di Weyl sono invarianti per l'operazione  $CP$ . Per esempio, per  $CP$  la (7.42) assume la forma (7.43) con

$$\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}, \quad \chi_L'(x') = \text{costante} \times \sigma^2 \chi_L^*(x), \quad (7.52)$$

cioè

$$-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \sigma^2 \chi_L^*(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 \chi_L^*(x).$$

Moltiplicando a sinistra per  $\sigma^2$ ,

$$-i \underbrace{(\sigma^2 \vec{\sigma} \sigma^2)}_{-\vec{\sigma}^*} \cdot \vec{\nabla} \chi_L^*(x) = i \underbrace{(\sigma^2)^2}_1 \frac{\partial}{\partial t} \chi_L^*(x),$$

e prendendo il complesso coniugato si ottiene

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_L(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_L(x), \quad (7.53)$$

che coincide con la (7.42).

Quindi le equazioni di Weyl non sono invarianti per le singole trasformazioni discrete  $P$  e  $C$ , ma lo sono per l'operazione congiunta  $CP$ .

## ► Inversione temporale

Le equazioni di Weyl sono invarianti per inversione temporale. Infatti, la trasformazione dello spinore  $\psi(x)$  per l'operazione di inversione temporale  $x = (t, \vec{x}) \xrightarrow{T} x' = (-t, \vec{x})$  è data da

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(x') = \widetilde{\mathcal{B}} \widetilde{\psi}(x), \quad (7.54)$$

con  $\mathcal{B} = \gamma^0 \gamma^5 \mathcal{C}$ . Nella rappresentazione chirale si ha

$$\mathcal{B} = \gamma^0 \gamma^5 \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.55)$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & i\tilde{\sigma}^2 \\ i\tilde{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.56)$$

$$\psi'(x') = \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_R^* \\ \chi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \chi_L^* \\ -i\sigma^2 \chi_R^* \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Per inversione temporale l'equazione di Weyl (7.42) assume la forma

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi'_L(x') = i \frac{\partial}{\partial t'} \chi'_L(x'). \quad (7.58)$$

con

$$\frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad \chi'_L(x') = \text{costante} \times \sigma^2 \chi_L^*(x), \quad (7.59)$$

Perciò, seguendo lo stesso procedimento adottato nel caso dell'operazione  $CP$ , si dimostra che l'Eq.(7.58) è equivalente alla (7.42).

Le proprietà di invarianza delle equazioni di Weyl per trasformazioni  $CP$  e  $T$  sono in accordo con il teorema  $CPT$ , che asserisce l'invarianza delle leggi fisiche per la trasformazione  $CPT$ .

## 7.6 Covarianti bilineari con spinori chirali

Studiamo le proprietà dei covarianti bilineari con spinori chirali, ossia delle espressioni del tipo

$$\bar{\psi}_{L,R} \Gamma^a \psi_{L,R}, \quad (7.60)$$

dove le matrici  $\Gamma^a$  sono le 16 matrici  $4 \times 4$  definite nel Paragrafo 1.2.2.

Raggruppiamo le  $\Gamma^a$  in 2 classi a seconda delle loro proprietà di commutazione con  $\gamma_5$ :

1)  $\Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}$ , che hanno le seguenti proprietà di commutazione:

$$[\gamma_5, \Gamma^a] = 0, \quad [P_L, \Gamma^a] = [P_R, \Gamma^a] = 0. \quad (7.61)$$

2)  $\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$ , con le seguenti proprietà:

$$\{\gamma_5, \Gamma^a\} = 0, \quad P_L \Gamma^a = \Gamma^a P_R, \quad P_R \Gamma^a = \Gamma^a P_L. \quad (7.62)$$

Da queste proprietà e da

$$\bar{\psi}_L = \left[ \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \right]^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5), \quad (7.63)$$

segue che

$$\bar{\psi}_L \Gamma^a \psi_L = \bar{\psi} P_R \Gamma^a P_L \psi = \begin{cases} \bar{\psi} \Gamma^a P_R P_L \psi = 0 & (\Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}), \\ \bar{\psi} \Gamma^a P_L^2 \psi \neq 0 & (\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5). \end{cases} \quad (7.64)$$



Le stesse proprietà valgono per i covarianti  $\overline{\psi}_R \Gamma^a \psi_R$ . Per i covarianti bilineari misti  $L$ - $R$ , si ha invece

$$\overline{\psi}_L \Gamma^a \psi_R = \overline{\psi} P_R \Gamma^a P_R \psi = \begin{cases} \overline{\psi} \Gamma^a P_R^2 \psi \neq 0 & (\Gamma^a = \mathbf{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}), \\ \overline{\psi} \Gamma^a P_L P_R \psi = 0 & (\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5). \end{cases} \quad (7.65)$$

e proprietà analoghe per  $\overline{\psi}_R \Gamma^a \psi_L$ .

Si notino in particolare i seguenti risultati:

$$\Gamma^a = \mathbf{1} : \quad \overline{\psi}_L \psi_R \neq 0, \quad \overline{\psi}_R \psi_L \neq 0, \quad \overline{\psi}_L \psi_L = \overline{\psi}_R \psi_R = 0; \quad (7.66)$$

$$\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5 : \quad \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \neq 0, \quad \overline{\psi}_L \gamma^\mu \gamma_5 \psi_L \neq 0. \quad (7.67)$$

Ne segue che per particelle descritte da spinori chirali  $\psi_L$  (per esempio il neutrino) è possibile scrivere correnti vettoriali ed assiali, mentre l'invariante  $\overline{\psi}_L \psi_L$ , che viene naturale collegare con un termine di massa della Lagrangiana, è identicamente nullo.

## 7.7 Spinori di Majorana

Per spinore di Majorana si intende uno spinore a quattro componenti autoconiugato di carica:

$$\psi^M = (\psi^M)^c. \quad (7.68)$$

Determiniamo la forma di  $\psi^M$ . Dato un generico spinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad (7.69)$$

il suo coniugato di carica è (con una particolare scelta del fattore di fase)

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \sigma^2 \chi_R^* \\ -\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

La condizione  $\psi = \psi^c$  è quindi equivalente a

$$\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \chi_R^* \\ -\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}, \quad (7.71)$$

ossia

$$\chi_R = -\sigma^2 \chi_L^* \quad (\text{che implica } \chi_L = \sigma^2 \chi_R^*). \quad (7.72)$$

Quindi uno spinore di Majorana può essere scritto nella forma

$$\psi^M = \begin{pmatrix} \chi_L \\ -\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}. \quad (7.73)$$

È chiaro che gli spinori di Majorana, come gli spinori di Weyl, hanno metà gradi di libertà rispetto agli spinori di Dirac.

