Lezione 4
Cinematica

Ezio Maina

Corso di Laurea in Farmacia

Anno accademico 2020 -2021

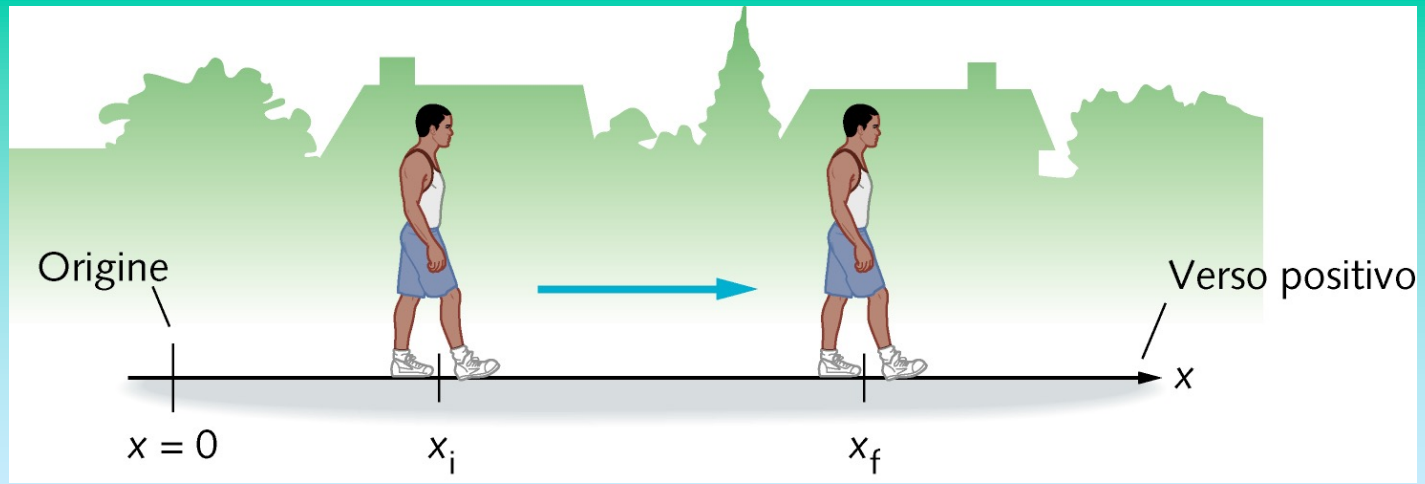
Corso di Fisica

La lezione di oggi

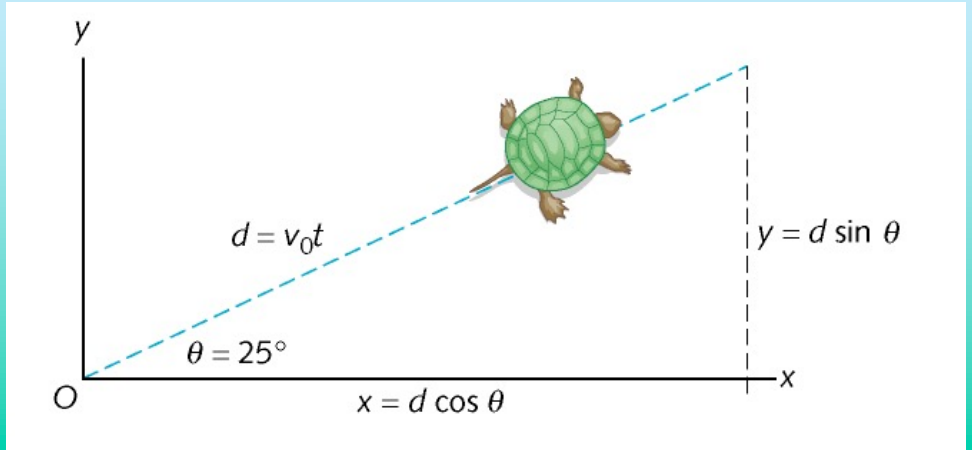
La cinematica

Velocità

Accelerazione



Il moto del proiettile



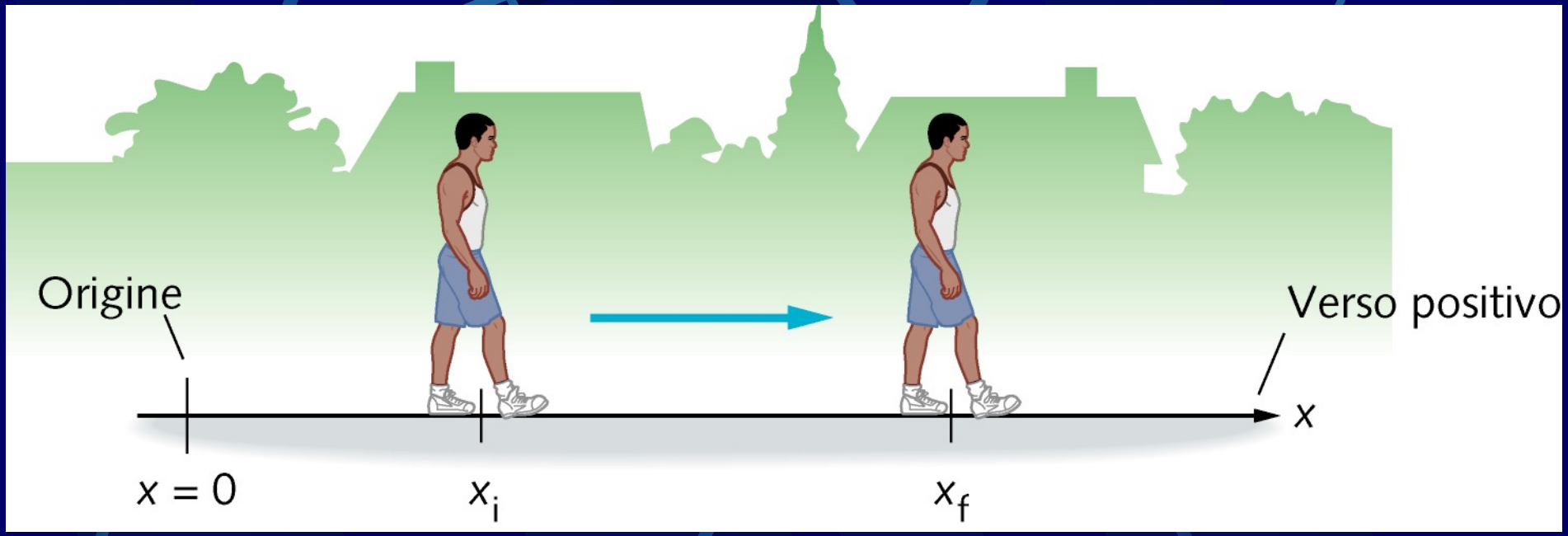
Salto verticale

Meccanica e cinematica

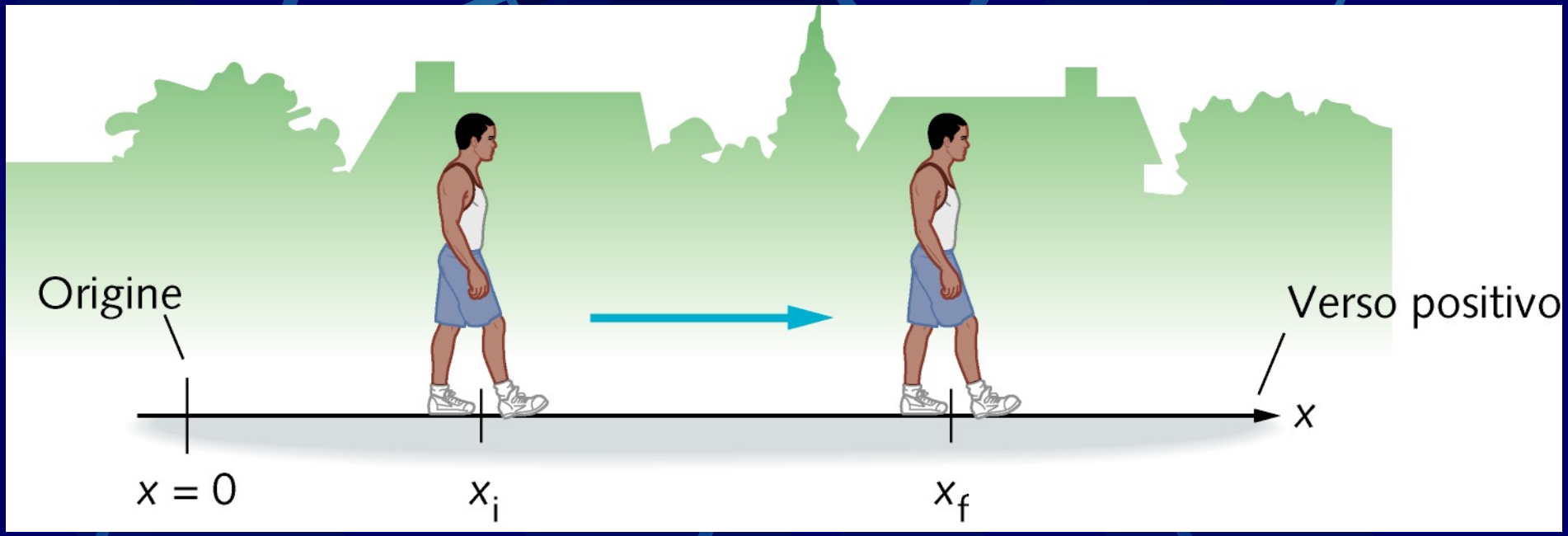
- Meccanica: studio di come si muovono gli oggetti
  - forze esterne
  - dimensioni
  - massa
  - distribuzione della massa
- Cinematica (dal greco *kinema*, moto): studio del moto
  - indipendentemente da cosa lo ha causato
  - unidimensionale: moto lungo una linea retta (sinistra → destra, basso → alto, est→ ovest, ...)

- **Posizione, distanza, spostamento**
- Velocità, accelerazione
- Il moto rettilineo uniforme in 2D
- Il generico moto in 2D
- Il moto del proiettile

