

Introduzione al Modello Standard delle Interazioni Elettrodeboli

Carlo Giunti

INFN, Sezione di Torino, and

Dipartimento di Fisica Teorica, Universita' di Torino,

I-10125 Torino, Italy,

and

School of Physics, Korea Institute for Advanced Study, Seoul 130-012, Korea.

E-mail: giunti@to.infn.it

(10 Marzo 2002)

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Interazione debole | 1 |
| 1.1 | Breve storia delle interazioni deboli | 1 |
| 1.2 | Processi deboli | 2 |
| 1.2.1 | Intensità dell'interazione debole | 3 |
| 1.3 | Conservazione dei numeri leptonici | 4 |
| 1.4 | Violazione di leggi di conservazione | 4 |
| 1.4.1 | Parità | 5 |
| 1.4.2 | Stranezza | 6 |
| 2 | Nozioni fondamentali di teoria quantistica dei campi | 9 |
| 2.1 | Introduzione | 9 |
| 2.2 | Equazione di Klein-Gordon | 10 |
| 2.3 | Principio variazionale ed equazioni di campo | 11 |
| 2.4 | Teorema di Noether e conservazione energia-impulso | 12 |
| 2.4.1 | Taslazioni spazio-temporali | 13 |
| 2.4.2 | Campi complessi | 14 |
| 2.5 | Simmetria di gauge globale e conservazione della carica | 14 |
| 2.6 | Campo scalare reale | 16 |
| 2.7 | Campo scalare complesso | 19 |
| 2.8 | Campo spinoriale | 21 |
| 2.9 | Campo Elettromagnetico | 25 |
| 2.10 | Elettrodinamica quantistica | 27 |
| 3 | Campi spinoriali chirali | 33 |
| 3.1 | Introduzione | 33 |
| 3.2 | Proprietà di elicità per $m = 0$ | 35 |
| 3.3 | Inversione spaziale | 37 |
| 3.4 | Coniugazione di carica | 38 |
| 3.5 | CP | 38 |
| 3.6 | Neutrini e antineutrini | 39 |
| 4 | Teoria $V - A$ | 41 |
| 4.1 | Lagrangiana di Fermi | 41 |
| 4.2 | Decadimento del μ | 46 |
| 4.3 | Correnti deboli cariche adroniche | 47 |
| 4.3.1 | Conserved Vector Current (CVC) | 48 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3.2 | L'angolo di Cabibbo | 55 |
| 4.3.3 | Mixing di quarks | 55 |
| 4.4 | Problemi della teoria $V - A$ | 60 |
| 5 | Il bosone W | 63 |
| 5.1 | Ampiezze con scambio di W | 63 |
| 5.2 | Il bosone intermedio W | 66 |
| 5.3 | Limite di bassa energia | 68 |
| 5.3.1 | Stima di m_W | 68 |
| 5.4 | Verso una teoria rinormalizzabile | 69 |
| 6 | Teorie di gauge | 71 |
| 6.1 | Formulazione generale delle teorie di gauge | 71 |
| 6.2 | Cromodinamica Quantistica | 77 |
| 6.3 | Modello Elettro-Debole $SU(2)_L \times U(1)_Y$ | 78 |
| 7 | Simmetria nascosta | 85 |
| 7.1 | Rottura spontanea della simmetria | 85 |
| 7.2 | Teorema di Goldstone | 89 |
| 7.3 | Il meccanismo di Higgs | 91 |
| 7.4 | Rinormalizzabilità delle teorie di gauge | 95 |
| 8 | Il Modello Standard | 99 |
| 8.1 | Rottura della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ | 99 |
| 8.1.1 | Masse dei bosoni di gauge | 103 |
| 8.1.2 | Masse dei leptoni carichi | 103 |
| 8.1.3 | Massa del bosone di Higgs | 104 |
| 8.1.4 | Correnti deboli cariche e neutre | 104 |
| 8.1.5 | Auto-accoppiamenti dei campi di gauge | 105 |
| 8.2 | Lagrangiana del Modello Standard nella gauge unitaria | 106 |
| 8.2.1 | Conferme sperimentali del Modello Standard | 107 |
| 8.3 | Processi deboli con correnti neutre | 107 |
| 8.3.1 | Limite di bassa energia | 109 |
| 8.4 | Corrente debole neutra adronica | 109 |
| A | Unità naturali | 111 |
| B | Quadri-vettori e metrica | 113 |

Chapter 1

Interazione debole

1.1 Breve storia delle interazioni deboli

- Nel 1896 Becquerel scopre la radioattività. I tipi di decadimento osservati si dividono in:
 - Decadimenti α con emissione di particelle α , cioè nuclei di elio (interazione forte).
 - Decadimenti β con emissione di particelle β , cioè elettroni (interazione debole).
 - Decadimenti γ con emissione di particelle γ , cioè fotoni (interazione elettromagnetica).
- Nel 1914 Chadwick scopre che gli elettroni vengono emessi nei decadimenti β con uno spettro continuo di energia, con una violazione apparente della legge di conservazione dell'energia.
- Nel 1931 Pauli formula l'ipotesi che una particella neutra con massa molto più piccola di quella dell'elettrone e spin $1/2$ venga emessa nei decadimenti β insieme all'elettrone per spiegarne lo spettro continuo di energia senza violare la legge di conservazione dell'energia.
- Nel 1932 Chadwick scopre il neutrone.
- Nel 1934 Fermi chiama la particella di Pauli neutrino e formula la teoria dei decadimenti β in analogia con l'elettrodinamica quantistica (QED).
- Nel 1937 Anderson & Neddermeyer scoprono il muone, che è una versione pesante dell'elettrone.
- Nel 1947 Pontecorvo formula l'ipotesi di universalità delle interazioni deboli di elettroni e muoni, che viene estesa nel 1948 da Puppi alle interazioni deboli di tutte le particelle.
- Nel 1956 Lee & Yang [Lee56] formulano l'ipotesi che la parità (invarianza per inversione spaziale) non sia conservata nelle interazioni deboli, per spiegare il cosiddetto ϑ - τ puzzle.
- Nel 1957 Wu *et al.* [Wu57] verificano sperimentalmente la non conservazione della parità nei decadimenti β di nuclei polarizzati di ^{60}Co .

- Nel 1958 Goldhaber *et al.* [Gol58] misurano l'elicità dei neutrini e stabiliscono che i neutrini esistono solamente in stati con elicità negativa.
- Nel 1958 Feynman & Gell-Mann [Fey58] e Sudarshan & Marshak [Sud58] formulano la **teoria V–A** delle interazioni deboli, nella quale la legge di conservazione della parità è violata in modo massimale, come indicato dalle osservazioni sperimentali.
- Nel 1959 Reines & Cowan rivelano per la prima volta gli antineutrini emessi da un reattore nucleare.
- Nel 1961 Glashow propone un modello di **unificazione delle interazioni debole ed elettromagnetica** basato sulla **simmetria di gauge** $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Questo modello prevede l'esistenza dei **bosoni intermedi** W^\pm e Z^0 con masse dell'ordine di 100 GeV e l'esistenza di **correnti deboli neutre**.
- Nel 1962 Lederman, Steinberger & Schwartz, realizzando un esperimento ideato da Pontecorvo, dimostrano che il neutrino dell'elettrone e quello del muone sono due particelle diverse.
- Nel 1967 Weinberg e Salam rendono consistente la teoria di Glashow applicando il **meccanismo di Higgs** alla **rottura spontanea della simmetria** $SU(2)_L \times U(1)_Y$.
- Nel 1973 diversi esperimenti confermano l'esistenza di correnti deboli neutre.
- Nel 1975 viene scoperto il tau, che è una versione pesante dell'elettrone e del muone.
- Nel 1983 l'esperimento UA1 al CERN guidato da Rubbia (e poco dopo anche l'esperimento UA2) verifica l'esistenza dei bosoni intermedi W^\pm e Z^0 .

1.2 Processi deboli

L'interazione debole è responsabile di:

- numerosi processi di decadimento; per esempio:
 - **il decadimento del muone e dell'antimuone** ($m_\mu = 105.66 \text{ MeV}$, $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$, $m_e = 0.51 \text{ MeV}$)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu; \quad (1.1)$$

- **il decadimento di pioni carichi in muoni e neutrini** ($m_{\pi^\pm} = 139.57 \text{ MeV}$, $\tau_{\pi^\pm} = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$)

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu; \quad (1.2)$$

- **il decadimento del neutrone** ($m_n = 959.57 \text{ MeV}$, $\tau_n = 887 \pm 2 \text{ s}$, $m_p = 958.27 \text{ MeV}$)

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e; \quad (1.3)$$

– **i decadimenti β nucleari**

$$\underbrace{\mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e}_{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \text{ nel nucleo } \mathcal{N}} \quad (\text{decadimento } \beta^-), \quad (1.4a)$$

$$\underbrace{\mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu_e}_{p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \text{ nel nucleo } \mathcal{N}; \text{ questo processo è energeticamente impossibile per protoni liberi}} \quad (\text{decadimento } \beta^+); \quad (1.4b)$$

– **il decadimento del tau** ($m_\tau = 1777.0 \pm 0.3 \text{ MeV}$, $\tau_\tau = 2.9 \times 10^{-13} \text{ s}$)

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad (17\%), \quad (1.5a)$$

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad (17\%), \quad (1.5b)$$

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau \quad (11\%), \quad (1.5c)$$

$$\tau^- \rightarrow K^- + \nu_\tau \quad (7\%), \quad (1.5d)$$

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \nu_\tau \quad (25\%); \quad (1.5e)$$

• altri processi fisici come:

– **reazioni indotte da neutrini**; ad esempio

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e, \quad (1.6)$$

– cattura μ^- da parte di nuclei

$$\underbrace{\mu^- + \mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z - 1, N + 1) + \nu_\mu}_{\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu \text{ nel nucleo } \mathcal{N}}; \quad (1.7)$$

– **la formazione di un deutone a partire da due protoni** (questa reazione inizia il ciclo di fusione principale all'interno del sole)

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e. \quad (1.8)$$

Vediamo ora alcune proprietà fondamentali dei processi deboli.

1.2.1 Intensità dell'interazione debole

Le vite medie dei processi di decadimento debole sono assai più lunghe di quelle relative a decadimenti di tipo forte ($\tau \sim 10^{-23} \text{ s}$; per esempio, $\rho \rightarrow 2\pi$) o di tipo elettromagnetico ($\tau \sim 10^{-16} \text{ s}$; per esempio, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$). Per esempio

$$\tau(\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e) = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (1.9)$$

$$\tau(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu) = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (1.10)$$

Tenuto conto che la vita media è inversamente proporzionale alla larghezza di decadimento Γ ($\tau = \hbar/\Gamma$) e che questa è data dal modulo quadro dell'ampiezza di decadimento,

| | L_e | L_μ | L_τ |
|----------------------|-------|---------|----------|
| (ν_e, e^-) | +1 | 0 | 0 |
| (ν_μ, μ^-) | 0 | +1 | 0 |
| (ν_τ, τ^-) | 0 | 0 | +1 |

Table 1.1: Assegnazione dei numeri leptonici. Le corrispondenti antiparticelle hanno numeri leptonici opposti.

integrata sugli stati finali, se ne deduce che nei processi di bassa energia l'interazione debole si manifesta con un'intensità assai più tenue di quelle dell'interazione forte e dell'interazione elettromagnetica. È quindi evidente che **nei processi di bassa energia l'interazione debole ha un ruolo importante solo quando, per la natura delle particelle che vi partecipano o a causa di particolari leggi di conservazione, le interazioni forti ed elettromagnetiche non intervengono.**

1.3 Conservazione dei numeri leptonici

In tutti i processi deboli sopra indicati i leptoni compaiono associati a due a due nei doppietti di particelle (ν_e, e^-) , (ν_μ, μ^-) , (ν_τ, τ^-) e di antiparticelle $(\bar{\nu}_e, e^+)$, $(\bar{\nu}_\mu, \mu^+)$, $(\bar{\nu}_\tau, \tau^+)$.

Questa proprietà di carattere generale, valida per tutti i processi fisici sinora osservati, induce ad associare ai leptoni di ogni doppietto un **numero leptonico** e ad assumere una corrispondente legge di conservazione additiva. Ai leptoni sinora osservati vengono associati i numeri leptonici

$$\begin{aligned}
 L_e & \quad (\text{numero leptonico elettronico}), \\
 L_\mu & \quad (\text{numero leptonico muonico}), \\
 L_\tau & \quad (\text{numero leptonico del tau}),
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

secondo lo schema descritto nella Tabella 1.1. Si assumono leggi di conservazione separate per L_e , L_μ , L_τ , dalle quali discende banalmente anche la conservazione del numero leptonico totale

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau. \tag{1.12}$$

Un esempio significativo di evidenza sperimentale della proprietà $L_e \neq L_\mu$ è fornito dal decadimento del μ^- , che avviene mediante il processo debole (1.1) e non mediante il processo elettromagnetico $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$.

1.4 Violazione di leggi di conservazione

Alcune leggi di conservazione soddisfatte dall'interazione forte e da quella elettromagnetica sono invece violate dall'interazione debole.

1.4.1 Parità

L'interazione debole non conserva la parità (invarianza per inversione spaziale), che è invece conservata nelle interazioni forte ed elettromagnetica.

L'ipotesi che la parità non sia conservata nelle interazioni deboli fu formulata nel 1956 da Lee & Yang [Lee56] per spiegare il cosiddetto **puzzle** ϑ - τ . Gli esperimenti indicavano che i due mesoni ϑ^+ e τ^+ hanno la stessa massa e la stessa vita media ma decadono debolmente in stati con parità diversa¹:

$$\vartheta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (\text{parità positiva}), \quad (1.13a)$$

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (\text{parità negativa}). \quad (1.13b)$$

Il puzzle ϑ - τ consiste nel fatto che, se non fosse per la violazione della parità, sarebbe naturale pensare che i due mesoni sono in realtà la stessa particella. Per risolvere questo problema Lee & Yang formularono l'ipotesi che la parità non sia conservata nelle interazioni deboli, per cui i due mesoni ϑ^+ e τ^+ possono essere la stessa particella. Quindi i processi (1.13) corrispondono a due canali di decadimento diversi dello stesso mesone, che oggi viene chiamato K^+ .

La non-conservazione della parità è stata verificata sperimentalmente in numerosi processi di interazione debole, tra i quali il più famoso è quello effettuato da Wu *et al.* nel 1957 [Wu57] per verificare l'ipotesi di Lee & Yang. In questo esperimento venne misurata l'asimmetria della distribuzione angolare dei prodotti del decadimento β^-



con nuclei polarizzati di ${}^{60}\text{Co}$ (gli spin nucleari vengono allineati mediante l'applicazione di un campo magnetico esterno). Questo decadimento avviene preferenzialmente con la configurazione descritta nella Figura 1.1, con l'emissione di un elettrone con valore medio di elicità $= -v_e/c$ e di un antineutrino elettronico con elicità $= +1$.

La configurazione descritta nella Figura 1.1 non è invariante per inversione spaziale. Infatti, come descritto nella Figura 1.2, per inversione spaziale i vettori polari degli impulsi cambiano segno, mentre i vettori assiali degli spin restano invariati. La configurazione (B) della Fig.1.2, ottenuta dalla configurazione (A) per inversione spaziale, non viene osservata sperimentalmente. Ciò significa che il processo non è invariante per inversione spaziale e quindi che la parità non è conservata.

Dalle osservazioni sperimentali di numerosi processi di decadimento β si è visto che

- nei decadimenti β^- vengono sempre emessi un elettrone con valore medio dell'elicità $= -v_e/c$ e un antineutrino elettronico con elicità $= +1$;
- nei decadimenti β^+ vengono sempre emessi un positrone con valore medio dell'elicità $= +v_e/c$ e un neutrino elettronico con elicità $= -1$.

Queste proprietà implicano che nei decadimenti β **la violazione della parità è massima**, cioè i processi ottenuti mediante una riflessione spaziale dei processi deboli osservati sono vietati. In altre parole, una parziale conservazione della parità implicherebbe

¹I pioni hanno parità intrinseca -1 e il momento angolare orbitale degli stati finali è nullo (nel sistema del centro di massa).

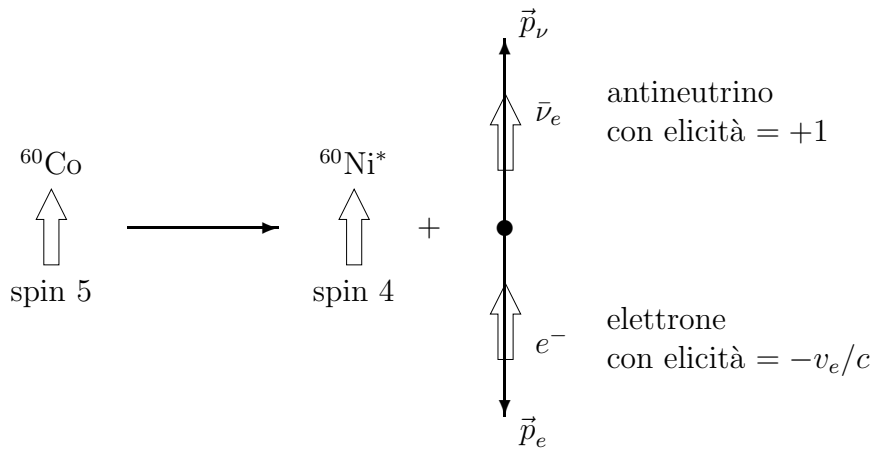


Figure 1.1: Configurazione preferenziale del decadimento (1.14).

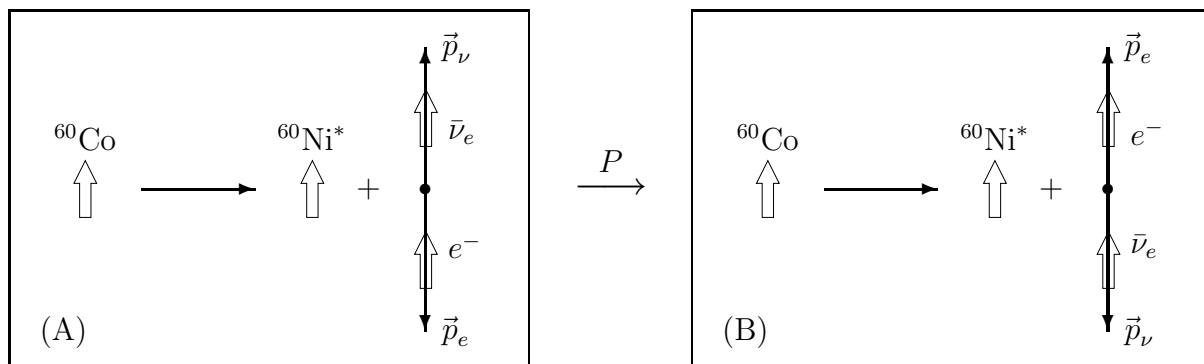


Figure 1.2: Inversione spaziale della configurazione preferenziale del decadimento (1.14).

l'esistenza di neutrini con elicità = +1 e antineutrini con elicità = -1, ma queste particelle non sono mai state osservate.

1.4.2 Stranezza

La stranezza S è un numero quantico additivo che viene associato ad alcune particelle adroniche (ad esempio, ai mesoni K^\pm , K^0 , \bar{K}^0 , ... e ai barioni Λ^0 , Σ^\pm , Σ^0 , Ξ^- , Ξ^0 , ...) per tenere conto del fatto che tali particelle compaiono sempre a coppie nei processi forti ed elettromagnetici a cui esse partecipano. L'assegnazione del valore della stranezza per alcuni mesoni e barioni è descritto nella Tabella 1.2, dove in parentesi è indicato per ciascuna particella il contenuto in termini dei quarks u (up), d (down), s (strange), con i numeri quantici additivi elencati nella Tabella 1.3.

La legge della conservazione della stranezza nelle interazioni forti comporta che mediante l'urto di due adroni non strani non sia possibile produrre una singola particella strana; per esempio,

$$\pi^+ + n \not\rightarrow K^+ + n, \quad (1.15)$$

mentre un K^+ può essere prodotto congiuntamente ad un'altra particella strana (pro-

| | |
|--|----------|
| $K^+ (u\bar{s}), K^0 (d\bar{s})$ | $S = +1$ |
| $\Lambda^0 (uds)$ | $S = -1$ |
| $\Sigma^+ (uus), \Sigma^0 (uds), \Sigma^- (dds)$ | $S = -1$ |
| $\Xi^0 (uss), \Xi^- (dss)$ | $S = -2$ |

Table 1.2: Stranezza di alcuni mesoni e barioni. Le corrispondenti antiparticelle hanno stranezza opposta.

| | B | Q | S |
|-----|-----|------|-----|
| u | 1/3 | 2/3 | 0 |
| d | 1/3 | -1/3 | 0 |
| s | 1/3 | -1/3 | -1 |

Table 1.3: Assegnazione dei numeri quantici additivi B (numero barionico), Q (carica elettrica) e S (stranezza) ai quark u, d, s . I corrispondenti antiquarks hanno numeri quantici opposti.

duzione associata), ad esempio

$$\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0, \quad (1.16a)$$

$$\pi^\pm + p \rightarrow K^+ + \Sigma^\pm. \quad (1.16b)$$

Altri processi forti con la partecipazione di particelle strane sono, ad esempio,

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad (1.17a)$$

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0, \quad (1.17b)$$

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^+ + K^-. \quad (1.17c)$$

In tutti questi processi la stranezza è conservata.

Al contrario dei processi forti ed elettromagnetici, i processi deboli possono avvenire con violazione di stranezza. Questa proprietà consente, per esempio, i decadimenti

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (\text{processo semi-leptonico}), \quad (1.18a)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (\text{processo adronico}), \quad (1.18b)$$

nei quali la stranezza non è conservata.

Chapter 2

Nozioni fondamentali di teoria quantistica dei campi

2.1 Introduzione

Nella meccanica quantistica non-relativistica l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda $\psi(\vec{x}, t)$ di una particella libera

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi \quad (2.1)$$

può essere ottenuta dalla relazione classica non-relativistica tra energia E ed impulso \vec{p}

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (2.2)$$

mediante sostituzione delle grandezze classiche E e \vec{p} con i corrispondenti operatori differenziali, ossia

$$E \longrightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.3a)$$

$$\vec{p} \longrightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (2.3b)$$

Associata all'equazione di Schrödinger vi è l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.4)$$

dove ρ (densità di probabilità) e \vec{j} (densità di corrente di probabilità) sono date da

$$\rho(t, \vec{x}) = |\psi(t, \vec{x})|^2, \quad (2.5)$$

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* (\vec{\nabla} \psi) - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right]. \quad (2.6)$$

L'equazione di continuità (2.4) ha un ruolo cruciale nell'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica. Dato un volume V nello spazio, utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = - \int_S \vec{j} \cdot \vec{n}_S dS, \quad (2.7)$$

dove S è la superficie che racchiude il volume V e \vec{n}_S è il versore normale alla superficie S . Quindi la variazione di probabilità nel volume V è uguale al flusso del vettore \vec{j} attraverso la superficie S . Per un volume infinito $\int_S \vec{j} \cdot \vec{n}_S dS = 0$; ne segue la conservazione globale della probabilità, ossia

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = 0, \quad (2.8)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

2.2 Equazione di Klein-Gordon

In analogia a quanto fatto nel caso non-relativistico, un'equazione quantistica relativistica può essere ottenuta dalla relazione classica relativistica tra energia e impulso

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.9)$$

mediante la sostituzione (2.3).

D'ora in poi useremo **unità naturali** ($\hbar = c = 1$) e **notazioni covarianti**¹. Perciò l'espressione (2.9) e le sostituzioni (2.3) assumono le seguenti forme compatte:

$$p^\mu p_\mu = m^2, \quad (2.10)$$

$$p^\mu \longrightarrow \hat{p}^\mu = i \partial^\mu. \quad (2.11)$$

In queste espressioni p^μ indica il quadri-vettore energia-impulso $p^\mu = (E, \vec{p})$ e $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. La sostituzione (2.11) trasforma la (2.10) nella relazione operatoriale $-\partial^\mu \partial_\mu = m^2$ che, applicata ad una funzione d'onda $\phi(x)$, implica l'**equazione di Klein-Gordon**

$$(\square + m^2) \phi = 0, \quad (2.12)$$

con $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$. Data la proprietà di invarianza dell'operatore $\partial^\mu \partial_\mu + m^2$ per trasformazioni di Lorentz, ne segue che l'equazione di Klein-Gordon è appropriata per la funzione d'onda di **particelle scalari** e **pseudoscalari**, cioè **bosoni con spin nullo**.

Sottraendo dall'equazione di Klein-Gordon (2.12), moltiplicata per ϕ^* , la sua complessa coniugata, moltiplicata per ϕ , si ottiene l'equazione di continuità scritta in forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.13)$$

con la quadri-corrente

$$j^\mu = i [\phi^* (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^*) \phi]. \quad (2.14)$$

Una corrente che obbedisce all'equazione di continuità è detta **corrente conservata**. Osserviamo che la componente temporale j^0 della quadri-corrente

$$j^0 = i \left[\phi^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi \right] \quad (2.15)$$

non è una quantità definita positiva e non può quindi essere interpretata come densità di probabilità. Questo problema dell'equazione di Klein-Gordon si presenta solo nell'ambito

¹Vedi Appendici A e B.

della meccanica quantistica (teoria ad una particella). La struttura (2.14) della quadricorrente è invece perfettamente interpretabile nell'ambito della teoria dei campi (vedi, ad esempio, [Itz80, Nac89, Ren90, Bil94]), dove j^0 è interpretata come densità di carica e quindi può assumere valori negativi.

Nella teoria dei campi classica ϕ non viene interpretato come una funzione d'onda, ma come un campo, mentre nella teoria dei campi quantistica ϕ viene interpretato come un operatore di campo in un opportuno spazio di Hilbert che descrive gli stati del sistema. Per lo studio della teoria dei campi è utile introdurre il formalismo lagrangiano, che permette, tra le altre cose, di ricavare l'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare (o pseudoscalare) mediante il seguente principio variazionale.

2.3 Principio variazionale ed equazioni di campo

Supponiamo di avere un insieme di campi $\varphi_i(x)$, con $i = 1, \dots, n$ (per esempio un insieme di n campi scalari, oppure il campo elettromagnetico $A^\alpha(x)$ con $\alpha = 0, 1, 2, 3$) con una **densità lagrangiana**²

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \quad (2.16)$$

che sia uno **scalare di Lorentz**. Poichè \mathcal{L} è uno scalare, la formulazione lagrangiana della teoria dei campi è particolarmente adatta a descrivere la dinamica relativistica con un formalismo esplicitamente covariante. Il formalismo hamiltoniano è meno adatto perchè l'hamiltoniana rappresenta l'energia del campo e si trasforma come la componente temporale del quadri-vettore energia-impulso.

Definiamo l'**integrale d'azione**

$$I(\Omega) \equiv \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \quad (2.17)$$

su una regione spazio-temporale Ω arbitraria. Secondo il **principio variazionale**, l'integrale d'azione ha un valore stazionario, cioè

$$\delta_v I(\Omega) = 0, \quad (2.18)$$

per variazioni infinitesime arbitrarie dei campi che si annullano sull'iper-superficie $\partial\Omega$ che delimita Ω , ossia variazioni del tipo

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi'_i(x) = \varphi_i(x) + \delta_v \varphi_i(x), \quad (2.19a)$$

con

$$\delta_v \varphi_i(x) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.19b)$$

La variazione dell'integrale d'azione per la trasformazione (2.19) è data da

$$\begin{aligned} \delta_v I(\Omega) &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta_v \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \underbrace{\delta_v (\partial_\mu \varphi_i)}_{\partial_\mu (\delta_v \varphi_i)} \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta_v \varphi_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \delta_v \varphi_i \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right) \delta_v \varphi_i \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

²La densità lagrangiana $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x))$ è una funzione dello spazio e del tempo, mentre la lagrangiana $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x)$ è solamente funzione del tempo.

Utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \delta_v \varphi_i \right) = \int_{\partial\Omega} dS_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \delta_v \varphi_i = 0, \quad (2.21)$$

perchè $\delta_v \varphi_i = 0$ sull'iper-superficie $\partial\Omega$. Quindi, dal principio variazionale (2.18) ricaviamo

$$0 = \delta_v I(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \right] \delta_v \varphi_i. \quad (2.22)$$

Data l'arbitrarietà delle variazioni $\delta_v \varphi_i$, si ottengono le **equazioni di campo** (equazioni di Euler-Lagrange)

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.23)$$

Sottolineiamo che le proprietà di covarianza delle equazioni di campo (2.23) dipendono dal requisito che la densità lagrangiana (2.16) sia un invariante di Lorentz. Questa condizione determina la struttura esplicita della densità lagrangiana di ogni singolo campo.

2.4 Teorema di Noether e conservazione energia-impulso

Il **teorema di Noether** stabilisce una connessione tra simmetrie per trasformazioni continue e leggi di conservazione. Consideriamo una trasformazione infinitesima degli n campi φ_i :

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi'_i(x) = \varphi_i(x) + \delta \varphi_i(x), \quad (2.24)$$

dove, contrariamente alla trasformazione (2.19) usata per ricavare le equazioni di campo, la variazione $\delta \varphi_i(x)$ non è vincolata ad annullarsi su una superficie. Questa trasformazione costituisce una simmetria se le equazioni di campo restano invarianti. Ciò succede se l'azione (2.17) è invariante a meno di un termine di superficie. Infatti, il vincolo (2.19b) implica che un termine addizionale di superficie non contribuisce alle equazioni del moto. Quindi, la trasformazione (2.24) è una simmetria se la densità lagrangiana è invariante a meno di una quadri-divergenza:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \mathcal{L} = \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu}. \quad (2.25)$$

Dalla (2.20) è evidente che, utilizzando le equazioni di campo (2.23), la variazione della densità lagrangiana per la trasformazione (2.24) è data da

$$\delta \mathcal{L} = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \delta \varphi_i \right). \quad (2.26)$$

Perciò, se la trasformazione (2.24) è una simmetria si deve avere

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \delta \varphi_i \right) = \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \delta \varphi_i - \mathcal{J}^{\mu} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Questa è una equazione di continuità per la **corrente**

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta \varphi_i - \mathcal{J}^\mu, \quad (2.28)$$

che implica l'esistenza di una **carica** Q conservata nel tempo data da

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \delta \varphi_i - \mathcal{J}^0 \right). \quad (2.29)$$

2.4.1 Traslazioni spazio-temporali

Applicando il teorema di Noether al caso dell'invarianza per traslazioni spazio-temporali

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (2.30)$$

si ottiene la **conservazione del quadri-vettore energia-impulso**. Infatti, la variazione dei campi $\varphi_i(x)$ e della densità lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ è data da

$$\delta \varphi_i(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi_i(x), \quad \delta \mathcal{L}(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x). \quad (2.31)$$

Perciò

$$\mathcal{J}^\mu = \epsilon^\mu \mathcal{L}(x) \quad (2.32)$$

e si ottiene

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \epsilon^\nu \partial_\nu \varphi_i - \epsilon^\mu \mathcal{L} \right) = 0. \quad (2.33)$$

Poichè il quadri-vettore ϵ^μ è arbitrario, si ottengono le quattro equazioni di continuità

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3), \quad (2.34)$$

dove

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial^\nu \varphi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.35)$$

è il **tenore energia-impulso**. Quindi, ci sono quattro correnti conservate, $T^{\mu\nu}$ con $\nu = 0, 1, 2, 3$, e quattro quantità costanti nel tempo che formano il quadri-vettore energia-impulso:

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(x) = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial^\nu \varphi_i - g^{0\nu} \mathcal{L} \right). \quad (2.36)$$

La componente temporale di P^ν è l'hamiltoniana del campo, mentre le componenti spaziali formano il tri-vettore l'impulso del campo:

$$H = P^0 = \int d^3x T^{00}(x) = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial^0 \varphi_i - \mathcal{L} \right), \quad (2.37a)$$

$$P^k = \int d^3x T^{0k}(x) = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial^k \varphi_i \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.37b)$$

2.4.2 Campi complessi

Se i campi φ_i sono complessi (non-hermitiani se quantizzati), ciascun campo è formato da due gradi di libertà, che possono essere rappresentate dalle sue parti reale e immaginaria oppure da φ_i e φ_i^* (φ_i^\dagger se i campi sono quantizzati). In tal caso l'espressione (2.28) per la corrente conservata deve essere modificata in

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta \varphi_i + \delta \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i^*)} - \mathcal{J}^\mu, \quad (2.38)$$

Le equazioni che seguono la (2.28) devono essere modificate in modo simile, aggiungendo il contributo relativo alla variazione di φ_i^* . In particolare,

$$Q = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \delta \varphi_i + \delta \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i^*)} - \mathcal{J}^0 \right), \quad (2.39a)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial^\nu \varphi_i + \partial^\nu \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i^*)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.39b)$$

$$H = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial^0 \varphi_i + \partial^0 \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i^*)} - \mathcal{L} \right), \quad (2.39c)$$

$$P^k = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial^k \varphi_i + \partial^k \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i^*)} \right) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.39d)$$

2.5 Simmetria di gauge globale e conservazione della carica

Il teorema di Noether implica che la conservazione della carica è una conseguenza dell'invarianza della densità lagrangiana per trasformazioni di fase dei campi del tipo

$$\varphi_j(x) \rightarrow \varphi'_j(x) = e^{i\vartheta} \varphi_j(x) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.40)$$

dove ϑ è un numero reale arbitrario. Sottolineiamo che per carica non si intende solamente la **carica elettrica**, ma anche altre cariche conservate, come il **numero barionico** ed i **numeri leptonici**.

Una trasformazione del tipo (2.40) è chiamata trasformazione di gauge globale, dove l'aggettivo "globale" indica che il parametro ϑ non dipende da x e la fase del campo viene cambiata globalmente su tutto lo spazio-tempo. L'invarianza della densità lagrangiana per trasformazioni di gauge globali viene chiamata simmetria di gauge globale. L'esistenza di una invarianza di questo tipo non è una sorpresa se si riflette sul fatto che nella meccanica quantistica le fasi relative delle funzioni d'onda hanno un'importanza cruciale per determinare gli effetti di interferenza, ma la fase assoluta di una funzione d'onda non è misurabile ed è completamente arbitraria.

Chiaramente una trasformazione di gauge globale è possibile solamente per campi complessi (non-hermitiani). Poichè le variazioni di $\varphi_j(x)$ e $\varphi_j^*(x)$ per ϑ infinitesimo sono date da

$$\delta \varphi_j = i \vartheta \varphi_j, \quad \delta \varphi_j^* = -i \vartheta \varphi_j^* \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.41)$$

e $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$, perchè la densità lagrangiana è invariante, si ottiene un'equazione di continuità per la corrente

$$j^\mu = i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \varphi_i - \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i^*)} \right) \quad (2.42)$$

e la conservazione nel tempo della carica

$$Q = \int d^3x j^0(x) = i \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \varphi_i - \varphi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i^*)} \right). \quad (2.43)$$

La trasformazione di gauge globale (2.40) consiste in una variazione comune delle fasi degli n campi $\varphi_i(x)$. Una tale trasformazione appartiene al gruppo abeliano continuo di simmetria $U(1)$ delle trasformazioni di fase dipendenti da un parametro. Consideriamo ora un gruppo non-abeliano di trasformazioni continue \mathcal{G} di ordine N (per esempio $SU(N)^3$), le cui trasformazioni dipendono da N parametri reali ϑ_a , con $a = 1, \dots, N$. In generale queste trasformazioni mescolano gli n campi $\varphi_i(x)$ e supponiamo che essi formino una rappresentazione irriducibile del gruppo \mathcal{G} . Scrivendo i campi $\varphi_i(x)$ nella forma matriciale

$$\underline{\varphi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

le loro variazioni per ϑ_a infinitesimi ($a = 1, \dots, N$) sono date da

$$\delta \underline{\varphi} = i \vartheta_a L_a \underline{\varphi}, \quad \delta \underline{\varphi}^\dagger = -i \vartheta_a \underline{\varphi}^\dagger L_a^\dagger. \quad (2.45)$$

L_a con $a = 1, \dots, N$ sono le matrici hermitiane $n \times n$ che costituiscono la rappresentazione n -dimensionale dei generatori del gruppo e soddisfano alle relazioni di commutazione

$$[L_a, L_b] = i f_{abc} L_c, \quad (2.46)$$

dove i numeri reali f_{abc} ($a, b, c = 1, \dots, N$) sono le costanti di struttura del gruppo⁴. Poichè i parametri arbitrari ϑ_a sono indipendenti, si ottiene una corrente conservata per ogni generatore del gruppo:

$$j_a^\mu = i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \underline{\varphi})} L_a \underline{\varphi} - \underline{\varphi}^\dagger L_a^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \underline{\varphi}^\dagger)} \right). \quad (2.47)$$

Le corrispondenti cariche conservate nel tempo sono

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x) = i \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \underline{\varphi})} L_a \underline{\varphi} - \underline{\varphi}^\dagger L_a^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \underline{\varphi}^\dagger)} \right). \quad (2.48)$$

³ $U(N)$ è il gruppo di trasformazioni unitarie di ordine N ed è scomponibile nel prodotto diretto $U(N) = SU(N) \times U(1)$ dove $SU(N)$ è il gruppo delle trasformazioni unitarie unimodulari.