# Capitolo 8

## Funzioni di Green e processi di scattering

### 8.1 Funzione di Green in teoria non-relativistica

Prendiamo in esame l'equazione del moto

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (8.1)$$

dove  $H$  è l'operatore hamiltoniano non-relativistico. Se  $H$  è indipendente dal tempo, un insieme ortonormale completo è costituito dalle soluzioni  $\chi_n(t, \vec{x}) = \varphi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t}$ , con

$$H \varphi_n(\vec{x}) = E_n \varphi_n(\vec{x}). \quad (8.2)$$

Le funzioni  $\varphi_n(\vec{x})$  soddisfano la condizione di ortonormalità

$$\int d^3x \varphi_n^*(\vec{x}) \varphi_m(\vec{x}) = \delta_{nm} \quad (8.3)$$

e quella di completezza

$$\sum_n \varphi_n^*(\vec{x}) \varphi_n(\vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (8.4)$$

Una generica funzione d'onda  $\psi(x)$  può essere sviluppata come

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_n c_n \chi_n(t, \vec{x}) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t}, \quad (8.5)$$

dove

$$c_n = \int d^3x \chi_n^*(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}). \quad (8.6)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \psi(t', \vec{x}') &= \sum_n c_n \chi_n(t', \vec{x}') = \sum_n \int d^3x \chi_n^*(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \chi_n(t', \vec{x}') \\ &= \int d^3x \underbrace{\sum_n \chi_n(t', \vec{x}') \chi_n^*(t, \vec{x})}_{\equiv K(t', \vec{x}'; t, \vec{x})} \psi(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (8.7)$$

La funzione

$$K(t', \vec{x}'; t, \vec{x}) \equiv \sum_n \chi_n(t', \vec{x}') \chi_n^*(t, \vec{x}) = \sum_n \varphi_n(\vec{x}') \varphi_n^*(\vec{x}) e^{-iE_n(t'-t)} \quad (8.8)$$

è la funzione di Green che fornisce l'evoluzione della funzione d'onda da  $(t, \vec{x})$  a  $(t', \vec{x}')$ :

$$\psi(t', \vec{x}') = \int d^3x K(t', \vec{x}'; t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}). \quad (8.9)$$

Osserviamo che per  $t' = t$  si ha

$$K(t, \vec{x}'; t, \vec{x}) = \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}). \quad (8.10)$$

Imponiamo la condizione  $t' \geq t$ , includendo una funzione  $\theta(t)$  nella definizione di  $K(x', x)$ :

$$K(x', x) = \sum_n \chi_n(t', \vec{x}') \chi_n^*(t, \vec{x}) \theta(t' - t). \quad (8.11)$$

Se applichiamo alla funzione  $K(x', x)$  l'operatore  $i \frac{\partial}{\partial t'} - H(\vec{x}')$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t'} - H(\vec{x}') \right] K(x', x) &= \sum_n \left\{ \left[ i \frac{\partial}{\partial t'} - H(\vec{x}') \right] \chi_n(t', \vec{x}') \right\} \chi_n^*(t, \vec{x}) \theta(t' - t) \\ &\quad + \sum_n \chi_n(t', \vec{x}') \chi_n^*(t, \vec{x}) i \frac{\partial}{\partial t'} \theta(t' - t). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Il primo termine del secondo membro è nullo e quindi, tenuto conto che  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t)$ ,

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t'} - H(\vec{x}') \right] K(x', x) = i \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \delta(t' - t). \quad (8.13)$$

Questa proprietà può essere utilizzata per generalizzare la definizione di  $K(x', x)$  al caso in cui  $H$  dipende dal tempo.

Nel caso di una teoria perturbativa, in cui l'operatore hamiltoniano  $H$  viene scritto come  $H_0 + V$ , e  $V$  viene trattato come perturbazione, si ha

$$K(x', x) = K_0(x', x) - i \int d^4x_1 K_0(x', x_1) V(x_1) K(x_1, x), \quad (8.14)$$

dove  $K_0(x', x)$  è la funzione di Green per  $H = H_0$  (ossia  $V = 0$ ). Infatti, applicando l'operatore  $i \frac{\partial}{\partial t'} - H_0(x')$  ad ambo i membri della (8.14) si ottiene

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t'} - H_0(x') \right] K(x', x) &= i \delta^4(x' - x) + \int d^4x_1 \delta^4(x' - x_1) V(x_1) K(x_1, x) \\ &= i \delta^4(x' - x) + V(x') K(x', x), \end{aligned} \quad (8.15)$$

ossia

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t'} - H(x') \right] K(x', x) = i \delta^4(x' - x). \quad (8.16)$$

Dalla (8.14) si trova, per iterazione,

$$\begin{aligned}
K(x', x) &= K_0(x', x) - i \int d^4x_1 K_0(x', x_1) V(x_1) \left[ K_0(x_1, x) \right. \\
&\quad \left. - i \int d^4x_2 K_0(x_1, x_2) V(x_2) \left[ K_0(x_2, x) - \dots \right] \right] \\
&= K_0(x', x) - i \int d^4x_1 K_0(x', x_1) V(x_1) K_0(x_1, x) \\
&\quad + (-i)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 K_0(x', x_1) V(x_1) K_0(x_1, x_2) V(x_2) K_0(x_2, x) + \dots
\end{aligned} \tag{8.17}$$

## 8.2 Funzione di Green per l'equazione di Dirac libera

In analogia a quanto fatto precedentemente in teoria non-relativistica, definiamo la funzione di Green relativamente all'equazione di Dirac libera mediante l'equazione

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) K_0(x', x) = i \delta^4(x' - x). \tag{8.18}$$

Si può mostrare che una soluzione particolare dell'Eq.(8.18) è data da

$$K_0(x', x) = \sum_n u_n(\vec{x}') \bar{u}_n(\vec{x}) e^{-iE_n(t'-t)} + \sum_n v_n(\vec{x}') \bar{v}_n(\vec{x}) e^{iE_n(t'-t)} \quad \text{per } t' \geq t, \tag{8.19}$$

dove

$$u_n(\vec{x}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} u_n(\vec{p}), \tag{8.20a}$$

$$v_n(\vec{x}) = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} v_n(\vec{p}), \tag{8.20b}$$

e  $K_0(x', x) = 0$  per  $t' < t$ .

Determiniamo ora la trasformata di Fourier di  $K_0(x', x)$ , ossia la funzione  $K(p)$ ,

$$K_0(x', x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p K(p) e^{-ip(x'-x)}. \tag{8.21}$$

Sostituendo quest'espressione nella (8.18) si ottiene

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m) K(p) e^{-ip(x'-x)} = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x'-x)}, \tag{8.22}$$

e quindi

$$(\not{p} - m) K(p) = i \mathbb{1}, \tag{8.23}$$

o ancora

$$K(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \tag{8.24}$$

in quanto

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2. \tag{8.25}$$

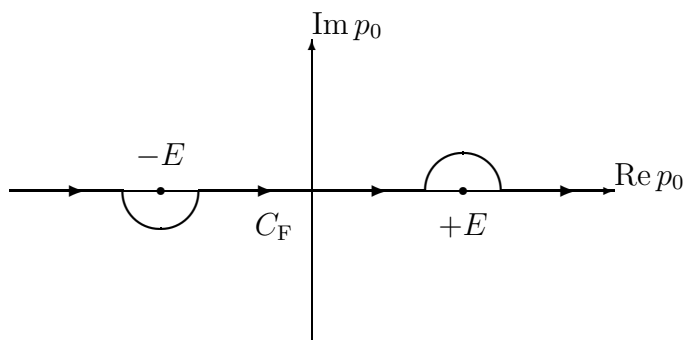


Figura 8.1: Il cammino di integrazione  $C_F$  di Feynman.

La formula (8.21) può quindi essere riscritta come

$$K_0(x', x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip(x'-x)}. \quad (8.26)$$

La funzione integranda ha due punti di singolarità che sono dati da

$$p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0. \quad (8.27)$$

Nella variabile  $p_0$  i due poli semplici sono localizzati nei punti

$$p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv \pm E \quad (E > 0), \quad (8.28)$$

che si trovano nell'intervallo di integrazione della (8.26). Per evitare queste singolarità occorre deformare il cammino di integrazione sulla variabile  $p_0$  nel piano complesso di  $p_0$ . Utilizziamo la prescrizione di Feynman che equivale al cammino di integrazione  $C_F$  nella Figura 8.1. L'integrazione sulla variabile  $p_0$  è svolta nell'Appendice H.