Sistema di coordinate cartesiane



Sistema di coordinate cartesiane

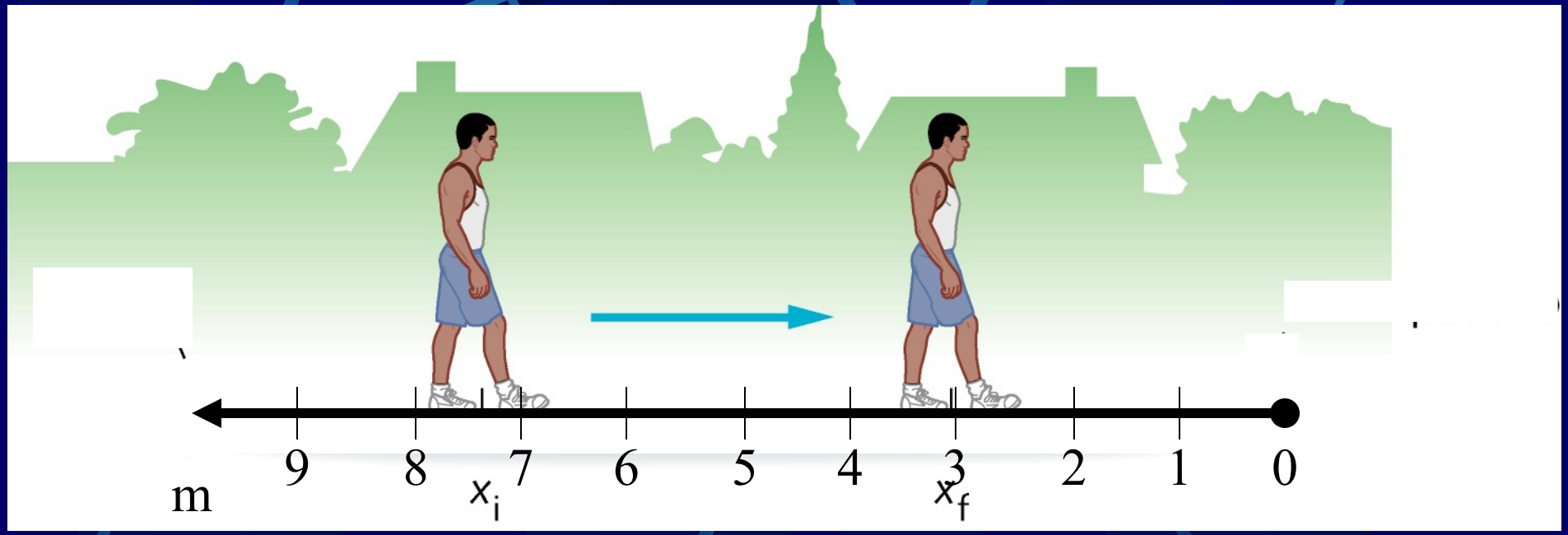


x_{finale} è maggiore di $x_{iniziale}$

$x_{finale} > x_{iniziale}$

$x_f > x_i$

Sistema di coordinate cartesiane

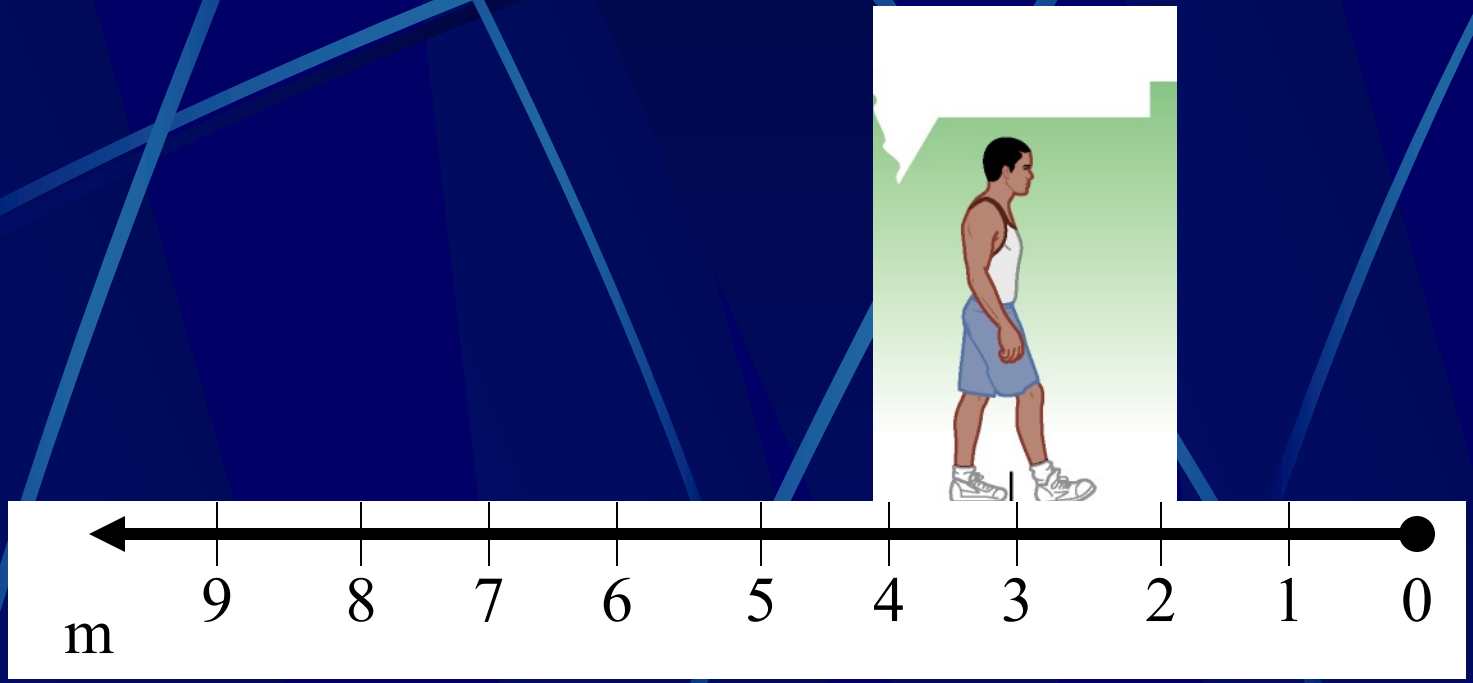


x_{finale} è minore di $x_{iniziale}$

$x_{finale} < x_{iniziale}$

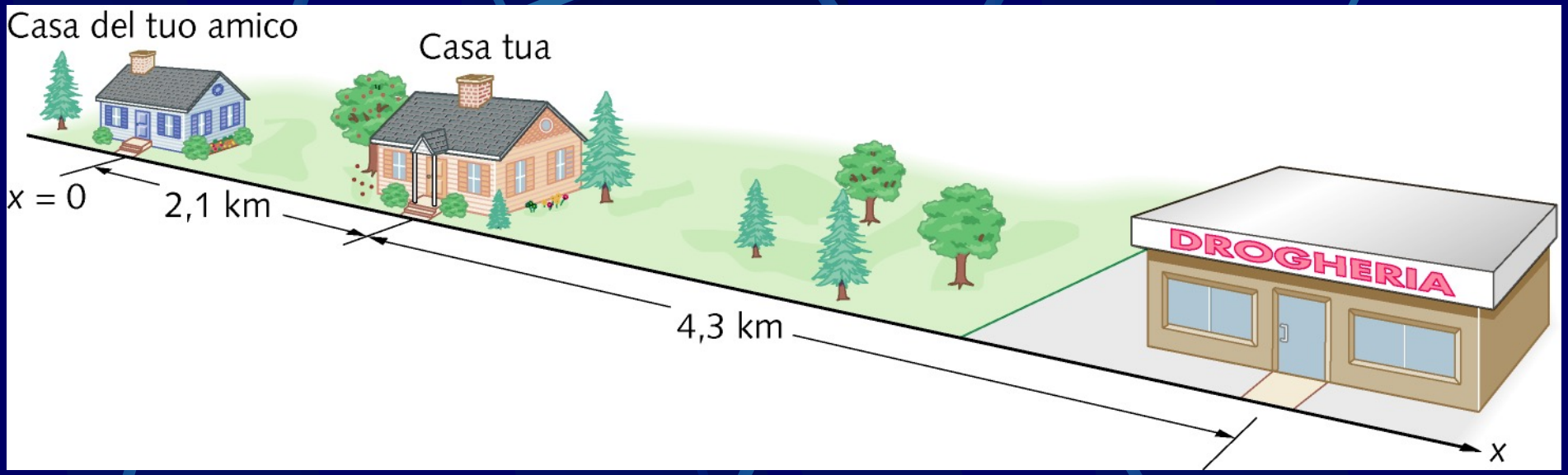
$x_f < x_i$

Posizione



La persona in figura è alla **posizione** x = 3 m

Distanza



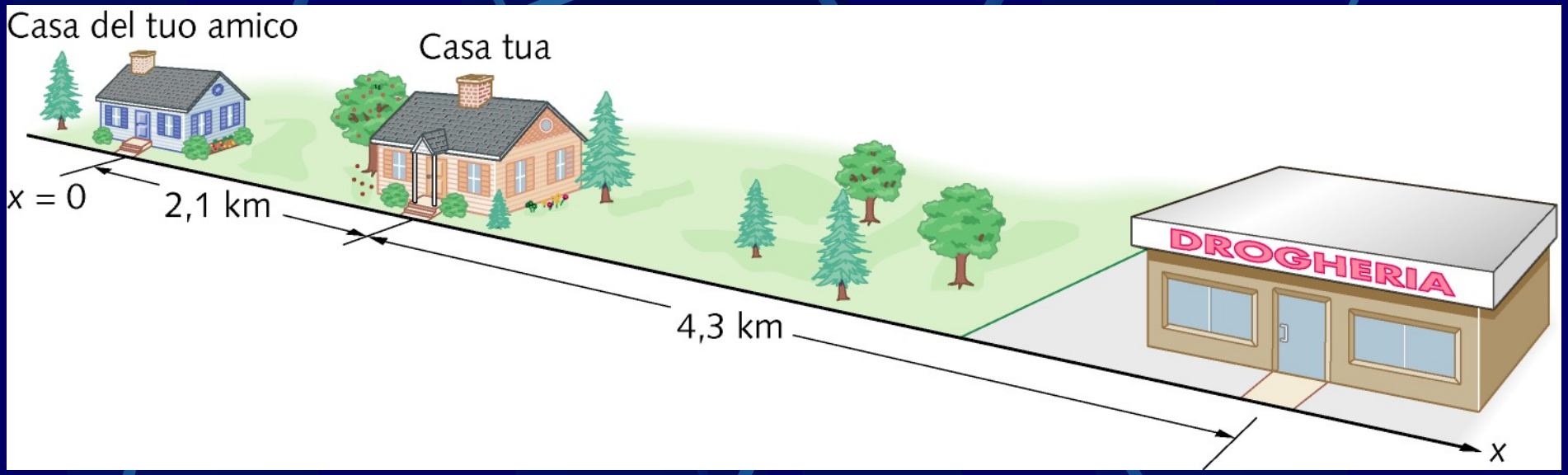
DISTANZA (quantità sempre positiva)

lunghezza complessiva del tragitto

Casa amico → Casa tua → Drogheria

Distanza = 2.1 km + 4.3 km = 6.4 km

Spostamento



SPOSTAMENTO (positivo o negativo)

Cambiamento di posizione = (Posizione finale – Posizione iniziale)

$$\Delta x = x_{finale} - x_{iniziale}$$

$$\Delta x = x_f - x_i$$

- Posizione, distanza, spostamento
- **Velocità, accelerazione**
- Il moto rettilineo uniforme in 2D
- Il generico moto in 2D
- Il moto del proiettile

Velocità media

$$\text{velocita'media} = \frac{\text{spostamento}}{\text{tempo impiegato}}$$

$$\text{velocita'media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Dimensioni: [L T^{-1}]

Unità di misura (Sistema Internazionale): m s^{-1}

NOTA

Tempo impiegato è sempre > 0, spostamento può essere < > 0

Velocità media può essere < > 0

Velocità istantanea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Accelerazione media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{finale} - v_{iniziale}}{t_{finale} - t_{iniziale}} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

$$\text{accelerazione media} = \frac{\text{velocita'}}{\text{tempo impiegato}}$$

$$\frac{[L\,T^{-1}]}{[T]} = [L\,T^{-2}]$$

Unità di misura (Sistema Internazionale): m s^{-2}

La interpreto come:

in 1 secondo, la velocità è variata di *tot* metri al secondo

Accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

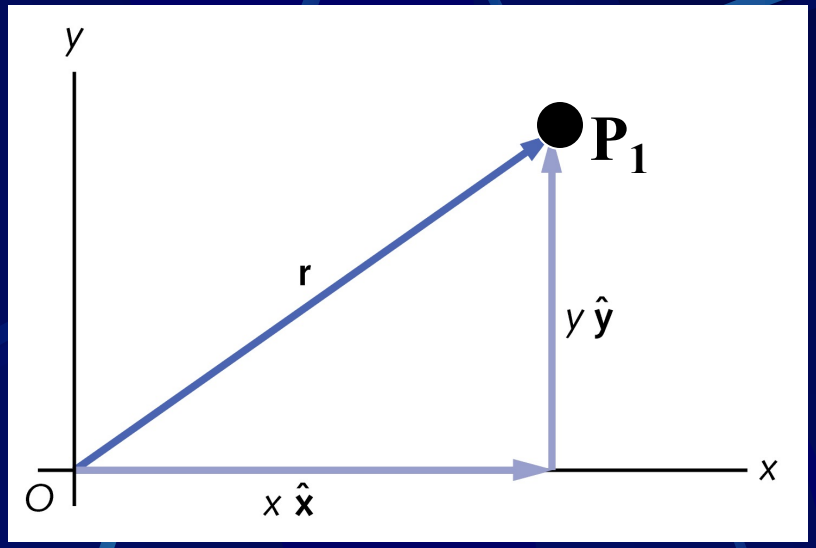
NOTA

Quando parleremo di **velocità e accelerazione**, intenderemo SEMPRE **velocità istantanea e accelerazione istantanea**.

Se si tratta con velocità (accelerazione) media,

lo si deve indicare esplicitamente

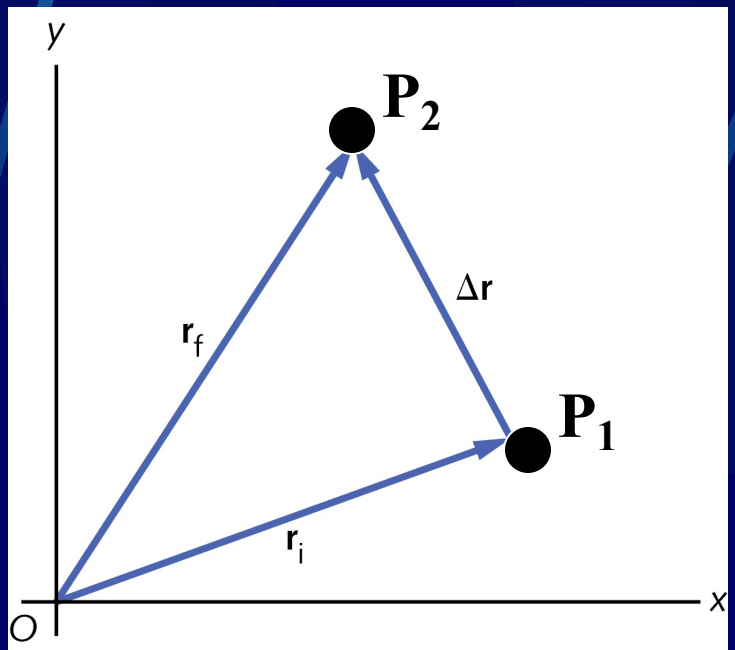
I vettori nella cinematica bidimensionale



Vettore Posizione

ovvero

sono nel punto P_1



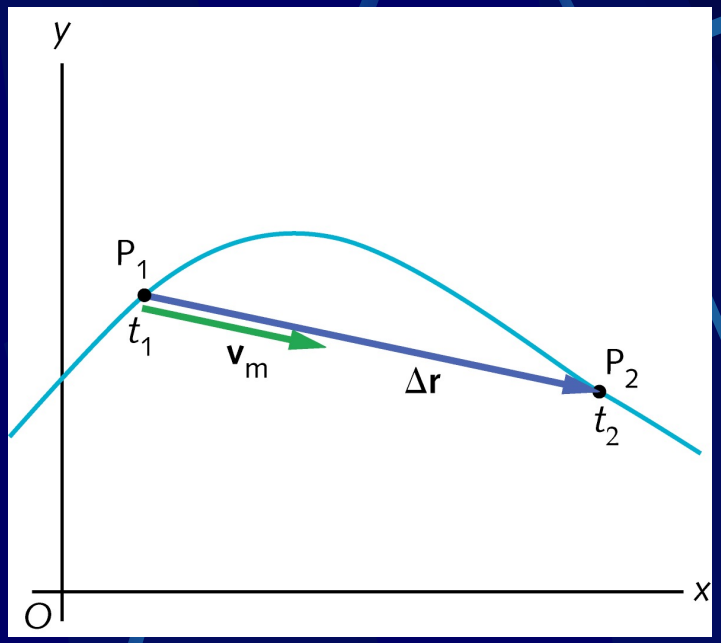
Vettore Spostamento

ovvero

vado da P_1 a P_2

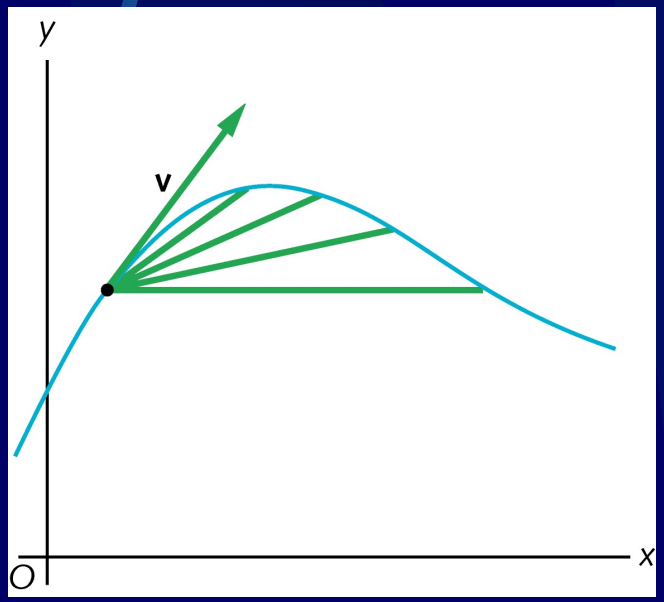
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