⁴Ad esempio, il tripletto pionico π^+, π^0, π^- forma una rappresentazione irriducibile del gruppo delle trasformazioni di isospin $SU(2)_I$, le cui costanti di struttura sono date da $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$. La rappresentazione tri-dimensionale dei generatori del gruppo è data da $(L_a)_{jk} = -i\varepsilon_{ajk}$.

2.6 Campo scalare reale

La densità lagrangiana di un campo scalare (o pseudoscalare) reale libero (cioè non interagente con altri campi) è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \right] \quad (2.49)$$

Tenendo conto che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad (2.50)$$

l'applicazione della formula (2.23) per l'equazione di campo, che nel caso del campo ϕ si scrive

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.51)$$

conduce immediatamente all'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \phi = 0. \quad (2.52)$$

Poichè il campo ϕ è reale, è evidente che la corrente (2.14) è identicamente nulla. Ciò corrisponde al fatto che per un campo reale non esiste una simmetria di gauge globale del tipo (2.40), per cui non esiste una corrente e una carica conservata. Perciò un campo scalare reale ha carica nulla e descrive particelle neutre (ad esempio, il mesone π^0 è un bosone pseudoscalare neutro).

La soluzione generale dell'equazione di Klein-Gordon per un campo reale $\phi(x)$ è data dallo sviluppo integrale di Fourier

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{ip \cdot x} \right]_{p_0=E_{\vec{p}}}, \quad (2.53)$$

dove $E_{\vec{p}}$ è l'energia dei modi di oscillazione data dalla formula relativistica

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.54)$$

Il fattore $(2E_{\vec{p}})^{-1/2}$ è stato inserito nella (2.53) per opportunità di normalizzazione.

Scrivendo l'equazione di Klein-Gordon nella forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi = 0, \quad (2.55)$$

è chiaro che essa descrive un infinito continuo di oscillatori armonici, uno per ciascun punto dello spazio, accoppiati dal termine $\vec{\nabla}^2 \phi$ (il campo ϕ in ogni punto dello spazio può essere identificato con la coordinata q di un oscillatore armonico la cui equazione del moto è, trascurando il termine di accoppiamento, $\ddot{q} + m^2 q = 0$). Quindi, è possibile quantizzare il campo ϕ in analogia con la quantizzazione dell'oscillatore armonico. Essendo però gli oscillatori armonici nei vari punti dello spazio accoppiati, non possono essere quantizzati separatamente. Passando nello spazio degli impulsi, si trova che ciascun modo dell'espansione integrale di Fourier (2.53) rappresenta un oscillatore armonico

indipendente e può essere quantizzato seguendo il procedimento canonico. Per fare ciò, calcoliamo l'hamiltoniana, che rappresenta l'energia del campo ed è conservata nel tempo. Utilizzando la formula generale (2.37a) si ottiene:

$$H = \int d^3x [(\partial_0\phi)^2 - \mathcal{L}] = \int d^3x \frac{1}{2} [(\partial_0\phi)^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2]. \quad (2.56)$$

Utilizzando per il campo ϕ l'espansione (2.53), si ottiene

$$H = \frac{1}{2} \int d^3p E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^*). \quad (2.57)$$

Questa è la somma di un continuo infinito di hamiltoniane $H_{\vec{p}} = \frac{1}{2} E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^*)$, ciascuna corrispondente ad un oscillatore armonico⁵. Quindi ciascun modo dello sviluppo integrale di Fourier del campo può essere quantizzato come un oscillatore armonico indipendente. Gli $a_{\vec{p}}$ diventano degli operatori in uno spazio di Hilbert di stati che rappresentano i diversi sistemi fisici formati da una o più particelle e si ha $a_{\vec{p}}^* \rightarrow a_{\vec{p}}^\dagger$:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]_{p_0=E_{\vec{p}}}. \quad (2.58)$$

Perciò, un campo reale scalare quantizzato è un operatore hermitiano in un opportuno spazio di Hilbert che descrive gli stati del sistema. Gli operatori $a_{\vec{p}}$ e $a_{\vec{p}}^\dagger$ soddisfano le relazioni di commutazione canoniche

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.59a)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 \quad (2.59b)$$

e vengono interpretati, rispettivamente, come operatori di distruzione e di creazione di particelle secondo il ragionamento seguente. L'**operatore hamiltoniano** è dato da

$$H = \frac{1}{2} \int d^3p E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger). \quad (2.60)$$

Per trovare le autofunzioni e gli autovalori dell'hamiltoniana (2.60) consideriamo i commutatori $[H, a_{\vec{p}}]$ e $[H, a_{\vec{p}}^\dagger]$. Utilizzando le relazioni di commutazione (2.59) si trova

$$[H, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}, \quad (2.61a)$$

$$[H, a_{\vec{p}}^\dagger] = E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger. \quad (2.61b)$$

⁵Ricordiamo che l'hamiltoniana di un oscillatore armonico,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \omega \left(\frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega x^2}{2} \right)$$

può essere scritta come

$$H = \frac{1}{2} \omega (a^\dagger a + a a^\dagger), \quad \text{con} \quad a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}.$$

Dalla regola di commutazione canonica $[x, p] = i$ si ricava $[a, a^\dagger] = 1$

Consideriamo ora un autostato $|E\rangle$ con energia E dell'hamiltoniana, cioè tale che

$$H |E\rangle = E |E\rangle . \quad (2.62)$$

Utilizzando le relazioni di commutazione (2.61), per gli stati $a_{\vec{p}}|E\rangle$ e $a_{\vec{p}}^\dagger|E\rangle$ si ottiene

$$H a_{\vec{p}}|E\rangle = (E - E_{\vec{p}}) a_{\vec{p}}|E\rangle , \quad (2.63a)$$

$$H a_{\vec{p}}^\dagger|E\rangle = (E + E_{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^\dagger|E\rangle . \quad (2.63b)$$

Quindi gli operatori $a_{\vec{p}}$ e $a_{\vec{p}}^\dagger$ rispettivamente distruggono e creano quanti (particelle) con energia $E_{\vec{p}}$. Analogamente, utilizzando l'operatore impulso \vec{P} dato dalla (2.37b), si può dimostrare che gli operatori $a_{\vec{p}}$ e $a_{\vec{p}}^\dagger$ rispettivamente distruggono e creano quanti (particelle) con impulso \vec{p} . Quindi si ha:

$$a_{\vec{p}} \iff \text{operatore di distruzione di un quanto con quadri-impulso } (E_{\vec{p}}, \vec{p}) , \quad (2.64a)$$

$$a_{\vec{p}}^\dagger \iff \text{operatore di creazione di un quanto con quadri-impulso } (E_{\vec{p}}, \vec{p}) . \quad (2.64b)$$

Inoltre, l'operatore hamiltoniano è definito positivo. Infatti per un generico stato $|\alpha\rangle$ si ha

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H | \alpha \rangle &= \frac{1}{2} \int d^3p E_{\vec{p}} \left(\langle \alpha | a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} | \alpha \rangle + \langle \alpha | a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger | \alpha \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3p E_{\vec{p}} \sum_{\beta} \left(\langle \alpha | a_{\vec{p}}^\dagger | \beta \rangle \langle \beta | a_{\vec{p}} | \alpha \rangle + \langle \alpha | a_{\vec{p}} | \beta \rangle \langle \beta | a_{\vec{p}}^\dagger | \alpha \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3p E_{\vec{p}} \sum_{\beta} \left(|\langle \beta | a_{\vec{p}} | \alpha \rangle|^2 + |\langle \alpha | a_{\vec{p}} | \beta \rangle|^2 \right) \geq 0 . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Quindi gli autovalori dell'hamiltoniana sono definiti positivi ed esiste uno autostato dell'hamiltoniana $|0\rangle$ con energia minima che corrisponde al vuoto. Qualunque sia il valore di \vec{p} , si deve avere

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = 0 , \quad (2.66)$$

altrimenti lo stato $a_{\vec{p}} |0\rangle$ sarebbe un autostato dell'hamiltoniana con energia minore di quella del vuoto. Notiamo però che l'hamiltoniana (2.60) implica che l'energia del vuoto è infinita. Infatti, utilizzando le regole di commutazione (2.59) l'operatore hamiltoniano (2.60) può essere riscritto nella forma

$$H = \int d^3p E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right) . \quad (2.67)$$

Il secondo termine in questa espressione è infinito e rappresenta l'energia del vuoto:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int d^3p E_{\vec{p}} \frac{1}{2} \delta^3(0) . \quad (2.68)$$

La presenza di questo termine nell'hamiltoniana non è una sorpresa, perchè è dovuto alla somma delle energie di punto zero di tutti gli infiniti modi del campo. Però, fortunatamente, l'energia del vuoto non è osservabile, perchè gli esperimenti possono misurare

solamente differenze di energia dallo stato fondamentale, cioè dallo stato di vuoto. È possibile quindi ignorare il termine infinito nell'hamiltoniana ridefinendo la scala dell'energia in modo che l'energia del vuoto sia nulla. A tal scopo si impone una prescrizione di **ordinamento normale** degli operatori, secondo la quale nell'espressione quantistica di tutti gli operatori corrispondenti a quantità fisiche (come l'energia, l'impulso, la carica, etc.) gli operatori di creazione e distruzione devono essere riordinati in modo che tutti gli operatori di distruzione compaiono sulla destra:

$$:a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger: = a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}}, \quad (2.69)$$

$$:a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}: = a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} \quad (\text{invariato}). \quad (2.70)$$

In tal modo, dalla (2.60) si ottiene l'operatore hamiltoniano ordinato normalmente

$$:H: = \int d^3p E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (2.71)$$

e l'energia del vuoto è nulla:

$$\langle 0 | :H: | 0 \rangle = 0. \quad (2.72)$$

Tutti gli autostati dell'hamiltoniana, che costituiscono uno spazio di Hilbert detto **spazio di Fock**, possono essere generati mediante l'applicazione degli operatori di creazione $a_{\vec{p}}^\dagger$ sullo stato di vuoto. Ad esempio, lo stato formato da una particella con impulso \vec{p} è dato da

$$|1_{\vec{p}}\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (2.73)$$

lo stato formato da $n_{\vec{p}}$ particelle con impulso \vec{p} è dato da

$$|n_{\vec{p}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{p}}!}} (a_{\vec{p}}^\dagger)^{n_{\vec{p}}} |0\rangle \quad (2.74)$$

e lo stato formato da $n_{\vec{p}}$ particelle con impulso \vec{p} e $n_{\vec{p}'}$ particelle con impulso \vec{p}' è dato da

$$|n_{\vec{p}}, n_{\vec{p}'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{p}}! n_{\vec{p}'}!}} (a_{\vec{p}}^\dagger)^{n_{\vec{p}}} (a_{\vec{p}'}^\dagger)^{n_{\vec{p}'}} |0\rangle, \quad (2.75)$$

con coefficienti che tengono conto della normalizzazione degli stati ($\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle n_{\vec{p}}|n_{\vec{p}}\rangle = 1$, etc.). In particolare, si vede che, in virtù dei commutatori (2.59b), gli stati sono completamente simmetrici per lo scambio di due particelle e quindi la statistica è automaticamente quella relativa ai bosoni (**statistica di Bose-Einstein**). Il presente formalismo si può quindi applicare, oltre che a particelle scalari (e pseudoscalari), anche alle altre particelle di spin intero, come ad esempio i fotoni che sono i quanti del campo elettromagnetico. Inoltre, con opportune modifiche, il formalismo può essere esteso anche ai fermioni.

2.7 Campo scalare complesso

Un campo scalare (o pseudoscalare) complesso descrive bosoni carichi con spin nullo. Infatti, se il campo è complesso la corrente (2.14) e la densità di carica (2.15) non si annullano identicamente come succede per un campo scalare reale.

La versione quantizzata di un campo scalare (o pseudoscalare) complesso è un operatore di campo non hermitiano ($\phi^\dagger \neq \phi$) nello spazio di Hilbert degli stati del sistema. La sua densità lagrangiana è

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (2.76)$$

Dalla formula generale (2.23) per le equazioni di campo si ottiene l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \phi = 0. \quad (2.77)$$

La densità lagrangiana (2.76) è invariante per trasformazioni di gauge globali del tipo (2.40), cioè per le trasformazioni di fase del campo ϕ

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x). \quad (2.78)$$

Utilizzando la formula generale (2.42) si ricava la corrente conservata

$$j^\mu = i[\phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi], \quad (2.79)$$

che è la versione quantistica della corrente (2.14).

Lo sviluppo integrale di Fourier del campo quantizzato ϕ è dato da un'espressione analoga alla (2.58), in cui ogni modo è trattato come un oscillatore armonico quantizzato indipendente:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]_{p_0=E_{\vec{p}}}. \quad (2.80)$$

Poichè il campo non è hermitiano, gli operatori $a_{\vec{p}}$ e $b_{\vec{p}}$ sono indipendenti. Essi soddisfino le relazioni di commutazione canoniche

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.81a)$$

$$[b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.81b)$$

mentre tutti gli altri possibili commutatori sono nulli. Seguendo il ragionamento presentato nella sezione 2.6, gli operatori $a_{\vec{p}}$, $b_{\vec{p}}$ e $a_{\vec{p}'}^\dagger$, $b_{\vec{p}'}^\dagger$ vengono interpretati, rispettivamente, come operatori di distruzione e di creazione di stati di particella. Poichè gli operatori $a_{\vec{p}}$ e $b_{\vec{p}}$ sono indipendenti, gli stati creati da $a_{\vec{p}'}^\dagger$ e $b_{\vec{p}'}^\dagger$ sono diversi e vengono chiamati, rispettivamente, stati di particella e stati di antiparticella. L'operatore hamiltoniano H e l'operatore di carica Q sono dati da

$$H = i \int d^3x [(\partial_0 \phi^\dagger)(\partial_0 \phi) + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi] = \int d^3p E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger), \quad (2.82)$$

$$Q = i \int d^3x [\phi^\dagger (\partial_0 \phi) - (\partial_0 \phi^\dagger) \phi] = \int d^3p (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger). \quad (2.83)$$

Applicando la prescrizione di ordine normale per evitare un'energia e una carica infinite del vuoto, si ottiene

$$:H: = \int d^3p E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}), \quad (2.84)$$

$$:Q: = \int d^3p (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}). \quad (2.85)$$

Quindi si vede che gli stati di antiparticella del tipo $|\bar{1}_{\vec{p}}\rangle = b_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$ hanno carica opposta rispetto a quelli di particella, che sono del tipo $|1_{\vec{p}}\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$:

$$\langle 1_{\vec{p}}| : Q : |1_{\vec{p}}\rangle = +1, \quad (2.86a)$$

$$\langle \bar{1}_{\vec{p}}| : Q : |\bar{1}_{\vec{p}}\rangle = -1. \quad (2.86b)$$

2.8 Campo spinoriale

Il campo $\psi(x)$ di un fermione con spin $1/2$ (ad esempio l'elettrone, il muone, il neutrino, etc.) libero soddisfa all'equazione di Dirac

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0, \quad (2.87)$$

dove

$$\rlap{\not{D}} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu, \quad \psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

e γ^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ sono quattro matrici 4×4 che soddisfano alle relazioni di anticommutazione⁶

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.89)$$

Queste condizioni implicano che le quattro matrici γ^μ anticommutano tra di loro ed inoltre che i loro quadrati sono dati da

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^k)^2 = -1 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.90)$$

Inoltre, per ottenere una equazione di continuità è necessario che la matrice γ^0 sia hermitiana:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0. \quad (2.91)$$

Dalle (2.91) e (2.89) si ottiene che le hermitiane delle matrici γ^μ sono date da

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (2.92)$$

da cui discende in particolare che le γ^k sono anti-hermitiane:

$$\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k. \quad (2.93)$$

⁶Queste relazioni di anticommutazione discendono dalla richiesta che l'equazione di Dirac sia compatibile l'equazione di Klein-Gordon, che esprime la relazione di dispersione relativistica tra energia e impulso. Per ottenere l'equazione di Klein-Gordon moltiplichiamo a sinistra l'equazione di Dirac (2.87) $i\gamma^\mu \partial_\mu + m$. Si ottiene

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = -\left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\partial_\mu \partial_\nu + m^2\right]\psi.$$

Affinchè questa equazione coincida con l'equazione di Klein-Gordon $(\square + m^2)\psi = 0$, è necessario che le matrici γ soddisfino alle relazioni di anticommutazione (2.89). Da questa derivazione discende anche che il coefficiente m nell'operatore di Dirac dev'essere identificato con la massa della particella.

Definiamo anche una matrice γ^5 tale che⁷

$$\gamma^5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (2.94)$$

(si utilizzerà anche la notazione γ_5 con l'intesa che $\gamma_5 = \gamma^5$). Dalle proprietà delle matrici γ^μ si ottiene che

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (2.95a)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (2.95b)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (2.95c)$$

Inoltre, si può dimostrare che qualsiasi matrice 4×4 può essere scritta come una combinazione lineare delle seguenti 16 matrici Γ^a ($a = 1, 2, \dots, 16$) ottenute da prodotti di matrici γ^μ :

$$\Gamma^1 \quad \mathbb{1} \quad (2.96a)$$

$$\Gamma^2 - \Gamma^5 \quad \gamma^\mu \quad (2.96b)$$

$$\Gamma^6 - \Gamma^{11} \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{prodotti di 2 matrici } \gamma) \quad (2.96c)$$

$$\Gamma^{12} - \Gamma^{15} \quad \gamma^\mu \gamma^5 \quad (\text{prodotti di 3 matrici } \gamma) \quad (2.96d)$$

$$\Gamma^{16} \quad \gamma^5 \quad (\text{prodotto di 4 matrici } \gamma) \quad (2.96e)$$

La densità lagrangiana per il campo spinoriale ψ è

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi, \quad (2.97)$$

dove è stato introdotto lo **spinore aggiunto** $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$. Dalla formula generale (2.23) per le equazioni di campo si ottiene l'equazione di Dirac (2.87).

La densità lagrangiana di Dirac (2.97) è chiaramente invariante per trasformazioni di gauge globali del tipo (2.40), cioè

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x). \quad (2.98)$$

Perciò esiste una corrente conservata che può essere ottenuta dalla formula generale (2.42):

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.99)$$

a cui corrisponde la carica conservata nel tempo

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x). \quad (2.100)$$

Lo sviluppo integrale di Fourier per il campo spinoriale quantizzato ψ è dato da

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_r \left[a_{\vec{p}}^{(r)} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right]_{p_0=E_{\vec{p}}}, \quad (2.101)$$

⁷Notare che la nostra definizione di γ^5 differisce di un segno rispetto a quella di alcuni autori (ad esempio [Itz80, Nac89, Ren90]).

dove $u^{(r)}(\vec{p})$ e $v^{(r)}(\vec{p})$ sono degli spinori che soddisfano le equazioni

$$(\not{p} - m) u^{(r)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.102a)$$

$$(\not{p} + m) v^{(r)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.102b)$$

e tali che

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(r')}(\vec{p}) = 2m \delta_{rr'}, \quad (2.103a)$$

$$\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) v^{(r')}(\vec{p}) = -2m \delta_{rr'}, \quad (2.103b)$$

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) v^{(r')}(\vec{p}) = 0. \quad (2.103c)$$

L'indice r può assumere due valori, che corrispondono ai due stati di polarizzazione di un campo con spin $1/2$. Per un fermione con impulso \vec{p} è spesso conveniente considerare i due stati di polarizzazione lungo la direzione individuata da \vec{p} , che corrispondono ai due possibili stati di elicità della particella.

Gli operatori $a_{\vec{p}}^{(r)}$ e $b_{\vec{p}}^{(r)}$ soddisfano le relazioni di **anticommutazione**

$$\{a_{\vec{p}}^{(r)}, a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rr'}, \quad (2.104a)$$

$$\{b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rr'}, \quad (2.104b)$$

mentre tutti gli altri possibili **anticommutatori** sono nulli. Seguendo i ragionamenti presentati nelle sezioni 2.6 e 2.7, gli operatori $a_{\vec{p}}^{(r)}$ e $a_{\vec{p}'}^{(r)\dagger}$, vengono interpretati, rispettivamente, come operatori di distruzione e di creazione di stati di particella, mentre gli operatori $b_{\vec{p}}^{(r)}$ e $b_{\vec{p}'}^{(r)\dagger}$ vengono interpretati, rispettivamente, come operatori di distruzione e di creazione di stati di antiparticella. Infatti, dalle formule generali (2.37a) e (2.43) per l'operatore hamiltoniano H e l'operatore di carica Q si ottengono le espressioni⁸

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m) \psi(x) = \int d^3p E_{\vec{p}} \sum_r (a_{\vec{p}}^{(r)\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)} - b_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}), \quad (2.105)$$

$$Q = i \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \int d^3p \sum_r (a_{\vec{p}}^{(r)\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)} + b_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}). \quad (2.106)$$

È chiaro che le proprietà di anticommutazione degli operatori fermionici sono cruciali per cancellare il segno negativo nell'espressione (2.105) ed ottenere un'hamiltoniana definita positiva:

$$H = \int d^3p E_{\vec{p}} \sum_r (a_{\vec{p}}^{(r)\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)} + b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}) + 2 \int d^3p E_{\vec{p}} \delta(0). \quad (2.107)$$

Quindi la prescrizione di ordine normale adottata nel caso di campi bosonici per sottrarre l'energia infinita del vuoto deve essere modificata per tenere conto delle proprietà di anticommutazione degli operatori fermionici:

$$\begin{aligned} :a_{\vec{p}}^{(r)} a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}: &= -a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)}, & :b_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}: &= -b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}, \\ :a_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}: &= -b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)}, & :b_{\vec{p}}^{(r)} a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}: &= -a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

⁸Ricordiamo che

$$\nabla^k \equiv \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

mentre per tutte le altre coppie possibili la prescrizione di ordine normale lascia la coppia inalterata. L'operatore hamiltoniano e quello di carica ordinati normalmente sono dati da

$$:H: = \int d^3p E_{\vec{p}} \sum_r (a_{\vec{p}}^{(r)\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)} + b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}), \quad (2.109)$$

$$:Q: = \int d^3p \sum_r (a_{\vec{p}}^{(r)\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)} - b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}). \quad (2.110)$$

Perciò sia gli stati di particella $|1_{\vec{p}}^{(r)}\rangle = a_{\vec{p}}^{(r)\dagger}|0\rangle$ che quelli di antiparticella $|\bar{1}_{\vec{p}}^{(r)}\rangle = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}|0\rangle$ hanno energia positiva:

$$\langle 1_{\vec{p}}^{(r)} | :H: | 1_{\vec{p}}^{(r)} \rangle = E_{\vec{p}}, \quad (2.111a)$$

$$\langle \bar{1}_{\vec{p}}^{(r)} | :H: | \bar{1}_{\vec{p}}^{(r)} \rangle = E_{\vec{p}}. \quad (2.111b)$$

Grazie alle proprietà di anticommutazione degli operatori fermionici gli stati di particella e di antiparticella hanno carica opposta:

$$\langle 1_{\vec{p}}^{(r)} | :Q: | 1_{\vec{p}}^{(r)} \rangle = +1, \quad (2.112a)$$

$$\langle \bar{1}_{\vec{p}}^{(r)} | :Q: | \bar{1}_{\vec{p}}^{(r)} \rangle = -1. \quad (2.112b)$$

Inoltre, utilizzando le regole di anticommutazione degli operatori di creazione è immediato verificare che gli stati con più di un fermione sono completamente antisimmetrici per scambio di due fermioni, come è richiesto dalla **statistica di Fermi-Dirac**. Ad esempio, per lo stato con due fermioni con diversi impulsi e polarizzazioni si ha

$$|1_{\vec{p}}^{(r)}, 1_{\vec{p}'}^{(r')}\rangle = a_{\vec{p}}^{(r)\dagger} a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}|0\rangle = -a_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} a_{\vec{p}}^{(r)\dagger}|0\rangle = -|1_{\vec{p}'}^{(r')}, 1_{\vec{p}}^{(r)}\rangle. \quad (2.113)$$

Ne segue immediatamente che lo stato con due fermioni con stesso impulso e polarizzazione è identicamente nullo, in accordo con il **principio di Pauli**.

Una quantità importante per il calcolo delle ampiezze dei processi di interazione è il propagatore di Feynman

$$G(x - x') \equiv \langle 0 | T[\psi(x)\bar{\psi}(x')] | 0 \rangle, \quad (2.114)$$

con il prodotto cronologico di Wick $T[A(x)B(x')]$ dato da

$$T[A(x)B(x')] = \begin{cases} A(x)B(x') & \text{se } x_0 > x'_0, \\ \pm B(x')A(x) & \text{se } x'_0 > x_0, \end{cases} \quad (2.115)$$

con il segno $+$ per operatori bosonici ed il segno $-$ per operatori fermionici. Utilizzando l'espansione integrale (2.101) per il campo ψ si ottiene

$$G(x - x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-x')}. \quad (2.116)$$

Quindi l'espressione per il propagatore $G(p)$ nello spazio degli impulsi è data da

$$G(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.117)$$

2.9 Campo Elettromagnetico

Il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{B} possono essere espressi mediante il quadri-potenziale A^μ nel modo seguente

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0, \quad (2.118a)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.118b)$$

Poichè i campi elettrico e magnetico considerati individualmente non si trasformano in modo covariante per trasformazioni di Lorentz, una teoria relativistica del campo elettromagnetico deve essere formulata in termini del campo quadri-vettoriale A^μ . I campi elettrico e magnetico formano le componenti del tensore (antisimmetrico) del campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.119)$$

Infatti, si ha

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in forma quadri-vettoriale:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = e \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = e \vec{j}, \end{array} \right\} \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu, \quad (2.121a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \end{array} \right\} \iff \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0, \quad (2.121b)$$

dove j^ν è il quadri-vettore densità di corrente ed e è la carica elettrica elementare. Nella scrittura di queste equazioni abbiamo fatto uso delle unità (razionalizzate) di Heaviside-Lorentz; in queste unità la costante di struttura fine $\alpha = 1/137$ è legata alla carica elettrica elementare e dalla relazione

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} \quad \text{in unità naturali}. \quad (2.122)$$

Notiamo due importanti proprietà:

1. La natura antisimmetrica di $F^{\mu\nu}$ implica che la quadri-corrente j^ν è conservata: infatti, dalla (2.121a) si ottiene

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{1}{e} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.123)$$

2. In virtù della definizione (2.119), $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, l'equazione (2.121b) è identicamente soddisfatta.

Le equazioni di Maxwell possono essere derivate dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - e j^\mu A_\mu. \quad (2.124)$$

Espressa mediante il quadri-potenziale A^μ , l'equazione di Maxwell (2.121a) diventa

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = q j^\nu. \quad (2.125)$$

Il quadri-potenziale A^μ non è unicamente definito a partire dai campi elettrico \vec{E} e magnetico \vec{B} (ossia da $F^{\mu\nu}$); esso è definito solo a meno del quadri-gradiente di una funzione arbitraria. Infatti, $F^{\mu\nu}$ resta invariante per la trasformazione

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x). \quad (2.126)$$

Questa trasformazione è chiamata **trasformazione di gauge locale** su $A_\mu(x)$. Vi è quindi la possibilità di ridefinire $A_\mu(x)$ tramite la (2.126) in modo che il nuovo quadri-potenziale $A'_\mu(x)$ soddisfi ad opportune condizioni semplificative per i problemi in esame. La ridefinizione di $A_\mu(x)$ costituisce la **scelta di un particolare gauge**. Uno dei gauge più interessanti è il **gauge di Lorentz**, nel quale il quadri-potenziale $A_\mu(x)$ soddisfa alla condizione

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.127)$$

In questo caso l'equazione di Maxwell (2.125) si riduce a

$$\square A^\mu = e j^\mu. \quad (2.128)$$

Esiste sempre la possibilità di ridefinire il campo A_μ , mediante una opportuna trasformazione di gauge, in modo che il suo trasformato $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x)$ soddisfi alla condizione di Lorentz $\partial_\mu A'^\mu(x) = 0$. Infatti, basta scegliere una funzione $\varphi(x)$ tale che $\square \varphi(x) = -\partial_\mu A^\mu(x)$. Il campo $A'^\mu(x)$ non è ancora univocamente definito: lo è solo a meno di trasformazioni di gauge tali che $\square \varphi(x) = 0$.

Il campo elettromagnetico libero nella gauge di Lorentz soddisfa all'**equazione di d'Alembert**

$$\square A^\mu = 0 \quad (2.129)$$

e può essere quantizzato seguendo il procedimento descritto nelle sezioni precedenti, con alcune complicazioni aggiuntive dovute al fatto che il campo $A^\mu(x)$ ha quattro componenti, mentre i fotoni, che sono i quanti del campo elettromagnetico, hanno solamente due stati di polarizzazione trasversali (come le onde elettromagnetiche classiche, che sono formate da una sovrapposizione di fotoni). Il campo elettromagnetico quantizzato $A^\mu(x)$ è un operatore hermitiano nello spazio di Fock dei fotoni. Il suo sviluppo integrale di Fourier è dato da

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\alpha=0}^3 \left[a_{\vec{k}}^{(\alpha)} \varepsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}}^{(\alpha)\dagger} \varepsilon_\mu^{(\alpha)*}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]_{k_0=\omega_{\vec{k}}}, \quad (2.130)$$

dove $\omega_{\vec{k}}$ è l'energia (frequenza) dei modi di oscillazione del campo data da

$$\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|, \quad (2.131)$$

da cui si vede che i fotoni hanno massa nulla. I quadri-vettori di polarizzazione $\varepsilon_{\mu}^{(\alpha)}(\vec{k})$ con $\alpha = 0, \dots, 3$ formano un set di quattro quadri-vettori linearmente indipendenti e soddisfano le relazioni

$$\varepsilon^{(\alpha)}(\vec{k}) \cdot \varepsilon^{(\beta)*}(\vec{k}) = g^{\alpha\beta}, \quad (2.132a)$$

$$\sum_{\alpha=0}^3 \varepsilon_{\mu}^{(\alpha)}(\vec{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\alpha)*}(\vec{k}) g^{\alpha\alpha} = g_{\mu\nu}. \quad (2.132b)$$

Per lo studio delle ampiezze dei processi di interazione è necessario conoscere il propagatore del fotone, che è dato da

$$G_{\mu\nu}(x-x') \equiv \langle 0 | T[A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')] | 0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.133)$$

Quindi il propagatore del fotone nello spazio degli impulsi è dato da

$$G_{\mu\nu}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.134)$$

2.10 Elettrodinamica quantistica

Classicamente, per passare dalla trattazione di una particella libera a quella di una particella con carica elettrica e in interazione con un campo elettromagnetico si applica la cosiddetta prescrizione di accoppiamento minimo, ossia

$$p_{\mu} \rightarrow p_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu}. \quad (2.135)$$

La regola quantistica corrispondente è (in unità naturali)

$$\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu} + i e A_{\mu}. \quad (2.136)$$

e l'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico esterno diventa

$$(i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi(x) = 0. \quad (2.137)$$

Abbiamo visto che l'equazione di Dirac libera (2.87) è invariante per una trasformazione di gauge globale (2.98). Consideriamo ora una **trasformazione di gauge locale** del tipo

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vartheta(x)} \psi(x). \quad (2.138)$$

Notiamo che, poichè la teoria dei campi è basata sul principio di località, una trasformazione di gauge locale è più naturale di una trasformazione di gauge globale. Perciò ci si aspetta che la teoria sia invariante per la trasformazione di gauge locale (2.138). Però, si vede immediatamente che l'equazione di Dirac libera (2.87) non è invariante per la trasformazione di gauge locale (2.138), perchè

$$\partial_{\mu} \psi(x) \longrightarrow \partial_{\mu} (e^{i\vartheta(x)} \psi(x)) = i e^{i\vartheta(x)} \psi(x) \partial_{\mu} \vartheta(x) + e^{i\vartheta(x)} \partial_{\mu} \psi(x), \quad (2.139)$$

e l'equazione di Dirac libera diventa

$$(i \not{\partial} - m) \psi'(x) = (i \not{\partial} - m) \psi(x) - \gamma^{\mu} \psi(x) \partial_{\mu} \vartheta(x) = -\gamma^{\mu} \psi(x) \partial_{\mu} \vartheta(x) \neq 0. \quad (2.140)$$

Invece, l'equazione (2.137), con il termine di accoppiamento $-e \not{A} \psi$, è invariante per trasformazioni di gauge locali se il quadri-potenziale A_μ si trasforma come nella (2.126), con $\varphi(x) = -\vartheta(x)/e$:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \vartheta(x). \quad (2.141)$$

In tal caso, la trasformazione di gauge su $\psi(x)$ e quella su $A_\mu(x)$ si compensano in modo da garantire l'invarianza dell'equazione di Dirac (2.137).

Notare che questa proprietà dipende in modo cruciale dalla prescrizione di accoppiamento minimo, che, come si è visto, consiste nel sostituire la derivata ∂_μ con la cosiddetta **derivata covariante** D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.142)$$

per cui l'equazione di Dirac si scrive

$$(i\not{D} - m) \psi(x) = 0, \quad (2.143)$$

e la corrispondente densità lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi. \quad (2.144)$$

Per trasformazioni di gauge

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vartheta(x)} \psi(x), \quad (2.145a)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \vartheta(x), \quad (2.145b)$$

la derivata covariante di $\psi(x)$ si trasforma come $\psi(x)$,

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow D'_\mu \psi'(x) = e^{i\vartheta(x)} D_\mu \psi(x), \quad (2.146)$$

per cui la densità lagrangiana (2.144) resta invariante.

La proprietà di **invarianza di gauge** gioca un ruolo importante non solo nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica (QED), ma (in versione generalizzata) nelle moderne teorie dell'interazione elettrodebole e della cromodinamica quantistica. Infatti, abbiamo visto che la richiesta di invarianza della densità lagrangiana di un campo fermionico libero per trasformazioni di gauge locali appartenenti al gruppo U(1) implica l'esistenza di un campo vettoriale che viene naturalmente identificato con il campo elettromagnetico. Come vedremo in seguito, un'analogia richiesta di invarianza della teoria per trasformazioni di gauge appartenenti al gruppo SU(2)_L implica l'esistenza di un tripletto di campi vettoriali che corrispondono ai bosoni intermedi che mediano le interazioni deboli. Inoltre, la proprietà di invarianza di gauge è cruciale per la consistenza delle teorie quantistiche, perchè essa permette di dimostrare la rinormalizzabilità della teoria, cioè l'assenza di quantità infinite nelle previsioni della teoria per le osservabili fisiche.

Per ottenere la densità lagrangiana completa che descrive un fermione carico, il campo elettromagnetico e la loro interazione bisogna aggiungere alla (2.144) il termine cinetico $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ del campo elettromagnetico:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.147)$$

Questa densità lagrangiana è invariante per le trasformazioni di gauge (2.145). È invece evidente che un termine di massa per il fotone

$$-\frac{1}{2} m_\gamma^2 A^\mu A_\mu \quad (2.148)$$

non è invariante di gauge. Perciò il fatto che il fotone è una particella priva di massa è strettamente collegato alla simmetria di gauge della teoria.

La **densità lagrangiana di interazione** ottenuta dalla derivata covariante

$$\mathcal{L}_I = -e \bar{\psi} \not{A} \psi \quad (2.149)$$

descrive l'interazione di un fermione con carica elettrica e con il campo elettromagnetico ed è rappresentata con il **diagramma di Feynman**

(2.150)

Poichè le soluzioni esatte delle teorie quantistiche di campi interagenti non sono conosciute, è stato sviluppato un metodo perturbativo nel quale le ampiezze di probabilità dei processi di transizione sono espresse come una serie di potenze della costante di accoppiamento ($e = \sqrt{4\pi\alpha}$ nella QED) e la serie viene troncata all'ordine di precisione desiderato. È evidente che il calcolo perturbativo delle ampiezze di transizione porta ad un risultato che corrisponde alla realtà fisica solamente se la costante di accoppiamento è molto minore di uno. Questo è il caso dell'elettrodinamica quantistica dove le ampiezze sono espresse come una serie di potenze del parametro adimensionale $\alpha \simeq 1/137$.

Nella teoria perturbativa l'ampiezza di probabilità \mathcal{M}_{fi} per la transizione da uno stato $|i\rangle$ ad uno stato $|f\rangle$ è data dall'elemento di matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \langle f | T \left[\exp \left(i \int d^4x : \mathcal{L}_I(x) : \right) \right] | i \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T [: \mathcal{L}_I(x_1) : \cdots : \mathcal{L}_I(x_n) :] . \end{aligned} \quad (2.151)$$

Nel caso dell'elettrodinamica quantistica si ha

$$\mathcal{M}_{fi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T \left[(: \bar{\psi} \not{A} \psi :)_{x_1} \cdots (: \bar{\psi} \not{A} \psi :)_{x_n} \right] . \quad (2.152)$$

Le ampiezze di transizione \mathcal{A}_{fi} , nelle quali sono omissi i fattori di normalizzazione nelle espansioni integrali di Fourier dei campi, possono essere calcolate all'ordine perturbativo desiderato seguendo le **regole di Feynman**. Le regole di Feynman per l'elettrodinamica quantistica sono:

1. Si disegnano tutti i possibili diagrammi topologicamente distinti che contribuiscono al processo in esame all'ordine perturbativo desiderato dello sviluppo in serie di potenze della costante di accoppiamento e .