Questa prescrizione può essere inclusa nella definizione di  $K(p)$ , ossia

$$K(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (8.29)$$

infatti

$$(p_0 + E - i\epsilon)(p_0 - E + i\epsilon) = p^2 - m^2 + i\epsilon. \quad (8.30)$$

### 8.3 Funzione di Green per l'equazione di Dirac con interazione

Definiamo ora una funzione di Green relativa all'equazione di Dirac in presenza di interazione elettrone - campo elettromagnetico, ossia

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu(x')) K(x', x) = i\delta^4(x' - x). \quad (8.31)$$

Si può mostrare che, come nel caso non-relativistico, la funzione di Green fornisce l'evoluzione temporale della funzione d'onda dal tempo  $t$  al tempo  $t'$  ( $t' \geq t$ ) mediante la formula

$$\psi(x') = \int d^3x K(x', x) \gamma^0 \psi(x). \quad (8.32)$$

Quindi, l'ampiezza di transizione da uno stato  $\psi_i(x)$  ad uno stato  $\psi_f(x')$  con  $x'_0 > x_0$  è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \int d^3x \int d^3x' \psi_f^\dagger(x') K(x', x) \gamma^0 \psi_i(x) \\ &= \int d^3x \int d^3x' \overline{\psi}_f(x') \gamma^0 K(x', x) \gamma^0 \psi_i(x). \end{aligned} \quad (8.33)$$

$K(x', x)$  può essere espressa nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K(x', x) &= K_0(x', x) - i e \int d^4x_1 K_0(x', x_1) \not{A}(x_1) K(x_1, x) \\ &= K_0(x', x) - i e \int d^4x_1 K_0(x', x_1) \not{A}(x_1) K_0(x_1, x) \\ &\quad + (-i e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 K_0(x', x_1) \not{A}(x_1) K_0(x_1, x_2) \not{A}(x_2) K_0(x_2, x) + \dots \end{aligned} \quad (8.34)$$

Al prim'ordine l'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(1)} &= -i e \int d^3x \int d^3x' \overline{\psi}_f(x') \gamma^0 \int d^4x_1 K_0(x', x_1) \not{A}(x_1) K_0(x_1, x) \gamma^0 \psi_i(x) \\ &= -i e \int d^4x_1 \overline{\psi}_f(x_1) \not{A}(x_1) \psi_i(x_1). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Supponiamo che gli stati iniziale e finale dell'elettrone siano autostati del quadri-impulso con valori positivi dell'energia,

$$\psi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_i}} u_i(p_i) e^{-ip_i x}, \quad (8.36a)$$

$$\psi_f(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_f}} u_f(p_f) e^{-ip_f x}, \quad (8.36b)$$

e scriviamo  $A_\mu(x)$  mediante la sua trasformata di Fourier

$$A_\mu(x) = \int d^4q a_\mu(q) e^{-iqx}. \quad (8.37)$$

Sostituendo le (8.36) e (8.37) nella (8.35) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{V}{m} (E_i E_f)^{1/2} \mathcal{M}_{fi}^{(1)} &= -i e \int d^4x_1 \int d^4q \overline{u}_f(p_f) \not{a}(q) u_i(p_i) e^{i(p_f - q - p_i)x_1} \\ &= -i e (2\pi)^4 \int d^4q \overline{u}_f(p_f) \not{a}(q) u_i(p_i) \delta^4(p_f - q - p_i) \\ &= -i e (2\pi)^4 \overline{u}_f(p_f) \not{a}(p_f - p_i) u_i(p_i). \end{aligned} \quad (8.38)$$

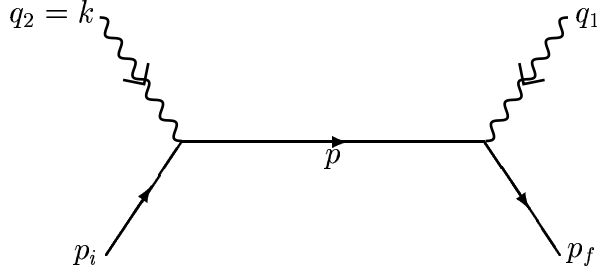


Figura 8.2: Rappresentazione diagrammatica (Feynman) dell'ampiezza di transizione al secondo termine perturbativo  $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$  nell'equazione (8.41), con  $p = p_i + k = p_f - q_1$ .

Dalle espressioni (8.33) e (8.34) si trova che il secondo termine perturbativo dell'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi}^{(2)} &= (-ie)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{\psi}_f(x_1) \mathcal{A}(x_1) K_0(x_1, x_2) \mathcal{A}(x_2) \psi_i(x_2) \\
&= \frac{m}{V} \frac{1}{(E_i E_f)^{1/2}} (-ie)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{u}_f(p_f) e^{ip_f x_1} \int d^4q_1 \phi(q_1) e^{-iq_1 x_1} \\
&\quad \times \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x_1 - x_2)} \int d^4q_2 \phi(q_2) e^{-iq_2 x_2} u_i(p_i) e^{-ip_i x_2} \\
&= \frac{m}{V} \frac{1}{(E_i E_f)^{1/2}} (-ie)^2 i (2\pi)^4 \int d^4q_1 \int d^4q_2 \int d^4p \delta^4(p_f - q_1 - p) \delta^4(p - q_2 - p_i) \\
&\quad \times \bar{u}_f(p_f) \phi(q_1) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \phi(q_2) u_i(p_i). \tag{8.39}
\end{aligned}$$

Indicando con  $f(q_1, q_2, p)$  la parte matriciale della funzione integranda, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int d^4q_1 \int d^4q_2 \int d^4p f(q_1, q_2, p) \delta^4(p_f - q_1 - p) \delta^4(p - q_2 - p_i) = \\
&= \int d^4q_1 \int d^4q_2 f(q_1, q_2, p) \delta^4(p_f - q_1 - q_2 - p_i) \Big|_{p=p_f - q_1} \\
&= \int d^4q_2 f(q_1, q_2, p) \Big|_{\substack{p=p_i + q_2 \\ q_1 = p_f - p_i - q_2}}, \tag{8.40}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = i (-ie)^2 (2\pi)^4 \frac{m}{V} \frac{1}{(E_i E_f)^{1/2}} \int d^4k \bar{u}_f(p_f) \phi(p_f - p_i - k) \frac{\not{k} + \not{p}_i + m}{(k + p_i)^2 - m^2 + i\epsilon} \phi(k) u_i(p_i). \tag{8.41}$$

Questa ampiezza è rappresentata diagrammaticamente nella Figura 8.2.

## 8.4 Applicazione: scattering Rutherford

Calcoliamo lo scattering di un elettrone in un campo coulombiano all'ordine più basso.