I vettori nella cinematica bidimensionale



$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

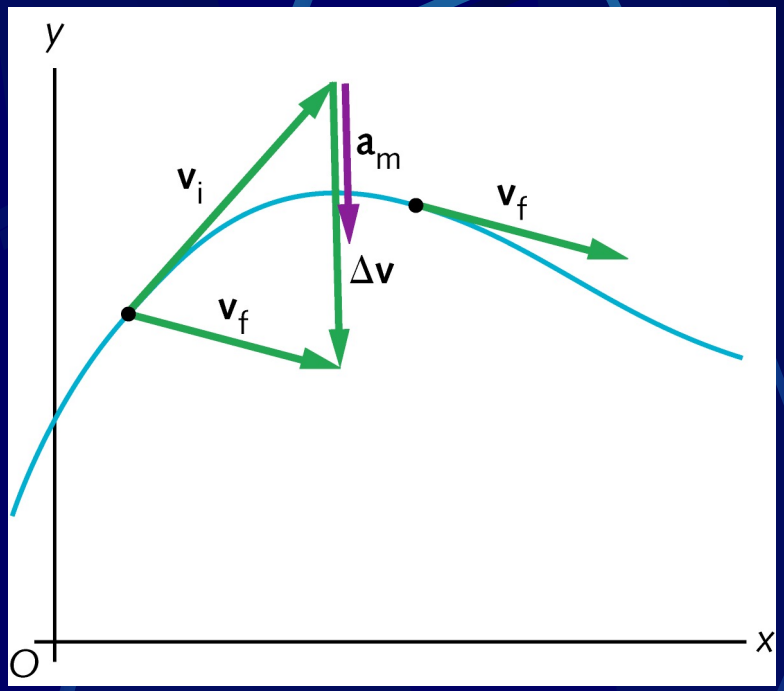
- Δt è uno scalare
- $\vec{v}_m$ e $\Delta \vec{r}$ sono paralleli



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocità istantanea è tangente alla traiettoria in ogni istante

I vettori nella cinematica bidimensionale



$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- Come nel caso della velocità, $\vec{a}$ e $\Delta \vec{v}$ sono paralleli...

... ma ... cosa importantissima ... mentre $\vec{v}$ segue il moto, $\vec{a}$ in generale non lo segue

Il moto in due dimensioni

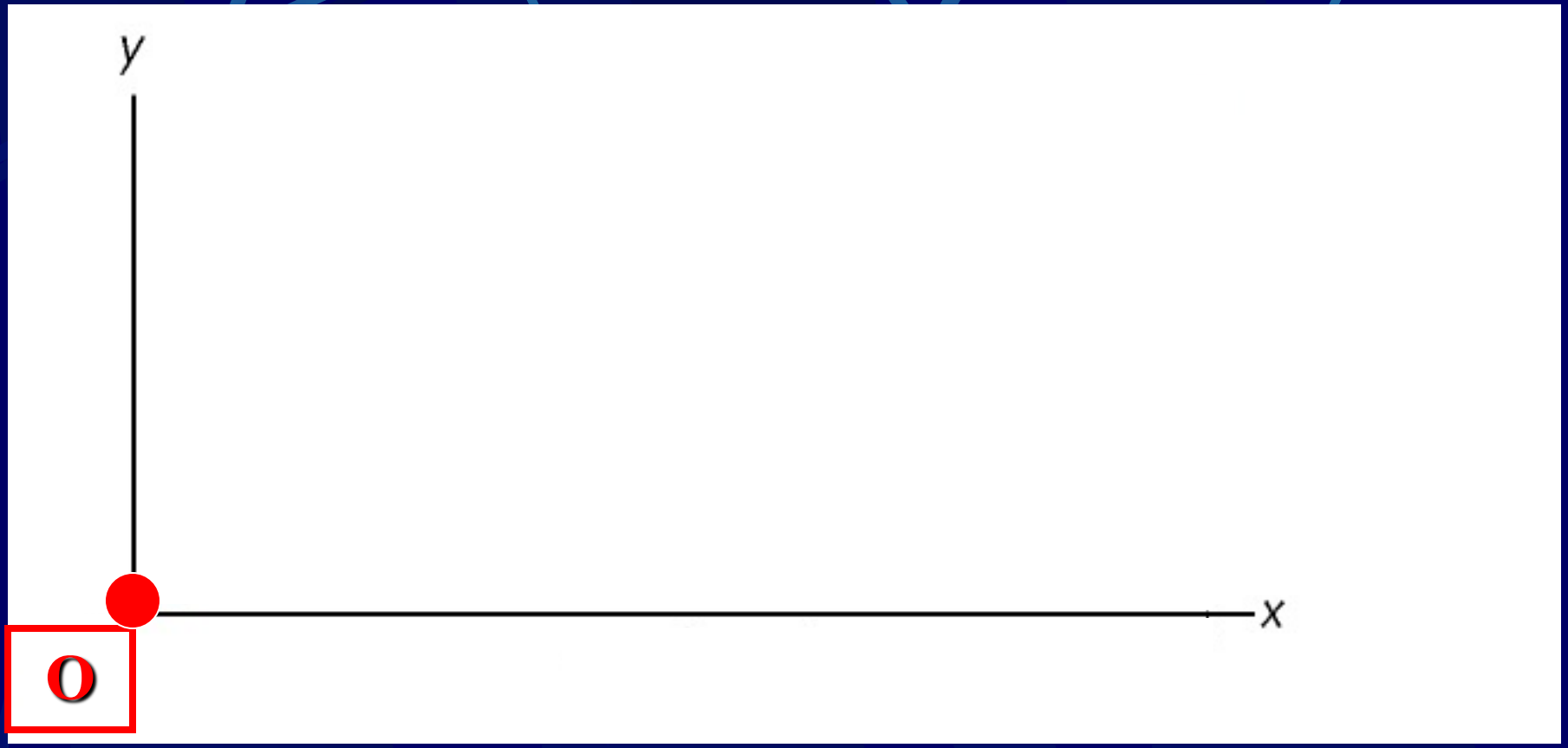
- È il moto del proiettile
- Si applica a qualunque corpo sottoposto solo alla forza gravitazionale (forza peso)
- Proiettile ←→ Generico corpo
- Il segreto:

Applicare le equazioni del moto unidimensionale sui due assi cartesiani

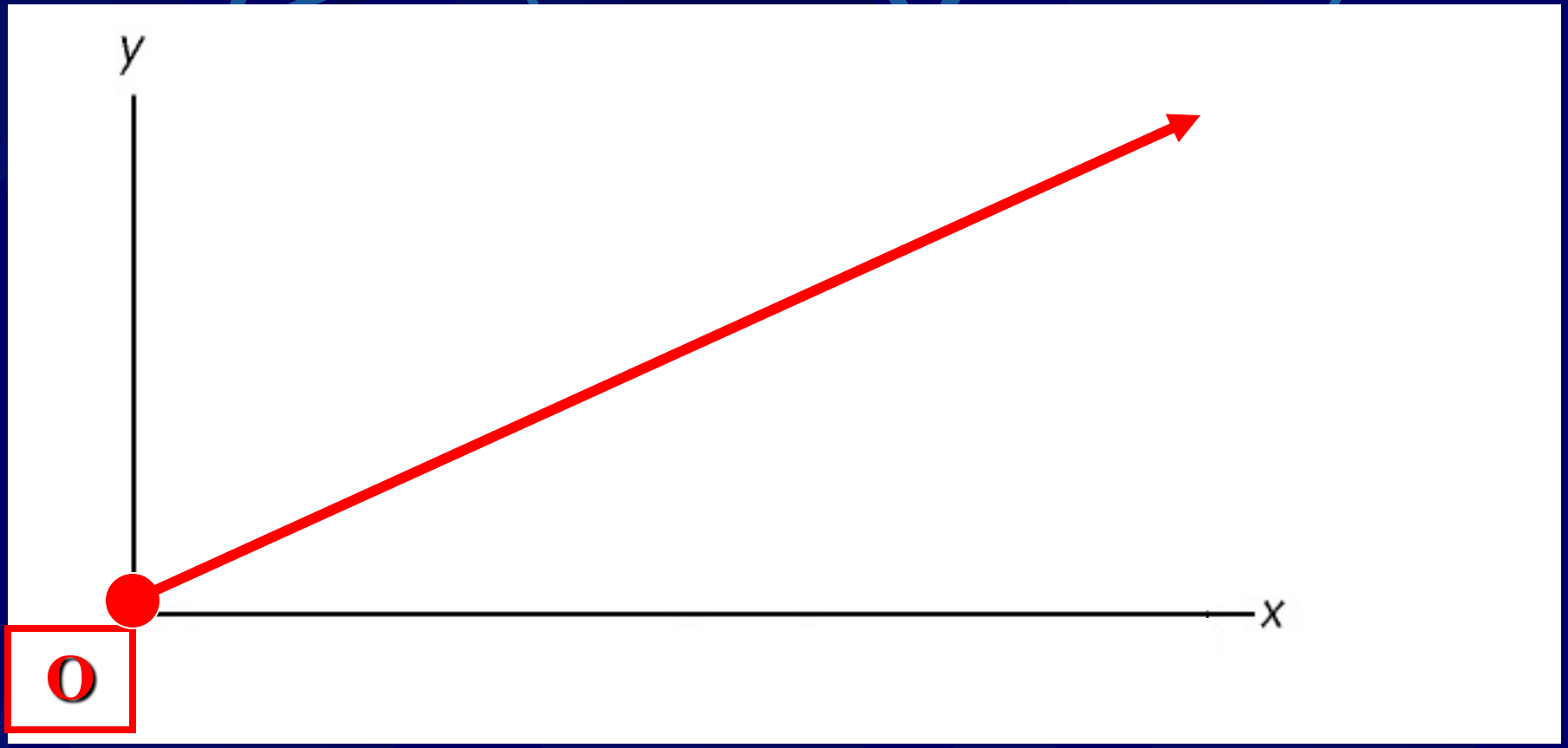
- Posizione, distanza, spostamento
- Velocità, accelerazione
- **Il moto rettilineo uniforme in 2D**
- Il generico moto in 2D
- Il moto del proiettile