2. Ad ogni linea esterna si associa una delle seguenti quantità:

$$\text{fermione entrante} \quad \begin{array}{c} f(\vec{p}, r) \\ \longrightarrow \bullet \end{array} \quad u^{(r)}(\vec{p}), \quad (2.153a)$$

$$\text{fermione uscente} \quad \begin{array}{c} f(\vec{p}, r) \\ \bullet \longrightarrow \end{array} \quad \overline{u^{(r)}(\vec{p})}, \quad (2.153b)$$

$$\text{antifermione entrante} \quad \begin{array}{c} \bar{f}(\vec{p}, r) \\ \longrightarrow \bullet \end{array} \quad \overline{v^{(r)}(\vec{p})}, \quad (2.153c)$$

$$\text{antifermione uscente} \quad \begin{array}{c} \bar{f}(\vec{p}, r) \\ \bullet \longrightarrow \end{array} \quad v^{(r)}(\vec{p}), \quad (2.153d)$$

$$\text{fotone entrante} \quad \begin{array}{c} \gamma(\vec{k}, \alpha) \\ \rightsquigarrow \bullet \end{array} \quad \varepsilon^{(\alpha)}(\vec{k}), \quad (2.153e)$$

$$\text{fotone uscente} \quad \begin{array}{c} \gamma(\vec{k}, \alpha) \\ \bullet \rightsquigarrow \end{array} \quad \varepsilon^{(\alpha)*}(\vec{k}). \quad (2.153f)$$

3. Si associa ad ogni linea interna il propagatore nello spazio degli impulsi del campo corrispondente:

$$\text{linea fermionica} \quad \begin{array}{c} \vec{p} \\ \longrightarrow \end{array} \quad G^{(f)}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.154a)$$

$$\text{linea fotonica} \quad \begin{array}{c} \vec{k} \\ \rightsquigarrow \end{array} \quad G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.154b)$$

4. Ad ogni vertice si associa la quantità

$$\text{vertice} \quad \begin{array}{c} p_i \swarrow \quad \searrow p_f \\ \quad \downarrow \\ \quad \rightsquigarrow p, \mu \end{array} \quad -ie\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f - p). \quad (2.155)$$

5. Si integra sul quadri-impulso p di ciascuna linea interna con la misura

$$\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (2.156)$$

6. Un fattore (-1) deve essere aggiunto per ogni loop fermionico chiuso.

7. Ai diagrammi che differiscono tra di loro solamente per una permutazione delle linee fermioniche esterne si assegna un fattore relativo dato dal segno della permutazione.

La sezione d'urto differenziale per un processo di interazione di due particelle 1 e 2 con la produzione di uno stato finale con n_f particelle è data da

$$d\sigma = \overline{\sum_{\text{spin}}} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{A}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_k}}, \quad (2.157)$$

dove P_i e P_f sono, rispettivamente, i quadri-impulsi totali dello stato iniziale e finale e il segno $\overline{\sum_{\text{spin}}}$ indica una media sugli spin non osservati delle particelle iniziali ed una somma sugli spin non osservati delle particelle finali.

La larghezza di decadimento di una particella con massa M in n_f particelle è data da

$$d\Gamma = \overline{\sum_{\text{spin}}} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_i - P_f) |\mathcal{A}_{fi}|^2}{2M} \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_k}}, \quad (2.158)$$

dove p_i è il quadri-impulso della particella iniziale e P_f è il quadri-impulso totale dello stato finale.

Chapter 3

Campi spinoriali chirali

3.1 Introduzione

La matrice γ^5 è detta **operatore di chiralità**. Poichè l'operatore γ^5 è hermitiano esso è diagonalizzabile; dalla proprietà $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$ segue che gli autovalori di γ^5 sono ± 1 . Indichiamo con ψ_L e ψ_R le autofunzioni di γ^5 con autovalori $+1$ e -1 , rispettivamente; ossia,

$$\gamma^5 \psi_L = + \psi_L, \quad (3.1a)$$

$$\gamma^5 \psi_R = - \psi_R. \quad (3.1b)$$

I campi a chiralità definita ψ_L e ψ_R sono chiamati, rispettivamente, **left-handed** o **sinistrorso** e **right-handed** o **destrorso**.

A partire da uno spinore generico ψ è possibile generare le due autofunzioni di γ^5 nel modo seguente:

$$\psi_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi, \quad (3.2a)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi, \quad (3.2b)$$

e uno spinore qualsiasi ψ può essere scomposto nella somma

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (3.3)$$

Conviene definire due operatori di **proiezione di chiralità**:

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (3.4a)$$

$$P_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad (3.4b)$$

che soddisfano alle proprietà

$$P_L + P_R = \mathbb{1}, \quad (3.5a)$$

$$(P_L)^2 = P_L, \quad (3.5b)$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (3.5c)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0. \quad (3.5d)$$

Consideriamo la densità lagrangiana del campo ψ :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi . \quad (3.6)$$

Utilizzando la scomposizione (3.3) si ha

$$\mathcal{L} = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) (i \not{\partial} - m) (\psi_L + \psi_R) . \quad (3.7)$$

Poichè

$$P_L^\dagger = P_L , \quad (3.8a)$$

$$P_R^\dagger = P_R , \quad (3.8b)$$

$$P_L \gamma^0 = \gamma^0 P_R , \quad (3.8c)$$

si ha

$$\bar{\psi}_L = \overline{(P_L \psi)} = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\psi} P_R , \quad (3.9a)$$

$$\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L . \quad (3.9b)$$

Quindi, quattro termini della densità lagrangiana (3.7) sono identicamente nulli:

$$\bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_R = \bar{\psi} P_R i \not{\partial} P_R \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} P_L P_R \psi = 0 , \quad (3.10a)$$

$$\bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_L = 0 , \quad (3.10b)$$

$$\bar{\psi}_L m \psi_L = m \bar{\psi} P_R P_L \psi = 0 , \quad (3.10c)$$

$$\bar{\psi}_R m \psi_R = 0 . \quad (3.10d)$$

Perciò, la densità lagrangiana per i campi chirali ψ_L e ψ_R è data da

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) . \quad (3.11)$$

Si vede quindi che il termine di massa accoppia i campi ψ_L e ψ_R . Infatti, dalla densità lagrangiana (3.11) si ottengono le equazioni di campo

$$i \not{\partial} \psi_L = m \psi_R , \quad (3.12a)$$

$$i \not{\partial} \psi_R = m \psi_L . \quad (3.12b)$$

Queste sono le due equazioni di campo per ψ_L e ψ_R si disaccoppiano solo se $m = 0$. In questo caso si ottengono le **equazioni di Weyl**

$$i \not{\partial} \psi_L = 0 , \quad (3.13a)$$

$$i \not{\partial} \psi_R = 0 . \quad (3.13b)$$

Poichè per $m = 0$ i campi ψ_L e ψ_R sono disaccoppiati, è possibile che per la descrizione di fermioni con massa nulla (neutrini) sia sufficiente solo uno dei due campi spinoriali chirali, ψ_L o ψ_R (teoria a due componenti del neutrino [Lan57, Lee57, Sal57]).

3.2 Proprietà di elicità per $m = 0$

Per studiare le proprietà di elicità delle particelle corrispondenti a campi spinoriali a massa nulla, è conveniente considerare la funzione d'onda di una particella con impulso \vec{p} :

$$\psi(x, p) = \langle 0 | \psi(x) | 1_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} u(p) e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = |\vec{p}|}. \quad (3.14)$$

Utilizzando l'equazione di campo (2.87) oppure l'equazione (2.102a) che definisce $u(p)$, è immediato verificare che questa funzione d'onda soddisfa l'equazione di Dirac, che per $m = 0$ può essere scritta come

$$\left(i \gamma^0 \partial_0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi(x, p) = 0. \quad (3.15)$$

Moltiplicandola a sinistra per $\gamma^5 \gamma^0$ si ha

$$-i \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi(x, p) = i \gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi(x, p),$$

ossia, utilizzando la definizione $\vec{\Sigma} = -\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5$,

$$i \vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla} \psi(x, p) = \gamma^5 i \partial_0 \psi(x, p). \quad (3.16)$$

Utilizzando l'espressione (3.14) per $\psi(x, p)$, si ottiene

$$\underbrace{-\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}}_{\substack{\text{operatore} \\ \text{di} \\ \text{elicità}}} \psi(x, p) = \underbrace{\gamma^5}_{\substack{\text{operatore} \\ \text{di} \\ \text{chiralità}}} \psi(x, p). \quad (3.17)$$

Quindi le autofunzioni dell'operatore di chiralità sono anche autofunzioni dell'operatore elicità

$$h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (3.18)$$

con autovalori di segno opposto.

Consideriamo ora un campo spinoriale chirale ψ_L con massa nulla. Dalla proprietà (3.1a) è evidente che per le corrispondenti funzioni d'onda di particella

$$\psi_L(x, p) = \langle 0 | \psi_L(x) | 1_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} u_L(p) e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} \quad (3.19)$$

si ha

$$\gamma^5 \psi_L(x, p) = \psi_L(x, p). \quad (3.20)$$

In questo caso, la (3.17) diventa

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_L(x, p) = -\psi_L(x, p), \quad (3.21)$$

cioè la particella ha elicità -1 . Come abbiamo visto nella sezione 1.4.1 questa proprietà è proprio ciò che serve per descrivere i neutrini. Questo fatto spinse nel 1957 Landau [Lan57], Lee & Yang [Lee57] e Salam [Sal57] a formulare l'ipotesi che i neutrini siano descritti da campi left-handed ψ_L (teoria a due componenti del neutrino). Questa ipotesi fu estesa nel 1958 da Feynman & Gell-Mann [Fey58] e Sudarshan & Marshak [Sud58], i quali formularono la supposizione che tutti i campi fermionici partecipano alle interazioni deboli solamente attraverso la loro componente left-handed.

Esaminiamo ora quali sono le proprietà di elicità di una antiparticella con impulso \vec{p} corrispondente al campo spinoriale chirale con massa nulla ψ_L . La sua funzione d'onda è

$$\psi_L^c(x, p) = \langle 0 | \psi_L^c(x) | \bar{1}_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} v_L^c(p) e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}}, \quad (3.22)$$

con

$$\psi_L^c \equiv \mathcal{C} \overline{\psi_L}^T \quad \text{e} \quad v_L^c \equiv \mathcal{C} \overline{v_L}^T. \quad (3.23)$$

ψ_L^c è il campo coniugato di carica¹ e \mathcal{C} è la matrice di coniugazione di carica tale che

$$\mathcal{C} \gamma_\mu^T \mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu, \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}, \quad (3.24b)$$

$$\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}. \quad (3.24c)$$

Inoltre, dalla (3.24a) e dalla definizione $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ si ricava la proprietà

$$\mathcal{C} \gamma_5^T \mathcal{C}^{-1} = \gamma_5. \quad (3.25)$$

Perciò, tenendo conto che $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, si ha

$$\begin{aligned} \gamma_5 \psi_L^c &= \gamma_5 \mathcal{C} \overline{\psi_L}^T = \mathcal{C} \gamma_5^T \overline{\psi_L}^T = \mathcal{C} [\overline{\psi_L} \gamma_5]^T = \mathcal{C} [\psi_L^\dagger \gamma_0 \gamma_5]^T = -\mathcal{C} [\psi_L^\dagger \gamma_5 \gamma_0]^T \\ &= -\mathcal{C} [(\gamma_5 \psi_L)^\dagger \gamma_0]^T = -\mathcal{C} [\psi_L^\dagger \gamma_0]^T = -\mathcal{C} \overline{\psi_L}^T = -\psi_L^c. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Quindi, è chiaro che

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_L^c(x, p) = \psi_L^c(x, p), \quad (3.27)$$

per cui le antiparticelle del campo ψ_L hanno elicità $+1$. Come abbiamo visto nella sezione 1.4.1 questa proprietà è verificata sperimentalmente per gli antineutrini.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che ψ_L genera stati di particella con elicità -1 e stati di antiparticella con elicità $+1$ (vedi la Fig.3.1a). Analogamente, si può dimostrare che ψ_R genera stati di particella con elicità $+1$ e stati di antiparticella con elicità -1 (vedi la Fig.3.1b).

¹L'operazione di coniugazione di carica su un campo fermionico ψ scambia particelle con antiparticelle, come si può vedere dal fatto che la corrente coniugata di carica j_μ^c è uguale a $-j_\mu$: tenendo conto che $\overline{\psi^c} = -\psi^T C^{-1}$ si ha

$$j_\mu^c = \overline{\psi^c} \gamma_\mu \psi^c = -\psi^T \underbrace{C^{-1} \gamma_\mu C}_{-\gamma_\mu^T} \overline{\psi}^T = \psi^T \gamma_\mu^T \overline{\psi}^T = -\overline{\psi} \gamma_\mu \psi = -j_\mu.$$

Notiamo che un segno meno è stato generato dalla trasposizione dei campi fermionici anticommutanti e che abbiamo assunto implicitamente che la corrente è ordinata normalmente.

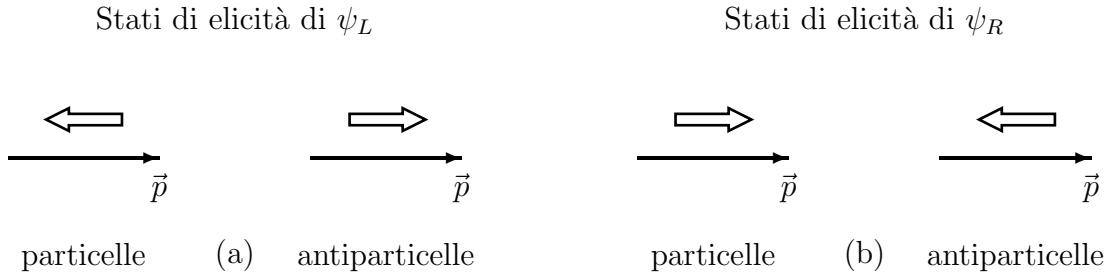


Figure 3.1: Stati di elicità di ψ_L e ψ_R .

3.3 Inversione spaziale

La trasformazione del campo spinoriale $\psi(x)$ per l'operazione di inversione spaziale $x = (t, \vec{x}) \xrightarrow{P} x' = (t, -\vec{x})$ è data da²

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x') = \gamma^0 \psi(x), \quad (3.28)$$

dove è stato ommesso un possibile fattore di fase η_P .

Consideriamo ora le componenti left-handed ($\psi_L(x) = P_L \psi(x)$) e right-handed ($\psi_R(x) = P_R \psi(x)$) del campo spinoriale $\psi(x)$. Le loro trasformazioni per inversione spaziale sono date da

$$\psi_L(x) = P_L \psi(x) \xrightarrow{P} \psi'_L(x') = P_L \psi'(x') = P_L \gamma^0 \psi(x) = \gamma^0 P_R \psi(x) = \gamma^0 \psi_R(x), \quad (3.29a)$$

$$\psi_R(x) = P_R \psi(x) \xrightarrow{P} \psi'_R(x') = P_R \psi'(x') = \gamma^0 \psi_L(x). \quad (3.29b)$$

Quindi le componenti chirali $\psi_L(x)$ e $\psi_R(x)$ non sono indipendenti per inversione spaziale, ma si trasformano l'una nell'altra (a meno di un fattore γ^0):

$$\psi_L(x) \xleftrightarrow{P} \gamma^0 \psi_R(x). \quad (3.30)$$

Questa proprietà di trasformazione può essere immediatamente verificata mediante le configurazioni illustrate in Fig.3.1, tenendo conto che l'impulso è un vettore polare e lo spin un vettore assiale.

Ne segue che un'interazione alla quale partecipano solamente le componenti chirali left-handed dei campi fermionici viola massimamente la conservazione della parità. Infatti, per trasformazione di parità le componenti chirali left-handed si trasformano in right-handed, che non partecipano all'interazione oppure, per i neutrini, non esistono. Perciò i

²Infatti, questa trasformazione di $\psi(x)$ garantisce l'invarianza dell'equazione di Dirac:

$$\begin{aligned} 0 &= (i \not{\partial}' - m) \psi'(x'), \\ &= (i \gamma^0 \partial'_0 + i \gamma^k \partial'_k - m) \psi'(x') \\ &= (i \gamma^0 \partial_0 - i \gamma^k \partial_k - m) \gamma^0 \psi(x) \\ &= \gamma^0 (i \gamma^0 \partial_0 + i \gamma^k \partial_k - m) \psi(x) \implies 0 = (i \not{\partial} - m) \psi(x). \end{aligned}$$

processi ottenuti per riflessione spaziale sono proibiti. Come abbiamo visto nella sezione 1.4.1, questo è proprio ciò che è stato verificato sperimentalmente per le interazioni deboli. Ad esempio, consideriamo il decadimento debole di un mesone π^+ in un antimuone ed un neutrino muonico con elicità $h = -1$:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu^{(h=-1)}. \quad (3.31)$$

Il processo ottenuto per riflessione spaziale è proibito:

$$\pi^+ \not\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu^{(h=+1)}. \quad (3.32)$$

3.4 Coniugazione di carica

La trasformazione dello spinore $\psi(x)$ per l'operazione di coniugazione di carica è data da

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad (3.33)$$

dove è stato omesso un possibile fattore di fase η_C .

Le corrispondenti trasformazioni delle componenti left-handed e right-handed sono date da

$$\psi_L = P_L\psi \xrightarrow{C} P_L\psi^c = P_L C\bar{\psi}^T = C P_L^T \bar{\psi}^T = C(\bar{\psi} P_L)^T = C\bar{\psi}_R^T, \quad (3.34a)$$

$$\psi_R = P_R\psi \xrightarrow{C} P_R\psi^c = P_R C\bar{\psi}^T = C\bar{\psi}_L^T. \quad (3.34b)$$

Quindi anche per coniugazione di carica le componenti chirali $\psi_L(x)$ e $\psi_R(x)$ non sono indipendenti, ma si trasformano l'una nell'altra:

$$\psi_L(x) \xleftrightarrow{C} C\bar{\psi}_R^T. \quad (3.35)$$

Questa proprietà di trasformazione può essere immediatamente verificata scambiando particella e antiparticella nelle configurazioni illustrate in Fig.3.1.

Ne segue che un'interazione alla quale partecipano solamente le componenti chirali left-handed dei campi fermionici viola massimamente anche la simmetria di coniugazione di carica. È stato verificato sperimentalmente che le interazioni deboli soddisfano questa proprietà. Ad esempio, il processo ottenuto per coniugazione di carica dal processo (3.31) è proibito:

$$\pi^- \not\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu^{(h=-1)}. \quad (3.36)$$

3.5 CP

Combinando le trasformazioni (3.29) e (3.34) si vede che le componenti chirali $\psi_L(x)$ e $\psi_R(x)$ si trasformano in modo indipendente per l'operazione congiunta CP:

$$\psi_L \xrightarrow{P} \gamma^0\psi_R \xrightarrow{C} \gamma^0 C\bar{\psi}_L^T \implies \psi_L \xrightarrow{CP} \gamma^0 C\bar{\psi}_L^T, \quad (3.37a)$$

$$\psi_R \xrightarrow{P} \gamma^0\psi_L \xrightarrow{C} \gamma^0 C\bar{\psi}_R^T \implies \psi_R \xrightarrow{CP} \gamma^0 C\bar{\psi}_R^T. \quad (3.37b)$$

Analogamente ai casi precedenti, queste proprietà possono essere verificate applicando la trasformazione CP alle configurazioni illustrate in Fig.3.1.

Quindi un'interazione alla quale partecipano solamente le componenti chirali left-handed dei campi fermionici può essere invariante per l'operazione CP.

È stato verificato sperimentalmente che l'invarianza per trasformazione CP delle interazioni deboli è quasi perfetta (una piccola violazione di CP è stata osservata solamente nei decadimenti dei mesoni K neutri [Chr64, Chr65]). Perciò, i processi ottenuti per trasformazione CP di processi deboli conosciuti sono permessi. Ad esempio, il processo ottenuto per trasformazione CP dal processo (3.31) è permesso e corrisponde al decadimento del mesone π^- :

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu^{(h=+1)}. \quad (3.38)$$

3.6 Neutrini e antineutrini

Per particelle con $m \neq 0$ l'elicità non è una grandezza Lorentz-invariante. Infatti, mediante una trasformazione di Lorentz che manda \vec{p} in $-\vec{p}$, si può cambiare il segno dell'elicità della particella. Questa operazione non è possibile per particelle di massa nulla, che si propagano con la velocità della luce e per le quali l'elicità è una grandezza Lorentz-invariante. Quindi le particelle massive devono possedere entrambi gli stati di elicità, mentre i fermioni privi di massa possono possedere solamente uno stato di elicità.

Se la massa dei neutrini è nulla, i loro campi soddisfano alle equazioni di Weyl e possono essere descritti da campi spinoriali a chiralità definita del tipo ψ_L o ψ_R . Per stabilire quale di queste soluzioni sia realizzata in natura, occorre fare ricorso ai risultati sperimentali sullo studio dei processi deboli (per esempio, decadimenti β nucleari). Quest'aspetto del problema è stato presentato nella sezione 1.4.1, dove abbiamo visto che i neutrini, emessi nei decadimenti β^+ unitamente ai positroni, hanno elicità -1 e gli antineutrini, emessi nei decadimenti β^- unitamente agli elettroni, hanno elicità $+1$. Pertanto i neutrini devono essere descritti dai campi spinoriali left-handed $\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$, con i seguenti valori di elicità per i neutrini e gli antineutrini:

$$\begin{aligned} \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau &\implies \text{elicità} = -1 \\ \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau &\implies \text{elicità} = +1 \end{aligned}$$

Quindi neutrini e antineutrini, oltre ad essere differenziati da valori opposti dei numeri leptonici, sono anche caratterizzati da valori opposti di elicità.

Chapter 4

Teoria $V - A$

4.1 Lagrangiana di Fermi

Delle quattro forze fondamentali in natura la forza debole è stata per lungo tempo la più misteriosa, essendo nata per spiegare il decadimento β , senza produrre un vero e proprio campo di forza. Con lo sviluppo della ricerca, sia sperimentale che teorica, la forza debole si è rivelata una fonte di sorprese (massima violazione di P e C e violazione di CP) e di sviluppi (teoria unificata delle forze).

Nel 1934 **Fermi** formulò una teoria delle interazioni deboli in analogia con l'elettrodinamica quantistica. A quel tempo (e fino agli anni '60 con la nascita del modello a quark) il protone e il neutrone erano considerati particelle elementari. In questo caso, la densità lagrangiana di interazione del campo spinoriale del protone p con il campo elettromagnetico A_α è data da

$$\mathcal{L}_{(p\gamma)} = -e \bar{p} \gamma^\alpha p A_\alpha. \quad (4.1)$$

Per descrivere il decadimento β del neutrone,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (4.2)$$

Fermi ipotizzò che la densità lagrangiana del decadimento β abbia la stessa struttura della densità lagrangiana (4.1), con la corrente neutra protonica $\bar{p} \gamma^\alpha p$ rimpiazzata dalla corrente carica $\bar{p} \gamma^\alpha n$ ($\Delta Q = +1$), dove n è il campo del neutrone, ed il campo vettoriale A_α rimpiazzato dalla corrente carica $\bar{e} \gamma_\alpha \nu_e$ ($\Delta Q = -1$), costruita con il campo e dell'elettrone ed il campo ν_e del neutrino:

$$\mathcal{L}_\beta^{(\text{Fermi})} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma^\alpha n \bar{e} \gamma_\alpha \nu_e + \text{h.c.} \quad (4.3)$$

Questa densità lagrangiana rappresenta l'**interazione diretta di quattro campi fermionici** (four-fermion interaction) attraverso l'accoppiamento di due correnti vettoriali ($\bar{p} \gamma^\alpha n$ e $\bar{e} \gamma_\alpha \nu_e$). G_F è una nuova costante fisica fondamentale chiamata **costante di Fermi**, che ha dimensione $[E]^{-2}$.

La densità lagrangiana (4.3) prevede l'esistenza solamente di decadimenti β nucleari senza cambiamento dello spin del nucleo (**transizioni di Fermi** con $\Delta J = 0$). Infatti, l'elemento di matrice della corrente nucleonica è dato da

$$\langle p(\vec{p}', s) | \bar{p} \gamma^\alpha n | n(\vec{p}, r) \rangle \propto \overline{u_p^{(s)}}(\vec{p}') \gamma^\alpha u_n^{(r)}(\vec{p}), \quad (4.4)$$

dove \vec{p} e \vec{p}' sono gli impulsi e r e s sono gli indici di spin del neutrone e del protone. Nella rappresentazione di Dirac delle matrici γ^α si ha

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{(r)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \chi^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Nel limite di bassa energia appropriata ai decadimenti β nucleari ($|\vec{p}'| \sim 1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| \ll E \simeq m_N$, con $m_p \simeq m_n \equiv m_N$) si ha

$$u^{(r)}(\vec{p}) \simeq \sqrt{2m_N} \begin{pmatrix} \chi^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Perciò

$$\overline{u_p^{(s)}(\vec{p}')} \gamma^0 u_n^{(r)}(\vec{p}) = u_p^{(s)\dagger}(\vec{p}') u_n^{(r)}(\vec{p}) \simeq 2m_N \chi^{(s)\dagger} \chi^{(r)} = 2m_N \delta_{rs}, \quad (4.7a)$$

$$\overline{u_p^{(s)}(\vec{p}')} \gamma^k u_n^{(r)}(\vec{p}) = u_p^{(s)\dagger}(\vec{p}') \gamma^0 \gamma^k u_n^{(r)}(\vec{p}) \simeq 2m_N (\chi^{(s)\dagger} \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.7b)$$

Quindi, nel limite di bassa energia

$$\langle p(\vec{p}', s) | \bar{p} \gamma^\alpha n | n(\vec{p}, r) \rangle \propto \delta_{\alpha 0} \delta_{rs}, \quad (4.8)$$

per cui solo le transizioni con $r = s$, cioè con $\Delta J = 0$, sono permesse.

In pratica però già negli anni '30 erano stati osservati decadimenti β nucleari con $|\Delta J| = 1$ (**transizioni di Gamov-Teller**) che non mostravano nessuna soppressione. Quindi, nel 1936 Gamov & Teller notarono che la densità lagrangiana (4.3) ipotizzata da Fermi deve essere generalizzata per descrivere tutti i decadimenti β osservati. In particolare, per descrivere le transizioni di Gamov-Teller è necessario introdurre una corrente nucleonica assiale $\bar{p} \gamma^\alpha \gamma_5 n$ e/o una corrente nucleonica tensoriale $\bar{p} \sigma^{\alpha\beta} n$.

Tenendo conto che la densità lagrangiana è uno scalare di Lorentz ed escludendo per semplicità accoppiamenti con la partecipazione delle derivate dei campi fermionici, la densità lagrangiana più generale che descrive l'accoppiamento dei due campi adronici p , n con i due campi leptonici e , ν_e può essere costruita utilizzando i covarianti di Dirac

$$\bar{p} \Omega^j n \quad \text{e} \quad \bar{e} \Omega_j \nu_e \quad (j = 1, \dots, 5), \quad (4.9)$$

con

$$\Omega^1 = 1, \quad \Omega^2 = \gamma^\alpha, \quad \Omega^3 = \sigma^{\alpha\beta}, \quad \Omega^4 = \gamma^\alpha \gamma_5, \quad \Omega^5 = \gamma_5, \quad (4.10a)$$

$$\Omega_1 = 1, \quad \Omega_2 = \gamma_\alpha, \quad \Omega_3 = \sigma_{\alpha\beta}, \quad \Omega_4 = \gamma_\alpha \gamma_5, \quad \Omega_5 = \gamma_5. \quad (4.10b)$$

Quindi, la più generale densità lagrangiana che descrive il decadimento β e che si trasforma come uno scalare per trasformazioni di Lorentz proprie può essere ottenuta dalla contrazione tra lo scalare $\bar{p} n$ e lo scalare $\bar{e} \nu_e$ o il pseudoscalare $\bar{e} \gamma_5 \nu_e$, più la contrazione tra il vettore polare $\bar{p} \gamma^\mu n$ e il vettore polare $\bar{e} \gamma_\mu \nu_e$ o il vettore assiale $\bar{e} \gamma_\mu \gamma_5 \nu_e$, etc.. Perciò si ottiene

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^5 \left[g_j (\bar{p} \Omega^j n) (\bar{e} \Omega_j \nu_e) + g'_j (\bar{p} \Omega^j n) (\bar{e} \Omega_j \gamma_5 \nu_e) \right] + \text{h.c.}, \quad (4.11)$$

dove g_j, g'_j ($j = 1, \dots, 5$) sono dieci costanti complesse (se non si assume l'invarianza per inversione temporale), per un totale di 20 parametri reali. Tenendo conto che $\sigma^{\alpha\beta}\gamma_5 = -\frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$, si hanno le seguenti possibilità:

$$\Omega^j \otimes \Omega_j = 1 \otimes 1, \quad \gamma^\alpha \otimes \gamma_\alpha, \quad \sigma^{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\alpha\beta}, \quad \gamma^\alpha \gamma_5 \otimes \gamma_\alpha \gamma_5, \quad \gamma_5 \otimes \gamma_5, \quad (4.12a)$$

$$\Omega^j \otimes \Omega_j \gamma_5 = 1 \otimes \gamma_5, \quad \gamma^\alpha \otimes \gamma_\alpha \gamma_5, \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\mu\nu}, \quad \gamma^\alpha \gamma_5 \otimes \gamma_\alpha, \quad \gamma_5 \otimes 1. \quad (4.12b)$$

È inoltre possibile dimostrare che termini con combinazioni diverse dei campi, come per esempio

$$(\bar{p}\Omega^j \nu_e) (\bar{e}\Omega_j n), \quad (4.13)$$

possono essere ricondotti alla forma (4.11) attraverso una trasformazione di Fierz (vedi, ad esempio, [Itz80, Nac89, Ren90, Bil94, Lea96]). Perciò la forma (4.11) è veramente la più generale possibile per la densità lagrangiana del decadimento β .

È importante notare che la parte della densità lagrangiana (4.11) contenente gli accoppiamenti (4.12b) è pseudoscalare, per cui cambia segno per inversione spaziale. Quindi in generale **la densità lagrangiana (4.11) non è invariante per inversione spaziale, cioè non conserva la parità**. Per ottenere la conservazione della parità è necessario imporre l'annullamento delle costanti g'_j ($j = 1, \dots, 5$).

Per molti anni successivi alla formulazione della teoria di Fermi è stato creduto che le interazioni deboli conservano la parità, come le interazioni elettromagnetiche e forti. Perciò le costanti g'_j ($j = 1, \dots, 5$) erano considerate nulle.

Nel 1956, per spiegare il puzzle ϑ - τ (vedi la Sezione 1.4.1), Lee & Yang [Lee56] formularono l'ipotesi rivoluzionaria che la parità non sia conservata nelle interazioni deboli. La validità di questa ipotesi fu confermata nel 1957 dal risultato dell'esperimento di Wu *et al.* [Wu57] sull'asimmetria della distribuzione angolare dei prodotti del decadimento β^- di nuclei polarizzati di ^{60}Co (vedi la Sezione 1.4.1). Nel 1958 Goldhaber *et al.* [Gol58] misurarono l'elicità dei neutrini e stabilirono che i neutrini prodotti nei decadimenti β^+ hanno elicità negativa.

Poichè i decadimenti β^+ non producono neutrini con elicità negativa, la violazione della parità nelle interazioni deboli è massima (un'inversione spaziale inverte il valore dell'elicità).

Assumendo che la massa dei neutrini sia nulla¹, nel 1957 Landau [Lan57], Lee & Yang [Lee57] e Salam [Sal57] formularono l'ipotesi che i neutrini siano descritti da campi left-handed ν_L (teoria a due componenti del neutrino).

In seguito ai risultati sperimentali fu presto chiaro che gli elettroni prodotti nei decadimenti β^- sono descritti dalla componente left-handed e_L del campo spinoriale elettronico $e(x)$. Quindi i campi leptonici partecipano alle interazioni deboli solamente attraverso le loro componenti chirali left-handed e la parte leptonica nella densità lagrangiana che

¹Ancora oggi esistono solamente limiti superiori sulla massa dei neutrini:

$$m_{\nu_e} \lesssim 5 \text{ eV}, \quad (4.14a)$$

$$m_{\nu_\mu} \lesssim 170 \text{ keV}, \quad (4.14b)$$

$$m_{\nu_\tau} \lesssim 20 \text{ MeV}. \quad (4.14c)$$

descrive i decadimenti β è costituita dalla corrente debole leptonica (il fattore 2 è inserito per convenienza)

$$\ell_{W\alpha}^\dagger = 2\bar{e}_L \gamma_\alpha \nu_{eL} = \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e. \quad (4.15)$$

Infatti, i possibili termini leptonici contenenti i campi \bar{e}_L e ν_{eL} sono

$$\bar{e}_L \Omega_j \nu_{eL} = \frac{1}{4} \bar{e} (1 - \gamma_5) \Omega_j (1 + \gamma_5) \nu_e, \quad (4.16)$$

Poichè

$$j = 1 : (1 - \gamma_5) 1 (1 + \gamma_5) = 0, \quad (4.17a)$$

$$j = 2 : (1 - \gamma_5) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) = 2 \gamma_\alpha (1 + \gamma_5), \quad (4.17b)$$

$$j = 3 : (1 - \gamma_5) \sigma^{\alpha\beta} (1 + \gamma_5) = 0, \quad (4.17c)$$

$$j = 4 : (1 - \gamma_5) \gamma^\alpha \gamma_5 (1 + \gamma_5) = 2 \gamma_\alpha (1 + \gamma_5), \quad (4.17d)$$

$$j = 5 : (1 - \gamma_5) \gamma_5 (1 + \gamma_5) = 0, \quad (4.17e)$$

si vede che gli unici due termini non nulli sono equivalenti e danno la stessa corrente (4.15) (è ovvio che una costante moltiplicativa può essere assorbita nella costante di accoppiamento totale).

L'espressione (4.15) per la corrente debole leptonica è detta di **forma V – A** ed implica la **massima violazione della parità**.

L'ipotesi $V - A$ per la corrente leptonica fu estesa nel 1958 da Feynman & Gell-Mann [Fey58] e Sudarshan & Marshak [Sud58] alla corrente debole adronica:

$$h_W^\alpha = \bar{p} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) n. \quad (4.18)$$

Perciò nella teoria $V - A$ tutti i campi fermionici partecipano alle interazioni deboli solamente attraverso la loro componente left-handed. Ciò si è rivelato vero per i campi fermionici elementari, cioè i leptoni ed i quarks. Poichè i nucleoni (protone e neutrone) non sono particelle elementari, ma composte da quarks legati dalle interazioni forti, la corrente nucleonica che descrive i decadimenti β viene modificata dalle interazioni forti e la corrente debole nucleonica efficace è

$$h_W^\alpha = \bar{p} \gamma^\alpha (g_V + g_A \gamma_5) n. \quad (4.19)$$

I valori sperimentali di g_V e g_A sono $g_V \simeq 1$ e $g_A \simeq 1.25$.

Perciò la densità lagrangiana che descrive i decadimenti β nella teoria $V - A$ è

$$\mathcal{L}_\beta^{(V-A)} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} h_W^\alpha \ell_{W\alpha}^\dagger + \text{h.c.} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{p} \gamma^\alpha (g_V + g_A \gamma_5) n] [\bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e] + \text{h.c.} \quad (4.20)$$

Definendo la corrente totale

$$j_W^\alpha = \ell_W^\alpha + h_W^\alpha, \quad (4.21)$$

la densità lagrangiana (4.20) può essere generalizzata nella forma

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_W^\alpha j_{W\alpha}^\dagger. \quad (4.22)$$

Questa densità lagrangiana è detta **lagrangiana di Fermi** e, con una opportuna generalizzazione della corrente (4.21) descrive tutti i processi deboli carichi a bassa e media energia ($\sqrt{s} \ll 100 \text{ GeV}$)². Quindi, la lagrangiana di Fermi è estremamente importante, perchè viene usata estensivamente ancora oggi per studiare i processi deboli carichi a bassa e media energia. Questi processi si dividono in

1. **Processi deboli leptonici** ai quali partecipano solamente leptoni. Questi processi sono descritti dalla componente leptonica della densità lagrangiana di Fermi (4.22):

$$\mathcal{L}_{\text{processi leptonici}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \ell_W^\alpha \ell_{W\alpha}^\dagger. \quad (4.23)$$

Alcuni esempi sono:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad (4.24a)$$

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau, \quad (4.24b)$$

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e. \quad (4.24c)$$

2. **Processi deboli semi-leptonici** ai quali partecipano sia leptoni che adroni. Questi processi sono descritti dalla componente semi-leptonica della densità lagrangiana di Fermi (4.22):

$$\mathcal{L}_{\text{processi semi-leptonici}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_W^\alpha \ell_{W\alpha}^\dagger + \ell_W^\alpha h_{W\alpha}^\dagger). \quad (4.25)$$

Alcuni esempi sono³:

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau, \quad (4.26a)$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (4.26b)$$

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e, \quad (4.26c)$$

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (\Delta S = +1), \quad (4.26d)$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (4.26e)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\Delta S = +1), \quad (4.26f)$$

$$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + e^+ + \nu_e \quad (\Delta S = 0). \quad (4.26g)$$

3. **Processi deboli adronici** (o semi-leptonici) ai quali partecipano solamente adroni. Questi processi sono descritti dalla componente adronica della densità lagrangiana di Fermi (4.22):

$$\mathcal{L}_{\text{processi adronici}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} h_W^\alpha h_{W\alpha}^\dagger. \quad (4.27)$$

²L'energia delle particelle coinvolte in un processo (e la loro somma) dipende dal sistema di riferimento. L'energia del processo è rappresentata in modo Lorentz-invariante da \sqrt{s} , dove s è la variabile di Mandelstam $s \equiv (p_1 + p_2)^2$. Nel centro di massa dove $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ si ha $s = (E_1 + E_2)^2 \simeq 4E^2$, per cui $\sqrt{s} = 2E$ (si è tenuto conto che per $E_1 \gg m_1$ e $E_2 \gg m_2$ si ha $E_1 \simeq E_2 \equiv E$). Nel sistema del laboratorio, dove $\vec{p}_2 = 0$, si ha $s = m_1^2 + 2E_1 m_2 \simeq 2E_1 m_2$.