## ► Ampiezza di scattering

Nello spazio degli impulsi l'ampiezza di scattering è

$$\mathcal{M}_{fi}^{(1)} = -i e (2\pi)^4 \frac{m}{V} \frac{1}{(E_i E_f)^{1/2}} \bar{u}_f(p_f) \not{d}(p_f - p_i) u_i(p_i), \quad (8.42)$$

dove

$$\not{d}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \not{A}(x) e^{iqx}, \quad (8.43)$$

con

$$A^\mu = (V, \vec{0}), \quad V = -\frac{Z e}{4\pi r}. \quad (8.44)$$

$\not{d}(q)$  può essere espresso come

$$\begin{aligned} \not{d}(q) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \gamma^0 \frac{Z e}{4\pi r} e^{i(q_0 t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \\ &= -\frac{Z e}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(q_0) \gamma^0 \int d^3x \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}}}{r}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Essendo

$$\int d^3x \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}}}{r} = \frac{4\pi}{\vec{q}^2}, \quad (8.46)$$

otteniamo

$$\not{d}(q) = -\frac{Z e}{(2\pi)^3} \delta(q_0) \gamma^0 \frac{1}{\vec{q}^2}. \quad (8.47)$$

Quindi

$$\mathcal{M}_{fi}^{(1)} = \frac{m}{V} \frac{1}{(E_i E_f)^{1/2}} i Z e^2 (2\pi) \delta(E_i - E_f) \frac{1}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2} \bar{u}_f(p_f) \gamma^0 u_i(p_i). \quad (8.48)$$

## ► Sezione d'urto differenziale

Calcoliamo il modulo quadro di  $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ :

$$|\mathcal{M}_{fi}^{(1)}|^2 = \frac{m^2}{V^2} \frac{1}{E_i E_f} (Z e^2)^2 [2\pi \delta(E_i - E_f)]^2 \frac{1}{[(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2]^2} |\mathcal{A}|^2, \quad (8.49)$$

dove

$$\mathcal{A} = \bar{u}_f(p_f) \gamma^0 u_i(p_i). \quad (8.50)$$

Il quadrato  $[2\pi \delta(E_i - E_f)]^2$  può essere scritto come

$$\begin{aligned} [2\pi \delta(E_i - E_f)]^2 &= 2\pi \delta(E_i - E_f) \int dt e^{-i(E_i - E_f)t} \\ &= 2\pi \delta(E_i - E_f) T, \end{aligned} \quad (8.51)$$

dove  $T$  è l'intervallo di tempo in cui avviene il processo.



Quindi, la probabilità di transizione per unità di tempo è (vedi anche l'Appendice I)

$$dw_{fi} = 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{m^2}{V^2} \frac{1}{E_i E_f} \left[ \frac{Z e^2}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2} \right]^2 |\mathcal{A}|^2 dn_f, \quad (8.52)$$

ossia, integrando sull'energia  $E_f$ ,

$$\begin{aligned} dw'_{fi} &= \int dE_f \frac{dw_{fi}}{dE_f} \\ &= 2\pi \frac{m^2}{V^2} \frac{1}{E_i E_f} \left[ \frac{Z e^2}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2} \right]^2 |\mathcal{A}|^2 \frac{dn_f}{dE_f} \Big|_{E_f=E_i}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

La sezione d'urto differenziale è

$$d\sigma = \frac{dw'_{fi}}{I}, \quad (8.54)$$

dove  $I$  è l'intensità del fascio:

$$I = v_i \rho = \frac{v_i}{V}, \quad (8.55)$$

essendo  $v_i = |\vec{p}_i|/E_i$  la velocità dell'elettrone incidente rispetto al centro diffusore e  $\rho$  la densità.

Per la densità degli stati finali abbiamo

$$\frac{dn_f}{dE_f} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_f}{dE_f} = \frac{V}{(2\pi)^3} d\Omega |\vec{p}_f|^2 \frac{d|\vec{p}_f|}{dE_f}. \quad (8.56)$$

Essendo  $\frac{d|\vec{p}_f|}{dE_f} = \frac{E_f}{|\vec{p}_f|}$ , otteniamo

$$\frac{dn_f}{dE_f} = \frac{V}{(2\pi)^3} E_f |\vec{p}_f| d\Omega, \quad (8.57)$$

e quindi

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \frac{Z e^2}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2} \right]^2 |\mathcal{A}|^2 m^2 d\Omega. \quad (8.58)$$

Possiamo anche scrivere

$$(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = 2p^2 (1 - \cos \vartheta) = 4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (8.59)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo di diffusione e  $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ . Introducendo la costante di struttura fine  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ , la (8.58) diventa

$$d\sigma = \frac{(Z\alpha)^2 m^2}{4p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} |\mathcal{A}|^2 d\Omega. \quad (8.60)$$

Se non siamo interessati alle polarizzazioni dell'elettrone negli stati iniziale e finale, allora mediamo e sommiamo sugli stati di spin:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{r,s} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \overline{u_f^{(s)}(\vec{p}_f)} \gamma^0 u_i^{(r)}(\vec{p}_i) \overline{u_i^{(r)}(\vec{p}_i)} \gamma^0 u_f^{(s)}(\vec{p}_f) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \gamma^0 \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_f + m}{2m} \right] \\
&= \frac{1}{8m^2} \text{Tr} [\gamma^0 \not{p}_i \gamma^0 \not{p}_f + m^2 \mathbb{1}] .
\end{aligned} \tag{8.61}$$

Dalla formula (C.5) si ha

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] p_{i\mu} p_{f\nu} &= 4 (g^{0\mu} g^{0\nu} - g^{00} g^{\mu\nu} + g^{0\nu} g^{0\mu}) p_{i\mu} p_{f\nu} \\
&= 4 (E_i E_f + \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f) ,
\end{aligned} \tag{8.62}$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s} |\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2m^2} (E_i E_f + \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f + m^2) . \tag{8.63}$$

Nel caso di scattering elastico si ha  $E_i = E_f \equiv E$  e  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = \sqrt{E^2 - m^2}$ , per cui

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{r,s} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{1}{2m^2} [E^2 + (E^2 - m^2) \cos \vartheta + m^2] \\
&= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{1}{2} (E^2 - m^2) (1 + \cos \vartheta) + m^2 \right] .
\end{aligned} \tag{8.64}$$

Utilizzando la formula relativistica

$$\frac{m^2}{E^2} = 1 - v^2 , \tag{8.65}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{r,s} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{E^2}{m^2} \left[ \frac{1}{2} v^2 (1 + \cos \vartheta) + 1 - v^2 \right] \\
&= \frac{E^2}{m^2} \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) .
\end{aligned} \tag{8.66}$$

La formula finale per la sezione d'urto differenziale per scattering non polarizzato è quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{4v^2 p^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) . \tag{8.67}$$

# Appendice A

## Unità naturali

In unità ordinarie le costanti  $\hbar$  e  $c$  hanno le dimensioni

$$[\hbar] = [E \cdot t] , \quad (\text{A.1})$$

$$[c] = [\ell \cdot t^{-1}] . \quad (\text{A.2})$$

Le unità naturali sono definite dalla condizione

$$\hbar = c = 1 . \quad (\text{A.3})$$

Questa condizione implica quindi che, in unità naturali, valgono le seguenti relazioni dimensionali:

$$[E] = [t^{-1}] = [\ell^{-1}] . \quad (\text{A.4})$$

Inoltre, dalla relazione relativistica energia-impulso, scritta in unità naturali,

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (\text{A.5})$$

si ricava che

$$[E] = [|\vec{p}|] = [m] . \quad (\text{A.6})$$

Per la conversione numerica tra le diverse grandezze in unità naturali è utile usare la formula

$$\hbar c = 197 \text{ Mev} \cdot \text{fm} , \quad (\text{A.7})$$

che, in unità naturali, si riduce a

$$197 \text{ Mev} \cdot \text{fm} = 1 . \quad (\text{A.8})$$

# Appendice B

## Quadri-vettori – metrica

Consideriamo uno spazio vettoriale a 4 dimensioni. Gli elementi di questo spazio vettoriale si chiamano quadri-vettori. Il quadri-vettore  $v$  ha componenti controvarianti  $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ , dove  $v^0$  è la componente temporale e  $v^1, v^2, v^3$  sono le componenti spaziali<sup>1</sup>, le quali si trasformano come le componenti di un tri-vettore euclideo  $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$  per rotazioni spaziali. Le componenti covarianti  $v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3)$  del quadri-vettore  $v$  sono legate alle componenti controvarianti dalla relazione