Moto rettilineo uniforme in 2D

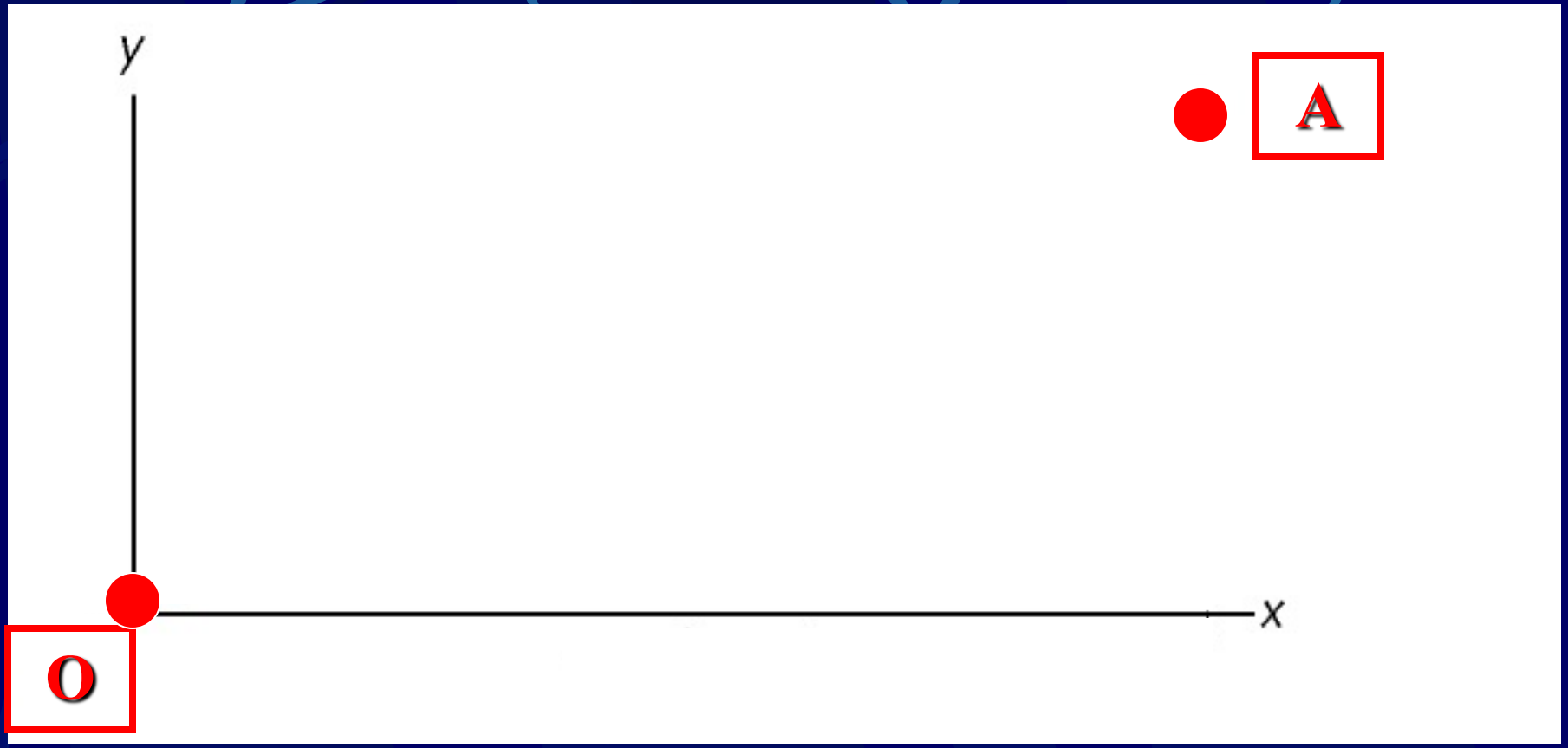
Moto rettilineo uniforme in 2D



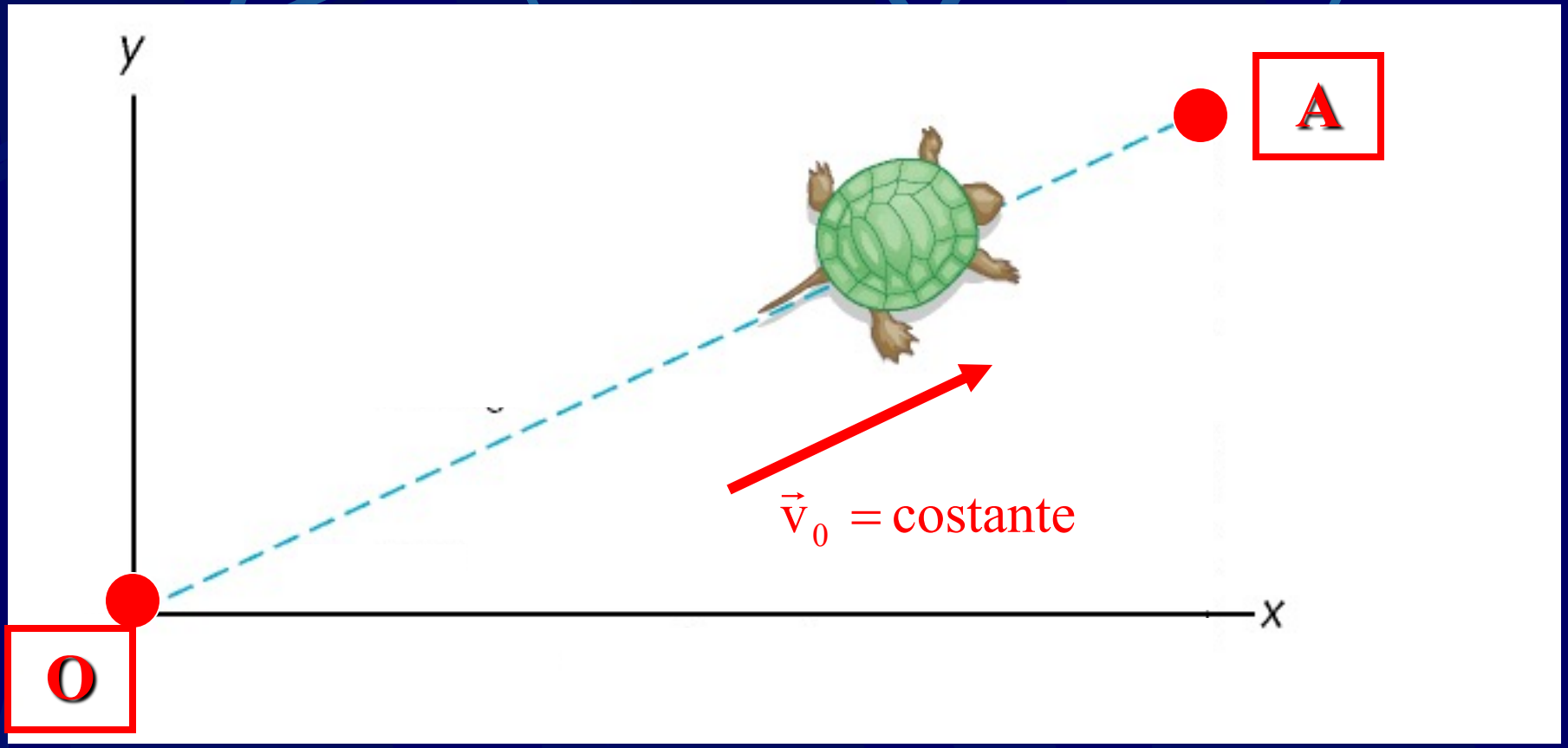
Moto rettilineo uniforme in 2D



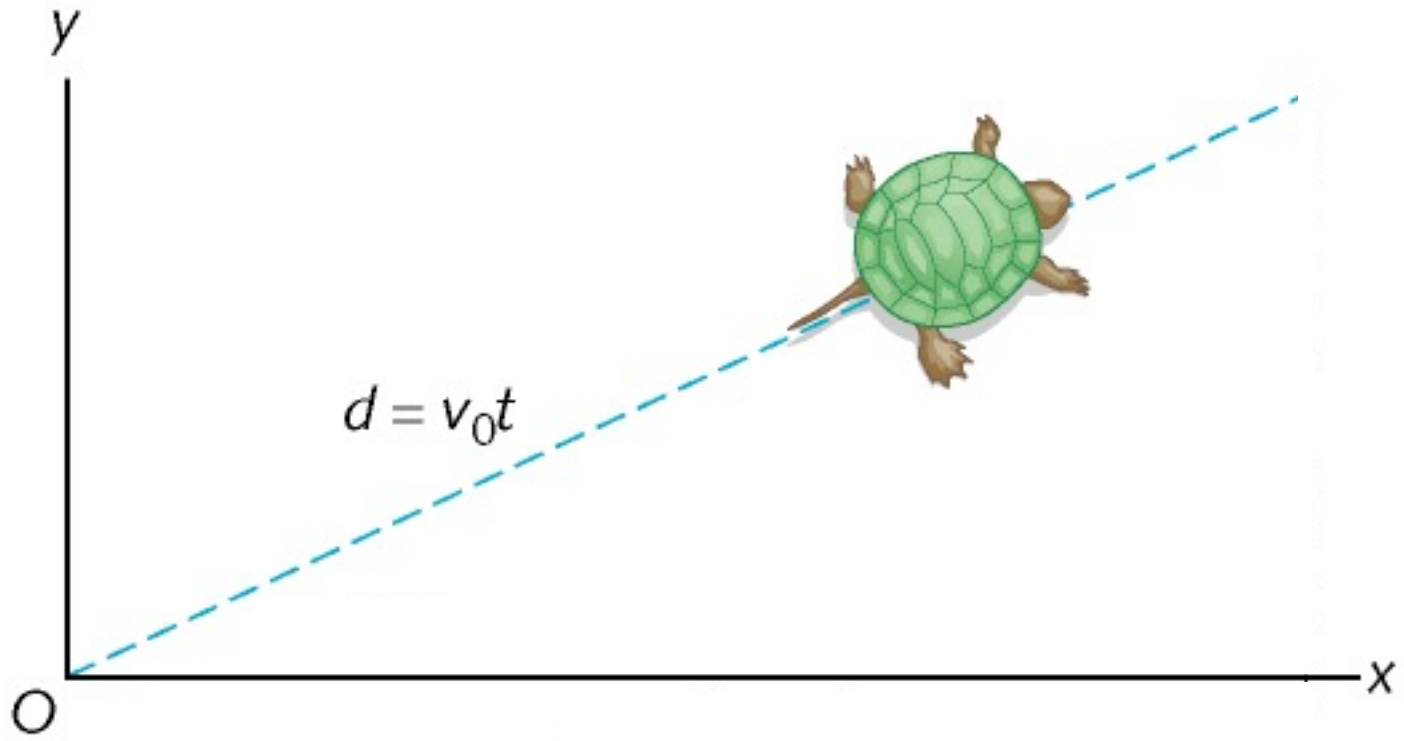
Moto rettilineo uniforme in 2D



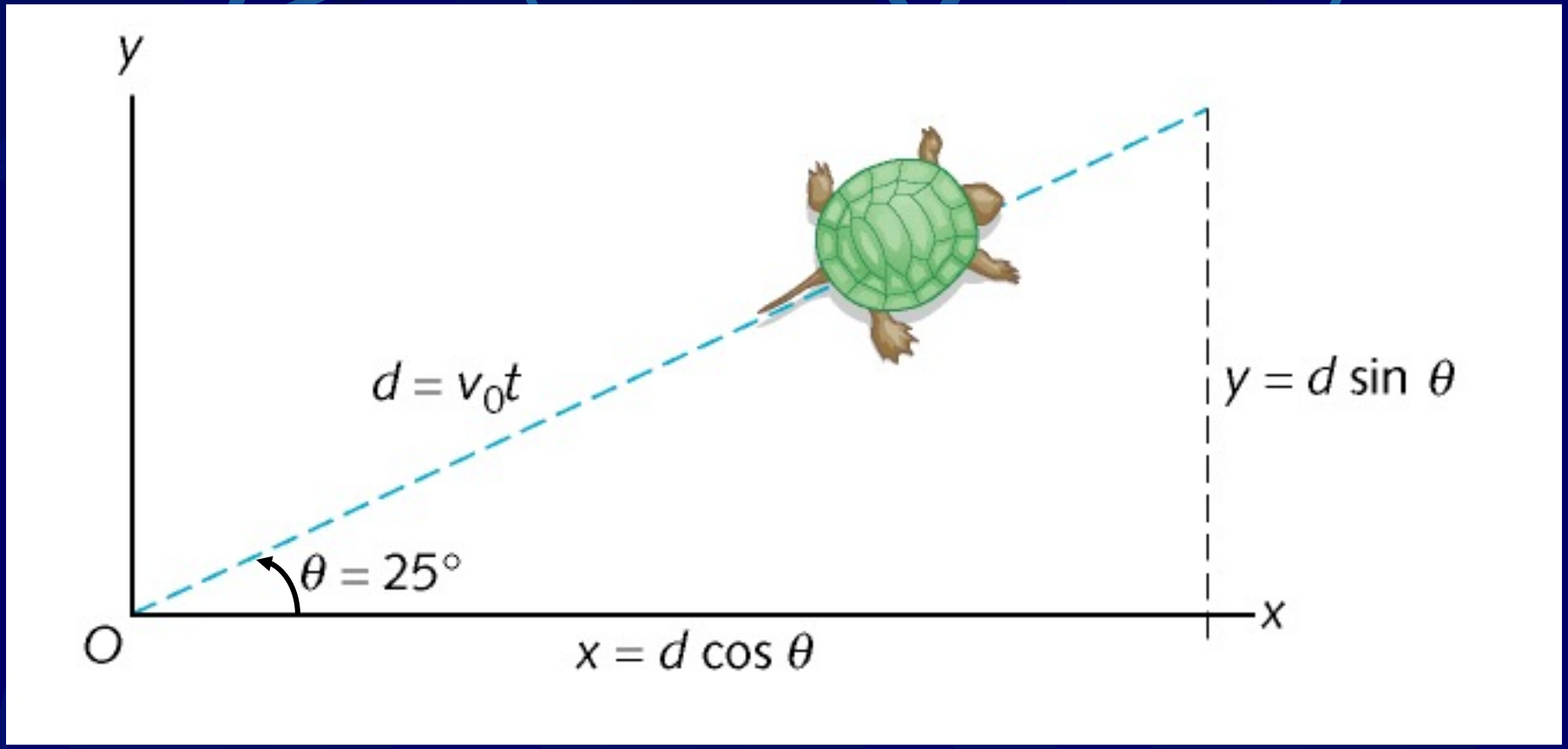
Moto rettilineo uniforme in 2D



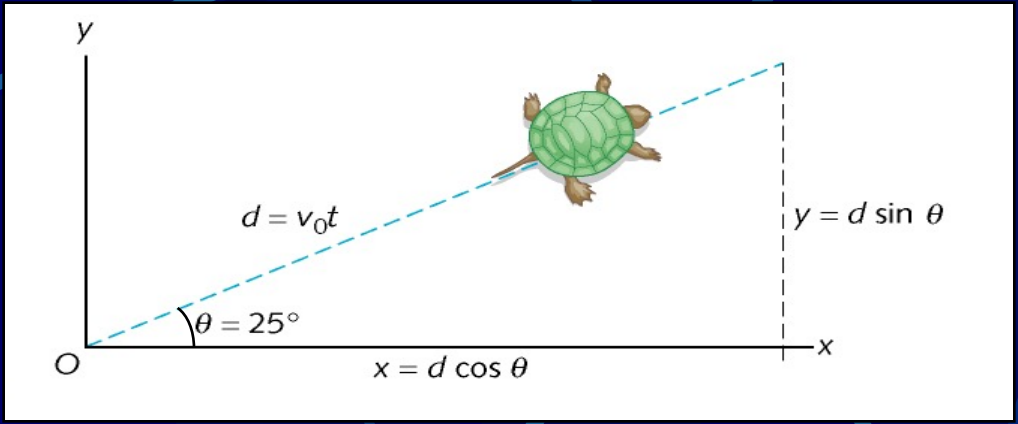
Moto rettilineo uniforme in 2D



Moto rettilineo uniforme in 2D



Moto rettilineo uniforme in 2D



Condizioni al contorno

$$|\vec{v}_0| = v_0 = \text{costante} = 0.26\ \text{ms}^{-1}$$

$$t = 5.0\ \text{s}$$

$$d = v_0 \cdot t = (0.26\ \text{ms}^{-1}) \cdot (5.0\text{s}) = 1.3\ \text{m}$$

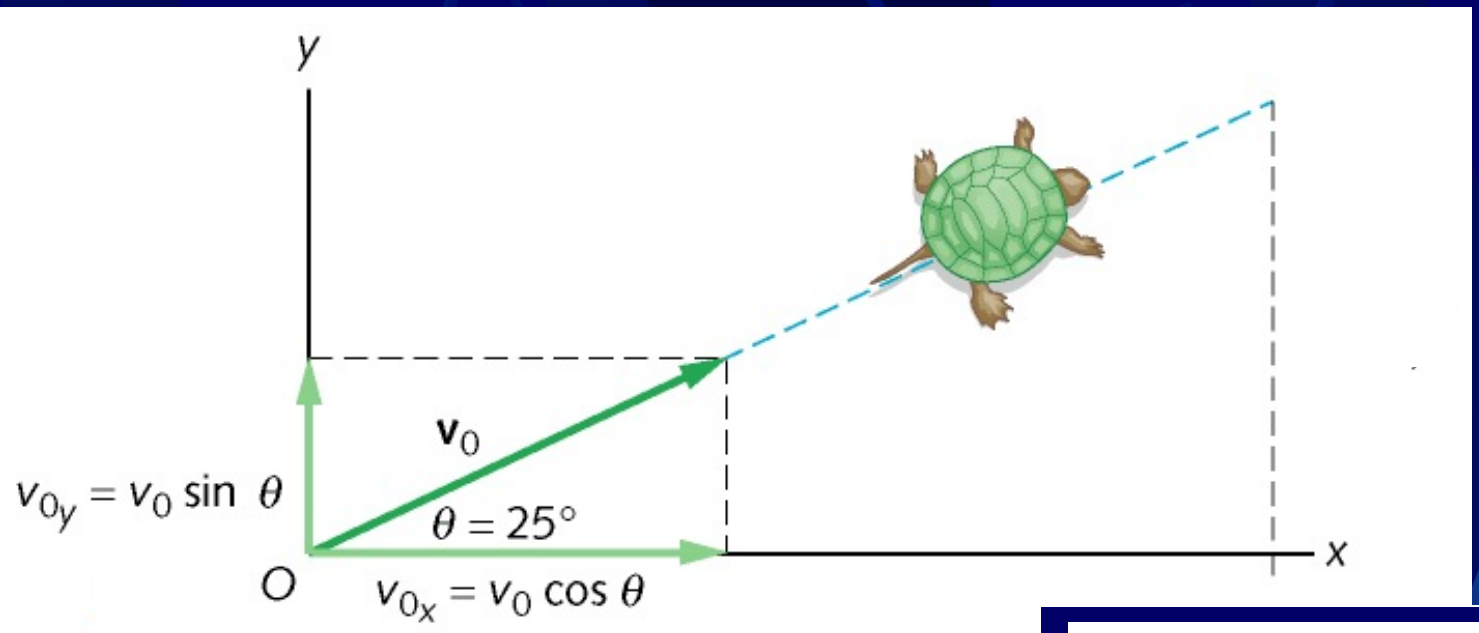
→

$$x = d \cdot \cos\theta = (1.3\ \text{m}) \cdot (\cos 25^0) = 1.2\ \text{m}$$

$$y = d \cdot \text{sen}\,\theta = (1.3\ \text{m}) \cdot (\text{sen}\ 25^0) = 0.55\ \text{m}$$