³Ricordiamo che $K^- = \bar{u}s$, $\Lambda^0 = uds$, $\Sigma^+ = uus$, $K^0 = d\bar{s}$.

Alcuni esempi sono:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (\Delta S = -1), \quad (4.28a)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (\Delta S = -1), \quad (4.28b)$$

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (\Delta S = -1), \quad (4.28c)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (\Delta S = +1), \quad (4.28d)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0 \quad (\Delta S = +1), \quad (4.28e)$$

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0 \quad (\Delta S = +1), \quad (4.28f)$$

$$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+ \quad (\Delta S = +1). \quad (4.28g)$$

Notiamo che tutti i processi deboli adronici violano la legge di conservazione della stranezza, perchè tutti i processi che non lo fanno avvengono in maniera estremamente più rapida attraverso le interazioni forti.

La versione completa della parte leptonica della corrente, comprendente i campi leptonici del muone, del tau e dei rispettivi neutrini, è

$$\ell_W^\alpha = \bar{\nu}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \mu + \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \tau. \quad (4.29)$$

Notiamo che l'interazione debole di e , μ , τ e dei rispettivi neutrini è assolutamente identica. Questa proprietà viene chiamata **universalità e - μ - τ delle interazioni deboli**.

4.2 Decadimento del μ

Come esempio dell'applicazione della lagrangiana di Fermi (4.22), consideriamo il decadimento del μ^- ,

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e. \quad (4.30)$$

Questo processo è particolarmente facile da studiare perchè è un **processo debole leptónico**, cioè coinvolge solamente leptoni, per cui non ci sono complicazioni dovute al contributo della forza forte. L'ampiezza del processo, che può essere calcolata con le regole di Feynman, è data da

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) v_{\nu_e}]. \quad (4.31)$$

Da questa ampiezza è possibile calcolare la larghezza di decadimento $\Gamma_\mu \equiv 1/\tau_\mu$ mediante la formula (vedi l'eq.(2.157))

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2m_\mu} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \int \frac{d^3 p_{\nu_e}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_e}} \int \frac{d^3 p_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}} (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_e - p_{\nu_e} - p_{\nu_\mu}) \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{A}_\mu|^2. \quad (4.32)$$

Il risultato è

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3}. \quad (4.33)$$

Dal valore sperimentale della vita media del muone,

$$(\tau_\mu)_{\text{exp}} = 2.197 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (4.34)$$

si ricava il valore della costante di Fermi:

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \simeq \frac{10^{-5}}{m_p^2}, \quad (4.35)$$

dove $m_p \simeq 938 \text{ MeV}$ è la massa del protone.

4.3 Correnti deboli cariche adroniche

I processi deboli semi-leptonici e adronici di bassa energia possono essere descritti dalla lagrangiana di Fermi (4.22) con una corrente debole carica (4.21) comprendente una opportuna componente adronica h_W^α . Il termine (4.19) della corrente adronica,

$$\bar{p} \gamma^\alpha (g_V + g_A \gamma_5) n, \quad (4.36)$$

con $g_V \simeq 1$ e $g_A \simeq 1.25$, descrive i processi di decadimento β dei nucleoni. Ad esso vanno aggiunti nuovi termini che descrivono i decadimenti deboli degli altri adroni, per cui

$$h_W^\alpha = \bar{p} \gamma^\alpha (g_V + g_A \gamma_5) n + \dots \quad (4.37)$$

Perciò l'elemento di matrice della corrente debole adronica per il decadimento del neutrone è dato da

$$\langle p(k') | h_W^\alpha(0) | n(k) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{EE'}} \bar{u}_p(\vec{k}') \gamma^\alpha (g_V + g_A \gamma_5) u_n(\vec{k}). \quad (4.38)$$

Il valore sperimentale $g_V \simeq 1$ è sorprendente perchè ci si potrebbe aspettare che l'effetto delle interazioni forti degli adroni produca un valore molto diverso. Infatti, **la lagrangiana di Fermi è una lagrangiana efficace** che descrive le interazioni deboli a bassa energia, tenendo conto delle correzioni quantistiche (rinormalizzazione) dovute alle interazioni forti, le quali non hanno un carattere perturbativo e quindi ci si aspetta che siano grosse. Invece, il valore $g_V = 1$ implica che **gli accoppiamenti della parte vettoriale della corrente debole nucleonica e della parte vettoriale della corrente debole leptonica sono identici**, nonostante il fatto che gli adroni, al contrario dei leptoni, interagiscono fortemente.

Questa situazione è analoga a ciò che succede per la carica elettrica: la carica elettrica del protone è uguale in modulo a quella dell'elettrone, nonostante il fatto che il protone non è una particella elementare⁴, interagisce fortemente e la sua distribuzione di carica è completamente diversa da quella puntiforme dell'elettrone. Ciò è dovuto al fatto che **le interazioni forti (come tutte le interazioni) conservano la carica elettrica**, per cui la carica elettrica del protone non può essere modificata (rinormalizzata) dal contributo delle interazioni forti. infatti, se consideriamo il diagramma nella figura 4.1b, notiamo che per effetto dell'interazione forte il protone può dissociarsi, ad esempio, in una coppia virtuale $n\pi^+$. Se la carica elettrica della coppia $n\pi^+$ fosse diversa da quella del

⁴Nel modello a quark $p = uud$ e la carica elettrica del protone è uguale alla somma delle cariche dei tre quarks di valenza. Per effetto delle interazioni forti il protone contiene anche un mare di coppie $q\bar{q}$ il cui contributo alla carica totale è nullo. Poichè le interazioni forti conservano la carica elettrica, esse possono creare e distruggere solamente coppie $q\bar{q}$ con carica elettrica totale nulla.



Figure 4.1: L'interazione elettromagnetica del protone e della coppia virtuale $n\pi^+$ sono uguali perchè la carica elettrica è conservata ed il π^+ ha la stessa carica del protone.

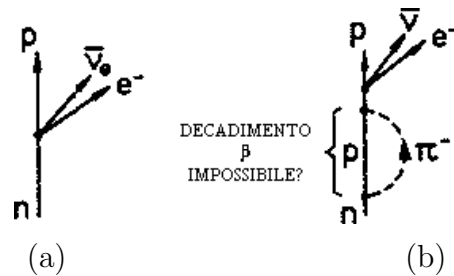


Figure 4.2: Un neutrone può dissociarsi nella coppia virtuale $p\pi^-$. Se il processo $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ non è permesso, il decadimento β del neutrone verrebbe rinormalizzato dall'effetto delle interazioni forti.

protone, questo stato virtuale genererebbe una correzione alla carica efficace del protone. Invece, la carica elettrica del π^+ è uguale a quella del protone e **per effetto della legge di conservazione della carica elettrica il protone può dissociarsi solamente in stati virtuali con la stessa carica elettrica totale**, per cui la sua carica efficace non viene rinormalizzata dal contributo dell'interazione forte.

Ricordiamo che la legge di conservazione della carica elettrica è dovuta all'esistenza di un'equazione di continuità per il quadri-vettore della corrente elettromagnetica che discende, attraverso il teorema di Noether, dall'**invarianza della densità lagrangiana per trasformazioni di gauge globali appartenenti al gruppo U(1)** (cioè trasformazioni di fase dei campi; vedi la Sezione 2.5).

4.3.1 Conserved Vector Current (CVC)

Per spiegare il valore $g_V \simeq 1$ Gerschtein & Zel'dovich nel 1955 [Ger55] e indipendentemente Feynman & Gell-Mann nel 1958 [Fey58, Gel58] suggerirono l'ipotesi **CVC (Conserved Vector Current)**, secondo la quale la parte vettoriale V_α della corrente debole adronica

$$h_{W\alpha} = V_\alpha + A_\alpha. \quad (4.39)$$

appartiene al **tripletto di correnti conservate associate all'invarianza di isospin (spin isotopico) delle interazioni forti**. Per questo motivo il valore $g_V = 1$ previsto dalla teoria $V - A$ per la costante di accoppiamento della parte vettoriale V_α della corrente

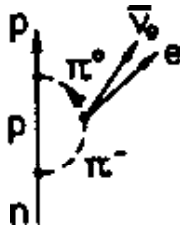


Figure 4.3: La conservazione della carica debole implica che il processo $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ è permesso ed il decadimento β del neutrone non viene rinormalizzato dall'effetto delle interazioni forti.

debole trascurando il contributo delle interazioni forti non viene modificato (rinormalizzato) dal contributo delle interazioni forti. In altre parole, la "carica" $g_V = 1$ è conservata nelle interazioni forti.

Se consideriamo il diagramma nella figura 4.2b notiamo che per effetto delle interazioni forti un neutrone può dissociarsi in una coppia virtuale $p\pi^-$, ma la corrente debole adronica (4.36) non genera un processo di decadimento debole per il π^- . Perciò, se la corrente debole adronica contenesse solamente il termine (4.36), il decadimento β del neutrone dovrebbe venire rinormalizzato dalle interazioni forti. Il fatto che il valore misurato di g_V è molto vicino a uno può essere spiegato con la conservazione della carica debole, che necessita (almeno) l'aggiunta di una opportuna corrente debole pionica alla corrente debole nucleonica (4.36) per formare la corrente adronica totale (4.37). La corrente debole pionica deve generare il diagramma nella figura 4.3, per cui l'ipotesi CVC prevede l'esistenza del decadimento $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ che è stato osservato con un branching ratio di circa 10^{-8} .

L'ipotesi di invarianza di isospin delle interazioni forti è stata formulata da Heisenberg nel 1932 in seguito ai risultati di osservazioni sperimentali che mostravano che, a parte piccole correzioni dovute all'interazione elettromagnetica, i nuclei contenenti lo stesso numero di nucleoni ma numeri diversi di protoni e neutroni hanno la stessa energia di legame. Se si raggruppano i nucleoni nel doppietto di isospin

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

la lagrangiana efficace delle interazioni forti è data da

$$\mathcal{L}_{N\pi} = \bar{N} (i \not{\partial} - m_N + i g \underline{\pi} \cdot \underline{\tau} \gamma_5) N + \frac{1}{2} [(\partial_\alpha \underline{\pi}) \cdot (\partial^\alpha \underline{\pi}) - m_\pi^2 \underline{\pi}^2 - \lambda \underline{\pi}^4], \quad (4.41)$$

dove $\underline{\tau} \equiv (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ (τ_1, τ_2, τ_3 sono le tre matrici di Pauli) e $\underline{\pi} \equiv (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è il tripletto di campi dei pioni, con

$$\pi^\pm \equiv \pi_1 \pm i \pi_2, \quad \pi^0 \equiv \pi_3. \quad (4.42)$$

g è la costante di accoppiamento nucleone-pione e λ è la costante di autoaccoppiamento dei pioni. Poiché g e λ non sono piccoli, le interazioni forti generate dalla lagrangiana (4.41) non possono essere calcolate con uno sviluppo perturbativo.

La lagrangiana (4.41) è invariante per trasformazioni di isospin del tipo⁵

$$N \rightarrow N' = U(\underline{\theta}) N, \quad (4.44a)$$

$$\underline{\pi} \cdot \underline{\tau} \rightarrow \underline{\pi}' \cdot \underline{\tau} = U(\underline{\theta}) \underline{\pi} \cdot \underline{\tau} U^{-1}(\underline{\theta}). \quad (4.44b)$$

con

$$U(\underline{\theta}) = \exp \left(i \sum_{a=1}^3 \theta_a \frac{\tau_a}{2} \right). \quad (4.45)$$

Le trasformazioni di isospin sono unitarie ed è facile verificare che costituiscono una rappresentazione del gruppo SU(2) delle matrici unitarie unimodulari. Infatti, le matrici di Pauli soddisfano le relazioni di commutazione dei momenti angolari,

$$\left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2} \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\tau_c}{2}, \quad (4.46)$$

per cui costituiscono una rappresentazione dell'algebra dei generatori del gruppo SU(2).

L'invarianza per trasformazioni di isospin (4.44) della lagrangiana (4.41) implica l'equazione di continuità (vedi la Sezione 2.5)

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{N\pi}}{\partial(\partial_\alpha N)} \delta N + \frac{\partial \mathcal{L}_{N\pi}}{\partial(\partial_\alpha \underline{\pi})} \delta \underline{\pi} \right) = 0. \quad (4.47)$$

Le variazioni infinitesime δN e $\delta \underline{\pi}$ sono date da una trasformazione infinitesima

$$U(\underline{\epsilon}) = 1 + i \epsilon_a \frac{\tau_a}{2}, \quad (4.48)$$

Dalla (4.44a) è evidente che

$$\delta N = i \epsilon_a \frac{\tau_a}{2} N. \quad (4.49)$$

Perciò

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{N\pi}}{\partial(\partial_\alpha N)} \delta N = (i \bar{N} \gamma^\alpha) \left(i \epsilon_a \frac{\tau_a}{2} N \right) = -\epsilon_a \bar{N} \gamma^\alpha \frac{\tau_a}{2} N. \quad (4.50)$$

Per trovare la variazione esplicita $\delta \underline{\pi}$ dei campi pionici, consideriamo la variazione $\delta \underline{\pi} \cdot \underline{\tau} \equiv \underline{\pi}' \cdot \underline{\tau} - \underline{\pi} \cdot \underline{\tau}$:

$$\begin{aligned} \delta \underline{\pi} \cdot \underline{\tau} &= 2 i \epsilon_a \left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2} \right] \pi_b \\ &= -\epsilon_{abc} \epsilon_a \pi_b \tau_c \\ &= -\epsilon_{abc} \epsilon_a \pi_b \tau_c. \end{aligned} \quad (4.51)$$

⁵Poichè $[\tau_a, \tau_b] = 2i\epsilon_{abc}\tau_c$ e $\{\tau_a, \tau_b\} = 2\delta_{ab}$, si ha $\tau_a\tau_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\tau_c$. Perciò $(\underline{\pi} \cdot \underline{\tau})^2 = (\underline{\pi} \cdot \underline{\tau})(\underline{\pi} \cdot \underline{\tau}) = \pi_a\tau_a\pi_b\tau_b = \pi_a\pi_b(\delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\tau_c) = \pi_a\pi_a = \underline{\pi} \cdot \underline{\pi} = \underline{\pi}^2$ ed il termine $\underline{\pi}^2$ è invariante per la trasformazione di isospin (4.44b):

$$\begin{aligned} \underline{\pi}^2 &= (\underline{\pi} \cdot \underline{\tau})(\underline{\pi} \cdot \underline{\tau}) \rightarrow (\underline{\pi}' \cdot \underline{\tau})(\underline{\pi}' \cdot \underline{\tau}) = U(\underline{\theta}) (\underline{\pi} \cdot \underline{\tau}) U^{-1}(\underline{\theta}) U(\underline{\theta}) (\underline{\pi} \cdot \underline{\tau}) U^{-1}(\underline{\theta}) \\ &= U(\underline{\theta}) (\underline{\pi} \cdot \underline{\tau}) (\underline{\pi} \cdot \underline{\tau}) U^{-1}(\underline{\theta}) = U(\underline{\theta}) \underline{\pi}^2 U^{-1}(\underline{\theta}) = \underline{\pi}^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

È evidente che dall'invarianza del termine $\underline{\pi}^2$ segue che anche i termini $(\partial_\alpha \underline{\pi}) \cdot (\partial^\alpha \underline{\pi})$ e $\underline{\pi}^4$ sono invarianti.

Sfruttando la proprietà

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[\tau_a \tau_b] = \delta_{ab}, \quad (4.52)$$

per $\delta\pi_a \equiv \pi'_a - \pi_a$ si trova

$$\delta\pi_a = \epsilon_b \varepsilon_{bac} \pi_c = i \epsilon_b (T_b)_{ac} \pi_c, \quad (4.53)$$

con T_b ($b = 1, 2, 3$) sono le matrici 3×3 con componenti

$$(T_b)_{ac} \equiv -i \varepsilon_{bac}. \quad (4.54)$$

È facile dimostrare che le matrici T_b soddisfano le relazioni di commutazione dei momenti angolari,

$$[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c. \quad (4.55)$$

Perciò esse costituiscono la rappresentazione tridimensionale dei generatori del gruppo $SU(2)$, che è appropriata per il campo pionico. Notiamo che la variazione (4.53) può essere scritta nella forma compatta

$$\delta\underline{\pi} = i \epsilon_b T_b \underline{\pi}, \quad (4.56)$$

per cui si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{N\pi}}{\partial(\partial_\alpha \underline{\pi})} \delta\underline{\pi} = (\partial^\alpha \underline{\pi})^T (i \epsilon_a T_a \underline{\pi}) = i \epsilon_a (\partial^\alpha \underline{\pi})^T T_a \underline{\pi}. \quad (4.57)$$

Dalle (4.47), (4.50) e (4.57), tenendo conto dell'arbitrarietà dei parametri ϵ_a , si vede che l'invarianza di isospin delle interazioni forti implica la conservazione del tripletto di correnti:

$$V_a^\alpha = \overline{N} \gamma^\alpha \frac{\tau_a}{2} N + i \underline{\pi}^T T_a \partial^\alpha \underline{\pi} \quad (a = 1, 2, 3). \quad (4.58)$$

Tenendo conto che

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

si vede che la terza componente di questo tripletto di correnti,

$$\begin{aligned} V_3^\alpha &= \frac{1}{2} (p \gamma^\alpha p - n \gamma^\alpha n) + \pi_1 \partial^\alpha \pi_2 - \pi_2 \partial^\alpha \pi_1 \\ &= \frac{1}{2} (p \gamma^\alpha p - n \gamma^\alpha n) + \frac{1}{2} (\pi^- \partial^\alpha \pi^+ - \pi^+ \partial^\alpha \pi^-). \end{aligned} \quad (4.60)$$

coincide con la componente isovettoriale della corrente elettromagnetica:

$$\begin{aligned} j_{\text{em}}^\alpha &= \overline{p} \gamma^\alpha p + \frac{1}{2} (\pi^- \partial^\alpha \pi^+ - \pi^+ \partial^\alpha \pi^-) \\ &= \overline{N} \gamma^\alpha \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) N + i \underline{\pi}^T T_a \partial^\alpha \underline{\pi} \\ &= \frac{1}{2} V_Y^\alpha + V_3^\alpha, \end{aligned} \quad (4.61)$$

dove $\frac{1}{2} V_Y^\alpha$ è la componente isoscalare della corrente elettromagnetica e

$$V_Y^\alpha = \bar{N} \gamma^\alpha N \quad (4.62)$$

è la corrente di **ipercarica**. Poichè j_{em}^α e V_3^α sono correnti conservate, è chiaro che anche V_Y^α lo è. La sua conservazione è dovuta all'ovvia invarianza della lagrangiana (4.41) per le trasformazioni del doppietto nucleonico

$$N \rightarrow N' = e^{i\theta} N, \quad (4.63)$$

cioè trasformazioni di fase comuni ai campi p e n . L'integrale sullo spazio della componente temporale della relazione

$$j_{\text{em}}^\alpha = V_3^\alpha + \frac{1}{2} V_Y^\alpha \quad (4.64)$$

produce la formula di Gell-Mann–Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (4.65)$$

che stabilisce la relazione tra gli operatori costanti nel tempo

$$I_3 \equiv \int d^3x V_3^0(x), \quad (4.66a)$$

$$Y \equiv \int d^3x V_Y^0(x). \quad (4.66b)$$

Si può dimostrare che gli stati di protone $|p\rangle$ e di neutrone $|n\rangle$ sono autostati dell'operatore I_3 :

$$I_3 |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle, \quad I_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle, \quad (4.67)$$

mentre gli operatori

$$I_\pm \equiv I_1 \pm i I_2 \quad (4.68)$$

trasformano $|p\rangle \leftrightarrow |n\rangle$:

$$I_+ |n\rangle = |p\rangle, \quad I_+ |p\rangle = 0, \quad (4.69a)$$

$$I_- |n\rangle = 0, \quad I_- |p\rangle = |n\rangle. \quad (4.69b)$$

L'ipotesi CVC suppone che la prima e la seconda componente del tripletto di correnti di isospin (4.58) formino la parte vettoriale della corrente debole adronica (4.39):

$$\begin{aligned} V^\alpha &= V_+^\alpha \equiv V_1^\alpha + i V_2^\alpha = \bar{N} \gamma^\alpha \left(\frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \right) N + i \underline{\pi}^T (T_1 + iT_2) \partial^\alpha \underline{\pi} \\ &= \bar{N} \gamma^\alpha \tau_+ N + i \underline{\pi}^T T_+ \partial^\alpha \underline{\pi}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

con

$$\tau_+ \equiv \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_+ \equiv T_1 + iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Perciò la parte vettoriale della corrente debole adronica è data da

$$V^\alpha = \bar{p} \gamma^\alpha n + i (\pi^0 \partial^\alpha \pi^+ - \pi^+ \partial^\alpha \pi^0) . \quad (4.72)$$

Notiamo che il coefficiente della componente nucleonica $\bar{p} \gamma^\alpha n$ è uno, per cui $g_V = 1$.

Si può ora dimostrare che l'elemento di matrice $\langle p | V^\alpha(x) | n \rangle$ relativo alla transizione $n \rightarrow p$ nel decadimento del neutrone (e nei decadimenti β nucleari) non viene ri-normalizzata dall'effetto delle interazioni forti perchè V^α è una corrente conservata. Sulla base dell'invarianza di Lorentz, la forma più generale dell'elemento di matrice $\langle p(k') | V^\alpha(0) | n(k) \rangle$ è data da

$$\langle p(k') | V^\alpha(0) | n(k) \rangle = g_1(q^2) (k'^\alpha + k^\alpha) + g_2(q^2) q^\alpha , \quad (4.73)$$

dove

$$q^\alpha \equiv k'^\alpha - k^\alpha \quad (4.74)$$

è il quadri-impulso trasferito. Sottolineiamo che l'espressione (4.73) per l'elemento di matrice **tiene conto del contributo non-perturbativo delle interazioni forti**.

L'invarianza della teoria per traslazioni spazio-temporali implica che

$$V^\alpha(x) = e^{iP \cdot x} V^\alpha(0) e^{-iP \cdot x} , \quad (4.75)$$

per cui

$$\begin{aligned} \langle p(k') | V^\alpha(x) | n(k) \rangle &= e^{i(k'-k) \cdot x} \langle p(k') | V^\alpha(0) | n(k) \rangle \\ &= e^{iq \cdot x} \langle p(k') | V^\alpha(0) | n(k) \rangle . \end{aligned} \quad (4.76)$$

Poichè la corrente è conservata, $\partial_\alpha V^\alpha(x) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p(k') | \partial_\alpha V^\alpha(x) | n(k) \rangle = \partial_\alpha \langle p(k') | V^\alpha(x) | n(k) \rangle \\ &= i q_\alpha e^{iq \cdot x} \langle p(k') | V^\alpha(0) | n(k) \rangle . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dalla (4.73), si ottiene

$$0 = q_\alpha \langle p(k') | V^\alpha(0) | n(k) \rangle = g_1(q^2) (m_p^2 - m_n^2) + g_2(q^2) q^2 . \quad (4.78)$$

Approssimando $m_p = m_n = m_N$, si ottiene $g_2(q^2) = 0$, per cui

$$\langle p(k') | V^\alpha(x) | n(k) \rangle = g_1(q^2) (k'^\alpha + k^\alpha) e^{iq \cdot x} . \quad (4.79)$$

Per determinare il valore di $g_1(q^2)$ integriamo la componente temporale della relazione (4.79) su tutto lo spazio e otteniamo

$$\langle p(k') | I_+ | n(k) \rangle = g_1(q^2) (E' + E) \underbrace{\int d^3x e^{iq \cdot x}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{q})} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q}) (E' + E) g_1(q^2) . \quad (4.80)$$

dove (vedi la (4.70))

$$I_+ \equiv \int d^3x V^0(x) = \int d^3x V_+^0(x) \quad (4.81)$$

è l'operatore costante nel tempo definito nell'eq.(4.68). Utilizzando la proprietà (4.69a) si trova

$$\langle p(k')|I_+|n(k)\rangle = \langle p(k')|p(k)\rangle = \delta^3(\vec{q}). \quad (4.82)$$

Confrontando le relazioni (4.80) e (4.82) si ottiene

$$g_1(q^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 (E' + E)}. \quad (4.83)$$

Perciò

$$\langle p(k')|V^\alpha(0)|n(k)\rangle = \frac{k'^\alpha + k^\alpha}{(2\pi)^3 (E' + E)}. \quad (4.84)$$

Nei decadimenti nucleari il quadri-impulso trasferito è molto più piccolo della massa del nucleone, per cui si può approssimare $k' = k$ e si ottiene

$$\langle p(k)|V^\alpha(0)|n(k)\rangle = \frac{k^\alpha}{(2\pi)^3 E}. \quad (4.85)$$

Questo è il valore dell'elemento di matrice tenendo conto del contributo non-perturbativo delle interazioni forti. Lo stesso risultato può essere ottenuto dalla parte vettoriale della corrente debole adronica (4.37) con $g_V = 1$ (o con l'espressione (4.70) per V^α) al primo ordine perturbativo, (nell'approssimazione $k' = k$ e $m_p = m_n = m_N$):

$$\begin{aligned} \langle p(k)|\bar{p}\gamma^\alpha n|n(k)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3 2E} \bar{u}_p(\vec{k}) \gamma^\alpha u_n(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 2E} \text{Tr}[u_n(\vec{k}) \underbrace{\bar{u}_p(\vec{k})}_{\frac{1}{2}(\not{k} + m_N)} \gamma^\alpha] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 2E} \frac{1}{2} k_\beta 4 g^{\beta\alpha} = \frac{k^\alpha}{(2\pi)^3 E}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Quindi, abbiamo dimostrato che se l'ipotesi CVC è vera, la simmetria di isospin delle interazioni forti implica che $g_V = 1$, cioè il valore di g_V non viene rinormalizzato dal contributo delle interazioni forti mediate dai campi pionici.

Per quanto riguarda la componente assiale della corrente nucleonica, essa è data da

$$A^\alpha = g_A \bar{p}\gamma^\alpha \gamma_5 n, \quad (4.87)$$

con $g_A \simeq 1.25$. La deviazione di g_A da uno è dovuta alla non-conservazione della corrente assiale nelle interazioni forti. Comunque, la differenza del valore di g_A da uno è relativamente piccola. Ciò è dovuto al fatto che solamente il termine di massa dei pioni nella lagrangiana efficace (4.41) delle interazioni forti viola la conservazione della corrente assiale. Poichè la massa dei pioni non è elevata, si ha una conservazione parziale della corrente assiale (PCAC, Partially Conserved Axial Current) che implica una piccola deviazione di g_A da uno (vedi, per esempio, [Lea96]).

4.3.2 L'angolo di Cabibbo

L'affinamento delle misure sperimentali nei primi anni '60 rivelò che in realtà g_V non è esattamente eguale ad uno. Ciò poneva dei seri problemi all'ipotesi CVC. Nel 1963 Cabibbo [Cab63] risolse brillantemente questo mistero tenendo conto anche dei processi deboli che non conservano la stranezza.

Le ampiezze dei processi deboli con $|\Delta S| = 1$ (ad esempio $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\Lambda^0 \rightarrow p + e^+ + \bar{\nu}_e$) sono molto più piccole di quelle di processi analoghi con $\Delta S = 0$ (ad esempio $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $n \rightarrow p + e^+ + \bar{\nu}_e$). Cabibbo notò che se uno scrive l'elemento di matrice della corrente debole adronica per il processo $\Lambda^0 \rightarrow p + e^+ + \bar{\nu}_e$ in maniera analoga a quello per il decadimento del neutrone (eq.(4.38)),

$$\langle p(k') | h_{W\alpha}^\alpha(0) | \Lambda^0(k) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{EE'}} \bar{u}_p(\vec{k}') \gamma^\alpha (g_V^{(\Delta S=1)} + g_A^{(\Delta S=1)} \gamma_5) u_{\Lambda^0}(\vec{k}), \quad (4.88)$$

i valori sperimentali di g_V e $g_V^{(\Delta S=1)}$ sono tali che

$$(g_V)^2 + (g_V^{(\Delta S=1)})^2 = 1. \quad (4.89)$$

Perciò g_V e $g_V^{(\Delta S=1)}$ non sono indipendenti, ma possono essere parametrizzati in termini di un angolo ϑ_C detto **angolo di Cabibbo**:

$$g_V = \cos \vartheta_C, \quad g_V^{(\Delta S=1)} = \sin \vartheta_C. \quad (4.90)$$

il valore sperimentale dell'angolo di Cabibbo è tale che

$$\sin \vartheta_C = 0.230 \pm 0.003, \quad (4.91)$$

per cui $\cos \vartheta_C \simeq 0.973$. Quindi la corrente debole adronica $h_{W\alpha}$ è data dalla somma

$$h_{W\alpha} = \cos \vartheta_C h_{W\alpha}^{(\Delta S=0)} + \sin \vartheta_C h_{W\alpha}^{(\Delta S=1)}, \quad (4.92)$$

dove $h_{W\alpha}^{(\Delta S=0)}$ è la componente della corrente che conserva la stranezza, tale che⁶

$$\langle p(k') | h_{W\alpha}^{(\Delta S=0)}(0) | n(k) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{EE'}} \bar{u}_p(\vec{k}') \gamma_\alpha (1 + g_A \gamma_5) u_n(\vec{k}), \quad (4.93)$$

e $h_{W\alpha}^{(\Delta S=1)}$ è la componente della corrente che cambia la stranezza di una unità, tale che

$$\langle p(k') | h_{W\alpha}^{(\Delta S=1)}(0) | \Lambda^0(k) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{EE'}} \bar{u}_p(\vec{k}') \gamma_\alpha (1 + g_A^{(\Delta S=1)} \gamma_5) u_{\Lambda^0}(\vec{k}). \quad (4.94)$$

4.3.3 Mixing di quarks

Partendo dall'analogia tra i doppietti di leptoni ed i doppietti di quarks

| | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------|
| (ν_e, e^-) | (ν_μ, μ^-) | (ν_τ, τ^-) | |
| (u, d) | (c, s) | (t, b) | (4.95) |
| 1 ^A generazione | 2 ^A generazione | 3 ^A generazione | |

⁶È sottinteso che g_A e $g_A^{(\Delta S=1)}$ vengono ridefiniti in maniera opportuna.

la corrente debole adronica può essere scritta direttamente in termini di quarks, con una struttura simile a quella leptonica (eq.(4.29)). Tenendo conto della proprietà (4.92), nel caso di 2 sole **generazioni** si ha

$$\begin{aligned} h_{W\alpha} &= \cos \vartheta_C \bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) d + \sin \vartheta_C \bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) s + \dots \\ &= \bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) [\cos \vartheta_C d + \sin \vartheta_C s] + \dots \end{aligned} \quad (4.96)$$

Infatti, la corrente

$$h_{W\alpha}^{(\Delta S=0)} = \bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) d \quad (4.97)$$

genera transizioni adroniche con conservazione della stranezza, mentre la corrente

$$h_{W\alpha}^{(\Delta S=1)} = \bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) s \quad (4.98)$$

genera transizioni adroniche con $\Delta S = +1$ (il quark s ha stranezza -1). È quindi evidente che lo stato di quark da associare ad u in un doppietto non è d , ma $d' = \cos \vartheta_C d + \sin \vartheta_C s$. Associando a c al posto di s lo stato $s' = -\sin \vartheta_C d + \cos \vartheta_C s$ ortogonale a d' , si ottengono i doppietti (al posto di quelli nell'eq.(4.95))

$$\begin{array}{cc} (\nu_e, e^-) & (\nu_\mu, \mu^-) \\ (u, d') & (c, s') \\ 1^A \text{ generazione} & 2^A \text{ generazione} \end{array} \quad (4.99)$$

dove

$$d' = \cos \vartheta_C d + \sin \vartheta_C s, \quad (4.100a)$$

$$s' = -\sin \vartheta_C d + \cos \vartheta_C s. \quad (4.100b)$$

Per la corrente debole adronica si ottiene

$$\begin{aligned} h_{W\alpha} &= \bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) d' + \bar{c} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) s' \\ &= \cos \vartheta_C [\bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) d + \bar{c} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) s] \\ &\quad + \sin \vartheta_C [\bar{u} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) s - \bar{c} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) d]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

In termini di quarks, il decadimento beta del neutrone è rappresentato dal diagramma

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} u \\ d \\ d \end{array} \right\} n \quad \left. \begin{array}{l} u \\ d \\ u \end{array} \right\} p \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{c} e^- \\ \bar{\nu}_e \end{array} \quad (4.102)$$

$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \vartheta_C$

e quello del barione Λ^0 è rappresentato dal diagramma

$$\Lambda^0 \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow u \\ d \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow d \\ s \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow u \end{array} \right\} p \quad (4.103)$$

La trasformazione (4.100) può essere scritta nella forma

$$D' = V D, \quad (4.104)$$

con

$$D' \equiv \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}, \quad D \equiv \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (4.105)$$

e V è la matrice ortogonale 2×2

$$V = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_C & \sin \vartheta_C \\ -\sin \vartheta_C & \cos \vartheta_C \end{pmatrix}, \quad (4.106)$$

che rappresenta una rotazione nello spazio bidimensionale dei campi d , s . La matrice V è chiamata **matrice di mixing**. Perciò, la corrente adronica (4.101) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} h_{W\alpha} &= \bar{U} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) D' \\ &= \bar{U} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V D, \end{aligned} \quad (4.107)$$

con

$$U \equiv \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}. \quad (4.108)$$

La generalizzazione della trasformazione (4.104) a 3 generazioni si ottiene con

$$D' \equiv \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}, \quad D \equiv \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.109)$$

e V diventa una matrice unitaria di mixing 3×3 detta **matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa**. La corrente adronica può essere scritta nelle tre forme equivalenti

$$h_{W\alpha} = \bar{U} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) D', \quad (4.110a)$$

$$h_{W\alpha} = \bar{U} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V D, \quad (4.110b)$$

$$h_{W\alpha} = \sum_{a=u,c,t} \sum_{b=d,s,b} \bar{U}_a \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V_{ab} D_b, \quad (4.110c)$$

con

$$U \equiv \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}. \quad (4.111)$$

In generale, una matrice unitaria $N \times N$ dipende da N^2 parametri indipendenti. Questi N^2 parametri si dividono in

$$\frac{N(N-1)}{2} \quad \text{angoli di mixing,} \quad (4.112a)$$

$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{fasi.} \quad (4.112b)$$

Però la lagrangiana dei campi fermionici dei quarks è invariante per trasformazioni di fase dei campi. Perciò ciascun campo di quark è definito a meno di un fattore di fase, cioè è possibile cambiare la sua fase in modo arbitrario:

$$U_a \rightarrow e^{i\theta_a} U_a, \quad D_a \rightarrow e^{i\lambda_a} D_a. \quad (4.113)$$

Se si effettua questa trasformazione, l'espressione (4.110c) per la corrente debole adronica generalizzata a N generazioni,

$$h_{W\alpha} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{U}_a \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V_{ab} D_b, \quad (4.114)$$

con $U_1, U_2, U_3, \dots \equiv u, c, t, \dots$ e $D_1, D_2, D_3, \dots \equiv d, s, b, \dots$, diventa

$$h_{W\alpha} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{U}_a \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e^{-i\theta_a} V_{ab} e^{i\lambda_b} D_b. \quad (4.115)$$

Definendo

$$\Theta \equiv \sum_{a=u_1}^{u_N} \theta_a, \quad \Lambda \equiv \sum_{a=d_1}^{d_N} \lambda_b, \quad (4.116)$$

l'espressione (4.115) può essere riscritta nella forma

$$h_{W\alpha} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{U}_a \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \underbrace{e^{-i(\Theta-\Lambda)}}_1 \underbrace{e^{i(\Theta-\theta_a)}}_{N-1} V_{ab} \underbrace{e^{-i(\Lambda-\lambda_b)}}_{N-1} D_b. \quad (4.117)$$

Da questa espressione è chiaro che ci sono

$$1 + (N-1) + (N-1) = 2N-1 \quad (4.118)$$

fasi arbitrarie indipendenti che possono essere scelte in modo da eliminare $2N-1$ delle $\frac{N(N+1)}{2}$ fasi contenute nella matrice unitaria V . Perciò la matrice unitaria V contiene solamente

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad \text{fasi fisiche.} \quad (4.119)$$

Le fasi fisiche sono le sole fasi misurabili nella matrice di mixing. Come abbiamo visto, $2N - 1$ fasi non-fisiche contenute in una parametrizzazione generale della matrice unitaria V possono essere eliminate scegliendo opportunamente le fasi arbitrarie ed inosservabili dei campi dei quarks. Perciò queste fasi inosservabili vengono eliminate a priori nelle parametrizzazioni della matrice di mixing V che vengono usate per studiare i fenomeni fisici.