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (\text{B.1})$$

dove  $g$  e' il tensore metrico, con componenti covarianti  $g_{\mu\nu}$  date da

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Perciò, le componenti covarianti e controvarianti del quadri-vettore  $v$  sono legate dalle relazioni

$$v_0 = v^0, \quad v_k = -v^k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{B.3})$$

Le componenti controvarianti ( $g^{\mu\nu}$ ) del tensore metrico sono date dalla relazione

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g^\mu_\nu, \quad (\text{B.4})$$

con

$$g^\mu_\nu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

---

<sup>1</sup>Per gli indici quadri-dimensionali, che vanno da 0 a 3, usiamo lettere greche  $\mu, \nu, \rho, \dots$ , mentre gli indici tri-dimensionali, che vanno da 1 a 3, usiamo lettere romane  $k, i, j, \dots$ . Usiamo anche la notazione secondo la quale quando un indice è ripetuto in uno stesso termine è implicita la somma sui suoi valori. Ad esempio

$$u^\mu v_\mu = u^0 v_0 + u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3.$$

Perciò

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Il prodotto scalare tra due quadri-vettori  $u, v$  è dato da

$$u \cdot v = u_\mu v^\mu = u^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu v_\nu = u^0 v^0 - \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (\text{B.7})$$

I quadri-vettori si dividono in tre gruppi, a seconda del segno della loro norma  $v^2 \equiv v \cdot v$ ,

$$v^2 > 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo tempo} \quad (\text{B.8a})$$

$$v^2 = 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo luce} \quad (\text{B.8b})$$

$$v^2 < 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo spazio} \quad (\text{B.8c})$$

Una trasformazione di Lorentz  $L(\Lambda)$  agisce sui quadri-vettori trasformando un quadri-vettore  $v$  in un quadri-vettore  $v'$

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu, \quad (\text{B.9})$$

in modo da mantenere invariante la norma dei quadri-vettori:

$$v'^2 = v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta v^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta. \quad (\text{B.10})$$

Ciò implica che le matrici  $\Lambda^\mu_\nu$  devono soddisfare alla relazione

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.11})$$

La trasformazione inversa della (B.9) è

$$v^\nu = \Lambda_\mu^\nu v'^\mu, \quad (\text{B.12})$$

come si verifica immediatamente utilizzando la (B.11).

# Appendice C

## Tracce di prodotti di matrici $\gamma$

Proprietà fondamentali:

1) La traccia del prodotto di un numero dispari di matrici  $\gamma$  è nulla. Infatti

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) &= \mathrm{Tr}\left((\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\right) = \mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) \\ &= (-1)^n \mathrm{Tr}\left((\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\right) = (-1)^n \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}),\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

dove  $\gamma^5$  è stato prima permutato circolarmente e poi commutato con le  $\gamma^{\mu_k}$ . In particolare, si ha

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5) = 0. \quad (\text{C.3})$$

2) Se il numero  $n$  di matrici  $\gamma$  è pari, il numero di fattori può essere progressivamente scalato di 2 utilizzando le proprietà di anticommutazione. Per esempio,

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = g^{\mu\nu} \mathrm{Tr}(\mathbf{1}) = 4 g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.4})$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu} \mathrm{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - g^{\mu\rho} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}).\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

La formula generale per ridurre la traccia di un prodotto di  $n$  matrici  $\gamma$ , con  $n$  pari, alla somma di tracce di prodotti di  $n - 2$  matrici  $\gamma$  è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}) &= g^{\mu_1 \mu_2} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}] - g^{\mu_1 \mu_3} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}] + \dots \\ &\dots + g^{\mu_1 \mu_n} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{n-1}}].\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

Notare alcuni casi particolari:

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Infatti

$$\mathrm{Tr}((\gamma^\mu)^2 \gamma^5) = -\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\mu) = -\mathrm{Tr}((\gamma^\mu)^2 \gamma^5)$$

e da  $(\gamma^\mu)^2 \pm \mathbb{1}$  segue che  $\mathrm{Tr}(\gamma^5) = -\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0$ . La (C.8) può essere verificata usando la definizione (1.40) della matrice  $\gamma^5$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= -i \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ &= -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) - \frac{i}{2} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) \\ &= -i g^{\mu 3} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) + i g^{\mu 2} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3) - i g^{\mu 1} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3) \\ &\quad + i g^{\mu 0} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) - i g^{\mu \nu} \mathrm{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il prodotto di matrici  $\gamma$  di ordine più basso contenente la  $\gamma^5$  con traccia non nulla è  $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5$ :

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = 4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{C.9})$$

dove  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  è il tensore di rango 4 completamente antisimmetrico con  $\epsilon^{0123} = +1$ . Infatti, la traccia (C.9) è antisimmetrica per tutte le permutazioni dispari degli indici  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  e si ha inoltre

$$\mathrm{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^5) = i \mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^5) = 4i = 4i \epsilon^{0123}.$$

In base alle proprietà precedenti si ritrova che tutte le matrici  $\Gamma^a$  hanno traccia nulla, eccetto la matrice identità  $\Gamma^1 \equiv \mathbb{1}$ .

Per i prodotti di un numero  $n$  pari di matrici  $\gamma$  vale la proprietà

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n}) = \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}). \quad (\text{C.10})$$

Infatti, inserendo tra tutte le coppie di matrici  $\gamma$  l'identità nella forma  $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C} = \mathbb{1}$ , dove  $\mathcal{C}$  è la matrice di coniugazione di carica tale che  $\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = -\tilde{\gamma}^\mu$ , poichè  $n$  è pari si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n}) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{C} \gamma^{\mu_1} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^{\mu_2} \mathcal{C}^{-1} \dots \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^{\mu_{n-1}} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^{\mu_n} \mathcal{C}^{-1}) \\ &= (-1)^n \mathrm{Tr}(\tilde{\gamma}^{\mu_1} \tilde{\gamma}^{\mu_2} \dots \tilde{\gamma}^{\mu_{n-1}} \tilde{\gamma}^{\mu_n}) = \mathrm{Tr}([\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}]^T) \\ &= \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}). \end{aligned}$$

# Appendice D

## Rappresentazioni delle matrici $\gamma$

### D.1 Proprietà generali

Le matrici  $\gamma$  sono definite dalla relazione di anticommutazione

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}}, \quad (\text{D.1})$$

e dalla condizione

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0}. \quad (\text{D.2})$$

Una scelta specifica delle matrici che soddisfano alla (D.1) viene chiamata *rappresentazione delle matrici  $\gamma$* .

Secondo il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac, date due rappresentazioni  $\gamma^\mu$  e  $\gamma'^\mu$  di dimensione  $4 \times 4$ , esiste una matrice  $S$  non-singolare (cioè tale che esiste la matrice inversa  $S^{-1}$ ) che connette le due rappresentazioni tramite la relazione di equivalenza

$$\boxed{\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}}. \quad (\text{D.3})$$

La matrice  $S$  è definita univocamente a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. La condizione (D.2), che nella rappresentazione  $\gamma'^\mu$  si scrive

$$\gamma'^{\mu\dagger} = \gamma'^0 \gamma'^\mu \gamma'^0, \quad (\text{D.4})$$

implica che la matrice  $S$  deve essere unitaria:

$$\boxed{S^\dagger = S^{-1}}. \quad (\text{D.5})$$

Infatti, utilizzando la (D.2) e la relazione inversa della (D.3),

$$\gamma^\mu = S^{-1} \gamma'^\mu S, \quad (\text{D.6})$$

dalla relazione (D.3) si ottiene

$$\gamma^{\mu\dagger} = (S S^\dagger)^{-1} \gamma'^0 \gamma'^\mu \gamma'^0 (S S^\dagger). \quad (\text{D.7})$$

Per soddisfare la relazione (D.4), si deve avere

$$S S^\dagger = \mathbb{1}. \quad (\text{D.8})$$



Analogamente, utilizzando la (D.4) e la (D.3), dalla relazione (D.6) si ottiene

$$\gamma^{\mu\dagger} = (S^\dagger S) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 (S^\dagger S)^{-1}. \quad (\text{D.9})$$

Per soddisfare la relazione (D.2), deve essere

$$S^\dagger S = \mathbb{1}. \quad (\text{D.10})$$

Le relazioni (D.8) e (D.10) implicano la relazione di unitarietà (D.5). Dalle relazioni (D.3) e (D.5) segue che la matrice  $S$  è definita univocamente a meno di una fase.