Metodo '1'

Moto rettilineo uniforme in 2D



Condizioni al contorno

$$|\vec{v}_0| = v_0 = \text{costante} = 0.26\ \text{ms}^{-1}$$

$$t = 5.0\ \text{s}$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta = (0.26\ \text{ms}^{-1}) \cdot (\cos 25^0) = 0.24\ \text{ms}^{-1}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta = (0.26\ \text{ms}^{-1}) \cdot (\text{sen}\ 25^0) = 0.11\ \text{ms}^{-1}$$

$$x = v_{0x} \cdot t = (0.24\ \text{ms}^{-1}) \cdot (5\ \text{s}) = 1.2\ \text{m}$$

$$y = v_{0y} \cdot t = (0.11\ \text{ms}^{-1}) \cdot (5\ \text{s}) = 0.55\ \text{m}$$

Metodo '2'

Moto rettilineo uniforme (velocita' costante)

x_0 la posizione al tempo t_0

x la posizione al tempo t (dopo un intervallo di tempo $t - t_0$)

$\Delta x = x - x_0$
$\Delta t = t - t_0$, e possiamo sempre porre $t_0 = 0$

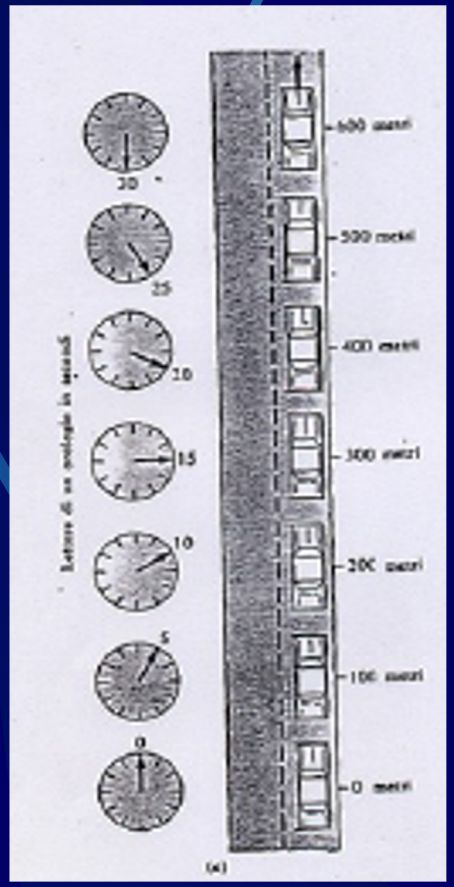
Dalla definizione di velocita' costante si ricava

$$\Delta x = v\Delta t \quad \rightarrow \quad x - x_0 = v\,(t - t_0)$$

posto $t_0 = 0$,

$$x - x_0 = vt$$

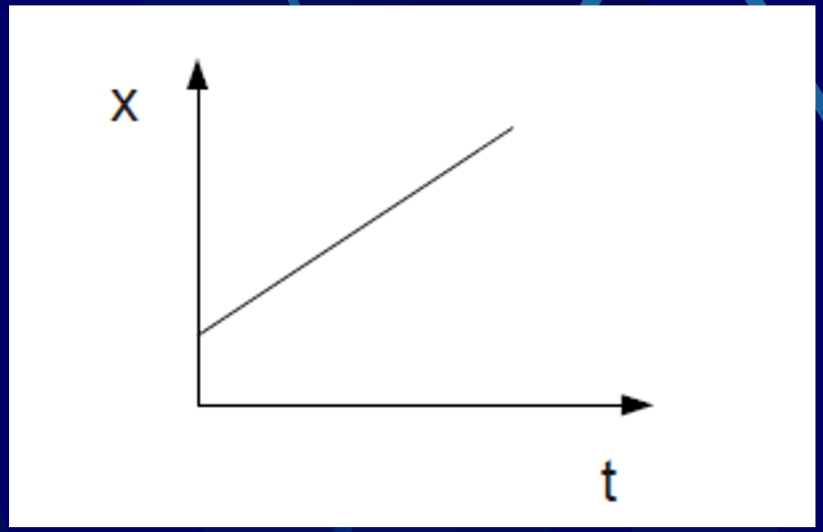
da cui otteniamo



Equazione oraria per la velocita' costante:

$$x(t) = vt + x_0$$

Rappresentazione grafica



x_0

$$\frac{x - x_0}{t - t_0} = v$$

$$x = v\,(t - t_0) + x_0$$

$$t - t0 = \frac{x - x_0}{v}$$

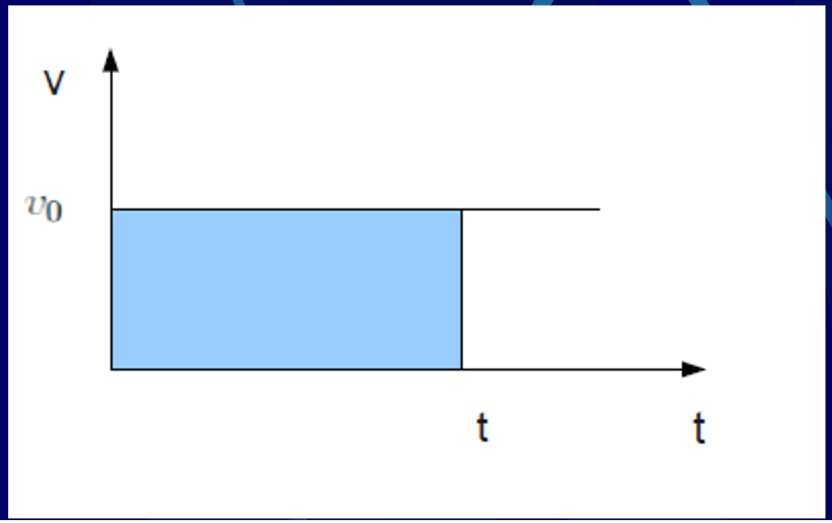
Sono la stessa equazione!

Un treno percorre 50 km a velocità costante in 37 min? Qual è stata la sua velocità?

Un treno va da Torino a Milano (140 km) partendo alle 9:15. Se viaggia alla velocità costante di 95 km/h, a che ora arriva?

Se un treno parte da Torino e viaggia verso Milano alla velocità costante di 113 km all'ora a che distanza da Milano sarà dopo 22 minuti?

Osservazione banale (ma utile)



$$x(t) - x_0 = v_0 t = \text{area sotto il segmento di retta da } 0 \text{ a } t$$

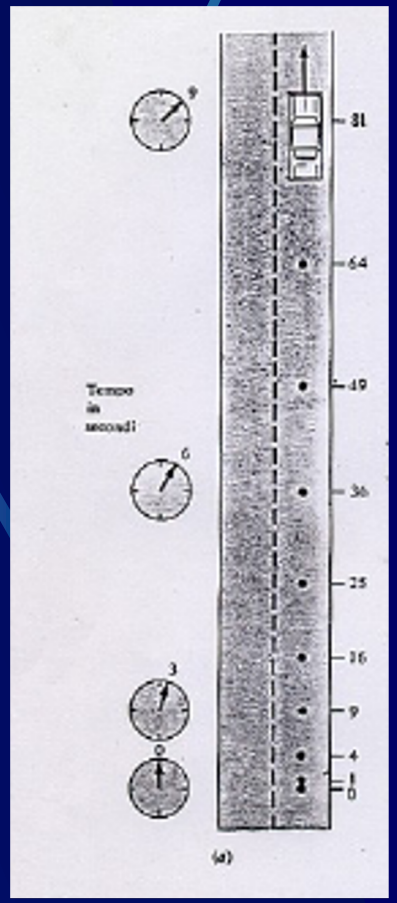
Accelerazione costante: moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\vec{a} = \frac{\vec{\Delta} v}{\Delta t}$$

$\vec{\Delta} v$ vettore di componente $\Delta v = v - v_0$

$\vec{a}$ vettore di componente a :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$



Dimensioni fisiche

$$[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$$

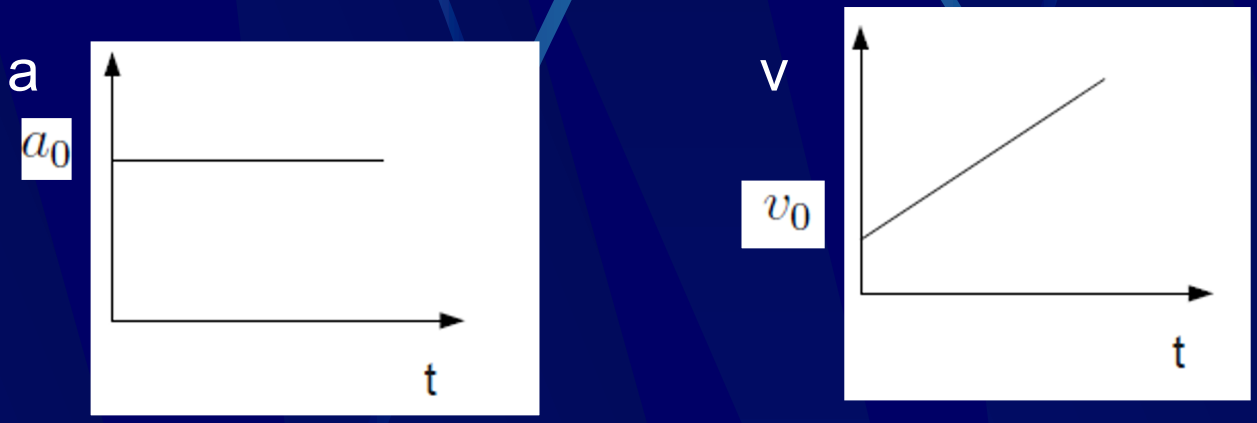
Unita' di misura

m/s^2

Legge oraria della velocità con accelerazione costante

Se $a = a_0$ =costante allora $v = a_0 t + v_0$

(abbiamo posto anche qui $t_0 = 0$)

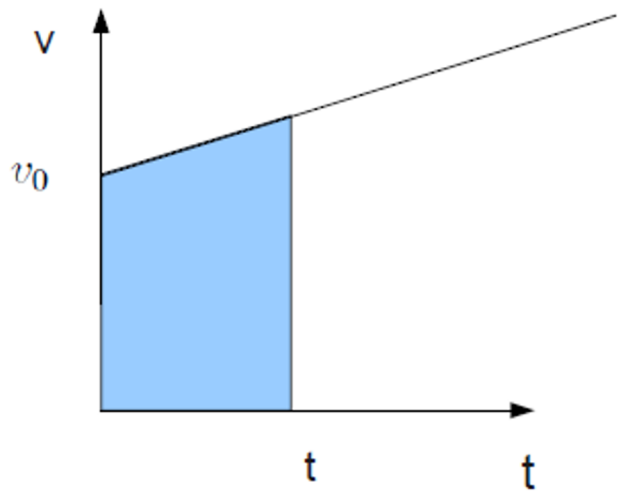


Equazione oraria della posizione x

$$x(t) - x_0 = \text{area sotto il segmento di retta da 0 a } t$$

Area del trapezio....

$$x(t) - x_0 = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \frac{(v_0 + at + v_0)t}{2} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



Quindi

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

In definitiva abbiamo due equazioni

$$v(t) = v_0 + at, \tag{1}$$

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \tag{2}$$

che esprimono la velocita' e la posizione in funzione del tempo t.

E' importante avere anche una relazione che leghi la velocita' finale v allo spazio percoso.

Dall' equazione (1) ricaviamo

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

inserendo questa espressione al posto di t nell' equazione (2) otteniamo

$$x - x_0 = \frac{v_0 \cdot (v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 + v_0^2 - 2 v v_0}{2a}$$

Usando il mcm

$$x - x_0 = \frac{2 v v_0 - 2 v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2 v v_0}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

e (finalmente!)