Il numero di fasi fisiche è consistente con il trattamento precedente del caso di 2 generazioni, per il quale

$$N = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 1 & \text{angolo di mixing,} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 0 & \text{fasi fisiche,} \end{cases} \quad (4.120)$$

cioè l'unico parametro fisico nella matrice di mixing è l'angolo di Cabibbo. Le $2N - 1 = 3$ fasi non-fisiche arbitrarie vengono eliminate a priori e non compaiono nella parametrizzazione di Cabibbo (4.106) della matrice di mixing. Notiamo che esistono diversi modi di parametrizzare la matrice di mixing 2×2 , per cui esiste una certa arbitrarietà nella scelta della parametrizzazione. Ad esempio, invece della parametrizzazione di Cabibbo (4.106) si può scegliere

$$V = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_{C'} & -\sin \vartheta_{C'} \\ \sin \vartheta_{C'} & \cos \vartheta_{C'} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad V = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_{C''} & \cos \vartheta_{C''} \\ -\cos \vartheta_{C''} & \sin \vartheta_{C''} \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

Comunque, tutte le parametrizzazioni sono collegate tra loro ($\vartheta_{C'} = -\vartheta_C$, $\vartheta_{C''} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_C$) e danno gli stessi risultati fisici.

Nel caso realmente interessante di 3 generazioni si ha

$$N = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 3 & \text{angoli di mixing,} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 1 & \text{fase fisica.} \end{cases} \quad (4.122)$$

Perciò la matrice di mixing di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa può essere parametrizzata in termini di **3 angoli di mixing e 1 fase fisica**. Esistono diversi modi di parametrizzare la matrice di mixing 3×3 . La parametrizzazione più usata è quella adottata dal Particle Data Group [PDG96]:

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (4.123)$$

con $c_{ij} \equiv \cos \vartheta_{ij}$ e $s_{ij} \equiv \sin \vartheta_{ij}$. In questa parametrizzazione $\cos \vartheta_{12}$, $\cos \vartheta_{23}$, $\cos \vartheta_{13}$ sono i tre angoli di mixing e δ è la fase fisica.

La presenza di una fase fisica nella matrice di mixing di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa significa che la matrice di mixing non è reale e questo fatto implica la **violazione di CP nei processi deboli**. Ciò dovuto al fatto che se la matrice di mixing non è reale la lagrangiana non è invariante per trasformazioni CP . Per capire come ciò possa succedere, consideriamo la parte adronica (4.27) della lagrangiana di Fermi,

$$\mathcal{L}_{\text{processi adronici}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} h_W^\alpha h_{W\alpha}^\dagger. \quad (4.124)$$

Le trasformazioni per CP dei campi di quarks nella corrente h_W^α sono

$$\bar{U} \xrightarrow{P} \bar{U} \gamma_0 \xrightarrow{C} -U^T \mathcal{C}^{-1} \gamma_0, \quad (4.125a)$$

$$D \xrightarrow{P} \gamma_0 D \xrightarrow{C} \gamma_0 \mathcal{C} \bar{D}^T, \quad (4.125b)$$

Perciò, per la corrente $h_{W\alpha}$ nella forma (4.110b) si ottiene

$$\begin{aligned} h_{W\alpha} &\xrightarrow{CP} -U^T \mathcal{C}^{-1} \gamma_0 \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V \gamma_0 \mathcal{C} \bar{D}^T \\ &= U^T \gamma_0^T \gamma_\alpha^T (1 + \gamma_5^T) V \gamma_0^T \bar{D}^T \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$= -\bar{D} \gamma_0 V^T (1 + \gamma_5) \gamma_\alpha \gamma_0 U \quad (4.127)$$

$$= -\bar{D} V^T (1 - \gamma_5) \gamma_\alpha^\dagger U \quad (4.128)$$

$$= -\bar{D} \gamma_\alpha^\dagger (1 + \gamma_5) V^T U. \quad (4.129)$$

D'altra parte, la corrente $h_{W\alpha}^\dagger$ è data da

$$h_{W\alpha}^\dagger = \bar{D} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V^\dagger U \quad (4.130)$$

e per CP si ha

$$h_{W\alpha}^\dagger \xrightarrow{CP} -\bar{U} \gamma_\alpha^\dagger (1 + \gamma_5) V^* U. \quad (4.131)$$

Perciò, per la densità lagrangiana (4.124) si ottiene (ricordiamo che $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ e $\gamma_k^\dagger = -\gamma_k$, per cui $\gamma^{\alpha\dagger} \gamma_\alpha^\dagger = \gamma^\alpha \gamma_\alpha$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{processi adronici}} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{U} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) V U] [\bar{D} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V^\dagger U] \\ &\xrightarrow{CP} -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{D} \gamma^{\alpha\dagger} (1 + \gamma_5) V^T U] [\bar{U} \gamma_\alpha^\dagger (1 + \gamma_5) V^* U] \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{U} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) V^* U] [\bar{D} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) V^T U]. \end{aligned} \quad (4.132)$$

È chiaro che la lagrangiana è invariante per CP solamente se $V^* = V$, cioè se la matrice di mixing è reale.

Quindi nel caso di tre generazioni è possibile che le interazioni deboli violino l'invarianza per trasformazioni CP . In effetti, una violazione dell'invarianza CP è stata osservata negli anni '60 nei decadimenti dei mesoni K^0 e \bar{K}^0 (vedi, ad esempio, [Itz80, Nac89, Ren90, Bil94, Lea96]).

4.4 Problemi della teoria $V - A$

La teoria $V - A$ basata sulla lagrangiana di Fermi (4.22) descrive correttamente i processi deboli a bassa e media energia (come, ad esempio, i decadimenti deboli), ma non è applicabile a processi deboli ad alta energia, per i quali la teoria prevede sezioni d'urto che violano il limite di unitarietà (conservazione della probabilità). Infatti, su basi dimensionali si può stimare che l'andamento ad alta energia delle sezioni d'urto deboli è dato da

$$\sigma \sim G_F s, \quad (4.133)$$

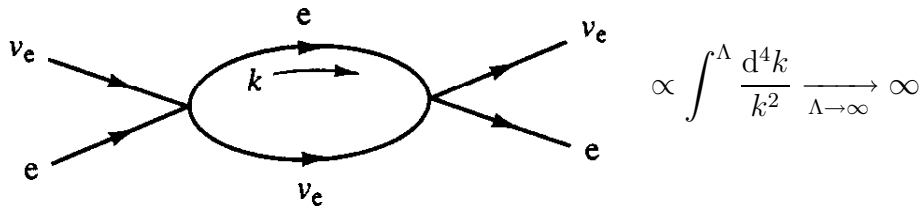


Figure 4.4: Divergenza del diagramma ad un loop per il processo $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$.

Ad esempio,

$$\sigma(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) \xrightarrow{\sqrt{s} \gg m_e} \frac{G_F^2 s}{\pi}. \quad (4.134)$$

È possibile dimostrare che per un'interazione puntiforme, qual'è quella descritta dall'accoppiamento di quattro campi fermionici nella lagrangiana di Fermi, l'unitarietà della teoria implica il limite superiore per le sezioni d'urto

$$\sigma \lesssim \frac{1}{s}. \quad (4.135)$$

La crescita proporzionale a s del tipo (4.134) delle sezioni d'urto deboli ad alta energia implica che il limite di unitarietà (4.135) viene violato per

$$G_F^2 s \sim \frac{1}{s} \implies \sqrt{s} \sim \frac{1}{\sqrt{G_F}} \sim 300 \text{ GeV}. \quad (4.136)$$

Poichè questa energia non è estremamente elevata e può essere raggiunta negli acceleratori di particelle, il problema è serio e va risolto.

L'unica possibilità di ristabilire l'unitarietà della teoria potrebbe essere quella di abbandonare l'approssimazione di Born per il calcolo delle sezioni d'urto e tenere conto delle correzioni radiative. L'approssimazione di Born consiste nel tenere conto solamente dei diagrammi ad albero, mentre i diagrammi con loops generano le correzioni radiative. Il contributo delle correzioni radiative potrebbe cancellare la crescita proporzionale ad s delle sezioni d'urto a grande \sqrt{s} . Però ci si accorge subito che i diagrammi con loops danno contributi divergenti (vedi la figura 4.4) che non possono essere eliminati con un'opportuna procedura di rinormalizzazione. In altre parole, **la teoria non è rinormalizzabile**.

La non-rinormalizzabilità della teoria è legata al fatto che la costante di accoppiamento G_F nella lagrangiana di Fermi (4.22) ha dimensione $[M]^{-2}$ e con un ragionamento dimensionale si può vedere che i diagrammi con loops negli ordini superiori della teoria perturbativa danno contributi sempre più divergenti. Si può dimostrare che una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché la teoria sia rinormalizzabile è che la costante di accoppiamento sia adimensionale (o con dimensione $[M]^k$ con $K > 0$ nel caso delle teorie super-rinormalizzabili), come nell'elettrodinamica quantistica.

Quindi, un primo passo verso la soluzione dei problemi dell'unitarietà e della rinormalizzabilità viene compiuto ipotizzando per le interazioni deboli una lagrangiana simile a quella delle interazioni elettromagnetiche, con una costante di accoppiamento adimensionale g_W :

$$\mathcal{L}_W(x) = -g_W j_{W\alpha}(x) W^\alpha(x) + \text{h.c.}, \quad (4.137)$$

dove è stato introdotto un nuovo campo vettoriale $W^\alpha(x)$ in analogia al campo vettoriale elettromagnetico $A^\alpha(x)$. Però, mentre il campo elettromagnetico è neutro, il campo $W^\alpha(x)$ è carico, perchè si accoppia alla corrente debole carica $j_{W^\alpha}(x)$. Inoltre, mentre il campo elettromagnetico è privo di massa e genera interazioni a lungo raggio, il campo $W^\alpha(x)$ deve avere una massa elevata, poichè le interazioni deboli hanno un raggio d'azione estremamente corto. Su basi dimensionali si può stimare

$$m_W \sim G_F^{-1/2} \sim 300 \text{ GeV}. \quad (4.138)$$

In realtà la lagrangiana (4.137) non risolve completamente il problema dell'unitarietà. Però si può dimostrare (vedi, per esempio, [Lea96]) che la violazione dell'unitarietà avviene ad energie elevatissime, dell'ordine di 10^8 GeV , ben al di là delle possibilità sperimentali. Inoltre, si può dimostrare che la teoria non è rinormalizzabile. Essa però costituisce un primo passo verso l'unificazione delle interazioni elettromagnetiche e deboli nel **Modello Standard delle interazioni elettrodeboli**, che è una teoria unitaria e rinormalizzabile.

Chapter 5

Il bosone W

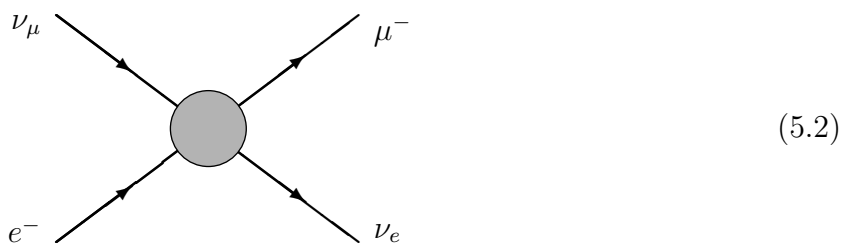
5.1 Ampiezze con scambio di W

Nella prospettiva di una trattazione unificata delle interazioni fondamentali, **assumiamo che l'interazione debole tra particelle elementari si realizzi con un meccanismo simile a quello dell'interazione elettromagnetica**. Così come due cariche elettriche interagiscono tra loro mediante scambio di fotoni (quanti del campo elettromagnetico, con spin 1), ipotizziamo che l'interazione debole tra coppie di fermioni avvenga tramite lo scambio di un **bosone intermedio W con spin 1**.

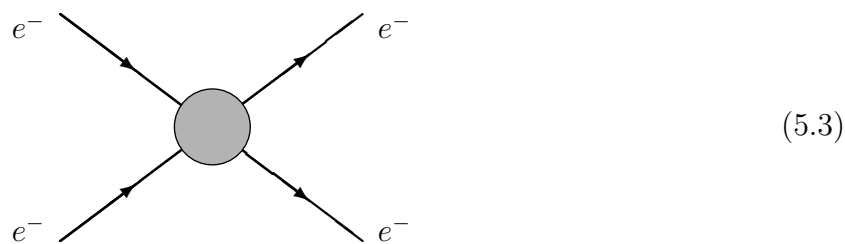
Prendiamo in esame, per esempio, il processo debole

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e, \quad (5.1)$$

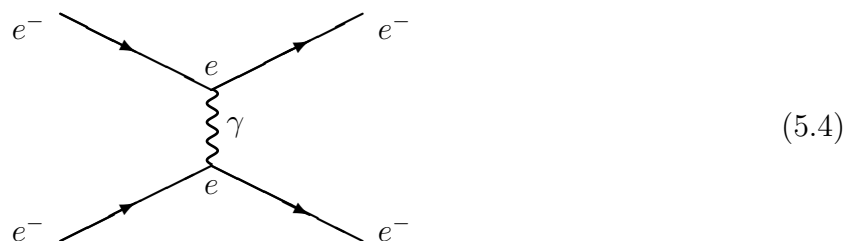
che è schematizzato dal diagramma



E consideriamo l'analogia con il processo elettromagnetico $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$,



che all'ordine perturbativo più basso è schematizzato dal diagramma di Feynman

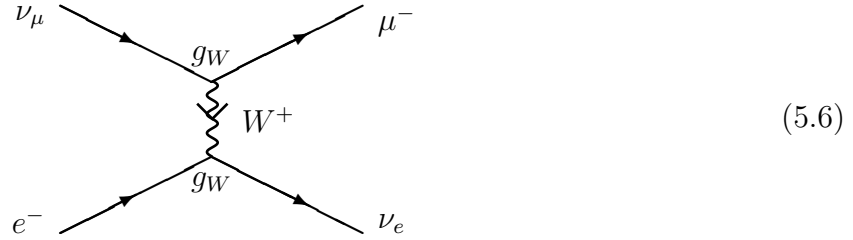


la cui ampiezza è data da (in questa equazione e nelle seguenti omettiamo i fattori di normalizzazione $1/(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}$ dei campi)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{e^-e^- \rightarrow e^-e^-} &= e \langle e_f^- | j_\alpha^{\text{em}}(0) | e_i^- \rangle G_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(q) e \langle e_{f'}^- | j_{\beta'}^{\text{em}}(0) | e_{i'}^- \rangle \\ &= e \bar{u}_f \gamma_\alpha u_i \frac{-i g^{\alpha\beta}}{q^2} e \bar{u}_{f'} \gamma_{\beta'} u_{i'}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

dove $j_\alpha^{\text{em}} = \bar{e} \gamma_\alpha e$ è la corrente elettromagnetica dell'elettrone e $G_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(q)$ è il propagatore del fotone con quadri-impulso q (vedi l'eq.(2.154b)).

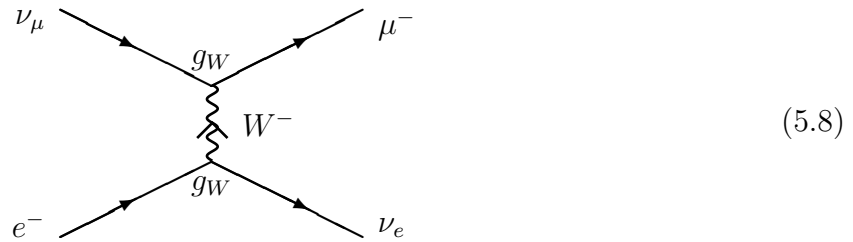
Assumiamo che il processo (5.2) avvenga, all'ordine perturbativo più basso, mediante il diagramma



con ampiezza data da

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} &= g_W \langle \mu^- | j_{W\alpha}^\dagger(0) | \nu_\mu \rangle G_{(W)}^{\alpha\beta}(q) g_W \langle \nu_e | j_{W\beta}(0) | e^- \rangle \\ &= 2 g_W [\bar{u}_{\nu_\mu L} \gamma_\alpha u_{\mu L}]^\dagger G_{(W)}^{\alpha\beta}(q) 2 g_W \bar{u}_{\nu_e L} \gamma_\beta u_{e L},\end{aligned}\quad (5.7)$$

dove $G_{(W)}^{\alpha\beta}(q)$ è il propagatore del bosone intermedio W con quadri-impulso q e g_W è la costante di accoppiamento debole, analoga alla carica elettrica elementare e . La quadri-corrente $j_{W\alpha}$ è la corrente debole carica (4.21) della teoria $V - A$. Questa corrente induce transizioni tra stati con cariche elettriche diverse (ad esempio, $e^- \rightarrow \nu_e$ e $\mu^- \rightarrow \nu_\mu$, mentre $j_{W\alpha}^\dagger$ induce le transizioni inverse $\nu_e \rightarrow e^-$ e $\nu_\mu \rightarrow \mu^-$). Per tenere conto della conservazione della carica elettrica, è necessario che il bosone W che si propaga dal vertice $\nu_\mu - \mu^-$ al vertice $e^- - \nu_e$ abbia carica elettrica $+|e|$, da cui segue la notazione W^+ . L'antiparticella del W^+ ha carica elettrica $-|e|$ e viene chiamata W^- . Il diagramma (5.6) è equivalente al diagramma



L'elemento di matrice della corrente debole carica per una transizione $\mu^- \rightarrow \nu_\mu$ è dato da

$$\langle \nu_\mu | j_{W\alpha}(0) | \mu^- \rangle = 2 \bar{u}_{\nu_\mu L} \gamma_\alpha u_{\mu L} = \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_\mu \quad (5.9)$$

Prendendo l'hermitiano coniugato e tenendo conto che $\gamma_0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma_0 = \gamma_\alpha$ e $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, si ottiene

$$\langle \mu^- | j_{W\alpha}^\dagger(0) | \nu_\mu \rangle = \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu} = 2 \bar{u}_{\mu L} \gamma_\alpha u_{\nu_\mu L}. \quad (5.10)$$

Quindi, possiamo scrivere l'ampiezza debole corrispondente al diagramma di Feynman (5.6) come

$$\mathcal{A}_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} = g_W^2 \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu} G_{(W)}^{\alpha\beta} \bar{u}_{\nu_e} \gamma_\beta (1 + \gamma_5) u_e. \quad (5.11)$$

È possibile ricavare questa ampiezza a partire dalla **lagrangiana di interazione** (4.137),

$$\mathcal{L}_W(x) = -g_W j_W^\alpha(x) W_\alpha(x) + \text{h.c.}, \quad (5.12)$$

dove $W_\alpha(x)$ è l'operatore di campo del bosone W e $j_W^\alpha(x)$ è la corrente debole carica (4.21):

$$j_W^\alpha(x) = \ell_W^\alpha(x) + h_W^\alpha(x), \quad (5.13)$$

dove $\ell_W^\alpha(x)$ è la corrente debole leptonica (4.29),

$$\ell_W^\alpha = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \ell, \quad (5.14)$$

e $h_W^\alpha(x)$ è la corrente debole adronica (4.110c)

$$h_W^\alpha = \sum_{a=u,c,t} \sum_{b=d,s,b} \bar{U}_a \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) V_{ab} D_b. \quad (5.15)$$

Le correnti hermitiane coniugate sono date da

$$\ell_W^{\alpha\dagger} = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\ell, \quad (5.16)$$

$$h_W^{\alpha\dagger} = \sum_{a=u,c,t} \sum_{b=d,s,b} \bar{D}_b \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) V_{ab}^* U_a. \quad (5.17)$$

È evidente che la lagrangiana (5.12) può essere espressa come la somma di una lagrangiana leptonica

$$\mathcal{L}_W^{(\ell)}(x) = -g_W \ell_W^\alpha(x) W_\alpha(x) + \text{h.c.} \quad (5.18)$$

ed una lagrangiana adronica

$$\mathcal{L}_W^{(q)}(x) = -g_W h_W^\alpha(x) W_\alpha(x) + \text{h.c.}, \quad (5.19)$$

per cui **le interazioni dei leptoni e degli adroni con il bosone W possono essere trattate separatamente.**

In particolare, la lagrangiana di interazione leptonica (5.18) genera gli accoppiamenti trilineari schematizzati dai diagrammi

$$(5.20)$$

Il fatto che le correnti deboli cariche dei leptoni e dei quarks compaiono nella corrente debole carica j_W^α con lo stesso peso significa che i leptoni ed i quarks interagiscono debolmente con la stessa intensità. Questo fatto è chiamato **universalità delle interazioni deboli** ed è verificato sperimentalmente.

5.2 Il bosone intermedio W

Per determinare completamente le ampiezze dei processi deboli occorre conoscere la forma analitica del propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(q)$ del bosone W . A differenza del caso elettromagnetico, in cui la massa del fotone è nulla ($m_\gamma = 0$), per l'interazione debole **si deve avere** $m_W \neq 0$. Ciò discende dalla relazione tra raggio d'azione della forza e massa del quanto scambiato.

Consideriamo un'interazione statica tra due particelle, cioè un'interazione con trasferimento di energia trascurabile. Se l'interazione tra particelle si realizza attraverso lo scambio di un quanto di massa m , affinché nel processo vi sia conservazione dell'energia, occorre che l'emissione del quanto da parte di una particella (con conseguente creazione di un'energia $\Delta E \sim mc^2$) ed il suo successivo riassorbimento da parte della stessa particella avvengano in un intervallo di tempo Δt consentito dal principio di indeterminazione energia-tempo, ossia $\Delta t \sim h/mc^2$. Il quanto virtuale si propaga quindi su una distanza

$$\ell \sim c\Delta t \sim h/mc, \quad (5.21)$$

ossia il raggio d'azione dell'interazione tra le due particelle è inversamente proporzionale alla massa del quanto scambiato tra di esse.

Mentre al raggio d'azione infinito dell'interazione elettromagnetica corrisponde la massa nulla del fotone, al raggio d'azione finito dell'interazione debole corrisponde una massa non nulla per il bosone intermedio W .

Introduciamo **un campo bosonico (carico) non-hermitiano $W^\alpha(x)$ di spin 1 e di massa m_W** . L'equazione di campo per $W^\alpha(x)$ può essere dedotta da quella del campo elettromagnetico con la sostituzione $\square \rightarrow \square + m_W^2$, ossia

$$(\square + m_W^2) W^\alpha - \partial^\alpha (\partial_\beta W^\beta) = 0 \quad (\text{Equazione di Proca}). \quad (5.22)$$

La corrispondente densità lagrangiana è:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2} W_{\alpha\beta}^{W\dagger} W^{W\alpha\beta} + m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha, \quad (5.23)$$

con

$$W_{\alpha\beta}^W \equiv \partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha. \quad (5.24)$$

Notiamo che, a causa della presenza del termine di massa $m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha$, **la densità lagrangiana non è invariante per trasformazioni di gauge** $W_\alpha(x) \rightarrow W'_\alpha(x) = W_\alpha(x) + \partial_\alpha \chi(x)$.

Prendendo la divergenza dell'eq.(5.22), si ottiene

$$m_W^2 \partial_\beta W^\beta = 0. \quad (5.25)$$

Quindi, se $m_W \neq 0$, si ha $\partial_\beta W^\beta = 0$ e l'equazione di Proca diventa

$$(\square + m_W^2) W^\alpha(x) = 0. \quad (5.26)$$

Queste sono quattro equazioni di Klein-Gordon disaccoppiate a cui devono soddisfare le quattro componenti del campo vettoriale W^α , con il vincolo aggiuntivo

$$\partial_\alpha W^\alpha(x) = 0. \quad (5.27)$$

Quindi, per particelle vettoriali massive questo vincolo riduce il numero di componenti indipendenti da quattro a tre.

Lo sviluppo di Fourier dell'operatore di campo $W^\alpha(x)$, che deve soddisfare alle (5.26) e (5.27), è dato da

$$W_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{r=1}^3 \left[a_{\vec{k}}^{(r)} \varepsilon_\mu^{(r)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + b_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \varepsilon_\mu^{(r)*}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]_{k_0=\omega_{\vec{k}}}, \quad (5.28)$$

dove $\omega_{\vec{k}}$ è l'energia dei modi di oscillazione del campo data da

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m_W^2}. \quad (5.29)$$

Gli operatori $a_{\vec{k}}^{(r)}$ distruggono bosoni W^+ e gli operatori $b_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ creano bosoni W^- . Gli operatori bosonici di creazione e distruzione soddisfano alle regole di commutazione

$$\left[a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}'}^{(s)\dagger} \right] = \left[b_{\vec{k}}^{(r)}, b_{\vec{k}'}^{(s)\dagger} \right] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{rs}, \quad (5.30)$$

mentre tutti gli altri commutatori sono nulli.

I quadri-vettori $\varepsilon^{(r)}(\vec{k})$ (con $r = 1, 2, 3$) formano un insieme completo di vettori di polarizzazione ortonormali:

$$\varepsilon^{(r)}(\vec{k}) \cdot \varepsilon^{(s)*}(\vec{k}) = -\delta_{rs}. \quad (5.31)$$

A causa del vincolo (5.27), i tre quadri-vettori $\varepsilon^{(r)}(\vec{k})$ devono essere ortogonali al quadri-impulso della particella,

$$k \cdot \varepsilon^{(r)}(\vec{k}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.32)$$

e dalle condizioni (5.31) e (5.32) segue la relazione di completezza

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) \varepsilon_\beta^{(r)*}(\vec{k}) = -g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2}. \quad (5.33)$$

Il propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(x - x')$ del bosone W è dato da

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(W)}(x - x') &\equiv \langle 0 | T [W_\alpha(x) W_\beta^\dagger(x')] | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{i \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \right)}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-x')}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Il propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(k)$ nello spazio degli impulsi è quindi dato da

$$G_{(W)}^{\alpha\beta}(k) = i \frac{-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon}. \quad (5.35)$$

Come esempio dell'applicazione della formula (5.35) abbiamo l'ampiezza corrispondente al diagramma di Feynman (5.6), che dalla (5.7) è data da

$$\mathcal{A}_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} = i g_W^2 \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu} \frac{-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \bar{u}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u_e. \quad (5.36)$$

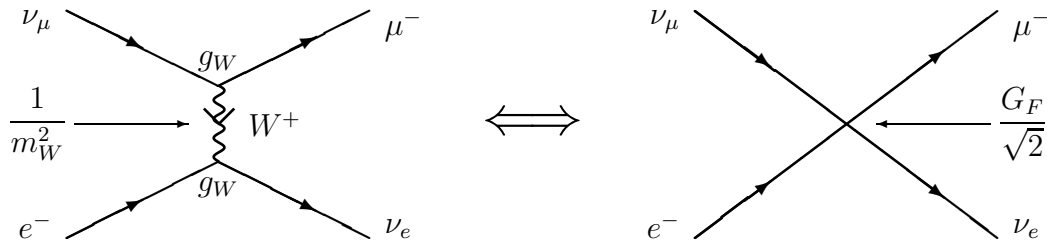


Figure 5.1: Illustrazione diagrammatica della relazione (5.40).

5.3 Limite di bassa energia

Nei processi di bassa energia ($|q^2|/m_W^2 \ll 1$, dove q^μ è il quadri-momento trasferito) possiamo sostituire al propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(q)$ del bosone intermedio W il suo limite

$$G_{(W)}^{\alpha\beta}(q) \xrightarrow[\frac{|q^2|}{m_W^2} \rightarrow 0]{} \frac{i g^{\alpha\beta}}{m_W^2}. \quad (5.37)$$

Per l'ampiezza corrispondente al diagramma di Feynman (5.6) si ottiene

$$\mathcal{A}_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} = i \frac{g_W^2}{m_W^2} [\bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u_e]. \quad (5.38)$$

Questa ampiezza corrisponde a quella che si ottiene dalla lagrangiana di Fermi:

$$\mathcal{A}_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e}^{(\text{Fermi})} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u_e]. \quad (5.39)$$

Quindi, la costante di accoppiamento debole g_W e la massa m_W del bosone W sono legate alla costante di Fermi G_F dalla relazione

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{m_W^2}. \quad (5.40)$$

Questa relazione è schematizzata dai diagrammi in Fig.5.1.

5.3.1 Stima di m_W

Se supponiamo che le costanti di accoppiamento g_W ed e dell'interazione debole e di quella elettromagnetica siano dello stesso ordine di grandezza,

$$g_W \sim e, \quad (5.41)$$

allora dalla (5.40) si ha

$$m_W \sim \frac{e}{(G_F/\sqrt{2})^{1/2}} = \left(\frac{4\pi\alpha}{G_F/\sqrt{2}} \right)^{1/2}. \quad (5.42)$$

Quindi, utilizzando il valore sperimentale (4.35), si ottiene

$$m_W \sim 100 \text{ GeV}. \quad (5.43)$$

Dalla (5.21) si ricava, per il raggio d'azione dell'interazione elettrodebole,

$$\ell \sim 10^{-16} \text{ cm}. \quad (5.44)$$

Il valore sperimentale di m_W è $m_W \simeq 80 \text{ GeV}$ e quindi l'ipotesi formulata nella (5.41) è corretta. Ne segue che **l'interazione che si esercita a bassa energia** ($|q^2| \ll m_W^2$), per esempio, tra ν_μ ed e^- nel processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$, **risulta debole non a causa dell'esiguità della costante di accoppiamento g_W (che è dell'ordine di grandezza della carica elettrica e), ma perchè il quanto scambiato tra i due leptoni ha massa elevata ($\sim 100 \text{ GeV}$) rispetto a $|q^2|$.**

5.4 Verso una teoria rinormalizzabile

Si può dimostrare che la teoria delle interazioni deboli basata sulla lagrangiana di interazione (5.12) **non è rinormalizzabile perchè il bosone W è massivo**. Infatti, il comportamento asintotico del propagatore (5.35) del bosone W per grandi $|k^2|$ è dato da

$$G_{(W)}^{\alpha\beta}(k) = i \frac{-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} \xrightarrow{|k^2| \rightarrow \infty} \frac{i}{m_W^2} \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \quad (5.45)$$

e quindi tende ad una costante. Ciò non è sufficiente per curare le divergenze dei loops nella teoria perturbativa e si può dimostrare che tali divergenze peggiorano aumentando l'ordine della perturbazione. Quindi la teoria non è rinormalizzabile.

Per capire come evitare questi problemi è naturale chiedersi perchè essi non sorgono nell'elettrodinamica quantistica. La ragione è l'**invarianza di gauge**, che è direttamente collegata al fatto che **il fotone ha massa nulla**. Infatti i problemi di divergenza della teoria debole sorgono dal termine

$$\frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2}. \quad (5.46)$$

nel propagatore del bosone W . Per l'invarianza di gauge questo termine è assente nel propagatore del fotone che, con un'opportuna scelta di gauge è (vedi l'eq.(2.134))

$$G_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(k) = -i \frac{g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \quad (5.47)$$

ed agisce come fattore di convergenza nel calcolo degli integrali sui quadri-impulsi dei loops quando $|k^2| \rightarrow \infty$.

Da queste motivazioni sorse nei primi anni '60 l'esigenza di costruire una teoria di gauge per le interazioni deboli, ma ci vollero diversi anni di studi per sormontare la difficoltà dovuta alla massa non nulla del bosone W che impedisce l'esistenza di una simmetria di gauge esplicita della lagrangiana. Nel Modello Standard di Glashow [Gla61], Weinberg [Wei67] & Salam [Sal68] questa difficoltà viene superata utilizzando il meccanismo di Higgs [Hig64, Eng64, Gur64, Hig66, Kib67] basato sulla rottura spontanea della simmetria [Gol61, Gol62].

Chapter 6

Teorie di gauge

Nel 1954 Yang & Mills [Yan54] proposero l'estensione della simmetria di gauge locale dell'elettrodinamica quantistica per trasformazioni appartenenti al gruppo abeliano $U(1)$ al caso del gruppo di simmetria non-abeliano $SU(2)$. Nascono così le **teorie di gauge**.

6.1 Formulazione generale delle teorie di gauge

Consideriamo un **gruppo di Lie** \mathcal{G} di ordine N , cioè avente N **generatori** T_a ($a = 1, \dots, N$) che obbediscono alle regole di commutazione (**algebra di Lie**)

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (a, b = 1, \dots, N), \quad (6.1)$$

dove i numeri reali f_{abc} sono le **costanti di struttura del gruppo**. I generatori definiscono gli elementi infinitesimi del gruppo (cioè quelli che differiscono in modo infinitesimo dall'identità):

$$g(\underline{\epsilon}) = 1 + i \underline{\epsilon} \cdot \underline{T}, \quad (6.2)$$

dove $\underline{T} \equiv (T_1, \dots, T_N)$ ed $\underline{\epsilon} \equiv (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ è un insieme di N parametri reali infinitesimi. Gli elementi finiti del gruppo, $g(\underline{\theta})$ con $\underline{\theta} \equiv (\theta_1, \dots, \theta_N)$, vengono ottenuti integrando gli elementi infinitesimi (6.2).

In teoria dei campi una **rappresentazione n -dimensionale unitaria** di \mathcal{G} è formata da:

1. Un insieme

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

di n campi ϕ_i ($i = 1, \dots, n$).

2. Un insieme

$$\underline{L} = (L_1, L_2, \dots, L_N) \quad (6.4)$$

di N matrici hermitiane $n \times n$ che costituiscono la rappresentazione n -dimensionale dei generatori del gruppo e soddisfano alle regole di commutazione (6.1):

$$[L_a, L_b] = if_{abc}L_c \quad (a, b = 1, \dots, N). \quad (6.5)$$

Le matrici L_a ($a = 1, \dots, N$) sono indipendenti e vengono scelte in modo da soddisfare la condizione di ortonormalità

$$\text{Tr}(L_a L_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (6.6)$$

3. Una regola di associazione $g(\underline{\theta}) \mapsto U(\underline{\theta})$, dove $U(\underline{\theta})$ è la matrice unitaria $n \times n$

$$U(\underline{\theta}) = e^{i\underline{\theta} \cdot \underline{L}} \equiv \exp \left(i \sum_{a=1}^N \theta_a L_a \right), \quad (6.7)$$

4. Una regola di trasformazione dei campi data da

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(\underline{\theta}) \Phi(x). \quad (6.8)$$

Consideriamo dapprima una **trasformazione di gauge globale**, cioè tale che i parametri θ_a ($a = 1, \dots, N$) non dipendono da x . La trasformazione di $\Phi(x)$ è data da

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(\underline{\theta}) \Phi(x) = e^{i\underline{\theta} \cdot \underline{L}} \Phi(x). \quad (6.9)$$

La derivata $\partial_\mu \Phi(x)$ si trasforma allo stesso modo di $\Phi(x)$:

$$\partial_\mu \Phi(x) \rightarrow \partial_\mu \Phi'(x) = \partial_\mu [U(\underline{\theta}) \Phi(x)] = U(\underline{\theta}) \partial_\mu \Phi(x). \quad (6.10)$$

La variazione di Φ per una trasformazione infinitesima $U(\underline{\epsilon})$ con $\epsilon_a \ll 1$ ($a = 1, \dots, N$) è data da

$$\delta \Phi(x) \equiv \Phi'(x) - \Phi(x) = i \underline{\epsilon} \cdot \underline{L} \Phi(x). \quad (6.11)$$

La variazione delle derivate $\partial_\mu \Phi$ è data da

$$\delta(\partial_\mu \Phi(x)) \equiv \partial_\mu \Phi'(x) - \partial_\mu \Phi(x) = \partial_\mu (\Phi'(x) - \Phi(x)) = \partial_\mu (\delta \Phi(x)), \quad (6.12)$$

per cui la variazione della densità lagrangiana dell'insieme di campi $\Phi(x)$,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)), \quad (6.13)$$

è data da

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \underbrace{\delta(\partial_\mu \Phi)}_{\partial_\mu(\delta \Phi)} + \delta \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\dagger} + \underbrace{\delta(\partial_\mu \Phi^\dagger)}_{\partial_\mu(\delta \Phi^\dagger)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right)}_0 \delta \Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) \\ &\quad + \underbrace{\delta \Phi^\dagger \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\dagger} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \right)}_0 + \partial_\mu \left(\delta \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi + \delta \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} i \underline{\epsilon} \cdot \underline{L} \Phi - i \Phi^\dagger \underline{\epsilon} \cdot \underline{L}^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \right) \\ &= i \sum_{a=1}^N \epsilon_a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} L_a \Phi - \Phi^\dagger L_a^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Poichè i parametri ϵ_a ($a = 1, \dots, N$) sono arbitrari, l'invarianza della densità lagrangiana ($\delta\mathcal{L} = 0$) per le trasformazioni (6.11) implica un'insieme di N equazioni di continuità

$$\partial_\mu j_a^\mu(x) = 0 \quad (a = 1, \dots, N) \quad (6.15)$$

per le N correnti conservate

$$j_a^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi(x))} L_a \Phi(x) - \Phi^\dagger(x) L_a^\dagger \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^\dagger(x))} \quad (a = 1, \dots, N). \quad (6.16)$$

Consideriamo ora una **trasformazione di gauge locale**, cioè supponiamo che i parametri θ_a della trasformazione $U(\underline{\theta})$ non siano costanti ma dipendano da x : $\theta_a = \theta_a(x)$, per cui

$$U(\underline{\theta}(x)) = e^{i\underline{\theta}(x)\cdot\underline{L}} = \exp\left(i \sum_{a=1}^N \theta_a(x) L_a\right), \quad (6.17)$$

la trasformazione di $\Phi(x)$ è data da

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(\underline{\theta}(x)) \Phi(x) = e^{i\underline{\theta}(x)\cdot\underline{L}} \Phi(x). \quad (6.18)$$

e la variazione di $\Phi(x)$ per una trasformazione infinitesima è data da

$$\delta\Phi(x) = i \underline{\epsilon}(x) \cdot \underline{L} \Phi(x). \quad (6.19)$$

Una condizione necessaria affinché la densità lagrangiana (6.13) dell'insieme di campi $\Phi(x)$ sia invariante per le trasformazioni di gauge locali (6.18) è che essa sia invariante per le trasformazioni di gauge globali (6.9), poichè le trasformazioni di gauge globali costituiscono un sottoinsieme delle trasformazioni di gauge locali. In altre parole, $\underline{\theta}$ costante è un caso particolare di $\underline{\theta} = \underline{\theta}(x)$. Perciò **consideriamo una densità lagrangiana invariante per le trasformazioni di gauge globali** (6.9) con $\underline{\theta}$ costante, che implica l'esistenza dell'insieme di N correnti conservate (6.16).