Questo è il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici  $\gamma$ , che si riassume dicendo che tutte le rappresentazioni delle matrici di Dirac sono *unitariamente equivalenti*.

In questa Appendice considereremo le tre rappresentazioni maggiormente utilizzate: la rappresentazione di Dirac, quella di Majorana e quella chirale.

### D.1.1 Rappresentazione di Dirac

Questa rappresentazione viene anche chiamata *rappresentazione standard* ed è utile per discutere il limite non-relativistico dell'equazione di Dirac.

$$\gamma_{\text{D}}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{D}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

$$\gamma_{\text{D}}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\text{D}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.12})$$

$$\mathcal{C}_{\text{D}} = i \gamma_{\text{D}}^2 \gamma_{\text{D}}^0 = -i \alpha_{\text{D}}^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.13})$$

$$\sigma_{\text{D}}^{0k} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\text{D}}^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

$$\gamma_{\text{D}}^0 \gamma_{\text{D}}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{D}}^k \gamma_{\text{D}}^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

### D.1.2 Rappresentazione di Majorana

Questa rappresentazione rende reale l'equazione di Dirac scambiando tra loro  $\alpha_{\text{D}}^2$  (l'unica matrice complessa nella rappresentazione di Dirac) e  $\beta_{\text{D}}$ . Infatti l'equazione di Dirac in forma hamiltoniana può essere scritta come

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i \beta m \right) \psi = 0, \quad (\text{D.16})$$

da cui si vede che l'equazione di Dirac è reale se le  $\alpha^k$  sono reali e  $\beta$  è immaginaria.

Le trasformazioni  $\alpha_D^2 \rightarrow \beta_M$  e  $\beta_D \rightarrow \alpha_M^2$  sono realizzate dalla trasformazione di equivalenza

$$\gamma_M^\mu = S_M \gamma_D^\mu S_M^{-1} \quad (\text{D.17})$$

con

$$S_M = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_D + \alpha_D^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_D^0 + \gamma_D^0 \gamma_D^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.18})$$

Utilizzando la (D.18) si verifica esplicitamente che

$$S_M = S_M^{-1} = S_M^\dagger. \quad (\text{D.19})$$

e che

$$\beta_M = S_M \beta_D S_M^{-1} = \alpha_D^2, \quad (\text{D.20})$$

$$\alpha_M^2 = S_M \alpha_D^2 S_M^{-1} = \beta_D. \quad (\text{D.21})$$

In conclusione, nella rappresentazione di Majorana si ha

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.22})$$

$$\gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

$$\alpha_M^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_M^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.24})$$

$$\alpha_M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.25})$$

$$\mathcal{C}_M = -i \gamma_M^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.26})$$

### D.1.3 Rappresentazione chirale

Questa rappresentazione è utile per studiare le proprietà di chiralità ( $\gamma^5$  è diagonale) e per risolvere l'equazione di Dirac per particelle di massa nulla (quali potrebbero essere i neutrini). La rappresentazione chirale si ottiene dalla rappresentazione di Dirac in modo che  $\gamma_C^5 = \gamma_D^0$  e  $\gamma_C^0 = -\gamma_D^5$ .

La trasformazione di equivalenza dalla rappresentazione di Dirac a quella chirale è data da

$$\gamma_C^\mu = S_C \gamma_D^\mu S_C^{-1}, \quad (\text{D.27})$$

con

$$S_C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} + \gamma_D^0 \gamma_D^5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.28})$$

Notare che

$$S_C^\dagger = \tilde{S}_C = S_C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - \gamma_D^0 \gamma_D^5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.29})$$

Le matrici  $\gamma^k$  nella rappresentazione chirale sono uguali alle corrispondenti matrici nella rappresentazione di Dirac:

$$\gamma_C^k = S_C \gamma_D^k S_C^{-1} = \gamma_D^k. \quad (\text{D.30})$$

La matrice di coniugazione di carica è data da

$$\mathcal{C}_C = S_C \mathcal{C}_D \tilde{S}_C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.31})$$

In conclusione, nella rappresentazione chirale si ha

$$\gamma_C^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_C^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.32})$$

$$\gamma_C^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_C^k = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (\text{D.33})$$

$$\mathcal{C}_C = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_C^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{D.34})$$

# Appendice E

## Trasformazioni di forme bilineari per inversione temporale

Per inversione temporale si ha

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x') \Gamma^a \psi'(x') &= \tilde{\psi}(x) \tilde{\mathcal{B}}^{-1} \Gamma^a \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x) = \left[ \tilde{\psi}(x) \tilde{\mathcal{B}}^{-1} \Gamma^a \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x) \right]^T \\ &= \overline{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\Gamma}^a \mathcal{B}^{-1} \psi(x).\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

Per ottenere le matrici  $\tilde{\mathcal{B}} \tilde{\Gamma}^a \mathcal{B}^{-1}$  basta tenere conto delle proprietà (1.129) e delle relazioni da queste ricavabili:

$$\mathcal{B} \tilde{\gamma}^5 \mathcal{B}^{-1} = -\gamma^5, \quad (\text{E.2})$$

$$\mathcal{B} (\tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^\mu) \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B} \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{B}^{-1} \gamma^5 = \begin{cases} +\gamma^0 \gamma^5 & \text{per } \mu = 0, \\ -\gamma^k \gamma^5 & \text{per } \mu = k. \end{cases}, \quad (\text{E.3})$$

$$\mathcal{B} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \mathcal{B}^{-1} = \begin{cases} +\sigma^{\mu\nu} & \text{per } \mu = 0, \nu \neq 0 \\ -\sigma^{\mu\nu} & \text{per } \mu \neq 0, \nu \neq 0. \end{cases} \quad \text{oppure } \mu \neq 0, \nu = 0, \quad (\text{E.4})$$

Si ha quindi

1)  $\Gamma^a = \mathbb{1}$ .

$$\overline{\psi}'(x') \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{B} \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = \overline{\psi}(x) \psi(x). \quad (\text{E.5})$$

2)  $\Gamma^a = \gamma^\mu$ .

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = \begin{cases} +\overline{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) & \text{per } \mu = 0, \\ -\overline{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) & \text{per } \mu = k. \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

3)  $\Gamma^a = \sigma^{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') &= \overline{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \mathcal{B}^{-1} \psi(x) \\ &= \begin{cases} +\overline{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) & \text{per } \mu = 0, \nu \neq 0 \\ -\overline{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) & \text{per } \mu \neq 0, \nu \neq 0. \end{cases} \quad \text{oppure } \mu \neq 0, \nu = 0,\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

4)  $\Gamma^a = \gamma^\mu \gamma^5$ .

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = \begin{cases} +\bar{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = 0, \\ -\bar{\psi}(x) \gamma^k \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = k. \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

5)  $\Gamma^a = \gamma^5$ .