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

- Posizione, distanza, spostamento
- Velocità, accelerazione
- Il moto rettilineo uniforme in 2D
- **Il generico moto in 2D**
- Il moto del proiettile

moto uniformemente accelerato in 2D:

equazioni generali

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

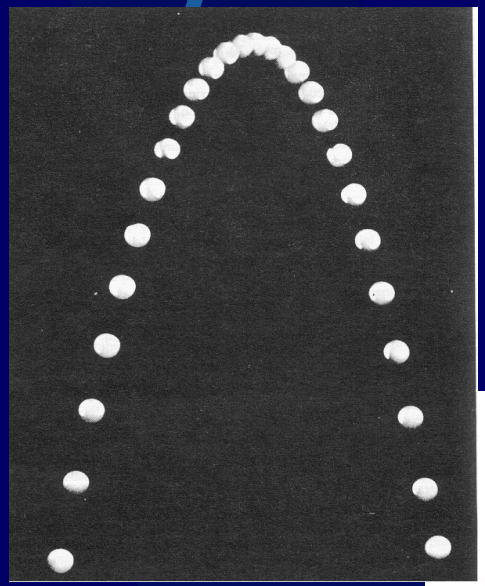
Nota

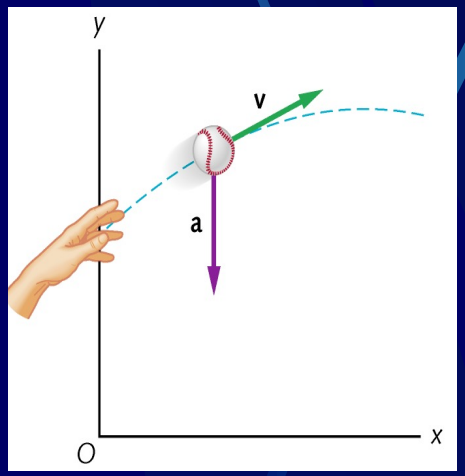
Questo sistema di equazioni permette la soluzione di qualunque problema di cinematica in 2 dimensioni con accelerazione costante

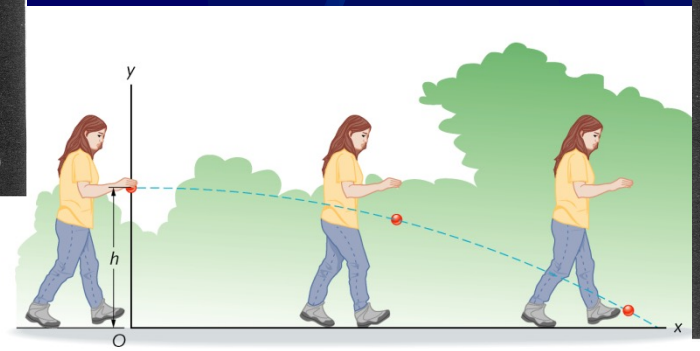
- Posizione, distanza, spostamento
- Velocità, accelerazione
- Il moto rettilineo uniforme in 2D
- Il generico moto in 2D
- **Il moto del proiettile**

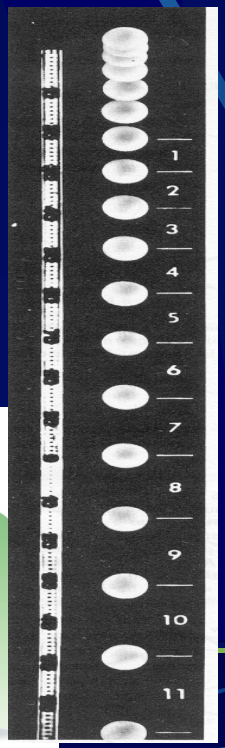
Il moto di un proiettile

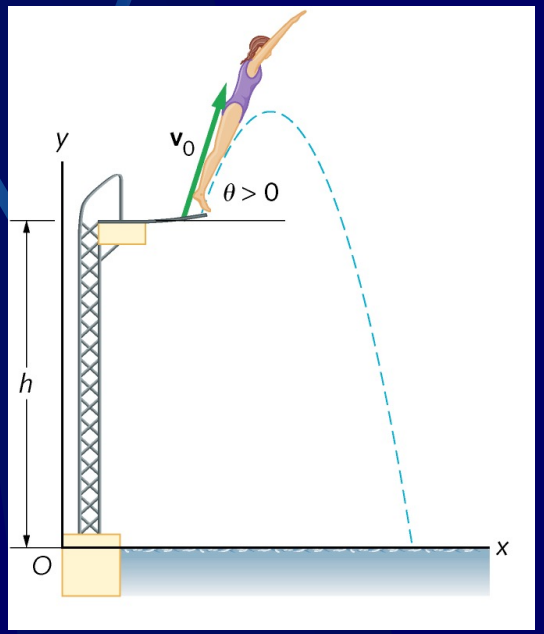
Un proiettile è un qualunque corpo che, avendo una certa velocità iniziale, sia sottoposto **esclusivamente al campo gravitazionale**







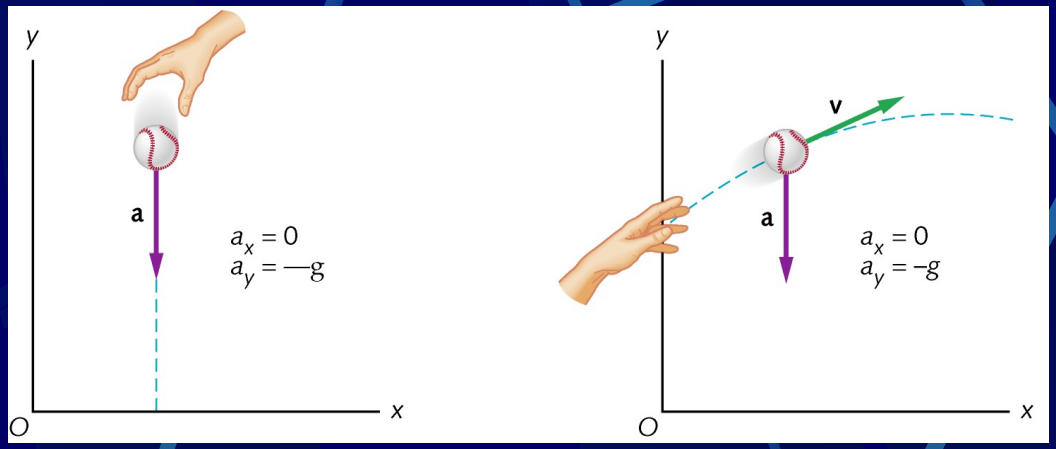




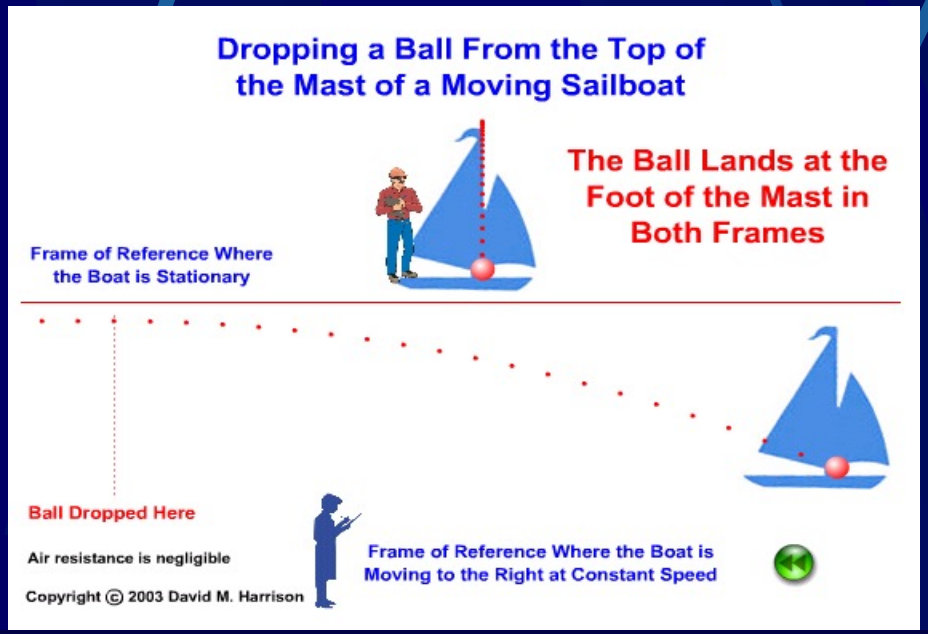
Moto di un proiettile

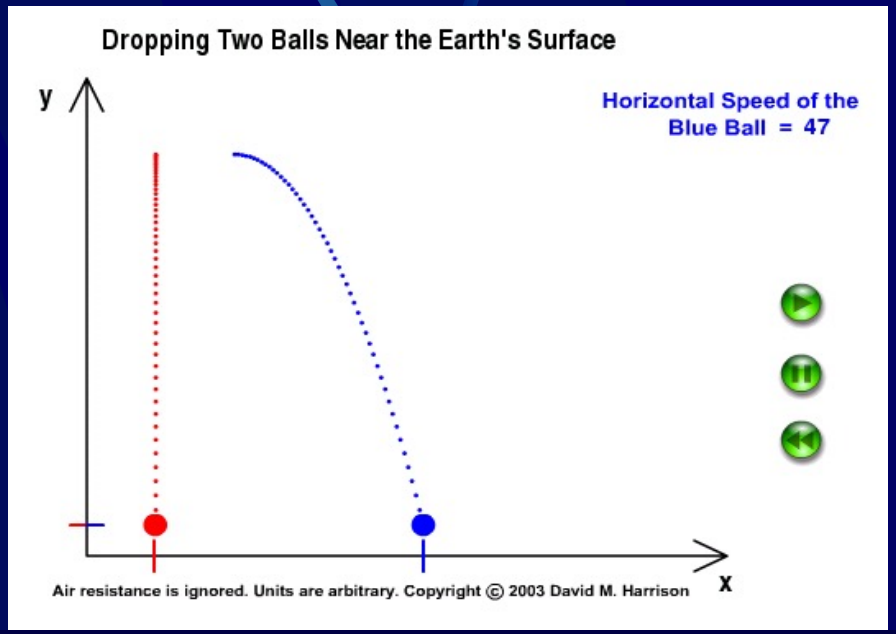
- Ipotesi:
  - Ignoro la resistenza dell'aria (piuma vs. ferro)
  - L'accelerazione di gravità è costante (quota)
  - Ignoro la rotazione della terra (missili intercontinentali)
- Ho solo accelerazione di gravità
  (sulla terra $g=9.81\ ms^{-2}$), diretta verso il basso

Moto di un proiettile



La situazione è uguale nei 2 casi





Relatività galileiana

Caduta di un grave

Equazioni del moto di un proiettile

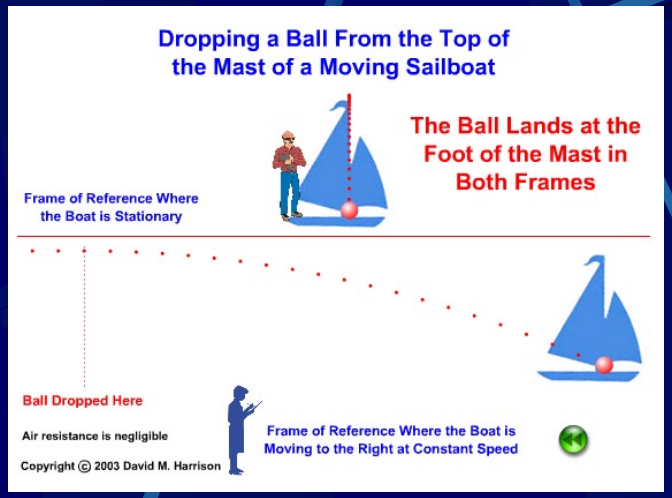
L'ipotesi è che:

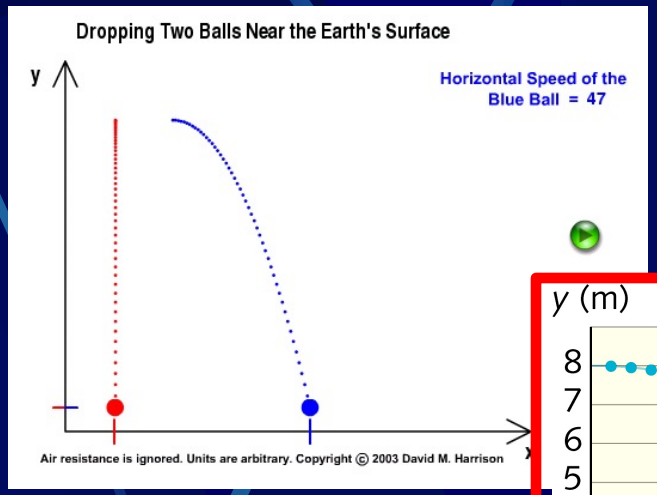
$$a_x = 0$$

$$a_y = -g = -9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$$

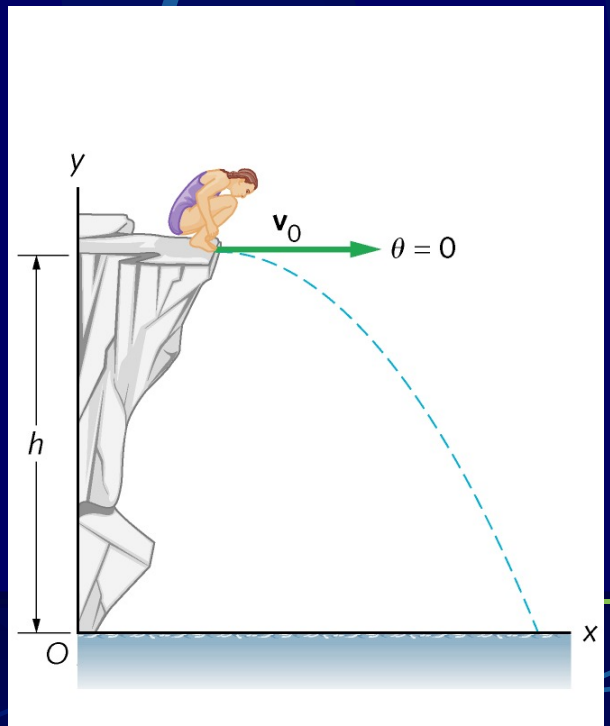
$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Lancio ad angolo 0°