Però **una tale lagrangiana non può essere invariante per le trasformazioni di gauge locali** (6.18) perchè la derivata $\partial_\mu\Phi(x)$ non si trasforma allo stesso modo di $\Phi(x)$ e la sua trasformazione non è omogenea:

$$\partial_\mu\Phi(x) \rightarrow \partial_\mu\Phi'(x) = \partial_\mu[U(\underline{\theta}(x))\Phi(x)] = U(\underline{\theta}(x))[\partial_\mu\Phi(x)] + [\partial_\mu U(\underline{\theta}(x))]\Phi(x). \quad (6.20)$$

Ad esempio, se i campi ϕ_k sono campi spinoriali, per il termine cinetico della corrispondente lagrangiana di Dirac si ha

$$\begin{aligned} i\bar{\Phi}\partial\Phi \rightarrow i\bar{\Phi}'\partial\Phi' &\rightarrow = i\bar{\Phi}U^\dagger(\underline{\theta})\left\{U(\underline{\theta})[\partial\Phi] + [\partial U(\underline{\theta})]\Phi\right\} \\ &= i\bar{\Phi}\partial\Phi + i\bar{\Phi}[\partial U(\underline{\theta})]\Phi, \end{aligned} \quad (6.21)$$

e quindi non è invariante per le trasformazioni di gauge locali (6.18).

Affinchè la densità lagrangiana sia invariante per le trasformazioni di gauge locali (6.18) è necessario sostituire la derivata ordinaria ∂_μ con una **derivata covariante** D_μ tale che la trasformazione di $D_\mu\Phi(x)$ sia omogenea ed uguale a quella di $\Phi(x)$:

$$D_\mu\Phi \rightarrow D'_\mu\Phi' = U(\underline{\theta}) D_\mu\Phi. \quad (6.22)$$

Notiamo che nella trasformazione anche la derivata covariante si trasforma: $D_\mu \rightarrow D'_\mu$. Tenendo conto che $\Phi(x) = U^{-1}(\underline{\theta}) \Phi'$, è evidente che la trasformazione di D_μ è data da

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(\underline{\theta}) D_\mu U^{-1}(\underline{\theta}). \quad (6.23)$$

Per ottenere la trasformazione (6.23), introduciamo un insieme $\underline{A}_\mu(x) \equiv (A_1^\mu(x), \dots, A_N^\mu(x))$ di N campi vettoriali reali $A_a^\mu(x)$ ($a = 1, \dots, N$) detti **campi di gauge** e definiamo la derivata covariante come

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{L}. \quad (6.24)$$

Definiamo la trasformazione di gauge dei campi $A_a^\mu(x)$ in modo che la (6.23) sia soddisfatta. Utilizzando la (6.24), la (6.23) diventa

$$\begin{aligned} \partial_\mu + i g \underline{A}'_\mu \cdot \underline{L} &= U(\underline{\theta}) [\partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{L}] U^{-1}(\underline{\theta}) \\ &= U(\underline{\theta}) \left\{ U^{-1}(\underline{\theta}) \partial_\mu + [\partial_\mu U^{-1}(\underline{\theta})] \right\} + i g U(\underline{\theta}) [\underline{A}_\mu \cdot \underline{L}] U^{-1}(\underline{\theta}) \\ &= \partial_\mu + U(\underline{\theta}) [\partial_\mu U^{-1}(\underline{\theta})] + i g U(\underline{\theta}) [\underline{A}_\mu \cdot \underline{L}] U^{-1}(\underline{\theta}), \end{aligned} \quad (6.25)$$

Perciò, la trasformazione di $\underline{A}_\mu \cdot \underline{L}$ è data da

$$\underline{A}_\mu \cdot \underline{L} \rightarrow \underline{A}'_\mu \cdot \underline{L} = U(\underline{\theta}) \left(\underline{A}_\mu \cdot \underline{L} - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(\underline{\theta}). \quad (6.26)$$

Per trovare la trasformazione esplicita dei campi A_a^μ , consideriamo una trasformazione infinitesima

$$U(\underline{\epsilon}(x)) = 1 + i \underline{\epsilon}(x) \cdot \underline{L}. \quad (6.27)$$

Si ha

$$\delta \underline{A}_\mu \cdot \underline{L} = i [\underline{\epsilon} \cdot \underline{L}, \underline{A}_\mu \cdot \underline{L}] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\epsilon} \cdot \underline{L}, \quad (6.28)$$

cioè

$$\delta A_a^\mu L_a = -f_{abc} \epsilon_a A_b^\mu L_c - \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon_a L_a. \quad (6.29)$$

Sfruttando la relazione di ortonormalità (6.6) delle matrici L_a , si trova infine che la variazione di A_a^μ è data da

$$\delta A_a^\mu = f_{abc} A_b^\mu \epsilon_c - \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon_a \quad (a = 1, \dots, N), \quad (6.30)$$

che viene spesso scritto nella forma elegante

$$\delta \underline{A}_\mu = \underline{A}_\mu \times \underline{\epsilon} - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\epsilon}, \quad (6.31)$$

con¹

$$(\underline{A}^\mu \times \underline{\epsilon})_a \equiv f_{abc} A_b^\mu \epsilon_c. \quad (6.32)$$

¹Nel caso del gruppo SU(2) si ha $N = 3$ e $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$, per cui la definizione (6.32) coincide con la definizione del prototipo vettoriale di due trivettori.

Dalla formula (6.26) potrebbe sembrare che la variazione dei campi di gauge possa dipendere dalla rappresentazione \underline{L} dei generatori del gruppo di simmetria. Invece dall'espressione (6.30) per una trasformazione infinitesima è chiaro che la variazione dei campi di gauge dipende solamente dalle costanti di struttura del gruppo. Questa proprietà vale anche per le trasformazioni finite, che si ottengono integrando le trasformazioni infinitesime.

Notiamo che la variazione (6.31) dei campi di gauge A_a^μ è la generalizzazione al caso non abeliano della variazione

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \theta \quad (6.33)$$

del campo elettromagnetico per la simmetria di gauge U(1) (vedi l'eq.(2.141)). Il termine aggiuntivo $f_{abc} A_b^\mu \epsilon_c$ nella (6.30) è caratteristico dei gruppi non abeliani.

Riassumendo, abbiamo trovato che se la lagrangiana dell'insieme di campi $\Phi(x)$ è invariante per le trasformazioni di gauge globali (6.9), con la sostituzione

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{L} \quad (6.34)$$

essa è anche invariante per le trasformazioni di gauge locali

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U(\underline{\theta}) \Phi, \quad (6.35a)$$

$$\underline{A}_\mu \cdot \underline{L} \rightarrow \underline{A}'_\mu \cdot \underline{L} = U(\underline{\theta}) \left(\underline{A}_\mu \cdot \underline{L} - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(\underline{\theta}). \quad (6.35b)$$

Ovviamente la sostituzione (6.34) implica l'introduzione di un termine di accoppiamento tra i campi ϕ_a ed i campi di gauge A_a^μ . Ad esempio, se i campi ϕ_k sono campi spinoriali, dal termine cinetico della corrispondente lagrangiana di Dirac si ottiene

$$i \bar{\Phi} \not{D} \Phi = i \bar{\Phi} \not{\partial} \Phi - g \bar{\Phi} \underline{A} \cdot \underline{L} \Phi. \quad (6.36)$$

Quindi la richiesta di simmetria di gauge della lagrangiana implica:

1. L'esistenza di un insieme di campi vettoriali A_a^μ .
2. Questi campi vettoriali interagiscono con i campi ϕ_k attraverso un accoppiamento determinato dalla sostituzione (6.34) della derivata ordinaria con la derivata covariante.

Resta ancora da determinare il termine cinetico della lagrangiana dei campi vettoriali A_a^μ . A tale scopo è necessario determinare la generalizzazione al caso non abeliano del tensore elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (6.37)$$

e del termine cinetico

$$\mathcal{L}_{(\gamma)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (6.38)$$

La generalizzazione del termine cinetico è banale:

$$\mathcal{L}_{(A)} = -\frac{1}{4} \underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{A}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [(\underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{L}) (\underline{A}_{\mu\nu} \cdot \underline{L})], \quad (6.39)$$

con $\underline{A}^{\mu\nu} \equiv (A_1^{\mu\nu}, \dots, A_N^{\mu\nu})$. Invece, si può verificare che la generalizzazione banale dell'espressione (6.37),

$$A_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu \quad (a = 1, \dots, N), \quad (6.40)$$

non funziona, perchè produce un termine cinetico che non è invariante per le trasformazioni di gauge (6.35b). Per trovare l'espressione corretta per l'insieme $\underline{A}^{\mu\nu}$ di tensori dei campi di gauge, consideriamo la quantità $[D^\mu, D^\nu]$. Il commutatore permette di eliminare le derivate che non agiscono sui campi A_a^μ :

$$\begin{aligned} [D^\mu, D^\nu] &= [\partial^\mu + i g \underline{A}^\mu \cdot \underline{L}, \partial^\nu + i g \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] \\ &= \underbrace{[\partial^\mu, \partial^\nu]}_0 + i g \underbrace{[\partial^\mu, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}]}_{\partial^\mu \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}} + i g \underbrace{[\underline{A}^\mu \cdot \underline{L}, \partial^\nu]}_{-\partial^\nu \underline{A}^\mu \cdot \underline{L}} - g^2 [\underline{A}^\mu \cdot \underline{L}, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] \\ &= i g (\partial^\mu \underline{A}^\nu \cdot \underline{L} - \partial^\nu \underline{A}^\mu \cdot \underline{L} + i g [\underline{A}^\mu \cdot \underline{L}, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}]) \\ &= i g (\partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu - g \underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu) \cdot \underline{L}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Dalla legge di trasformazione (6.23) per la derivata covariante, è evidente che la trasformazione di $[D^\mu, D^\nu]$ è data da

$$[D^\mu, D^\nu] \rightarrow [D'^\mu, D'^\nu] = U(\underline{\theta}) [D^\mu, D^\nu] U^{-1}(\underline{\theta}), \quad (6.42)$$

per cui

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ [D^\mu, D^\nu] [D_\mu, D_\nu] \} &\rightarrow \text{Tr} \{ [D'^\mu, D'^\nu] [D'_\mu, D'_\nu] \} \\ &= \text{Tr} \left\{ U(\underline{\theta}) [D^\mu, D^\nu] \underbrace{U^{-1}(\underline{\theta}) U(\underline{\theta})}_1 [D_\mu, D_\nu] U^{-1}(\underline{\theta}) \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \underbrace{U^{-1}(\underline{\theta}) U(\underline{\theta})}_1 [D^\mu, D^\nu] [D_\mu, D_\nu] \right\} \\ &= \text{Tr} \{ [D^\mu, D^\nu] [D_\mu, D_\nu] \}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Quindi, $\text{Tr} \{ [D^\mu, D^\nu] [D_\mu, D_\nu] \}$ è invariante per trasformazioni di gauge. Tenendo conto delle (6.39) e (6.41), è evidente che la generalizzazione corretta del tensore elettromagnetico al caso non abeliano è

$$\begin{aligned} \underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{L} &= -\frac{i}{g} [D^\mu, D^\nu] \\ &= \partial^\mu \underline{A}^\nu \cdot \underline{L} - \partial^\nu \underline{A}^\mu \cdot \underline{L} + i g [\underline{A}^\mu \cdot \underline{L}, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] \\ &= (\partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu - g \underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu) \cdot \underline{L}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

per cui

$$A_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (a = 1, \dots, N). \quad (6.45)$$

Questi sono gli N tensori dei campi A_a^μ . La presenza in $A_a^{\mu\nu}$ del nuovo termine quadratico nei campi $A_a^{\mu\nu}$ è molto importante, perchè implica che la lagrangiana (6.39) non contiene

solamente i termini cinetici dei campi di gauge, ma anche termini di accoppiamento tra i vari campi A_a^μ . Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(A)} = & \underbrace{-\frac{1}{4}(\partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu) \cdot (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu)}_{\text{termine cinetico}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}g(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) f_{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}}_{\text{vertici trilineari}} \\
& - \underbrace{\frac{1}{4}g^2 f_{abc} f_{ade} A_b^\mu A_c^\nu A_{d\mu} A_{e\nu}}_{\text{vertici quadrilineari}} .
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Perciò, contrariamente al caso abeliano (la carica elettrica del fotone è nulla) nel caso non abeliano i campi di gauge sono carichi ed autointeragiscono.

L'intensità dell'autointerazione dei campi di gauge determina il valore della costante di accoppiamento g , che a sua volta determina l'intensità dell'interazione dei campi di gauge con i campi ϕ_k attraverso la derivata covariante. Inoltre, poichè la scala dei generatori \underline{L} è determinata dalle relazioni di commutazione (6.5), che non sono lineari, **nel caso di una simmetria di gauge non abeliana tutti i campi hanno la stessa carica g** . Ciò è diverso dal caso della simmetria di gauge abeliana dell'elettromagnetismo che permette a campi diversi di avere diversa carica elettrica, perchè al posto dell'insieme di generatori \underline{L} c'è solamente un generatore Q la cui scala non è determinata da nessuna relazione e può assumere valori diversi quando agisce su campi diversi.

Notiamo infine che un termine di massa per i campi di gauge

$$\frac{1}{2} m^2 \underline{A}^\mu \cdot \underline{A}_\mu \tag{6.47}$$

non è invariante di gauge. Perciò **la simmetria di gauge locale implica necessariamente che i campi di gauge sono privi di massa.**

6.2 Cromodinamica Quantistica

La cromodinamica quantistica (QCD, Quantum Chromo-Dynamics) è la teoria di gauge delle interazioni forti basata sul gruppo di simmetria $SU(3)$, che ha $N = 8$ generatori. Si suppone che ciascun campo di quark $q(x)$ ($q = u, d, c, s, t, b$) abbia tre gradi di libertà di colore:

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{pmatrix} . \tag{6.48}$$

Consideriamo le trasformazioni di gauge locali di colore dei campi dei quarks:

$$q(x) \rightarrow q'(x) = U(\underline{\theta}) q(x) , \tag{6.49}$$

con

$$U(\underline{\theta}) = \exp \left(i \sum_{a=1}^8 \theta_a(x) L_a \right) . \tag{6.50}$$

Le otto matrici 3×3 hermitiane L_a costituiscono una rappresentazione dei generatori del gruppo $SU(3)$. Le matrici L_a hanno traccia nulla e soddisfano alle regole di commutazione di $SU(3)$

$$[L_a, L_b] = if_{abc}L_c \quad (a, b = 1, \dots, 8). \quad (6.51)$$

La rappresentazione comunemente usata è $L_a = \lambda_a/2$, dove λ_a sono le otto matrici di Gell-Mann. Con questa scelta le matrici L_a soddisfano le relazioni di ortonormalità (6.6).

Affinchè la lagrangiana di QCD sia invariante per le trasformazioni di colore (6.49), si introducono gli otto campi vettoriali dei **gluoni** G_a^μ ($a = 1, \dots, 8$) che si trasformano secondo la (6.35b):

$$\underline{G}_\mu \cdot \underline{L} \rightarrow \underline{G}'_\mu \cdot \underline{L} = U(\underline{\theta}) \left(\underline{G}_\mu \cdot \underline{L} - \frac{i}{g_s} \partial_\mu \right) U^{-1}(\underline{\theta}). \quad (6.52)$$

dove g_s è la costante di accoppiamento delle interazioni forti.

La lagrangiana di QCD, invariante per le trasformazioni di gauge (6.49), (6.52), è

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q} (i \not{D} - m_q) q - \frac{1}{4} \underline{G}^{\mu\nu} \cdot \underline{G}_{\mu\nu}, \quad (6.53)$$

dove D_μ è la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s \underline{G}_\mu \cdot \underline{L}, \quad (6.54)$$

e $\underline{G} \equiv (G_1^{\mu\nu}, \dots, G_8^{\mu\nu})$ è l'insieme degli otto tensori gluonici

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu \quad (a = 1, \dots, 8). \quad (6.55)$$

I gluoni hanno una carica di colore ed auto-interagiscono con gli accoppiamenti trilineari e quadrilineari contenuti nel termine gluonico della lagrangiana (6.53). Questo fatto, implica che la fenomenologia della QCD è molto più ricca e complicata da studiare di quella dell'elettromagnetismo. Inoltre, poichè la costante di accoppiamento g_s non è piccola, al contrario della costante di struttura fine α , la teoria non può essere trattata in modo perturbativo².

6.3 Modello Elettro-Debole $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Come abbiamo visto alla fine della sezione 6.1, i campi di gauge devono essere rigorosamente privi di massa per rispettare la simmetria di gauge locale. Perciò sembrerebbe che non ci sia nessuna speranza di descrivere le interazioni deboli, che necessitano di bosoni vettori massivi, con una teoria di gauge. Nonostante ciò nel 1961 Glashow [Gla61] propose una teoria nella quale le interazioni elettromagnetiche e deboli venivano unificate in una teoria di gauge basata sul gruppo di simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Gli indici L e Y indicano che le trasformazioni del gruppo $SU(2)_L$ agiscono sulle componenti chiral left-handed dei campi spinoriali fermionici, mentre il generatore delle trasformazioni

²In realtà ciò è vero per processi a bassa energia, mentre ad alta energia la costante di accoppiamento rinormalizzata dalle correzioni radiative è piccola e permette un trattamento perturbativo della teoria (vedi, ad esempio [Lea96b]).

appartenenti al gruppo $U(1)_Y$ è l'operatore di ipercarica. In questo modello la simmetria della lagrangiana è esplicitamente rotta dai termini di massa dei bosoni vettori. Per questo motivo il modello non è rinormalizzabile. Esso però costituisce la base del Modello Standard che è rinormalizzabile perchè i bosoni vettori acquistano massa attraverso la rottura spontanea della simmetria realizzata con il meccanismo di Higgs.

In questa sezione costruiamo il modello delle interazioni elettrodeboli basato sul gruppo di simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ trascurando il problema della massa dei bosoni di gauge. Consideriamo solamente i leptoni che sono più semplici da trattare, mentre l'estensione ai quarks verrà trattata dopo la formulazione completa del modello standard.

Poichè il gruppo $SU(2)_L$ ha 3 generatori ed il gruppo $U(1)_Y$ ne ha uno, dobbiamo introdurre quattro campi di gauge vettoriali: tre campi A_a^μ con $a = 1, 2, 3$ associati al gruppo $SU(2)_L$ ed il campo B^μ associato al gruppo $U(1)_Y$. La derivata covariante è data da

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i g' B_\mu \frac{Y}{2}, \quad (6.56)$$

dove $\underline{A}^\mu = (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu)$ e $\underline{I} = (I_1, I_2, I_3)$ è un insieme di 3 matrici che agiscono sui campi e costituiscono una rappresentazione dei tre generatori di $SU(2)_L$, che è chiamato **isospin debole** (weak isospin). Le matrici I_a soddisfano le regole di commutazione dei momenti angolari

$$[I_a, I_b] = i \varepsilon_{abc} I_c. \quad (6.57)$$

Anche la matrice di **ipercarica** Y agisce sui campi e costituisce una rappresentazione del generatore del gruppo $U(1)_Y$, la cui scala non è fissata da nessuna relazione. Perciò gli autovalori della matrice Y non sono fissati e possono essere diversi per i diversi multipletti di campi. Notiamo che la matrice Y è diagonale in ogni rappresentazione di $SU(2)_L \times U(1)_Y$ e commuta con le matrici I_a ($a = 1, 2, 3$). Ci sono due costanti di accoppiamento indipendenti, g associata al gruppo $SU(2)_L$ e g' associata al gruppo $U(1)_Y$.

Per definire la struttura di gauge del modello, bisogna definire l'azione dei generatori del gruppo sui campi fermionici, cioè bisogna scegliere le rappresentazioni dei campi fermionici.

Raggruppiamo le componenti chirali left-handed dei campi spinoriali leptonici nei **doppietti di isospin debole**

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

L'azione delle rappresentazioni \underline{I} e Y sui doppietti di isospin debole è data da ($\ell = e, \mu, \tau$)

$$\underline{I} L_\ell = \frac{\underline{\tau}}{2} L_\ell, \quad (6.59a)$$

$$Y L_\ell = -L_\ell, \quad (6.59b)$$

dove $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ è l'insieme delle tre matrici di Pauli. Perciò i doppietti leptonici hanno ipercarica $Y = -1$. La trasformazione dei doppietti di isospin debole per una trasformazione di gauge appartenente al gruppo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ parametrizzata dal set di 3+1 parametri $(\underline{\theta}, \eta)$, con $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, è data da

$$L_\ell \rightarrow L'_\ell = U_L(\underline{\theta}, \eta) L_\ell \quad (\ell = e, \mu, \tau), \quad (6.60)$$

con

$$U_L(\underline{\theta}, \eta) = e^{i\underline{\theta} \cdot \frac{\underline{\tau}}{2} - i\frac{\eta}{2}} = \exp\left(i \sum_{a=1}^3 \theta_a \frac{\tau_a}{2} - i\frac{\eta}{2}\right). \quad (6.61)$$

Poichè i neutrini vengono considerati privi di massa, i loro campi non necessitano di una componente right-handed. Le componenti chirali right-handed dei campi dei leptoni carichi,

$$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R, \quad (6.62)$$

sono considerate **singoletti di isospin debole**. L'azione delle rappresentazioni \underline{I} e Y sui singoletti di isospin debole è definita da ($\ell = e, \mu, \tau$)

$$\underline{I} \ell_R = 0, \quad (6.63a)$$

$$Y \ell_R = -2 \ell_R. \quad (6.63b)$$

Quindi i singoletti hanno ipercarica $Y = -2$. La trasformazione dei singoletti di isospin debole per una trasformazione di gauge appartenente al gruppo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ parametrizzata dal set di 3+1 parametri $(\underline{\theta}, \eta)$, è data da

$$\ell_R \rightarrow \ell'_R = U_R(\eta) \ell_R \quad (\ell = e, \mu, \tau), \quad (6.64)$$

con

$$U_R(\eta) = e^{-i\eta}. \quad (6.65)$$

Notiamo che l'autovalore dell'ipercarica Y sui doppietti e sui singoletti di isospin debole (che non sono singoletti di ipercarica) è diverso: $Y = -1$ per i doppietti e $Y = -2$ per i doppietti. Ciò corrisponde all'arbitrarietà della scala dell'ipercarica che implica la possibilità che campi diversi abbiano ipercarica diversa.

I doppietti (6.58) ed i singoletti (6.62) vengono anche chiamati, rispettivamente, **doppietti left-handed** e **singoletti right-handed**. L'azione delle rappresentazioni \underline{I} e Y sui multipletti di isospin debole è definita in modo da soddisfare la relazione di Gell-Mann–Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (6.66)$$

dove Q è la matrice che rappresenta l'operatore di carica. Infatti, si ha

$$Q L_\ell = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_{\ell L} \\ \ell_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ell_L \end{pmatrix}, \quad (6.67a)$$

$$Q \ell_R = \left[0 - \frac{2}{2} \right] \ell_R = -\ell_R. \quad (6.67b)$$

La lagrangiana del modello è

$$\mathcal{L}_{SU(2)_L \times U(1)_Y} = \sum_{\ell} (i \bar{L}_\ell \not{D} L_\ell + i \bar{\ell}_R \not{D} \ell_R) - \frac{1}{4} \underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{A}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \quad (6.68)$$

dove $\underline{A}^{\mu\nu} \equiv (A_1^{\mu\nu}, A_2^{\mu\nu}, A_3^{\mu\nu})$ è l'insieme dei tensori dei tre campi di gauge A_a^μ ,

$$A_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g \varepsilon_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (a = 1, 2, 3), \quad (6.69)$$

e $B^{\mu\nu}$ è il tensore del campo di gauge B^μ ,

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu. \quad (6.70)$$

La lagrangiana (6.68) è invariante per le trasformazioni di gauge locali appartenenti al gruppo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ parametrizzate dal set di 3+1 parametri $(\underline{\theta}, \eta)$, con $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$,

$$L_\ell \rightarrow L'_\ell = \exp\left(\frac{i}{2}\underline{\theta} \cdot \underline{\mathcal{I}} - \frac{i}{2}\eta\right) L_\ell, \quad (6.71a)$$

$$\ell_R \rightarrow \ell'_R = e^{-i\eta} \ell_R, \quad (6.71b)$$

$$\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} \rightarrow \underline{A}'_\mu \cdot \underline{I} = U(\underline{\theta}) \left(\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(\underline{\theta}), \quad (6.71c)$$

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g'} \partial_\mu \eta(x). \quad (6.71d)$$

Come abbiamo notato dopo l'eq.(6.32), la variazione dei campi di gauge A_a^μ dipende solamente dalle costanti di struttura del gruppo e non dalla rappresentazione \underline{I} dei generatori del gruppo di simmetria $SU(2)_L$ (ovviamente, la stessa rappresentazione \underline{I} deve essere usata nell'espressione di $U(\underline{\theta})$).

Notiamo che, poichè le componenti chirali left-handed e right-handed dei campi fermionici si trasformano in modo diverso, i termini di massa per i fermioni carichi

$$\bar{\ell} \ell = \bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L \quad (6.72)$$

sono proibiti dalla simmetria. Questo è un altro difetto del modello: non solo i bosoni di gauge, ma anche i fermioni hanno masse nulle.

L'interazione dei fermioni con i bosoni di gauge è determinata dagli accoppiamenti contenuti nelle derivate covarianti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= - \sum_\ell \left\{ \bar{L}_\ell \left(g \underline{A} \cdot \underline{I} + g' \underline{B} \frac{Y}{2} \right) L_\ell + \bar{\ell}_R \left(g \underline{A} \cdot \underline{I} + g' \underline{B} \frac{Y}{2} \right) \ell_R \right\} \\ &= - \sum_\ell \left\{ \frac{1}{2} \bar{L}_\ell (g \underline{A} \cdot \underline{\mathcal{I}} - g' \underline{B}) L_\ell - g' \bar{\ell}_R \underline{B} \ell_R \right\} \\ &= - \sum_\ell \left\{ \frac{1}{2} (\bar{\nu}_{\ell L} \quad \bar{\ell}_L) \begin{pmatrix} g \underline{A}_3 - g' \underline{B} & g(\underline{A}_1 - i \underline{A}_2) \\ g(\underline{A}_1 + i \underline{A}_2) & -g \underline{A}_3 - g' \underline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\ell L} \\ \ell_L \end{pmatrix} - g' \bar{\ell}_R \underline{B} \ell_R \right\}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Possiamo dividere questa lagrangiana di interazione in un lagrangiana di corrente carica (CC)

$$\mathcal{L}_I^{(CC)} = -\frac{g}{2} \sum_\ell \left\{ \bar{\nu}_{\ell L} (\underline{A}_1 - i \underline{A}_2) \ell_L + \bar{\ell}_L (\underline{A}_1 + i \underline{A}_2) \nu_{\ell L} \right\}, \quad (6.74)$$

data dai termini non-diagonali della (6.73), ed una di corrente neutra (NC)

$$\mathcal{L}_I^{(NC)} = -\frac{1}{2} \sum_\ell \left\{ \bar{\nu}_{\ell L} (g \underline{A}_3 - g' \underline{B}) \nu_{\ell L} - \bar{\ell}_L (g \underline{A}_3 + g' \underline{B}) \ell_L - 2 g' \bar{\ell}_R \underline{B} \ell_R \right\}, \quad (6.75)$$

data dai termini diagonali della (6.73).

Consideriamo la lagrangiana di corrente carica (6.74). Definiamo il campo carico W^μ che distrugge bosoni W^+ e crea bosoni W^- come

$$W^\mu \equiv \frac{A_1^\mu - i A_2^\mu}{\sqrt{2}}. \quad (6.76)$$

Perciò, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(CC)} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\ell \{ \bar{\nu}_{\ell L} W \ell_L + \bar{\ell}_L W^\dagger \nu_{\ell L} \} \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_\ell \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \ell W_\alpha + \text{h.c.} \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \ell_W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} . \end{aligned} \quad (6.77)$$

Questa lagrangiana di corrente carica genera gli accoppiamenti trilineari schematizzati dai diagrammi

$$\quad (6.78)$$

Dal confronto con l'eq.(5.18) si vede che la costante g_W usata nel capitolo 5 è data da

$$g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}. \quad (6.79)$$

Dal confronto con la lagrangiana di Fermi, segue che (vedi l'eq.(5.40))

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}, \quad (6.80)$$

dove m_W è la massa del bosone W che nel modello che stiamo considerando deve essere introdotta “a mano” rompendo esplicitamente la simmetria di gauge.

Consideriamo ora la lagrangiana di corrente neutra (6.75). Poichè vogliamo incorporare nella teoria l'elettrodinamica quantistica, il campo elettromagnetico A^μ deve essere espresso da una combinazione lineare appropriata dei campi A_3^μ e B^μ . Scriviamo questa combinazione lineare e la sua ortogonale Z^μ effettuando una trasformazione ortogonale nel piano A_3^μ - B^μ parametrizzata dall'angolo ϑ_W :

$$Z^\mu = \cos \vartheta_W A_3^\mu - \sin \vartheta_W B^\mu, \quad (6.81a)$$

$$A^\mu = \sin \vartheta_W A_3^\mu + \cos \vartheta_W B^\mu. \quad (6.81b)$$

L'angolo ϑ_W è chiamato **angolo di Weinberg** [Wei67], sebbene sia stato introdotto per la prima volta da Glashow nel 1961 [Gla61]. L'angolo di Weinberg deve essere scelto in modo da ottenere gli accoppiamenti giusti per il fotone. Inserendo le espressioni (6.81)

nella lagrangiana di corrente neutra (6.75) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(\text{NC})} = & -\frac{1}{2} \sum_{\ell} \left\{ \overline{\nu_{\ell L}} [(g \cos \vartheta_W + g' \sin \vartheta_W) \not{Z} + (g \sin \vartheta_W - g' \cos \vartheta_W) \not{A}] \nu_{\ell L} \right. \\ & - \overline{\ell_L} [(g \cos \vartheta_W - g' \sin \vartheta_W) \not{Z} + (g \sin \vartheta_W + g' \cos \vartheta_W) \not{A}] \ell_L \\ & \left. - 2g' \overline{\ell_R} [-\sin \vartheta_W \not{Z} + \cos \vartheta_W \not{A}] \ell_R \right\}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Poichè i neutrini non hanno carica elettrica, si deve avere

$$g \sin \vartheta_W = g' \cos \vartheta_W \quad \Longrightarrow \quad \tan \vartheta_W = \frac{g'}{g}. \quad (6.83)$$

Sostituendo questo valore nella (6.82) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(\text{NC})} = & -\frac{1}{2} \sum_{\ell} \left\{ \frac{g}{\cos \vartheta_W} \overline{\nu_{\ell L}} \not{Z} \nu_{\ell L} - \frac{g}{\cos \vartheta_W} (1 - 2 \sin^2 \vartheta_W) \overline{\ell_L} \not{Z} \ell_L \right. \\ & \left. + \frac{2g}{\cos \vartheta_W} \sin^2 \vartheta_W \overline{\ell_R} \not{Z} \ell_R - 2g \sin \vartheta_W (\overline{\ell_L} \not{A} \ell_L + \overline{\ell_R} \not{A} \ell_R) \right\} \\ = & -\frac{g}{2 \cos \vartheta_W} \sum_{\ell} \left\{ \overline{\nu_{\ell L}} \not{Z} \nu_{\ell L} - (1 - 2 \sin^2 \vartheta_W) \overline{\ell_L} \not{Z} \ell_L + 2 \sin^2 \vartheta_W \overline{\ell_R} \not{Z} \ell_R \right\} \\ & + g \sin \vartheta_W \sum_{\ell} \overline{\ell} \not{A} \ell. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Poichè l'ultimo termine dà l'accoppiamento dei leptoni carichi negativamente con il campo elettromagnetico, si deve avere ($e = |e|$)

$$g \sin \vartheta_W = e. \quad (6.85)$$

Quindi,

$$g = \frac{e}{\sin \vartheta_W} \quad g' = \frac{e}{\cos \vartheta_W}. \quad (6.86)$$

Quindi la lagrangiana di corrente neutra (6.84) si divide in una lagrangiana di interazione elettromagnetica

$$\mathcal{L}_I^{(\gamma)} = e \sum_{\ell} \overline{\ell} \not{A} \ell \quad (6.87)$$

ed una lagrangiana di **corrente debole neutra**

$$\mathcal{L}_I^{(Z)} = -\frac{g}{2 \cos \vartheta_W} \sum_{\ell} \left\{ \overline{\nu_{\ell L}} \not{Z} \nu_{\ell L} - (1 - 2 \sin^2 \vartheta_W) \overline{\ell_L} \not{Z} \ell_L + 2 \sin^2 \vartheta_W \overline{\ell_R} \not{Z} \ell_R \right\} \quad (6.88)$$

Perciò il modello delle interazioni elettrodeboli basato sulla simmetria di gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ prevede l'esistenza di **processi deboli con correnti neutre**, ai quali partecipano anche i neutrini. Questi processi verranno trattati nella sezione 8.3, dopo avere formulato il Modello Standard.

Chapter 7

Simmetria nascosta

7.1 Rottura spontanea della simmetria

Per capire il meccanismo di rottura spontanea della simmetria, consideriamo l'esempio più semplice possibile: un campo scalare (o pseudoscalare) complesso $\phi(x)$ con densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (7.1)$$

dove $V(\phi)$ è il potenziale

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (7.2)$$

Il coefficiente di auto-accoppiamento λ deve essere un numero reale positivo, affinché il potenziale sia reale ed abbia un minimo. **Il potenziale $V(\phi)$ è invariante per trasformazioni di fase del campo $\phi(x)$** del tipo

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x), \quad (7.3)$$

dove θ è un numero reale che parametrizza la trasformazione. Queste trasformazioni formano un gruppo, detto $U(1)$ (si indica con $U(N)$ il gruppo delle trasformazioni generate dalle matrici unitarie $N \times N$). Le trasformazioni (7.3) appartengono alla categoria delle **trasformazioni di gauge globali** che si distinguono da quelle locali, che verranno considerate nella sezione 7.3, per il fatto che il parametro θ non dipende da x .

Nel caso di un campo scalare “normale” si ha $\mu^2 > 0$ e μ rappresenta la massa della particella associata al campo. Consideriamo ora la possibilità che si possa avere $\mu^2 < 0$. In questo caso definiamo $\mu^2 \equiv -m^2$ con $m^2 > 0$ e otteniamo il potenziale

$$V(\phi) = -m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (7.4)$$

Separando le parti reale ed immaginaria del campo scalare complesso,

$$\phi(x) = \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}} \quad (7.5)$$

(il fattore $1/\sqrt{2}$ è necessario per una corretta normalizzazione dei campi), si vede che esso rappresenta due campi scalari reali $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$. Il loro potenziale è

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{m^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (7.6)$$

La trasformazione di gauge globale (7.3) corrisponde alla seguente trasformazione dei campi ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Questa trasformazione rappresenta una rotazione di un angolo θ nel piano ϕ_1 - ϕ_2 . Quindi è ovvio che essa lascia invariata la quantità $\phi_1^2 + \phi_2^2$ e il potenziale (7.6).