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\gamma}^5 \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = -\bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x). \quad (\text{E.9})$$

# Appendice F

## Dimostrazione della proprietà

$$\vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \ell_\chi (\ell_\chi + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi$$

Consideriamo gli spinori a due componenti  $\chi$  e  $\varphi$  definiti nell'eq.(5.27), i quali sono autofunzioni di  $\vec{L}^2$  con rispettivi autovalori  $\hbar^2 \ell_\chi (\ell_\chi + 1)$  e  $\hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1)$  (si vedano le eq.(5.21), (5.22)). In questa appendice dimostriamo che  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi$  è un autofunzione di  $\vec{L}^2$  con autovalore  $\hbar^2 \ell_\chi (\ell_\chi + 1)$ . Analogamente, si può dimostrare che  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi$  è un autofunzione di  $\vec{L}^2$  con autovalore  $\hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1)$ .

L'azione dell'operatore  $\vec{L}^2$  sulla funzione  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi$  è data da

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \vec{L}^2 \varphi + [\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \varphi \\ &= \hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi + [\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \varphi. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Calcoliamo il commutatore nella (F.1) utilizzando l'identità  $[L^k L^k, p^j] = [L^k, [L^k, p^j]] + 2[L^k, p^j] L^k$  e il commutatore  $[L^k, p^j] = \epsilon^{km\ell} [r^m, p^j] p^\ell = i\hbar \sum_\ell \epsilon^{kj\ell} p^\ell$ :

$$\begin{aligned} [\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] &= \sum_{k,j} \sigma^j \{ [L^k, [L^k, p^j]] + 2 [L^k, p^j] L^k \} \\ &= \sum_{k,j} \sigma^j \{ -\hbar^2 \epsilon^{kj\ell} \epsilon^{k\ell m} p^m + 2 i \hbar \epsilon^{kj\ell} p^\ell L^k \} \\ &= 2 \hbar^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + 2 \hbar (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}). \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

L'ultima eguaglianza discende dalle proprietà

$$\sum_{k,\ell} \epsilon^{k\ell j} \epsilon^{k\ell m} = 2 \delta^{jm}, \quad (\text{F.3})$$

$$i \sum_j \sigma^j \epsilon^{jkl} = \delta^{kl} - \sigma^k \sigma^\ell, \quad (\text{F.4})$$

e da  $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$ .

Poichè  $\varphi$  è un'autofunzione dell'operatore  $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$  con autovalore  $-\hbar(1 - \kappa)$  (si veda l'eq.(5.19)), dalla (F.2) si ha

$$\left[ \vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] \varphi = 2 \hbar^2 \kappa (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi. \quad (\text{F.5})$$

Infine, utilizzando la relazione  $\ell_\varphi(\ell_\varphi + 1) + 2\kappa = \ell_\chi(\ell_\chi + 1)$  (si veda l'eq.(5.23)), dalle (F.1) e (F.5) si ottiene

$$\vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \ell_\chi (\ell_\chi + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi. \quad (\text{F.6})$$

# Appendice G

## Densità Lagrangiana di Dirac

Supponiamo di avere un insieme di campi  $\varphi^\alpha(x)$ , con  $\alpha = 1, \dots, N$  (per esempio, nel caso di una particella con spin 1/2 si ha lo spinore  $\psi^\alpha(x)$  dove  $\alpha = 1, \dots, 4$  sono gli indici di Dirac) con una densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \partial_\mu \varphi^\alpha) \quad (\text{G.1})$$

che sia uno scalare di Lorentz. La formulazione lagrangiana della teoria dei campi è particolarmente adatta a descrivere la dinamica relativistica con un formalismo esplicitamente covariante.

I valori dei campi  $\varphi^\alpha(x)$  in ogni punto  $x$  dello spazio-tempo e i valori delle loro derivate  $\partial_\mu \varphi^\alpha$  rappresentano un infinito continuo di gradi di libertà.

### ► Principio variazionale ed equazioni di campo

Le equazioni di campo sono ottenute dal principio variazionale seguente. Definiamo l'integrale d'azione

$$I(\Omega) \equiv \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \partial_\mu \varphi^\alpha) \quad (\text{G.2})$$

su una regione spazio-temporale  $\Omega$  arbitraria. Se i campi sono variati,  $\varphi^\alpha(x) \rightarrow \varphi^\alpha(x) + \delta\varphi^\alpha(x)$ , in modo tale che le variazioni si annullino sull'iper-superficie  $\Gamma$  che delimita  $\Omega$ , l'integrale d'azione ha un valore stazionario:

$$\delta I(\Omega) = 0. \quad (\text{G.3})$$

La variazione dell'integrale d'azione è data da

$$\begin{aligned} \delta I(\Omega) &= \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \underbrace{\delta(\partial_\mu \varphi^\alpha)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^\alpha)} \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \delta\varphi^\alpha \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \right) \delta\varphi^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \delta\varphi^\alpha \right) = \int_{\Gamma} dS_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \delta\varphi^\alpha = 0, \quad (\text{G.5})$$



perchè  $\delta\varphi^\alpha = 0$  sull'iper-superficie  $\Gamma$ . Quindi, dal principio variazionale (G.3) ricaviamo

$$0 = \delta I(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \right] \delta \varphi^\alpha. \quad (\text{G.6})$$

Data l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta\varphi^\alpha$ , si ottengono le equazioni di campo (equazioni di Euler-Lagrange)

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N)}. \quad (\text{G.7})$$

Sottolineiamo che le proprietà di covarianza delle equazioni di campo (G.7) dipendono dal requisito che la densità lagrangiana (G.1) sia un invariante di Lorentz. Questa condizione determina la struttura esplicita della densità lagrangiana di ogni singolo campo.

### ► Lagrangiana di Dirac ed equazioni di campo

Dimostriamo che la densità lagrangiana di Dirac (Lorentz invariante)

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i \hbar c \overrightarrow{\not{\partial}} - m c^2) \psi(x) \quad (\text{G.8a})$$

$$= \bar{\psi}(x) (-i \hbar c \overleftarrow{\not{\partial}} - m c^2) \psi(x) \quad (\text{G.8b})$$

conduce, tramite le equazioni di Euler-Lagrange (G.7), all'equazione di Dirac. (Le due espressioni (G.8a) e (G.8b) per la  $\mathcal{L}$  sono equivalenti perchè differiscono per una quadri-divergenza, che costituisce un termine ininfluenza nella derivazione delle equazioni di Euler-Lagrange.)

Nella variazione di  $\mathcal{L}$  per la derivazione delle equazioni di campo secondo la (G.7),  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  devono essere considerati indipendenti. Consideriamo la variazione di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $\bar{\psi}$ . Utilizzando la (G.8a) si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i \hbar c \overrightarrow{\not{\partial}} - m c^2) \psi(x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad (\text{G.9})$$

per cui si ottiene l'equazione di campo

$$(i \hbar c \overrightarrow{\not{\partial}} - m c^2) \psi(x) = 0, \quad (\text{G.10})$$

che in unità naturali si scrive

$$\boxed{(i \not{\partial} - m) \psi(x) = 0}. \quad (\text{G.11})$$

Se consideriamo la variazione di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $\psi$ , utilizzando la (G.8b) si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \bar{\psi}(x) (-i \overleftarrow{\not{\partial}} - m), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0, \quad (\text{G.12})$$

per cui si ottiene l'equazione di campo

$$\boxed{\bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0}. \quad (\text{G.13})$$

Se avessimo variato la (G.8b) rispetto a  $\bar{\psi}$  e la (G.8a) rispetto a  $\psi$ , avremmo ottenuto le stesse equazioni (G.11) e (G.13), rispettivamente.