$V_{0,x}$

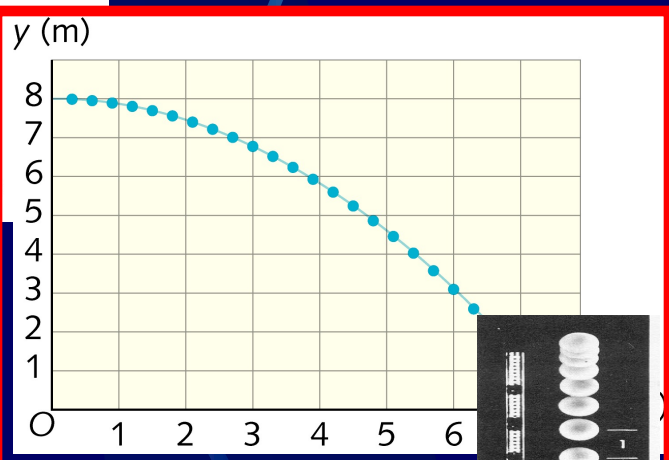


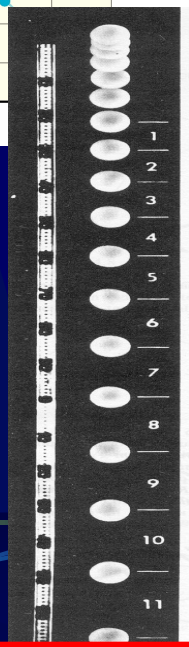
$$x = v_{0x}\, t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_{0x} = v_0$$

$$v_y = -gt$$





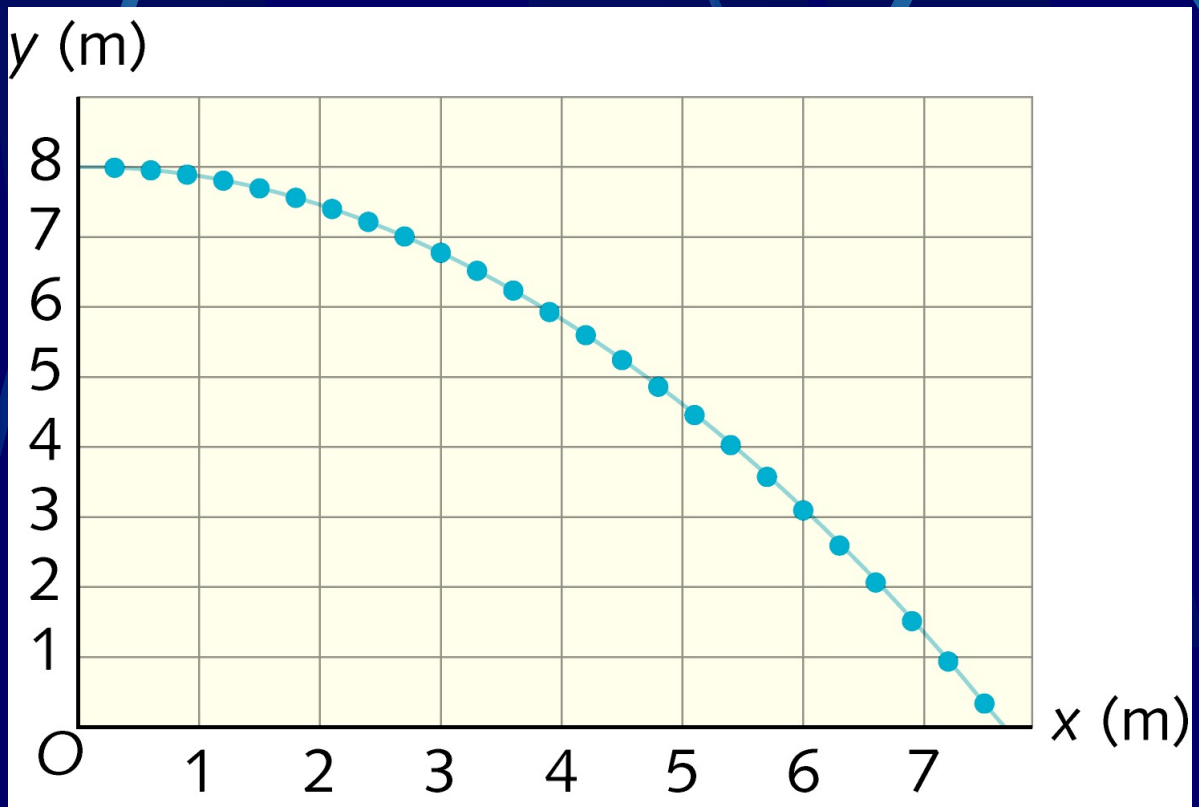
Sono la stessa cosa !

La traiettoria è parabolica

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 \end{cases}$$



$$y = a + bx^2$$

parabola

La gittata

Domanda:

Dove atterra un proiettile lanciato orizzontalmente da altezza h e con velocità v_{0x}?

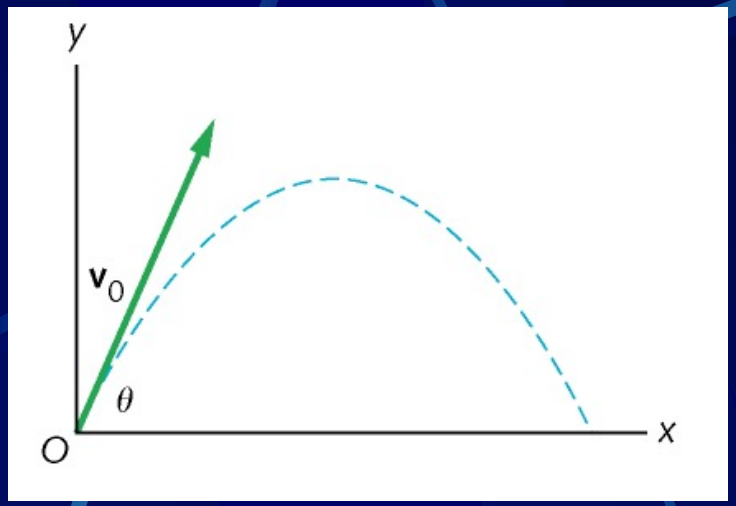
Risposta:

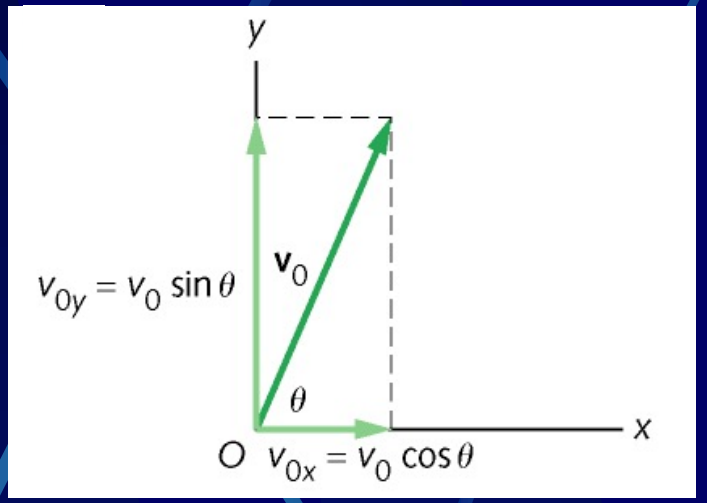
Posso calcolare la distanza, imponendo la condizione che la y del proiettile sia 0

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x} t \\ 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x} t \\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x} \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases}$$

Gittata: (velocità scalare media) x (tempo di caduta)

Lancio con un angolo qualunque e $x_0=y_0=0$



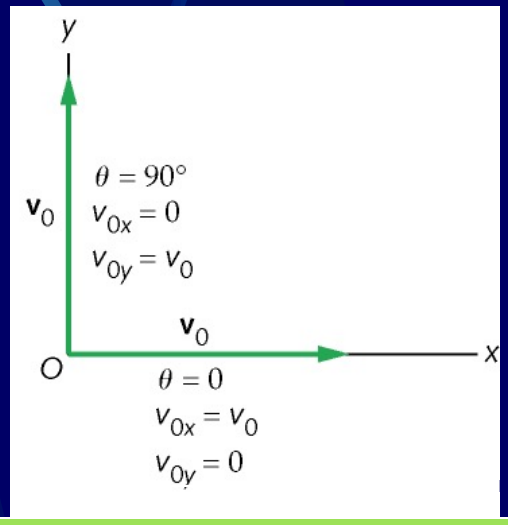


$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$



Un trucco molto utile

Lancio con un angolo qualunque e con posizione iniziale qualunque

Uguale al caso precedente,

ma ri-compaiono x_0 e y_0

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \end{cases}$$

Salto verticale

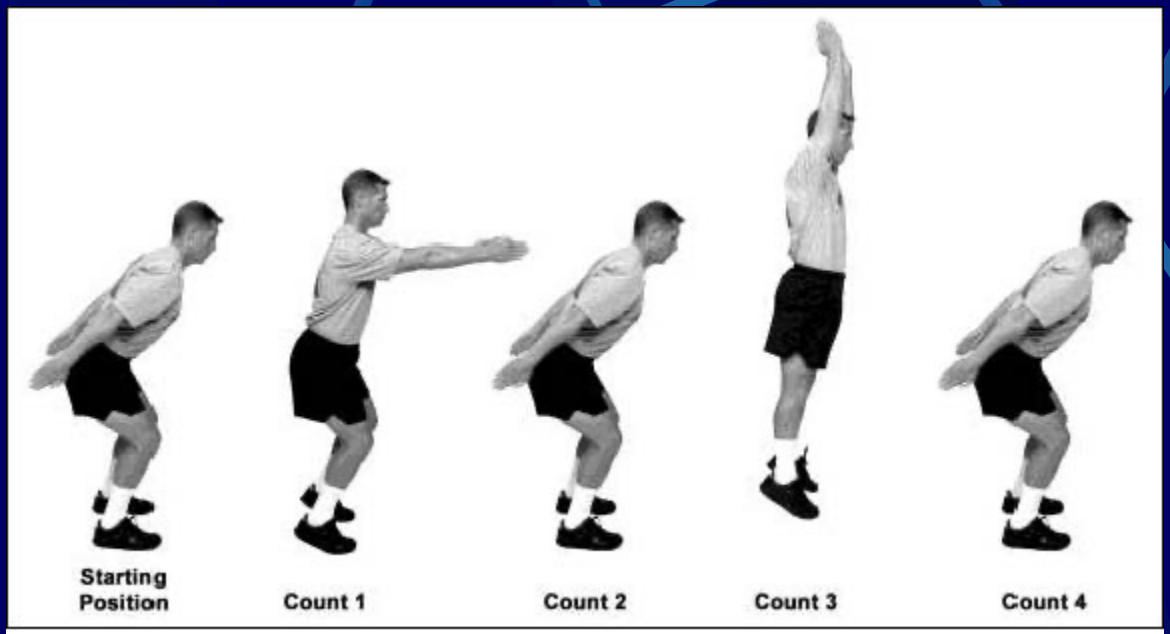


Figure 6-60. High jumper

1a fase: spinta con acc. costante a_m su distanza d con velocità iniziale 0, finale v_d

$$v_d^2 = 2 a_m d$$

2° fase: volo sotto accelerazione di gravità

$$v = v_d - g t \qquad t_{max} = v_d/g$$

$$y = v_d t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad y_{max} = \tfrac{1}{2} v_d^2/g$$

Tutte le quantità si esprimono In funzione di d, y_{max}, g

$$y_{max} = a_m d/g \qquad a_m = g\, y_{max}/d$$

Salto verticale

	Rincorsa d (m)	Altezza raggiunta $h=y_{max}$ (m)
Uomo	0.5	1.0
Canguro	1.0	2.7
Scimmia	0.16	2.2
Rana	0.09	0.3
Cavalletta	0.03	0.3
Pulce	0.0008	0.1

$$a_{\text{decollo}} = \frac{gh}{d}$$

$$a^{\text{uomo}}_{\text{decollo}} = \frac{9.8\,\text{ms}^{-2} \cdot 1.0\,\text{m}}{0.5\,\text{m}} = 19.6\,\text{ms}^{-2}$$

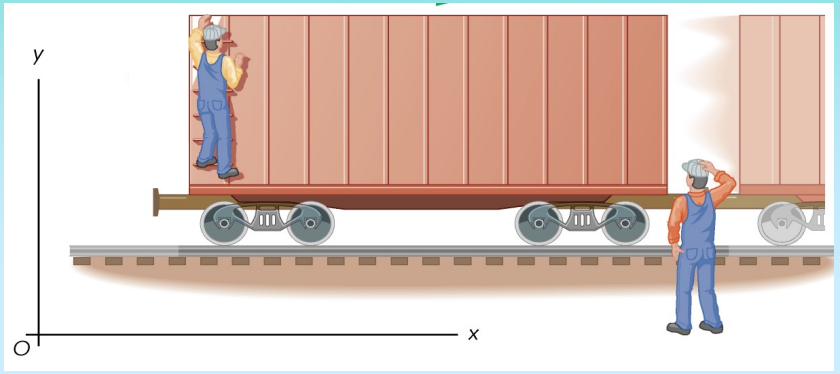
$$a^{\text{rana}}_{\text{decollo}} = \frac{9.8\,\text{ms}^{-2} \cdot 0.3\,\text{m}}{0.09\,\text{m}} = 32.7\,\text{ms}^{-2}$$

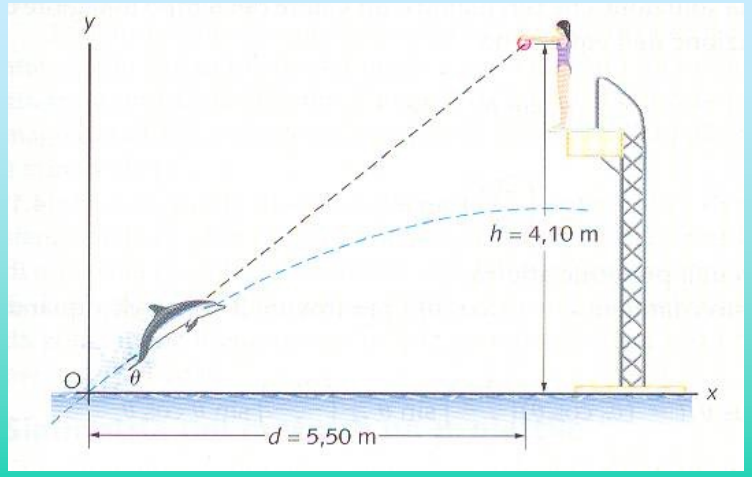
$$a^{\text{scimmia}}_{\text{decollo}} = \frac{9.8\,\text{ms}^{-2} \cdot 2.2\,\text{m}}{0.16\,\text{m}} = 134.8\,\text{ms}^{-2}$$

$$a^{\text{pulce}}_{\text{decollo}} = \frac{9.8\,\text{ms}^{-2} \cdot 0.1\,\text{m}}{0.0008\,\text{m}} = 1225.0\,\text{ms}^{-2}$$

Riassumendo

Con la cinematica 2D risolvo il problema del
moto di un proiettile





Prossima lezione:
Le leggi di Newton

Esercizio da svolgere a casa:

Un lanciatore del peso lancia il peso con una velocità iniziale di modulo 3.5 m/s da un'altezza di 1.5 m dal suolo. Calcola qual è la gittata del lancio se l'angolo è:

1. 20^o
2. 30^o
3. 40^o

Soluzione

Un lanciatore del peso lancia il peso con una velocità iniziale di modulo 3.5 m/s da un'altezza di 1.5 m dal suolo. Calcola qual è la gittata del lancio se l'angolo è:

1. 20^o
2. 30^o
3. 40^o

Risolvo per $\theta = 20^o$

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta)\, t \\ 0 = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)\, t - 1/2\,(g\, t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (3.29)\, t \\ (1/2\, g)\, t^2 - (1.2)\, t - 1.5 = 0 \end{cases}$$

$$t = 0.69\ \text{s}$$

$$x = (3.29)\, t = 2.3\ \text{m}$$

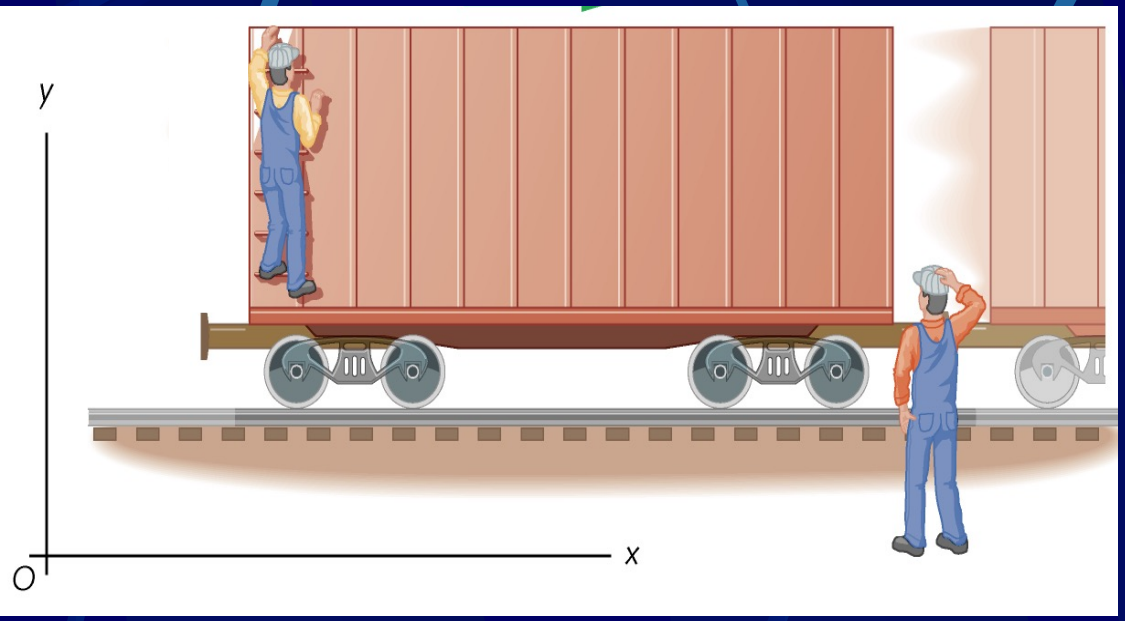
Per $\theta = 30^o$ $\quad t = 0.76\ \text{s}$ $\quad x = 2.3\ \text{m}$

Per $\theta = 40^o$ $\quad t = 0.83\ \text{s}$ $\quad x = 2.2\ \text{m}$

Problema 1

Una persona sta scendendo dalla scaletta di un vagone merci. Il vagone si muove di moto rettilineo uniforme con v=0.70 m/s, e la persona scende con moto rettilineo uniforme con v=0.20 m/s.

Quali sono modulo e verso della velocità della persona rispetto al suolo?

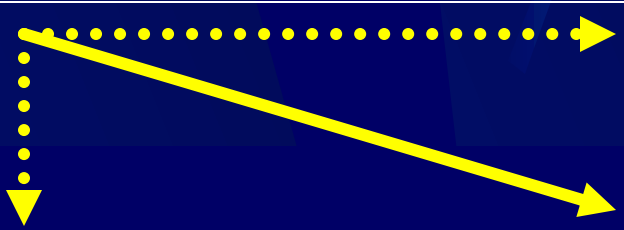


V_{ts}

velocità del treno rispetto al suolo

V_{pt}

velocità della persona rispetto al treno



V_{ps}

velocità della persona rispetto al suolo

Soluzione problema 1

$$\vec{v}_{ts} = (0.70\ \text{m/s})\,\vec{i} + (0\ \text{m/s})\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{pt} = (0\ \text{m/s})\,\vec{i} + (-0.20\ \text{m/s})\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{ps} = [(0.70+0)\ \text{m/s}]\,\vec{i} + [(0-0.20)\ \text{m/s}]\,\vec{j}$$

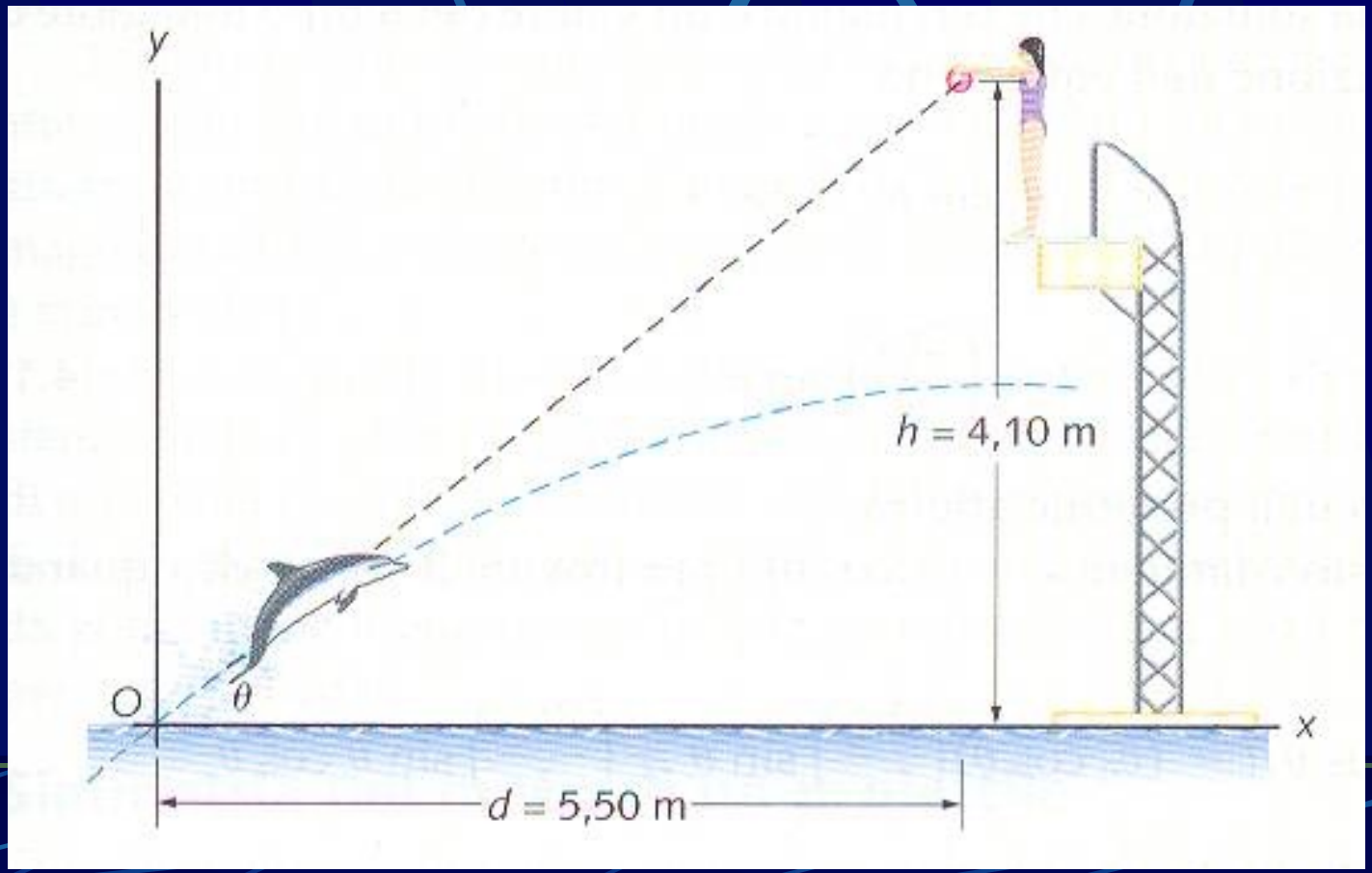
$$\vec{v}_{x,\,ps} = 0.70\ \text{m/s} \qquad \vec{v}_{y,\,ps} = -0.20\ \text{m/s}$$

$$v_{ps} = \left|\vec{v}_{ps}\right| = \sqrt{v_{x,\,ps}^2 + v_{y,\,ps}^2} = \sqrt{(0.70)^2 + (-0.20)^2} = 0.73\ \text{ms}^{-1}$$

$$\theta = \text{atan}\,\frac{v_{y,\,ps}}{v_{x,\,ps}} = \text{atan}\,\frac{-0.20\ \text{ms}^{-1}}{0.70\ \text{ms}^{-1}} = \text{atan}\,(-0.2857) = -16^{\circ}$$

Problema 2

Un delfino salta dall'acqua con v_0=12 ms^{-1}, verso l'allenatrice che è a d=5.50 m e h=4.10 m. Nell'istante in cui il delfino esce dall'acqua, l'allenatrice lascia cadere una palla. Dimostrare che il delfino riesce a prendere la palla.



Soluzione problema 2

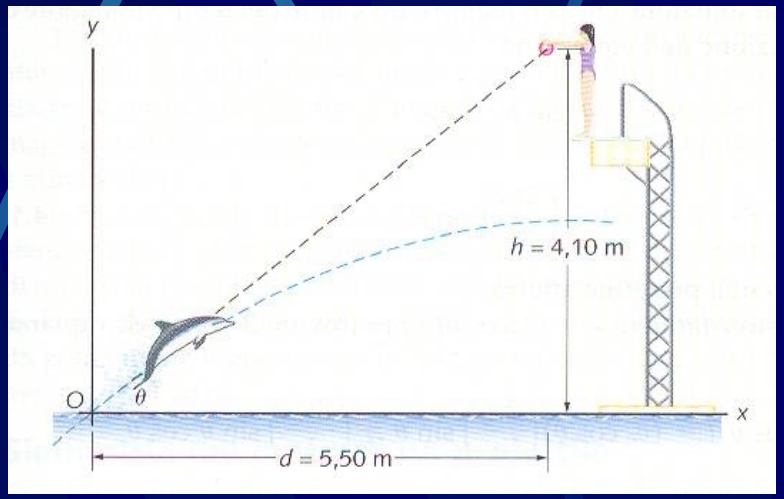
$$x_d = v_{0d}\cos\theta \cdot t$$

$$y_d = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_{xd} = v_{0d}\cos\theta$$

$$v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt$$

$$y_p = h - \frac{1}{2} g t^2$$



Comincio a calcolare θ

$$\theta = \arctan\frac{h}{d} = \arctan\frac{4.10\ \mathrm{m}}{5.50\ \mathrm{m}} = 36.7^\circ$$

Soluzione problema 2

Il delfino raggiunge la distanza della palla quando $x_d = d = 5.50\,m$

$$\begin{cases} x_d = v_{0d}\cos\theta \cdot t \\ y_d = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_{xd} = v_{0d}\cos\theta \\ v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt \\ y_p = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x_d}{v_{0d}\cos\theta} = \dfrac{5.50\,m}{9.62\,ms^{-1}} = 0.572\,s \\ y_d = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_{xd} = v_{0d}\cos\theta \\ v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt \\ y_p = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

... e questo evento succede al tempo t = 0.572 s

Soluzione problema 2

Al tempo t = 0.572 s il delfino si troverà ad un'altezza...

$$\begin{cases} x_d = v_{0d}\cos\theta \cdot t \\ y_d = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_{xd} = v_{0d}\cos\theta \\ v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt \\ y_p = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_d = v_{0d}\cos\theta \cdot t \\ v_{xd} = v_{0d}\cos\theta \\ v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt \\ y_p = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y_d = (12.0\ \mathrm{m\,s^{-1}})\,\mathrm{sen}(36.7^\circ)\cdot(0.572\ \mathrm{s}) - \frac{1}{2}(9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}})\cdot(0.572\ \mathrm{s})^2 = 4.10\ \mathrm{m} - 1.60\ \mathrm{m} = 2.50\ \mathrm{m}$$

Al tempo t=0.572 s il delfino si troverà ad un'altezza di 2.50 m

Soluzione problema 2

Al tempo t = 0.572 s la palla si troverà ad un'altezza...

$$\begin{cases} x_d = v_{0d}\cos\theta \cdot t \\ y_d = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_{xd} = v_{0d}\cos\theta \\ v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt \\ y_p = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_d = v_{0d}\cos\theta \cdot t \\ y_d = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_{xd} = v_{0d}\cos\theta \\ v_{yd} = v_{0d}\,\mathrm{sen}\theta - gt \end{cases}$$

$$y_p = 4.10\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}(9.81\,\mathrm{s}^{-2}) \cdot (0.572\,\mathrm{s})^2 = 4.10\,\mathrm{m} - 1.60\,\mathrm{m} = 2.5\,\mathrm{m}$$

Al tempo t=0.572 s la palla si troverà ad un'altezza di 2.50 m

Esercizi

Un' auto frena passando da una velocita' di 85 km/h fino alla velocita' di 45 km/h in una distanza di 105 m. Calcolare l'accelerazione della macchina (supposta costante) ed in quanto tempo avviene la frenata.
Se la macchina continua a frenare con la stessa accelerazione in quanto tempo la macchina si ferma e che distanza percorre ancora prima di fermarsi?

Una palla viene lanciata da terra verso l'alto con velocita' inizia $v_0 = 12$ m/s.

1. Quanto tempo impiega a raggiungere il punto piu' alto della traiettoria ?
2. Quanto vale la distanza da terra del punto piu' alto ?
3. Dopo quanto tempo dal lancio ricade a terra ?
4. Con che velocita' la palla tocca terra ?