Calcoliamo ora il valore dei campi che minimizza il potenziale. Poichè lo stato di vuoto è, per definizione, lo stato di energia minima del sistema, il valore dei campi che minimizza il potenziale è il valore che i campi assumono nello stato di vuoto, che viene chiamato **valore di aspettazione nel vuoto** o **VEV** (Vacuum Expectation Value). I valori stazionari (minimi o massimi) del potenziale sono dati dalle equazioni

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_1} = -m^2 \phi_1 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_1, \quad (7.8)$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_2} = -m^2 \phi_2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_2. \quad (7.9)$$

Quindi il potenziale è stazionario per

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (7.10)$$

e per¹

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{m^2}{\lambda}. \quad (7.11)$$

Per determinare quale delle due soluzioni (7.10) e (7.11) corrisponde allo stato di vuoto, bisogna determinare quale di esse rappresenta un minimo del potenziale. A tale scopo calcoliamo le derivate seconde del potenziale rispetti ai campi ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1^2} = -m^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\lambda\phi_1^2, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2^2} = -m^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\lambda\phi_2^2. \quad (7.13)$$

Poichè le derivate seconde (7.12) e (7.13) sono negative per $\phi_1 = \phi_2 = 0$, la soluzione (7.10) rappresenta un massimo del potenziale e non corrisponde allo stato di vuoto. Invece, la soluzione (7.11) corrisponde ad un minimo del potenziale:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1^2} \right|_{\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{m^2}{\lambda}} = 2\lambda\phi_1^2 \geq 0, \quad (7.14)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2^2} \right|_{\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{m^2}{\lambda}} = 2\lambda\phi_2^2 \geq 0. \quad (7.15)$$

Quindi la soluzione (7.11) corrisponde allo stato di vuoto e si vede che il VEV di almeno uno dei due campi reali ϕ_1 e ϕ_2 è diverso da zero.

¹Per un campo scalare “normale” con $\mu^2 = -m^2 > 0$ e quindi $m^2 < 0$ la soluzione (7.11) non può essere realizzata, mentre la soluzione (7.10) rappresenta il minimo del potenziale, per cui il VEV di tale campo è nullo.

Usando la notazione $\langle \phi \rangle$ per il VEV del campo $\langle \phi \rangle$, dalla (7.11) per i VEV dei campi ϕ_1 e ϕ_2 abbiamo l'equazione

$$\langle \phi_1 \rangle^2 + \langle \phi_2 \rangle^2 = \frac{m^2}{\lambda}, \quad (7.16)$$

che definisce un cerchio nel piano ϕ_1 - ϕ_2 nel quale il potenziale è minimo. Ciascun punto su questo cerchio rappresenta uno stato di vuoto. Quindi **esiste un'infinità continua di vuoti possibili ed equivalenti**. Infatti, **i diversi vuoti sono connessi da una trasformazione di gauge (7.7) che lascia invariato il potenziale (7.6)**. In altre parole, **l'esistenza di un'infinità continua di vuoti equivalenti è dovuta al fatto che il VEV dei campi non è nullo e che il potenziale è invariante per la simmetria di gauge globale U(1)**. Scegliamo

$$\langle \phi_1 \rangle = v \equiv \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad \text{e} \quad \langle \phi_2 \rangle = 0, \quad (7.17)$$

cioè

$$\langle \phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (7.18)$$

Notiamo il fatto importante che **i VEV dei campi ϕ_1 e ϕ_2 non sono invarianti per la trasformazione di gauge globale (7.7)**:

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle \phi'_1 \rangle \\ \langle \phi'_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Questo fenomeno viene chiamato **rottura spontanea della simmetria**, in quanto **lo stato di vuoto non rispetta la simmetria del potenziale** (e della lagrangiana)². È chiaro che **la trasformazione di gauge (7.19) trasforma uno stato di vuoto in un'altro tra l'infinità continua dei vuoti possibili** implicati dalla relazione (7.16).

Poichè **le particelle rappresentano stati eccitati (quantizzati) del campo rispetto allo stato fondamentale, cioè rispetto allo stato di vuoto**, la rottura spontanea della simmetria ha conseguenze estremamente importanti per la fenomenologia.

In seguito alla rottura spontanea della simmetria, per procedere con la tecnica di quantizzazione dei campi, che permette la loro interpretazione in termini di operatori di creazione e distruzione di particelle, definiamo due nuovi campi reali $\varphi(x)$ e $\chi(x)$ tali che

$$\phi_1(x) = v + \varphi(x), \quad (7.20)$$

$$\phi_2(x) = \chi(x). \quad (7.21)$$

Quindi **i nuovi campi $\varphi(x)$ e $\chi(x)$ hanno VEV nullo e possono essere quantizzati secondo il procedimento canonico**.

Dalla (7.6) segue che il loro potenziale è (trascuriamo il termine addizionale irrilevante $-m^4/4\lambda$)

$$V(\varphi, \chi) = m^2 \varphi^2 + \lambda v \varphi (\varphi^2 + \chi^2) + \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 + \chi^2)^2. \quad (7.22)$$

²Per un campo scalare "normale" con $\mu^2 = -m^2 > 0$ e $v = 0$ lo stato di vuoto (7.10) è chiaramente invariante per la trasformazione di gauge globale (7.7).

Quindi il campo φ descrive particelle con massa $\sqrt{2}m$, mentre il campo χ descrive **una particella priva di massa** detta **bosone di Goldstone**.

Perciò, partendo da una coppia di campi scalari reali ϕ_1 e ϕ_2 aventi un potenziale con un termine di massa comune “anomalo”, abbiamo ottenuto un campo scalare massivo φ e un campo scalare privo di massa χ . L’esistenza di un campo scalare privo di massa è dovuta al fatto che il vuoto non è invariante per trasformazioni di gauge globali che appartengono al gruppo della simmetria rotta $U(1)$, ma il potenziale lo è. Per cui una trasformazione di gauge trasforma il vuoto in un’altro vuoto con lo stesso potenziale (vedi l’eq.(7.19)). Quindi è possibile creare delle eccitazioni attorno allo stato di vuoto con frequenza (cioè energia) arbitrariamente piccola del campo nella direzione delle trasformazioni della simmetria rotta. Queste eccitazioni corrispondono agli stati di una particella priva di massa.

Per chiarificare ulteriormente questo fenomeno, notiamo che il potenziale (7.22) è invariante per la trasformazione dei campi φ e χ che corrisponde alla trasformazione di gauge (7.7):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 - v \\ \phi_2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \phi_1 - \sin \theta \phi_2 - v \\ \sin \theta \phi_1 + \cos \theta \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \varphi - \sin \theta \chi - v(1 - \cos \theta) \\ \sin \theta \varphi + \cos \theta \chi + v \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Quindi **la simmetria è nascosta**, cioè **nel meccanismo di rottura spontanea la simmetria non è violata ma nascosta**. Consideriamo una trasformazione di gauge infinitesima partendo da $\varphi = 0$ e $\chi = 0$. Al primo ordine nello sviluppo in potenze di $\theta \ll 1$ si ha $\cos \theta = 1$ e $\sin \theta = \theta$, per cui

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v\theta \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Quindi **una trasformazione di gauge infinitesima è equivalente ad una eccitazione infinitesima del campo χ** . Ma il potenziale è invariante per trasformazioni di gauge, per cui deve essere anche invariante per eccitazioni infinitesime del campo χ . Quindi è possibile creare degli stati eccitati del campo χ con energie (frequenze) arbitrariamente piccole. Ciò significa che il campo χ ha massa nulla e gli stati eccitati quantizzati del campo χ corrispondono a particelle prive di massa.

Il **teorema di Goldstone** [Gol61, Gol62] stabilisce un rapporto tra il numero dei campi scalari privi di massa e il numero di gradi di libertà della simmetria che viene rotta spontaneamente (nell’esempio precedente ad un grado di libertà della simmetria $U(1)$ corrisponde un bosone di Goldstone).

In preparazione alla derivazione della formulazione generale del teorema di Goldstone esposta nella sezione seguente, notiamo che la matrice delle masse quadrate dei campi “fisici” φ e χ è data dalle derivate seconde del potenziale rispetto ai campi nello stato di vuoto:

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \phi_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \phi_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2^2} \end{pmatrix} \Big|_{\phi=\langle \phi \rangle} = \begin{pmatrix} 2m^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Quindi la matrice delle masse quadrate è diagonale ed è chiaro che ha un autovalore nullo corrispondente al bosone di Goldstone.

7.2 Teorema di Goldstone

Consideriamo un gruppo di Lie \mathcal{G} di ordine N , cioè avente N generatori T_a ($a = 1, \dots, N$) che obbediscono alle regole di commutazione

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (a, b = 1, \dots, N), \quad (7.26)$$

dove i numeri f_{abc} sono le costanti di struttura del gruppo. Gli elementi $g(\underline{\theta}) \in \mathcal{G}$ sono parametrizzati da un insieme $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ di N numeri reali θ_a ($a = 1, \dots, N$).

Consideriamo **una rappresentazione n -dimensionale unitaria reale di \mathcal{G}** formata da un insieme $\Phi(x)$ di n **campi scalari (o pseudoscalari) reali** $\phi_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$):

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

e da un insieme $\underline{L} = (L_1, \dots, L_N)$ di N **matrici immaginarie** $n \times n$ che costituiscono la rappresentazione n -dimensionale dei generatori del gruppo³ e soddisfano alle regole di commutazione (7.26):

$$[L_a, L_b] = i f_{abc} L_c \quad (a, b = 1, \dots, N). \quad (7.28)$$

Ad ogni elemento $g(\underline{\theta}) \in \mathcal{G}$ corrisponde una matrice unitaria

$$U(\underline{\theta}) = e^{i \underline{\theta} \cdot \underline{L}} \equiv \exp \left(i \sum_{a=1}^N \theta_a L_a \right) \quad (7.29)$$

che produce la trasformazione dei campi

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(\underline{\theta}) \Phi(x). \quad (7.30)$$

La variazione di Φ per una trasformazione infinitesima

$$U(\underline{\epsilon}) \simeq 1 + i \underline{\epsilon} \cdot \underline{L}, \quad (7.31)$$

con $\epsilon_a \ll 1$ ($a = 1, \dots, N$), è data da

$$\delta \Phi = i \underline{\epsilon} \cdot \underline{L} \Phi \equiv i \epsilon_a L_a \Phi. \quad (7.32)$$

Se il potenziale $V(\Phi)$ dei campi scalari ϕ_i è invariante per trasformazioni appartenenti al gruppo \mathcal{G} si ha

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = i \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \epsilon_a (L_a)_{ij} \phi_j. \quad (7.33)$$

³Nell'esempio della sezione precedente c'è un solo generatore $L = \sigma_2$, per cui

$$e^{-i\theta L} = e^{-i\theta \sigma_2} = \mathbb{1} \cos \theta - i \sigma_2 \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Poichè gli ϵ_a sono numeri arbitrari, si ottiene un insieme di N equazioni:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} (L_a)_{ij} \phi_j = 0 \quad (a = 1, \dots, N). \quad (7.34)$$

Differenziando questa equazione rispetto a ϕ_k si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} (L_a)_{ij} \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} (L_a)_{ik} = 0 \quad (k = 1, \dots, n; a = 1, \dots, N). \quad (7.35)$$

Il valore di aspettazione nel vuoto $\langle \Phi \rangle$ dell'insieme di campi $\Phi(x)$ è tale che

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\Phi = \langle \Phi \rangle} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.36)$$

Se $\langle \Phi \rangle \neq 0$ l'insieme di N equazioni (7.35) nel vuoto diventa

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \right|_{\Phi = \langle \Phi \rangle} (L_a)_{ij} \langle \phi_j \rangle = 0 \quad (k = 1, \dots, n; a = 1, \dots, N). \quad (7.37)$$

Il potenziale $V(\Phi)$ può essere sviluppato in serie di potenze di $\Phi - \langle \Phi \rangle$:

$$V(\Phi) = V(\langle \Phi \rangle) + A_i (\Phi - \langle \Phi \rangle)_i + \frac{1}{2} (\Phi - \langle \Phi \rangle)_i M_{ij}^2 (\Phi - \langle \Phi \rangle)_j + O[(\Phi - \langle \Phi \rangle)_i^3]. \quad (7.38)$$

Il termine costante $V(\langle \Phi \rangle)$ non ha nessuna importanza, mentre dalla (7.36) è chiaro che

$$A_i = \left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\Phi = \langle \Phi \rangle} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.39)$$

Perciò il primo termine rilevante del potenziale (7.38) è quello quadratico nei campi "fisici"

$$\psi_i = (\Phi - \langle \Phi \rangle)_i = \phi_i - \langle \phi_i \rangle \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.40)$$

Il potenziale per l'insieme di campi fisici

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

è dato da

$$V(\Psi) = \frac{1}{2} \psi_i M_{ij}^2 \psi_j + O[\psi_i^3]. \quad (7.42)$$

Il termine quadratico nei campi è il termine di massa, per cui la matrice M^2 è la matrice delle masse quadrate dei campi fisici ψ_i . Dalla (7.38) è chiaro che i suoi elementi sono dati da

$$M_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\Phi = \langle \Phi \rangle} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (7.43)$$

Quindi il sistema di equazioni (7.37) fornisce informazioni sulle masse dei campi ψ_i :

$$M^2 L_a \langle \Phi \rangle = 0 \quad (a = 1, \dots, N). \quad (7.44)$$

Se \mathcal{G}' è il sottogruppo N' -dimensionale di \mathcal{G} per il quale il vuoto è simmetrico e ha generatori L_a con $a = 1, \dots, N'$, allora $L_a \langle \Phi \rangle = 0$ e la (7.44) non contiene nessuna informazione sulle masse. Invece, per tutti gli altri $N - N'$ generatori L_a con $a = N' + 1, \dots, N$ si ha $L_a \langle \Phi \rangle \neq 0$, per cui la matrice delle masse quadrate M^2 ha $N - N'$ autovalori nulli. Quindi nella teoria ci sono $N - N'$ particelle a massa nulla (**bosoni di Goldstone**).

Gli $N - N'$ generatori del gruppo \mathcal{G} la cui azione sul vuoto non è nulla si chiamano **generatori rotti spontaneamente** ed il teorema di Goldstone dice che **ad ogni generatore rotto spontaneamente corrisponde un bosone di Goldstone privo di massa**. Dall'esempio esposto nel paragrafo precedente è chiaro che **l'esistenza dei bosoni di Goldstone è dovuta al fatto che la simmetria è nascosta**.

Notiamo che i generatori che annullano il vuoto generano il sottogruppo \mathcal{G}' del gruppo \mathcal{G} le cui trasformazioni lasciano il vuoto invariante. Infatti, se $L_a \langle \Phi \rangle = 0$ e $L_b \langle \Phi \rangle = 0$ anche $[L_a, L_b] \langle \Phi \rangle = 0$. D'altra parte, i generatori rotti non generano un gruppo (ciò è evidente dal fatto che l'identità, che deve essere contenuta in un gruppo, lascia il vuoto invariante).

Il teorema di Goldstone, formulato nel 1961 [Gol61], per alcuni anni sembrò implicare che il processo di rottura spontanea della simmetria non è rilevante per la teoria delle particelle elementari, perchè non esiste nessun bosone a massa nulla. La situazione si capovolese dopo che nel 1964 Higgs [Hig64, Hig66] e altri [Eng64, Gur64, Kib67] applicarono il meccanismo di rottura spontanea della simmetria alle teorie di gauge. In tal caso, quando la simmetria viene rotta i bosoni di Goldstone scompaiono mentre un numero uguale di bosoni di gauge acquista una massa. In modo figurato si dice che i bosoni di gauge “mangiano” i bosoni di Goldstone per acquistare massa. Questo meccanismo ha permesso a Weinberg [Wei67] e Salam [Sal68] di formulare nel 1967 una teoria consistente delle interazioni elettrodeboli estendendo il modello di Glashow [Gla61] del 1961. Questa teoria è nota come **Modello Standard delle interazioni elettrodeboli di Glashow, Weinberg e Salam**.

7.3 Il meccanismo di Higgs

Per illustrare il meccanismo di Higgs [Hig64, Eng64, Gur64, Hig66, Kib67], consideriamo l'esempio più semplice possibile: **la rottura spontanea della simmetria di gauge U(1) della lagrangiana di un campo scalare carico ϕ** ,

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (7.45)$$

dove D_μ è la derivata covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i e A_\mu \quad (7.46)$$

e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ è il tensore del campo elettromagnetico A^μ . La lagrangiana (7.45) è invariante per le trasformazioni di gauge locali

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta(x)} \phi(x), \quad (7.47a)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (7.47b)$$

Se $\mu^2 \geq 0$, la lagrangiana (7.45) è la lagrangiana dell'elettrodinamica quantistica per un campo scalare carico di massa μ . Supponiamo invece che si abbia $\mu^2 < 0$. In questo caso il potenziale è minimo per

$$\phi(x) = \langle \phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \text{con} \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (7.48)$$

Il VEV $\langle \phi \rangle$ del campo $\phi(x)$ non è invariante per le trasformazioni di gauge (7.47a) (indipendentemente dal fatto che $\theta(x)$ sia costante o no). Quindi la simmetria U(1) è rotta spontaneamente ed i campi fisici $\varphi(x)$, $\chi(x)$ sono ottenuti sviluppando il campo ϕ attorno al suo VEV:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \varphi(x) + i\chi(x)). \quad (7.49)$$

Perciò si ha

$$D_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \varphi - e A_\mu \chi) + i \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_\mu \chi + e A_\mu (v + \varphi)], \quad (7.50a)$$

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial\chi)^2 + e A^\mu [(v + \varphi) \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \varphi] + \frac{1}{2} e^2 A^2 [(v + \varphi)^2 + \chi^2], \quad (7.50b)$$

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} (v^2 + 2v\varphi + \varphi^2 + \chi^2). \quad (7.50c)$$

Tenendo conto che $\lambda v^2 = -\mu^2$, riscriviamo la lagrangiana (7.45) nella forma (trascuriamo il termine addizionale irrilevante $\mu^4/4\lambda$)

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \lambda \left(\phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (7.51)$$

Utilizzando ora le (7.50), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial\chi)^2 - \lambda v^2 \varphi^2 - \lambda v \varphi (\varphi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 + \chi^2)^2 \\ &\quad + e v A^\mu \partial_\mu \chi + e A^\mu (\varphi \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \varphi) + \frac{1}{2} e^2 A^2 \varphi (2v + \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (e v)^2 A^2. \end{aligned} \quad (7.52)$$

L'ultimo termine in questa espressione costituisce il risultato nuovo prodotto dal meccanismo di Higgs. Infatti esso è **un termine di massa per il campo di gauge A^μ** , che in seguito alla rottura spontanea della simmetria ha acquistato una massa

$$m_A = e v. \quad (7.53)$$

È importante notare che **questo risultato è stato ottenuto senza violare la simmetria di gauge della lagrangiana**, perchè, come discusso nella sezione 7.1, nel meccanismo di rottura spontanea la simmetria non è violata ma nascosta. Infatti, si può verificare che la lagrangiana (7.52) è invariante per le trasformazioni di gauge (7.47b) del campo $A^\mu(x)$ e le trasformazioni di gauge dei campi $\varphi(x)$, $\chi(x)$ corrispondenti alla trasformazione di gauge (7.47a) del campo $\phi(x)$:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x), \quad (7.54a)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \cos \theta (v + \varphi) - \sin \theta \chi - v, \quad (7.54b)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = \sin \theta (v + \varphi) + \cos \theta \chi. \quad (7.54c)$$

Il campo φ ha una massa

$$m_\varphi = \sqrt{2 \lambda v^2} = \sqrt{-2 \mu^2}, \quad (7.55)$$

mentre il campo χ sembrerebbe descrivere una particella priva di massa, cioè un bosone di Goldstone, come nell'esempio discusso nella sezione 7.1. La presenza di un bosone di Goldstone costituirebbe un problema per le teorie fisiche, perchè in natura non esistono particelle scalari prive di massa. Però notiamo che i campi χ e A^μ nella lagrangiana (7.52) non rappresentano i campi fisici, cioè i campi che una volta quantizzati descrivono le particelle osservate. Ciò è dovuto alla presenza del primo termine nella seconda riga,

$$e v A^\mu \partial_\mu \chi, \quad (7.56)$$

che è quadratico nei campi χ e A^μ e quindi rappresenta un termine di massa non-diagonale che mescola i campi χ e A^μ . Il motivo di questo mescolamento risulta chiaro se si pensa al **numero di gradi di libertà** contenuto nella lagrangiana (7.52), che deve essere uguale a quello contenuto nella lagrangiana equivalente di partenza (7.45). La lagrangiana di partenza (7.45) contiene un campo scalare complesso con due gradi di libertà ed il campo elettromagnetico privo di massa con due gradi di libertà corrispondenti alle due polarizzazioni trasversali. Quindi il numero di gradi di libertà totale è quattro e deve essere preservato nella lagrangiana (7.52). Invece sembrerebbe che la lagrangiana (7.52) contenga cinque gradi di libertà: uno per il campo φ , uno per il campo χ e tre per il campo elettromagnetico, che ora è massivo e quindi può avere una polarizzazione longitudinale. L'apparente incongruenza è risolta dall'osservazione del mescolamento dei campi χ e A^μ che implica che i due campi non sono indipendenti. Perciò i due campi χ e A^μ hanno un totale di tre (non quattro) gradi di libertà.

Per trovare i campi corrispondenti alle particelle fisiche necessario eliminare il termine di massa non-diagonale (7.56). Il modo più facile per ottenere questo risultato è quello di **scegliere una trasformazione di gauge (7.54) tale che $\chi' = 0$** (ciò è possibile scegliendo opportunamente $\theta(x)$). In tal modo, la lagrangiana (7.52) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(U)} = & \frac{1}{2} (\partial \varphi')^2 - \lambda v^2 \varphi'^2 - \lambda v \varphi'^3 - \frac{\lambda}{4} \varphi'^4 + \frac{1}{2} e^2 A'^2 \varphi' (2v + \varphi') \\ & - \frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (e v)^2 A'^2. \end{aligned} \quad (7.57)$$

È importante sottolineare che **la lagrangiana (7.57) non è invariante di gauge**, cioè essa è valida solamente in una gauge particolare, detta **gauge unitaria** o **gauge U** (perchè **il corretto numero di gradi di libertà appare esplicitamente e quindi l'unitarietà della teoria è evidente**). Infatti, con la scelta $\chi' = 0$ l'informazione sul campo χ è andata persa e non è più possibile effettuare una trasformazione di gauge del tipo (7.54). Nella gauge unitaria è evidente che il campo χ , che in una teoria senza una simmetria di gauge corrisponde al bosone di Goldstone, in una teoria di gauge si trasforma nella componente longitudinale del campo di gauge che acquista una massa. In modo figurato, si dice che **il campo di gauge ha mangiato il bosone di Goldstone (would-be Goldstone boson) per trasformarlo nella sua componente longitudinale**.

Quindi, **gli stati fisici sono una manifestazione non simmetrica di una lagrangiana simmetrica**. Ovviamente, ciò è dovuto al fatto che il vuoto non rispetta la simmetria della lagrangiana e rompe la simmetria. Anche gli stati fisici non rispettano la simmetria della lagrangiana, perchè sono ottenuti dalla quantizzazione delle oscillazioni dei campi attorno allo stato di vuoto.

La ragione profonda per la quale è possibile scegliere una gauge unitaria nella quale il campo χ non compare è che, come abbiamo visto nella sezione 7.1, **il campo χ corrisponde ad una trasformazione di gauge**. Questo è anche il motivo per cui in una teoria non di gauge il campo χ descrive bosoni di Goldstone privi di massa. Poichè il campo χ corrisponde ad una trasformazione di gauge, esso può essere eliminato in maniera elegante fin dall'inizio nella lagrangiana (7.45). Infatti, se scriviamo il campo complesso $\phi(x)$ in forma polare

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\xi(x)}, \quad (7.58)$$

con $\rho(x)$ e $\xi(x)$ reali, possiamo scegliere una trasformazione di gauge (7.47) tale che $\theta(x) = -\xi(x)$, in modo che

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\xi(x)} \phi(x) = \rho(x), \quad (7.59a)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \xi(x). \quad (7.59b)$$

La gauge scelta è la gauge unitaria, in cui il campo $\phi'(x) = \rho(x)$ è reale. Nella gauge unitaria la lagrangiana (7.45) diventa

$$\mathcal{L}^{(U)} = (D'_\mu \rho) (D'^\mu \rho) - \mu^2 \rho^2 - \lambda \rho^4 - \frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}, \quad (7.60)$$

Il potenziale è minimo per

$$\rho(x) = \langle \rho \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \text{con} \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (7.61)$$

Poichè $\rho(x)$ è reale, il suo sviluppo attorno al VEV è dato da

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \varphi'(x)). \quad (7.62)$$

Dal confronto con l'eq.(7.49) si vede che adottando fin dall'inizio la gauge unitaria il campo indesiderato $\chi(x)$ è assente dalla lagrangiana. Perciò è immediato ricavare l'espressione (7.57) per la lagrangiana nella gauge unitaria.

Riassumendo, **abbiamo visto che nel caso più semplice possibile di rottura spontanea della simmetria di gauge U(1) della lagrangiana di un campo scalare carico il risultato dell'applicazione del meccanismo di Higgs è una teoria contenente un campo scalare reale massivo, il bosone di Higgs, ed un campo di gauge massivo. Il bosone di Goldstone prodotto dalla rottura spontanea della simmetria è stato mangiato dal campo di gauge ed è stato trasformato nella componente longitudinale del campo di gauge.**

Per analogia, nel caso di teorie di gauge più complicate, con N_S campi scalari ed un gruppo di simmetria avente N generatori e N_G bosoni di Goldstone, uno per ciascun generatore rotto spontaneamente, ci si aspetta che il bosone di Goldstone corrispondente ad un certo generatore del gruppo di simmetria venga mangiato dal corrispondente campo di gauge e venga trasformato nella sua componente longitudinale dandogli una massa. Perciò ci si aspetta che il risultato dell'applicazione del meccanismo di Higgs sia una teoria contenente N_G campi di gauge massivi e $N - N_G$ campi di gauge privi di massa, corrispondenti ai generatori del gruppo di simmetria che annullano il vuoto (cioè che generano trasformazioni che lasciano il vuoto invariante). Inoltre, ci si aspetta che la teoria contenga $N_S - N_G$ bosoni di Higgs massivi.

7.4 Rinormalizzabilità delle teorie di gauge

La rinormalizzabilità delle teorie di gauge nelle quali la simmetria è rotta spontaneamente con il meccanismo di Higgs è stata dimostrata nel 1971 da **'t Hooft** [Hoo71]. La dimostrazione rigorosa è molto difficile (vedi [Lee72, Abe73, Tay76]). In questa sezione riassumiamo le idee fondamentali sulle quali è basato il metodo di rinormalizzazione delle teorie di gauge (vedi [Man84]).

La seconda linea dell'eq.(7.57) è la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_{(A')}^{(U)} = -\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{A'}^2 A'^2 \quad (7.63)$$

di un bosone vettore neutro con massa $m_{A'} = ev$, descritto dal campo A'^{μ} . Il propagatore di questo campo è simile al propagatore (5.35) del bosone W :

$$G_{(A')}^{\mu\nu}(k) = i \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{m_{A'}^2}}{k^2 - m_{A'}^2}. \quad (7.64)$$

Perciò nella gauge unitaria il propagatore del bosone di gauge contiene il termine $k^{\mu}k^{\nu}/m_{A'}^2$ che lo rende costante per $|k^2| \rightarrow \infty$. Questo fatto sembrerebbe rendere la teoria non rinormalizzabile. Invece si può dimostrare che le teorie di gauge sono rinormalizzabili perchè si verificano delle cancellazioni “miracolose” che riducono il grado di divergenza dei diagrammi con loops che contribuiscono alle correzioni radiative delle quantità misurabili.

La dimostrazione della rinormalizzabilità delle teorie di gauge nella gauge unitaria è estremamente difficile. Invece, è più conveniente adottare una gauge di 't Hooft, nella quale il termine $k^{\mu}k^{\nu}/m_{A'}^2$ è assente dal propagatore del bosone di gauge.

Consideriamo la quantità

$$\partial_\mu A^\mu - \frac{1}{\xi} e v \chi, \quad (7.65)$$

dove ξ è un parametro. Per una trasformazione di gauge (7.54) la quantità (7.65) diventa

$$\partial_\mu A'^\mu - e v \chi' = \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{e} \square \theta - \frac{1}{\xi} e v \left[\sin \theta (v + \varphi) + \cos \theta \chi \right]. \quad (7.66)$$

È evidente che scegliendo opportunamente $\theta(x)$ è sempre possibile annullare questa quantità. Poichè questa quantità può essere annullata con una trasformazione di gauge e la lagrangiana (7.52) è invariante per trasformazioni di gauge, è possibile aggiungere alla lagrangiana il termine (7.65) o una sua potenza senza modificare il contenuto fisico della teoria. Ciò equivale ad una scelta di gauge (**gauge fixing**) e precisamente alla scelta della gauge nella quale

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{\xi} e v \chi. \quad (7.67)$$

Il parametro ξ determina la gauge specifica in una famiglia di gauges dette **gauge di t' Hooft**. Aggiungiamo alla lagrangiana (7.52) il **termine di gauge fixing**

$$-\frac{\xi}{2} \left(\partial_\mu A^\mu - \frac{1}{\xi} e v \chi \right)^2 = -\frac{\xi}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (e v)^2 \chi^2 + e v \chi \partial_\mu A^\mu. \quad (7.68)$$

Sommando il termine $e v \chi \partial_\mu A^\mu$ al termine indesiderato (7.56), si ottiene

$$e v A^\mu \partial_\mu \chi + e v \chi \partial_\mu A^\mu = e v \partial_\mu (A^\mu \chi), \quad (7.69)$$

che è una derivata totale e non ha nessun effetto fisico, per cui può essere eliminata dalla lagrangiana. Quindi, con l'aggiunta del termine (7.68) di gauge fixing, la lagrangiana (7.52) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\xi)} &= \mathcal{L}_{(\varphi)}^{(\xi)} + \mathcal{L}_{(\chi)}^{(\xi)} + \mathcal{L}_{(A)}^{(\xi)} - \lambda v \varphi (\varphi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 + \chi^2)^2 \\ &\quad + e A^\mu (\varphi \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \varphi) + \frac{1}{2} e^2 A^2 \varphi (2v + \varphi), \end{aligned} \quad (7.70)$$

con

$$\mathcal{L}_{(\varphi)}^{(\xi)} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2, \quad (7.71a)$$

$$\mathcal{L}_{(\chi)}^{(\xi)} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi) - \frac{1}{2} \xi^{-1} m_A^2 \chi^2, \quad (7.71b)$$

$$\mathcal{L}_{(A)}^{(\xi)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A^2 - \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (7.71c)$$

e

$$m_\varphi = \sqrt{2 \lambda v^2} = \sqrt{-2 \mu^2}, \quad (7.72a)$$

$$m_A = e v. \quad (7.72b)$$

Poichè i termini quadratici nei campi $\varphi(x)$, $\chi(x)$ e $A^\mu(x)$ sono disaccoppiati, questi tre campi possono essere trattati in modo indipendente nella teoria perturbativa e possono

essere quantizzati con il metodo canonico. I campi scalari reali $\varphi(x)$ e $\chi(x)$ obbediscono all'equazione di Klein-Gordon ed i loro propagatori nello spazio degli impulsi sono dati dalle espressioni standard

$$G_{(\varphi)}(k) = \frac{i}{k^2 - m_\varphi^2 + i\epsilon}, \quad (7.73a)$$

$$G_{(\chi)}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi^{-1} m_A^2}. \quad (7.73b)$$

Dall'espressione (7.71c) per la lagrangiana libera del campo di gauge, si trova che l'equazione di campo per $A^\mu(x)$ è

$$(\square + m_A^2) A^\mu - (1 - \xi) \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0. \quad (7.74)$$

Questa equazione può essere scritta nella forma

$$\left[(\square + m_A^2) g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = 0, \quad (7.75)$$

dalla quale segue che il propagatore nello spazio degli impulsi è definito dall'equazione

$$\left[(\square + m_A^2) g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu \right] G_{(A)}^{\nu\rho}(k) = \delta_\mu^\rho. \quad (7.76)$$

La soluzione generale di questa equazione ha la forma

$$G_{(A)}^{\nu\rho}(k) = i\alpha(k^2) g^{\nu\rho} + i\beta(k^2) k^\nu k^\rho. \quad (7.77)$$

Inserendo questa espressione nell'eq.(7.76) si trova

$$\alpha(k^2) = \frac{-1}{k^2 - m_A^2}, \quad \beta(k^2) = -\left(\frac{1 - \xi}{\xi}\right) \frac{1}{(k^2 - m_A^2)(k^2 - \xi^{-1} m_A^2)}. \quad (7.78)$$

Perciò il propagatore del bosone di gauge nello spazio degli impulsi è dato da

$$G_{(A)}^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m_A^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} + \left(\frac{1 - \xi}{\xi}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi^{-1} m_A^2} \right]. \quad (7.79)$$

Per $\xi \neq 0$ il propagatore (7.79) non contiene il termine $k^\mu k^\nu / m_A^2$ e il suo comportamento asintotico è simile a quello del propagatore del fotone:

$$G_{(A)}^{\mu\nu}(k) \xrightarrow{|k^2| \rightarrow \infty} \frac{-i}{k^2} \left[g^{\mu\nu} + \left(\frac{1 - \xi}{\xi}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]. \quad (7.80)$$

Quindi il propagatore (7.79) agisce come un fattore di convergenza nel calcolo degli integrali sui quadri-impulsi dei loops quando $|k^2| \rightarrow \infty$ e ci si aspetta che la teoria sia rinormalizzabile come l'elettrodinamica quantistica. Questa aspettativa è confermata dal calcolo rigoroso. Notiamo che la gauge con $\xi = 1$ viene chiamata **gauge di Feynman**, mentre la gauge con $\xi \rightarrow \infty$ è chiamata **gauge di Landau**. Per $\xi \rightarrow 0$ il propagatore (7.79) tende alla forma (7.64) del propagatore nella gauge unitaria ed il propagatore

(7.73b) del campo $\chi(x)$ tende a zero, per cui il campo $\chi(x)$ non contribuisce al calcolo delle ampiezze di transizione.

Nelle gauges di 't Hooft compare il campo $\chi(x)$ che era stato eliminato nella gauge unitaria. Questo campo non corrisponde a nessuna particella reale, ma il suo propagatore contribuisce al calcolo delle ampiezze di transizione e può essere interpretato come scambio di bosoni scalari virtuali, detti **“ghosts”**. È importante notare che i poli dei propagatori (7.73b) e (7.79) per $k^2 = \xi^{-1}m_A^2$ non sono fisici e si può dimostrare che si cancellano nel calcolo delle ampiezze di transizione (questo è il motivo per cui non necessitano del termine $+i\epsilon$).

Chapter 8

Il Modello Standard delle interazioni elettrodeboli

8.1 Rottura della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Il Modello Standard di Glashow [Gla61], Weinberg [Wei67] e Salam [Sal68] è una teoria unificata delle interazioni elettrodeboli basata sul gruppo di simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ rotto spontaneamente attraverso il meccanismo di Higgs.

Considerando solamente i leptoni, **la lagrangiana del Modello Standard consiste nella lagrangiana (6.68) del modello di Glashow alla quale viene aggiunto un termine relativo ad un doppietto di isospin debole di campi scalari ed un termine di accoppiamento tra i campi scalari ed i fermioni.**

I campi scalari sono scelti in modo da rompere la simmetria e dare massa ai bosoni W e Z , mantenendo il fotone privo di massa. **Perciò ci vogliono almeno 4 campi scalari reali: tre campi scalari reali che generano tre bosoni di Goldstone che vengono mangiati dai bosoni di gauge W e Z per acquistare massa ed un campo scalare reale il cui VEV rompe la simmetria.** La scelta del Modello Standard è quella minimale del doppietto di Higgs

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

dove $\phi^+(x)$ è un campo scalare complesso carico e $\phi^0(x)$ è un campo scalare complesso neutro. L'espressione dell'insieme $\underline{I} = (I_1, I_2, I_3)$ che rappresenta i tre generatori di $SU(2)_L$ nella rappresentazione di doppietto è data da

$$\underline{I} \Phi = \frac{\tau}{2} \Phi. \quad (8.2)$$

L'azione della rappresentazione Y del generatore di $U(1)_Y$ sul doppietto di Higgs è definita in modo da verificare la formula (6.66) di Gell-Mann–Nishijima:

$$Y \Phi = \Phi, \quad (8.3)$$

cioè il doppietto di Higgs ha ipercarica $Y = +1$. Quindi, la lagrangiana del Modello

| | I_3 | Y | $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ |
|---|-------------|-----|-------------------------|
| $L_\ell = \begin{pmatrix} \nu_{\ell L} \\ \ell_L \end{pmatrix}$ | 1/2 -1/2 | -1 | 0 -1 |
| ℓ_R | 0 | -2 | -1 |
| $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ | 1/2 -1/2 | +1 | +1 0 |

Table 8.1: Autovalori di I_3 , dell'ipercarica Y e della carica Q per i multipletti leptonici e per il doppietto scalare.