### ► Trasformazioni chirali

Le proprietà peculiari delle particelle di spin 1/2 con massa nulla discusse nel Capitolo 7 derivano dall'invarianza della densità Lagrangiana di Dirac per trasformazioni chirali. Definita come trasformazione chirale la trasformazione

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi, \quad (\text{G.14})$$

la Lagrangiana di Dirac si trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi &\xrightarrow[\psi \rightarrow \gamma_5 \psi]{} \bar{\psi} (-\gamma_5) (i \not{\partial} - m) \gamma_5 \psi \\ &= \bar{\psi} (i \not{\partial} + m) \gamma_5^2 \psi = \bar{\psi} (i \not{\partial} + m) \psi \\ &= \mathcal{L}_D + 2m \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Si ha quindi invarianza per trasformazione di chiralità se e solo se  $m = 0$ .

# Appendice H

## Rappresentazione integrale della funzione di Green per l'equazione di Dirac libera

La funzione di Green relativa all'equazione di Dirac libera può essere scritta come (vedi la Sezione 8.2)

$$K_F(x' - x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip(x'-x)}, \quad (\text{H.1})$$

dove  $C_F$  è il cammino di integrazione di Feynman nel piano complesso della variabile  $p_0$  mostrato nella Figura 8.1. Il cammino di integrazione può essere chiuso all'infinito in modo da applicare il teorema di Cauchy

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_n \lim_{z \rightarrow a_n} [(z - a_n) f(z)], \quad (\text{H.2})$$

dove i punti  $z = a_n$  sono i poli (semplici) di  $f(z)$  e l'integrale sul contorno  $C$  viene percorso in senso antiorario. Poichè la convergenza dell'integrale (H.1) dipende dal fattore

$$e^{-ip^0(x'_0 - x_0)} = e^{-i(x'_0 - x_0)\text{Re}(p^0)} e^{(x'_0 - x_0)\text{Im}(p^0)}, \quad (\text{H.3})$$

occorre (vedi la Figura H.1):

- 1) chiudere il cammino di integrazione inferiormente per  $x'_0 > x_0$ ;
- 2) chiudere il cammino di integrazione superiormente per  $x'_0 < x_0$ .

Applicando il teorema di Cauchy alla funzione di Green  $K_F(x' - x)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} K_F(x' - x) &= 2\pi\theta(x'_0 - x_0) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p \lim_{p_0 \rightarrow E} \left[ (p_0 - E) \frac{\not{p} + m}{(p_0 - E)(p_0 + E)} e^{-ip \cdot (x' - x)} \right] \\ &\quad - 2\pi\theta(x_0 - x'_0) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p \lim_{p_0 \rightarrow -E} \left[ (p_0 + E) \frac{\not{p} + m}{(p_0 + E)(p_0 - E)} e^{-ip \cdot (x' - x)} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \theta(x'_0 - x_0) (\not{p} + m) e^{-ip \cdot (x' - x)} - \theta(x_0 - x'_0) (\not{p} - m) e^{ip \cdot (x' - x)} \right\}_{p_0=E}. \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

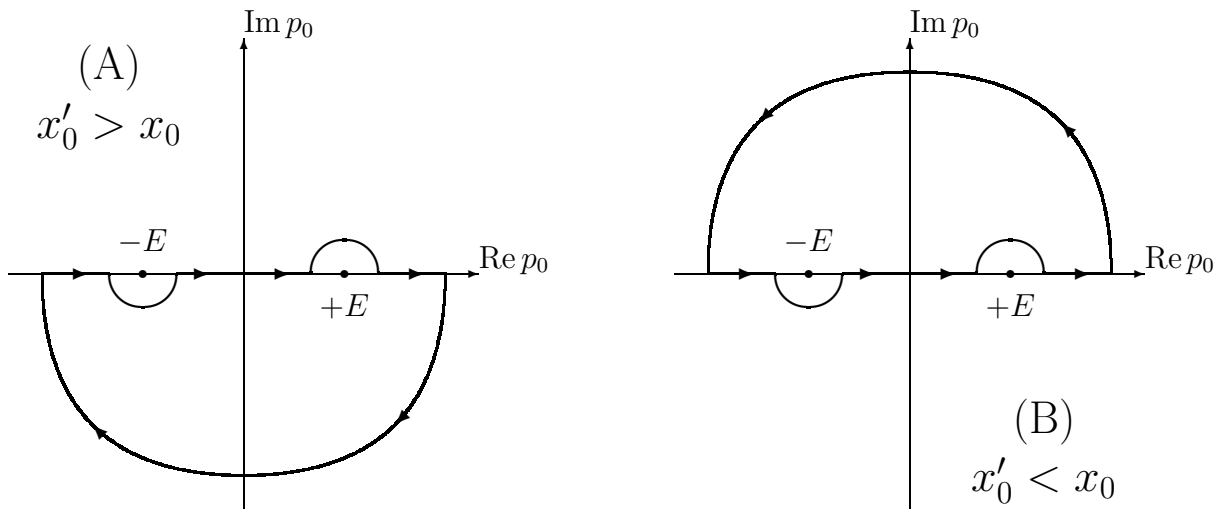


Figura H.1: Chiusura del cammino di integrazione di Feynman.

# Appendice I

## Calcolo di sezioni d'urto

In un sistema fisico descritto da un operatore hamiltoniano  $H_0$  con autovalori  $E_n$ , una perturbazione  $H_{\text{int}}$  induce delle transizioni tra gli stati imperturbati. Dalla teoria delle perturbazioni si trova che la probabilità di transizione per unità di tempo da uno stato iniziale  $i$  di energia  $E_i$  ad uno stato finale  $f$  di energia  $E_f$  è (vedi per esempio l'eq. (43.1) di Landau & Lifshits, *Meccanica Quantistica*)<sup>1</sup>

$$dw_{fi} = 2\pi |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f) dn_f, \quad (\text{I.1})$$

dove  $dn_f = \frac{dn_f}{dE_f} dE_f$  e  $\frac{dn_f}{dE_f}$  è la densità degli stati finali, equivalente al numero di celle di volume  $(2\pi)^3$  ( $(2\pi\hbar)^3$  in unità ordinarie) nello spazio delle fasi. Per una particella con volume di normalizzazione  $V$  ed impulso  $\vec{p}$

$$dn_f = \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3}. \quad (\text{I.2})$$

Integrando  $dw_{fi}$  sull'energia  $E_f$  si ha

$$dw_{fi} = 2\pi |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \left. \frac{dn_f}{dE_f} \right|_{E_f=E_i}. \quad (\text{I.3})$$

La sezione d'urto differenziale  $d\sigma$  è definita come rapporto tra la probabilità di transizione nell'unità di tempo e l'intensità del fascio  $I$  (numero di particelle incidenti per unità di superficie e unità di tempo). Notare che sia  $w_{fi}$  che la sezione d'urto si intendono per centro di scattering. Indicando con  $v$  la velocità del fascio relativamente al centro di scattering, si ha

$$I = v \rho = \frac{v}{V}, \quad (\text{I.4})$$

dove  $\rho$  è la densità di particelle del fascio. Quindi, per la sezione d'urto differenziale si ottiene

$$d\sigma = \frac{2\pi}{v} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \left. \frac{V^2 d^3p_f}{(2\pi)^3} \right|_{E_f=E_i}. \quad (\text{I.5})$$

---

<sup>1</sup>Nel linguaggio espressivo di Fermi questa regola era denominata "regola d'oro n. 2".