Standard (tenendo conto solamente dei leptoni) è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{MS}} = & \sum_{\ell} (i \bar{L}_{\ell} \not{D} L_{\ell} + i \bar{\ell}_R \not{D} \ell_R) - \frac{1}{4} \underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{A}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
& + (D_{\mu} \Phi)^{\dagger} (D^{\mu} \Phi) - \mu^2 \Phi^{\dagger} \Phi - \lambda (\Phi^{\dagger} \Phi)^2 \\
& - \sum_{\ell} g_{\ell} \left(\bar{L}_{\ell} \Phi \ell_R + \bar{\ell}_R \Phi^{\dagger} L_{\ell} \right), \tag{8.4}
\end{aligned}$$

con $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$ e la derivata covariante (vedi l'eq(6.56))

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + i g \underline{A}_{\mu} \cdot \underline{I} + i g' B_{\mu} \frac{Y}{2}. \tag{8.5}$$

Gli autovalori di I_3 , dell'ipercarica Y e della carica Q per i multipletti leptonici e per il doppietto scalare sono riassunti nella Tabella 8.1.

La lagrangiana (8.4) è invariante per le trasformazioni di gauge locali appartenenti al gruppo $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ parametrizzate dal set di 3+1 parametri $(\underline{\theta}, \eta)$, con $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, (vedi le eq.(6.71))

$$L_{\ell} \rightarrow L'_{\ell} = \exp \left(\frac{i}{2} \underline{\theta} \cdot \underline{I} - \frac{i}{2} \eta \right) L_{\ell}, \tag{8.6a}$$

$$\ell_R \rightarrow \ell'_R = e^{-i\eta} \ell_R, \tag{8.6b}$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp \left(\frac{i}{2} \underline{\theta} \cdot \underline{I} + \frac{i}{2} \eta \right) \Phi, \tag{8.6c}$$

$$\underline{A}_{\mu} \cdot \underline{I} \rightarrow \underline{A}'_{\mu} \cdot \underline{I} = U(\underline{\theta}) \left(\underline{A}_{\mu} \cdot \underline{I} - \frac{i}{g} \partial_{\mu} \right) U^{-1}(\underline{\theta}), \tag{8.6d}$$

$$B_{\mu} \rightarrow B'_{\mu} = B_{\mu} - \frac{1}{g'} \partial_{\mu} \eta(x), \tag{8.6e}$$

con

$$U(\underline{\theta}) = e^{i \underline{\theta} \cdot \underline{I}}. \tag{8.7}$$

Il termine nella terza riga della lagrangiana (8.4) è chiamato **termine di Yukawa** e rappresenta gli accoppiamenti tra gli scalari di Higgs ed i leptoni. Questo termine è

scritto in modo da essere invariante per le trasformazioni di gauge (8.6) ed è necessario perchè nel processo di rottura spontanea della simmetria esso genera i termini di massa per i leptoni carichi.

Consideriamo la seconda riga della lagrangiana (8.4) del Modello Standard:

$$\mathcal{L}_2 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (8.8)$$

Il potenziale dei campi scalari è

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (8.9)$$

con $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$. Definiamo

$$v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (8.10)$$

Trascurando un termine addizionale irrilevante $v^4/4$, il potenziale (8.9) può essere scritto nella forma

$$V(\Phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (8.11)$$

per cui è evidente che il potenziale è minimo per

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2}. \quad (8.12)$$

Scegliamo il VEV $\langle \Phi \rangle$ lungo ϕ^0 in modo che il vuoto abbia carica elettrica nulla:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

La simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ è rotta dal VEV $\langle \Phi \rangle$:

$$I_1 \langle \Phi \rangle = \frac{\tau_1}{2} \langle \Phi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (8.14a)$$

$$I_2 \langle \Phi \rangle = \frac{\tau_2}{2} \langle \Phi \rangle = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (8.14b)$$

$$I_3 \langle \Phi \rangle = \frac{\tau_3}{2} \langle \Phi \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0, \quad (8.14c)$$

$$Y \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle \neq 0. \quad (8.14d)$$

Invece,

$$Q \langle \Phi \rangle = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (8.15)$$

e quindi

$$e^{i\theta Q} \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle. \quad (8.16)$$

Perciò il vuoto è invariante per le trasformazioni di fase appartenenti al gruppo $U(1)_Q$ corrispondenti alla conservazione della carica elettrica. Perciò **la simmetria $U(1)_Q$ è conservata e ciò implica l'esistenza di un bosone di gauge di massa nulla, il**

fotone. Ovviamente questo è il risultato desiderato ed è stato ottenuto scegliendo il VEV $\langle \Phi \rangle$ lungo il campo scalare neutro ϕ^0 , in modo che il vuoto abbia carica elettrica nulla.

Per esplicitare il contenuto fisico della teoria, effettuiamo una trasformazione di gauge in modo da ottenere l'espressione per la lagrangiana nella **gauge unitaria**, nella quale compaiono esplicitamente i campi fisici. Scriviamo il doppietto di Higgs nella forma

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{2v} \underline{\xi}(x) \cdot \underline{\tau}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad (8.17)$$

dove $\underline{\xi}(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x))$ e $H(x)$ sono quattro campi scalari reali (il v nell'argomento dell'esponenziale è necessario per questioni dimensionali). Il campo $H(x)$ descrive il **bosone di Higgs**. Dal confronto dell'espressione (8.17) per $\Phi(x)$ con l'espressione (8.6c) per le trasformazioni di gauge di $\Phi(x)$ è evidente che l'insieme dei tre campi $\underline{\xi}(x)$ può essere eliminato con una trasformazione di gauge scegliendo

$$\underline{\theta}(x) = -\frac{1}{v} \underline{\xi}(x) \quad \text{e} \quad \eta(x) = 0. \quad (8.18)$$

In tal caso,

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

e si ha

$$\begin{aligned} D'_\mu \Phi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g \underline{A}'_\mu \cdot \underline{\tau} + \frac{i}{2} g' B'_\mu \right) \Phi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2} g A'_{3\mu} + \frac{i}{2} g' B'_\mu & \frac{i}{2} g (A'_{1\mu} - i A'_{2\mu}) \\ \frac{i}{2} g (A'_{1\mu} + i A'_{2\mu}) & \partial_\mu - \frac{i}{2} g A'_{3\mu} + \frac{i}{2} g' B'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu (v + H) \\ \partial_\mu H - i \frac{g}{2 \cos \theta_W} Z_\mu (v + H) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

dove abbiamo definito il campo carico W_μ come (vedi l'eq.(6.76))

$$W_\mu \equiv \frac{A'_{1\mu} - i A'_{2\mu}}{\sqrt{2}} \quad (8.21)$$

ed il campo neutro Z_μ come (vedi l'eq.(6.81a))

$$Z^\mu = \cos \vartheta_W A'_{3\mu} - \sin \vartheta_W B'_\mu, \quad (8.22)$$

con l'**angolo di Weinberg** ϑ_W tale che (vedi l'eq.(6.83))

$$\tan \vartheta_W = \frac{g'}{g}. \quad (8.23)$$

8.1.1 Masse dei bosoni di gauge

Dal termine cinetico del doppietto di Higgs nella **gauge unitaria** si ottiene

$$\begin{aligned}
(D'_\mu \Phi')^\dagger (D'^\mu \Phi') &= \frac{1}{2} (\partial H)^2 + \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu (v + H)^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu (v + H)^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial H)^2 + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu \\
&\quad + \frac{g^2 v}{2} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2 v}{4 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu H \\
&\quad + \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu H^2.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Perciò, nella gauge unitaria i bosoni di gauge W e Z hanno i termini di massa

$$\frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu, \quad \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu \tag{8.25}$$

e le loro masse sono date da

$$m_W = \frac{g v}{2} \quad m_Z = \frac{g v}{2 \cos \vartheta_W}. \tag{8.26}$$

Definendo il parametro

$$\rho \equiv \frac{m_W}{m_Z \cos \vartheta_W}, \tag{8.27}$$

nel Modello Standard si ha

$$\rho = 1. \tag{8.28}$$

Nell'eq.(8.24) i termini

$$\frac{g^2 v}{2} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2 v}{4 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu H \tag{8.29}$$

rappresentano gli accoppiamenti trilineari tra due bosoni di gauge ed il bosone di Higgs, mentre i termini

$$\frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \vartheta_W} Z_\mu Z^\mu H^2 \tag{8.30}$$

rappresentano gli accoppiamenti quadrilineari tra due bosoni di gauge ed due bosoni di Higgs.

8.1.2 Masse dei leptoni carichi

Consideriamo ora il **termine di Yukawa** nella terza riga della lagrangiana (8.4). Nella **gauge unitaria** esso diventa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3^{(U)} &= - \sum_\ell g_\ell \left(\overline{L}'_\ell \Phi' \ell'_R + \overline{\ell}'_R \Phi'^\dagger L'_\ell \right) \\
&= - \sum_\ell \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \left[\overline{\ell}'_L (v + H) \ell'_R + \overline{\ell}'_R (v + H) \ell'_L \right] \\
&= - \sum_\ell \frac{g_\ell v}{\sqrt{2}} \overline{\ell}' \ell' - \sum_\ell \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \overline{\ell}' \ell' H.
\end{aligned} \tag{8.31}$$

Perciò, nella gauge unitaria i leptoni carichi hanno i termini di massa

$$-\frac{g_\ell v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}' \ell' \quad (\ell = e, \mu, \tau), \quad (8.32)$$

e le loro masse sono date da

$$m_\ell = \frac{g_\ell v}{\sqrt{2}} \quad (\ell = e, \mu, \tau). \quad (8.33)$$

Il termine

$$-\sum_\ell \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \bar{\ell}' \ell' H \quad (8.34)$$

rappresenta gli accoppiamenti trilineari tra i leptoni carichi ed il bosone di Higgs H . Scrivendo questo termine nella forma

$$-\sum_\ell \frac{m_\ell}{v} \bar{\ell}' \ell' H, \quad (8.35)$$

si vede che l'accoppiamento di ciascun leptone carico con il bosone di Higgs è proporzionale alla massa del leptone.

8.1.3 Massa del bosone di Higgs

Consideriamo il potenziale (8.9) dei campi scalari, scritto nella forma (8.11). Nella **gauge unitaria** esso diventa

$$\begin{aligned} V^{(U)}(\Phi') &= \lambda \left(\Phi'^\dagger \Phi' - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ &= \lambda \left(\frac{(v+H)^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ &= \lambda v^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Il primo termine,

$$\lambda v^2 H^2, \quad (8.37)$$

è il termine di massa del bosone di Higgs, la cui massa è data da

$$m_H = \sqrt{2 \lambda v^2} = \sqrt{-2 \mu^2}. \quad (8.38)$$

Poichè $-\mu^2$ è un parametro nuovo del modello standard, il suo valore non è una riconducibile ad altre quantità già misurate, e perciò esso è tuttora sconosciuto e lo sarà finchè il bosone di Higgs non verrà rivelato sperimentalmente e la sua massa non verrà misurata.

8.1.4 Correnti deboli cariche e neutre

Nella **gauge unitaria**, i termini nella prima riga della lagrangiana (8.4) del Modello Standard diventano

$$\mathcal{L}_1^{(U)} = \sum_\ell (i \bar{L}'_\ell \not{D}' L'_\ell + i \bar{\ell}'_R \not{D}' \ell'_R) - \frac{1}{4} \underline{A}'^{\mu\nu} \cdot \underline{A}'_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B'^{\mu\nu} B'_{\mu\nu}. \quad (8.39)$$

Perciò questi termini coincidono con la lagrangiana (6.68) del modello di Glashow e possono essere trattati in maniera identica. Ne segue che

$$\mathcal{L}_1^{(U)} = \mathcal{L}_{(\ell)}^{(U)} + \mathcal{L}_{(G)}^{(U)} + \mathcal{L}_{(\ell W)}^{(U)} + \mathcal{L}_{(\ell Z)}^{(U)} + \mathcal{L}_{(\ell A)}^{(U)}, \quad (8.40)$$

con

$$\mathcal{L}_{(\ell)}^{(U)} = \sum_{\ell} (i \bar{\nu}'_{\ell} \not{\partial} \nu'_{\ell} + i \bar{\ell}' \not{\partial} \ell'), \quad (8.41a)$$

$$\mathcal{L}_{(G)}^{(U)} = -\frac{1}{4} \underline{A}'^{\mu\nu} \cdot \underline{A}'_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B'^{\mu\nu} B'_{\mu\nu}, \quad (8.41b)$$

$$\mathcal{L}_{(\ell W)}^{(U)} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} (\bar{\nu}'_{\ell L} W \ell'_L + \bar{\ell}'_L W^{\dagger} \nu'_{\ell L}), \quad (8.41c)$$

$$\mathcal{L}_{(\ell Z)}^{(U)} = -\frac{g}{2 \cos \vartheta_W} \sum_{\ell} \left\{ \bar{\nu}'_{\ell L} \not{Z} \nu'_{\ell L} - \bar{\ell}'_L \not{Z} \ell'_L + 2 \sin^2 \vartheta_W \bar{\ell}' \not{Z} \ell' \right\}, \quad (8.41d)$$

$$\mathcal{L}_{(\ell A)}^{(U)} = e \sum_{\ell} \bar{\ell}' A \ell'. \quad (8.41e)$$

8.1.5 Auto-accoppiamenti dei campi di gauge

Resta ancora da esprimere

$$\mathcal{L}_{(G)}^{(U)} = -\frac{1}{4} \underline{A}'^{\mu\nu} \cdot \underline{A}'_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B'^{\mu\nu} B'_{\mu\nu} \quad (8.42)$$

in termini dei campi di gauge fisici W^{μ} , Z^{μ} e A^{μ} . Con un calcolo ovvio, ma piuttosto laborioso, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(G)}^{(U)} = & -\frac{1}{2} F_{W\mu\nu}^{\dagger} F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{Z\mu\nu} F_Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + i g \cos \vartheta_W \left[F_W^{\mu\nu} Z_{\mu} W_{\nu}^{\dagger} - F_{W\mu\nu}^{\dagger} Z^{\mu} W^{\nu} + F_Z^{\mu\nu} W_{\mu}^{\dagger} W_{\nu} \right] \\ & + i e \left[F_W^{\mu\nu} A_{\mu} W_{\nu}^{\dagger} - F_{W\mu\nu}^{\dagger} A^{\mu} W^{\nu} + F^{\mu\nu} W_{\mu}^{\dagger} W_{\nu} \right] \\ & + g^2 \cos^2 \vartheta_W \left[(W_{\mu} Z^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} Z^{\nu}) - (W^{\mu} W_{\mu}^{\dagger})(Z^{\nu} Z_{\nu}) \right] \\ & + e^2 \left[(W_{\mu} A^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} A^{\nu}) - (W^{\mu} W_{\mu}^{\dagger})(A^{\nu} A_{\nu}) \right] \\ & + e g \cos \vartheta_W \left[(W_{\mu} Z^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} A^{\nu}) + (W_{\mu}^{\dagger} Z^{\mu})(W_{\nu} A^{\nu}) - 2 (W^{\mu} W_{\mu}^{\dagger})(Z_{\nu} A^{\nu}) \right] \\ & + \frac{1}{2} g^2 \left[(W_{\mu} W^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} W^{\dagger\nu}) - (W_{\mu}^{\dagger} W^{\mu})^2 \right], \end{aligned} \quad (8.43)$$

con

$$F_W^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} W^{\nu} - \partial^{\nu} W^{\mu}, \quad (8.44a)$$

$$F_Z^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} Z^{\nu} - \partial^{\nu} Z^{\mu}, \quad (8.44b)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}. \quad (8.44c)$$

8.2 Lagrangiana del Modello Standard nella gauge unitaria

Dalle equazioni (8.24), (8.31), (8.36), (8.41), (8.43) si ottiene la lagrangiana completa del Modello Standard nella gauge unitaria (omettendo i primi):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{MS}}^{(\text{U})} = & \sum_{\ell} \left[\bar{\nu}_{\ell} i \not{\partial} \nu_{\ell} + \bar{\ell} (i \not{\partial} - m_{\ell}) \ell \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{4} F_{Z\mu\nu} F_Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_{\mu} Z^{\mu} - \frac{1}{2} F_{W\mu\nu}^{\dagger} F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_{\mu}^{\dagger} W^{\mu} \\
& + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} H) (\partial^{\mu} H) - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \\
& + \mathcal{L}_{(\ell A)}^{(\text{U})} + \mathcal{L}_{(\ell Z)}^{(\text{U})} + \mathcal{L}_{(\ell W)}^{(\text{U})} + \mathcal{L}_{(HH)}^{(\text{U})} + \mathcal{L}_{(\ell H)}^{(\text{U})} + \mathcal{L}_{(HG)}^{(\text{U})} + \mathcal{L}_{(GG)}^{(\text{U})}, \tag{8.45}
\end{aligned}$$

con

$$\mathcal{L}_{(\ell A)}^{(\text{U})} = e \sum_{\ell} \bar{\ell} \not{A} \ell, \tag{8.46a}$$

$$\mathcal{L}_{(\ell Z)}^{(\text{U})} = -\frac{g}{2 \cos \vartheta_W} \sum_{\ell} \left\{ \bar{\nu}_{\ell L} \not{Z} \nu_{\ell L} - \bar{\ell}_L \not{Z} \ell_L + 2 \sin^2 \vartheta_W \bar{\ell} \not{Z} \ell \right\}, \tag{8.46b}$$

$$\mathcal{L}_{(\ell W)}^{(\text{U})} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} (\bar{\nu}_{\ell L} W \ell_L + \bar{\ell}_L W^{\dagger} \nu_{\ell L}), \tag{8.46c}$$

$$\mathcal{L}_{(HH)}^{(\text{U})} = -\lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4, \tag{8.46d}$$

$$\mathcal{L}_{(\ell H)}^{(\text{U})} = -\sum_{\ell} \frac{m_{\ell}}{v} \bar{\ell} \ell H, \tag{8.46e}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(HG)}^{(\text{U})} = & \frac{g^2 v}{2} W_{\mu}^{\dagger} W^{\mu} H + \frac{g^2 v}{4 \cos^2 \vartheta_W} Z_{\mu} Z^{\mu} H \\
& + \frac{g^2}{4} W_{\mu}^{\dagger} W^{\mu} H^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \vartheta_W} Z_{\mu} Z^{\mu} H^2, \tag{8.46f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(GG)}^{(\text{U})} = & i g \cos \vartheta_W \left[F_W^{\mu\nu} Z_{\mu} W_{\nu}^{\dagger} - F_{W\mu\nu}^{\dagger} Z^{\mu} W^{\nu} + F_Z^{\mu\nu} W_{\mu}^{\dagger} W_{\nu} \right] \\
& + i e \left[F_W^{\mu\nu} A_{\mu} W_{\nu}^{\dagger} - F_{W\mu\nu}^{\dagger} A^{\mu} W^{\nu} + F^{\mu\nu} W_{\mu}^{\dagger} W_{\nu} \right] \\
& + g^2 \cos^2 \vartheta_W \left[(W_{\mu} Z^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} Z^{\nu}) - (W^{\mu} W_{\mu}^{\dagger})(Z^{\nu} Z_{\nu}) \right] \\
& + e^2 \left[(W_{\mu} A^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} A^{\nu}) - (W^{\mu} W_{\mu}^{\dagger})(A^{\nu} A_{\nu}) \right] \\
& + e g \cos \vartheta_W \left[(W_{\mu} Z^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} A^{\nu}) + (W_{\mu}^{\dagger} Z^{\mu})(W_{\nu} A^{\nu}) - 2 (W^{\mu} W_{\mu}^{\dagger})(Z_{\nu} A^{\nu}) \right] \\
& + \frac{1}{2} g^2 \left[(W_{\mu} W^{\mu})(W_{\nu}^{\dagger} W^{\dagger\nu}) - (W_{\mu}^{\dagger} W^{\mu})^2 \right] \tag{8.46g}
\end{aligned}$$

ed i parametri

$$\lambda v^2 = -\mu^2 > 0, \tag{8.47a}$$

$$g \sin \vartheta_W = g' \cos \vartheta_W = e, \tag{8.47b}$$

$$m_\ell = \frac{g_\ell v}{\sqrt{2}}, \quad (8.47c)$$

$$m_W = \frac{g v}{2} = \frac{e v}{2 \sin \vartheta_W}, \quad (8.47d)$$

$$m_Z = \frac{g v}{2 \cos \vartheta_W} = \frac{e v}{\sin 2\vartheta_W} = \frac{m_W}{\cos \vartheta_W}, \quad (8.47e)$$

$$m_H = \sqrt{2} \lambda v^2 = \sqrt{-2} \mu^2. \quad (8.47f)$$

8.2.1 Conferme sperimentali del Modello Standard

Dalla relazione (8.47d) e dalla relazione (6.80),

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2}, \quad (8.48)$$

si ottiene

$$v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} \simeq 246 \text{ GeV}. \quad (8.49)$$

Utilizzando il valore sperimentale di $\sin^2 \vartheta_W$,

$$\sin^2 \vartheta_W \simeq 0.223, \quad (8.50)$$

si ottiene una previsione teorica per le masse dei bosoni W e Z :

$$m_W = \frac{\sqrt{4\pi\alpha} v}{2 \sin \vartheta_W} \simeq 80 \text{ GeV}, \quad (8.51a)$$

$$m_Z = \frac{\sqrt{4\pi\alpha} v}{\sin 2\vartheta_W} \simeq 90 \text{ GeV}. \quad (8.51b)$$

I bosoni W e Z sono stati rivelati sperimentalmente per la prima volta nel 1983 dagli esperimenti UA1 e UA2 al CERN ed i valori misurati per le loro masse sono consistenti con i valori (8.51) previsti dal Modello Standard.

Storicamente la prima conferma sperimentale del Modello Standard è stata la scoperta nel 1973 di processi deboli con correnti neutre. Oggi il Modello Standard è in accordo con tutti i dati sperimentali ed i suoi parametri sono stati misurati con grande precisione in numerosi esperimenti (vedi, per esempio, [Lea96]).

L'unico tassello mancante per una completa verifica sperimentale del Modello Standard è la rivelazione del bosone di Higgs, la cui massa è il solo parametro sconosciuto della teoria. L'acceleratore di protoni LHC (Large Hadron Collider), che è attualmente in costruzione al CERN ed inizierà a funzionare dopo il 2005, ha come scopo principale la rivelazione del bosone di Higgs.

8.3 Processi deboli con correnti neutre

I processi deboli con correnti neutre sono dovuti alla densità lagrangiana di interazione (nella gauge unitaria)

$$\mathcal{L}_{(Z)}^{(U)}(x) = -\frac{g}{2 \cos \vartheta_W} j_Z^\alpha(x) Z_\alpha(x), \quad (8.52)$$

dove $j_Z^\alpha(x)$ è la corrente debole neutra

$$j_Z^\alpha(x) = l_Z^\alpha(x) + h_Z^\alpha(x), \quad (8.53)$$

data dalla somma della corrente debole neutra leptonica $l_Z^\alpha(x)$ e quella adronica $h_Z^\alpha(x)$. La corrente debole neutra leptonica è data dall'eq.(8.46b):

$$l_Z^\alpha = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \left\{ \bar{\nu}_{\ell L} \gamma^\alpha \nu_{\ell L} - \bar{\ell}_L \gamma^\alpha \ell_L + 2 \sin^2 \vartheta_W \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell \right\} \quad (8.54)$$

e può essere scritta nella forma

$$l_Z^\alpha = 2 \left(l_3^\alpha - \sin^2 \vartheta_W l_{\text{em}}^\alpha \right), \quad (8.55)$$

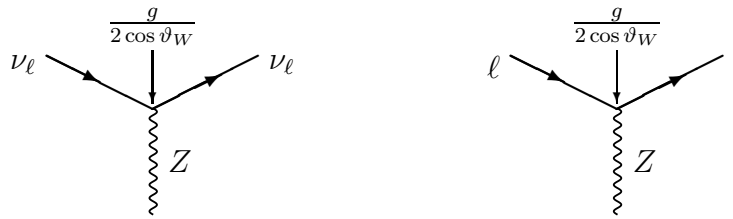
dove

$$l_3^\alpha = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{L}_\ell \gamma^\alpha I_3 L_\ell, \quad (8.56)$$

con $I_3 = \tau_3/2$, e l_{em}^α è la corrente elettromagnetica (i leptoni e , μ , τ hanno carica elettrica -1)

$$l_{\text{em}}^\alpha = - \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell. \quad (8.57)$$

La densità lagrangiana (8.52) determina vertici di interazione del tipo

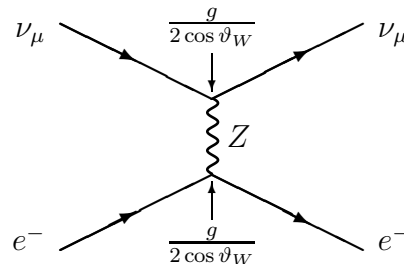


$$(8.58)$$

Le proprietà del campo $Z^\alpha(x)$ sono analoghe a quelle del campo $W^\alpha(x)$, salvo il fatto che $Z^\alpha(x)$, essendo neutro, è un campo hermitiano. Il suo propagatore nello spazio degli impulsi nella gauge unitaria è

$$G_{(Z)}^{\alpha\beta}(k) = i \frac{-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_Z^2}}{k^2 - m_Z^2}. \quad (8.59)$$

Le ampiezze dei processi deboli che avvengono tramite scambio del bosone Z si calcolano utilizzando regole di Feynman analoghe a quelle viste precedentemente. Un esempio è dato dal processo



$$(8.60)$$

8.3.1 Limite di bassa energia

Anche nel caso di processi deboli con scambio del bosone Z è utile considerare il limite di bassa energia, che trova la sua applicazione quando $|q^2|/m_Z^2 \ll 1$ (q^μ è il quadri-momento trasferito). Procedendo come per i processi con scambio di W^\pm , si perviene ad una densità lagrangiana efficace (alla Fermi)

$$\mathcal{L}_F^{(Z)}(x) = \frac{g^2}{4 \cos \vartheta_W m_Z^2} j_Z^\alpha(x) j_{Z\alpha}(x). \quad (8.61)$$

Utilizzando le relazioni (8.47e) e (8.48) si ottiene

$$\mathcal{L}_F^{(Z)}(x) = 2 \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_Z^\alpha(x) j_{Z\alpha}(x). \quad (8.62)$$

8.4 Corrente debole neutra adronica

La corrente debole neutra adronica può essere scritta in analogia a quella leptonica nella forma (8.55):

$$h_Z^\alpha = 2 \left(h_3^\alpha - \sin^2 \vartheta_W h_{\text{em}}^\alpha \right), \quad (8.63)$$

dove h_{em}^α è la corrente elettromagnetica adronica

$$h_{\text{em}}^\alpha = \frac{2}{3} \sum_{q=u,c,t} \bar{q} \gamma^\alpha q - \frac{1}{3} \sum_{q'=d',s',b'} \bar{q}' \gamma^\alpha q' \quad (8.64)$$

e d', s', b' sono i campi dei quarks nella base ruotata introdotta nella sezione 4.3.3. La corrente h_3^α è la terza componente del tripletto di correnti adroniche associate all'isospin debole:

$$h_3^\alpha = \sum_{q'=d',s',b'} \bar{L}_{q'} \gamma^\alpha I_3 L_{q'}, \quad (8.65)$$

con i doppietti adronici di isospin debole

$$L_{d'} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \quad L_{s'} = \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \quad L_{b'} = \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad (8.66)$$

che hanno ipercarica $Y = 1/3$. Gli autovalori di I_3 , dell'ipercarica Y e della carica Q per i multipletti dei quarks sono riassunti nella Tabella 8.2.

La corrente h_3^α scritta esplicitamente in termini dei campi dei quarks è

$$h_3^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{q=u,c,t} \bar{q}_L \gamma^\alpha q_L - \frac{1}{2} \sum_{q'=d',s',b'} \bar{q}'_L \gamma^\alpha q'_L. \quad (8.67)$$

Utilizzando le (8.64) e (8.66), la corrente debole neutra adronica (8.63) scritta esplicitamente in termini dei campi dei quarks è data da

$$h_Z^\alpha = \sum_{q=u,c,t} \left(\bar{q}_L \gamma^\alpha q_L - \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W \bar{q} \gamma^\alpha q \right) + \sum_{q'=d',s',b'} \left(-\bar{q}'_L \gamma^\alpha q'_L + \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W \bar{q}' \gamma^\alpha q' \right). \quad (8.68)$$

| | I_3 | Y | $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ |
|--|-------------|------|-------------------------|
| $L_{q'} = \begin{pmatrix} q_L \\ q'_L \end{pmatrix}$ | 1/2 -1/2 | 1/3 | 2/3 -1/3 |
| q_R | 0 | 4/3 | 2/3 |
| q'_R | 0 | -2/3 | -1/3 |

Table 8.2: Autovalori di I_3 , dell'ipercarica Y e della carica Q per i multipletti dei quarks, con $(q, q') = (u, d')$, (c, s') , (t, b') .

Tenendo conto delle definizioni (4.109) e (4.111), questa corrente può essere scritta nella forma

$$h_Z^\alpha = \overline{U}_L \gamma^\alpha U_L - \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W \overline{U} \gamma^\alpha U - \overline{D}'_L \gamma^\alpha D'_L + \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W \overline{D}' \gamma^\alpha D'. \quad (8.69)$$

Poichè $D' = VD$ (vedi l'eq.(4.104)) e $V^\dagger V = 1$, si ha

$$h_Z^\alpha = \overline{U}_L \gamma^\alpha U_L - \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W \overline{U} \gamma^\alpha U - \overline{D}_L \gamma^\alpha D_L + \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W \overline{D} \gamma^\alpha D, \quad (8.70)$$

cioè

$$h_Z^\alpha = \sum_{q=u,c,t} \left(\overline{q}_L \gamma^\alpha q_L - \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W \overline{q} \gamma^\alpha q \right) + \sum_{q=d,s,b} \left(-\overline{q}_L \gamma^\alpha q_L + \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W \overline{q} \gamma^\alpha q \right). \quad (8.71)$$

Quindi non vi sono termini di corrente debole neutra che inducono transizioni tra le tre generazioni di quarks. Questa proprietà è detta **meccanismo GIM** (Glashow, Iliopoulos & Maiani [Gla70]).

Appendix A

Unità naturali

In unità ordinarie le costanti \hbar e c hanno le dimensioni

$$[\hbar] = [E \cdot t] , \quad (\text{A.1})$$

$$[c] = [\ell \cdot t^{-1}] . \quad (\text{A.2})$$

Le unità naturali sono definite dalla condizione

$$\hbar = c = 1 . \quad (\text{A.3})$$

Questa condizione implica quindi che, in unità naturali, valgano le seguenti relazioni dimensionali:

$$[E] = [t^{-1}] = [\ell^{-1}] . \quad (\text{A.4})$$

Inoltre, dalla relazione relativistica energia-impulso, scritta in unità naturali,

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (\text{A.5})$$

si ricava che

$$[E] = [|\vec{p}|] = [m] . \quad (\text{A.6})$$

Per la conversione numerica tra le diverse grandezze in unità naturali è utile usare la formula

$$\hbar c = 197 \text{ Mev} \cdot \text{fm} , \quad (\text{A.7})$$

che, in unità naturali, si riduce a

$$197 \text{ Mev} \cdot \text{fm} = 1 . \quad (\text{A.8})$$

Appendix B

Quadri-vettori e metrica

Consideriamo uno spazio vettoriale a 4 dimensioni. Gli elementi di questo spazio vettoriale si chiamano quadri-vettori. Il quadri-vettore v ha componenti controvarianti $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, dove v^0 è la componente temporale e v^1, v^2, v^3 sono le componenti spaziali¹, le quali si trasformano come le componenti di un tri-vettore euclideo $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ per rotazioni spaziali. Le componenti covarianti $v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ del quadri-vettore v sono legate alle componenti controvarianti dalla relazione

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (\text{B.1})$$

dove g è il tensore metrico, con componenti covarianti $g_{\mu\nu}$ date da

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Perciò, le componenti covarianti e controvarianti del quadri-vettore v sono legate dalle relazioni

$$v_0 = v^0, \quad v_k = -v^k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{B.3})$$

Le componenti controvarianti ($g^{\mu\nu}$) del tensore metrico sono date dalla relazione

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g^\mu_\nu, \quad (\text{B.4})$$

con

$$g^\mu_\nu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

¹Per gli indici quadri-dimensionali, che vanno da 0 a 3, usiamo lettere greche μ, ν, ρ, \dots , mentre gli indici tri-dimensionali, che vanno da 1 a 3, usiamo lettere romane k, i, j, \dots . Usiamo anche la notazione secondo la quale quando un indice è ripetuto in uno stesso termine è implicita la somma sui suoi valori. Ad esempio

$$u^\mu v_\mu = u^0 v_0 + u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3.$$

Perciò

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Il prodotto scalare tra due quadri-vettori u, v è dato da

$$u \cdot v = u_\mu v^\mu = u^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu v_\nu = u^0 v^0 - \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (\text{B.7})$$

I quadri-vettori si dividono in tre gruppi, a seconda del segno della loro norma $v^2 \equiv v \cdot v$,

$$v^2 > 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo tempo} \quad (\text{B.8a})$$

$$v^2 = 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo luce} \quad (\text{B.8b})$$

$$v^2 < 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo spazio} \quad (\text{B.8c})$$

Una trasformazione di Lorentz $L(\Lambda)$ agisce sui quadri-vettori trasformando un quadri-vettore v in un quadri-vettore v'

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu, \quad (\text{B.9})$$

in modo da mantenere invariante la norma dei quadri-vettori:

$$v'^2 = v^2 \quad \iff \quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta v^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta. \quad (\text{B.10})$$

Ciò implica che le matrici $\Lambda^\mu{}_\nu$ devono soddisfare alla relazione

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.11})$$

La trasformazione inversa della (B.9) è

$$v^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu v'^\mu, \quad (\text{B.12})$$

come si verifica immediatamente utilizzando la (B.11).

Bibliography

- [Abe73] E.S. Abers & B.W. Lee, Phys. Rep. **1**, 1 (1973).
- [Bil94] S.M. Bilenky, *Introduction to Feynman Diagrams and Electroweak Interactions Physics*, Edition Frontières (1994).
- [Cab63] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
- [Chr64] J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch & R. Turlay, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
- [Chr65] J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch & R. Turlay, Phys. Rev. **140**, B74 (1965).
- [Eng64] F. Englert & R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [Fey58] R.P. Feynman & M. Gell-Mann Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
- [Gel58] Gell-Mann, Phys. Rev. **111**, 362 (1958).
- [Ger55] Gershtein & Zel'dovich, JETP (USSR) **29**, 698 (1955).
- [Gla61] S.L. Glashow Nucl. Phys. **22**, 597 (1961).
- [Gla70] S.L. Glashow, J. Iliopoulos & L. Maiani, Phys. Rev. D **2**, 1285 (1970).
- [Gol58] M. Goldhaber, L. Grodzins & A.W. Sunyar, Phys. Rev. **109**, 1015 (1958).
- [Gol61] J. Goldstone, Il Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).
- [Gol62] J. Goldstone, A. Salam & S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [Gur64] G.S. Guralnik, C.R. Hagen & T.W.B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
- [Hig64] P. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
- [Hig66] P. Higgs, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [Hoo71] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33**, 173 (1971); Nucl. Phys. B **35**, 167 (1971); G. 't Hooft & M. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [Itz80] C. Itzykson & J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Co. (1980).
- [Kib67] T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).

- [Lan57] L. Landau, Nucl. Phys. **3**, 127 (1957).
- [Lea96] E. Leader & E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Cambridge University Press (1996), Volume 1: *Electroweak interactions, the “new particles” and the parton model*.
- [Lea96b] E. Leader & E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Cambridge University Press (1996), Volume 2: *CP-violation, QCD and hard processes*.
- [Lee56] T.D. Lee & C.N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
- [Lee57] T.D. Lee & C.N. Yang, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).
- [Lee72] B.W. Lee & J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **5**, 3121 (1972); Phys. Rev. D **5**, 3137 (1972); Phys. Rev. D **5**, 3155 (1972); Phys. Rev. D **7**, 1049 (1973).
- [Man84] F. Mandl & G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons Ltd. (1984)
- [Nac89] O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics, Concepts and Phenomena*, Springer-Verlag (1989).
- [PDG96] Particle Data Group, R.M. Barnett et al., Phys. Rev. D **54**, 1 (1996).
- [Ren90] P. Renton, *Electroweak Interactions*, Cambridge University Press (1990).
- [Sal57] A. Salam, Il Nuovo Cimento **5**, 299 (1957).
- [Sal68] A. Salam, Proc. of the 8th Nobel Symp. on *Elementary particle theory, relativistic groups and analyticity*, edited by N. Svartholm (1969).
- [Sud58] E.C.G. Sudarshan & R. Marshak, Phys. Rev. **109**, 1860 (1958).
- [Tay76] J.C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press (1976).
- [Wei67] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [Wu57] C.S. Wu *et al.*, Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).
- [Yan54] C.N. Yang & R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).