Lezione 11
I fluidi (2)

Ezio Maina

Corso di Laurea in Farmacia

Anno accademico 2022 -2023

Corso di Fisica

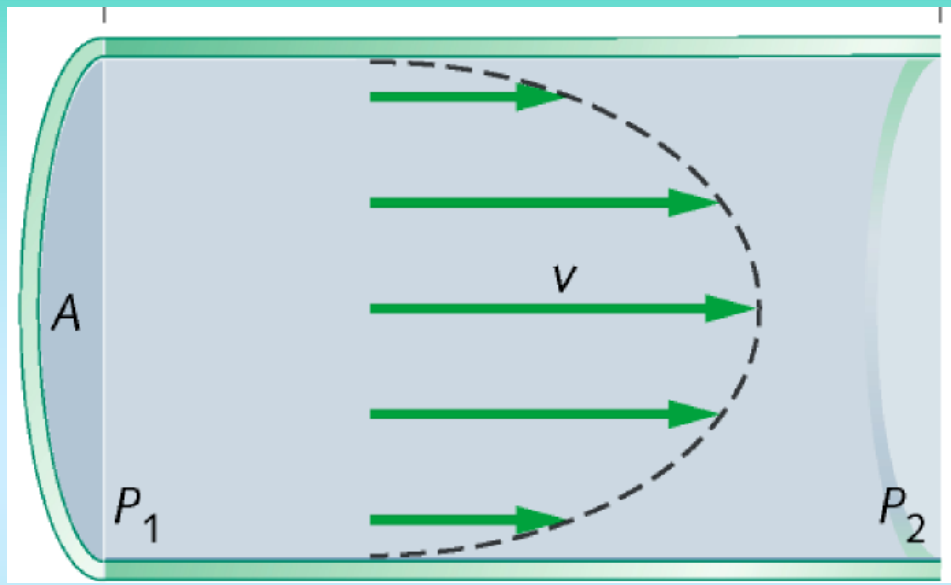
La lezione di oggi

I fluidi reali

La viscosità

Flussi laminare e turbolento

La formula di Hagen-Poiseuille

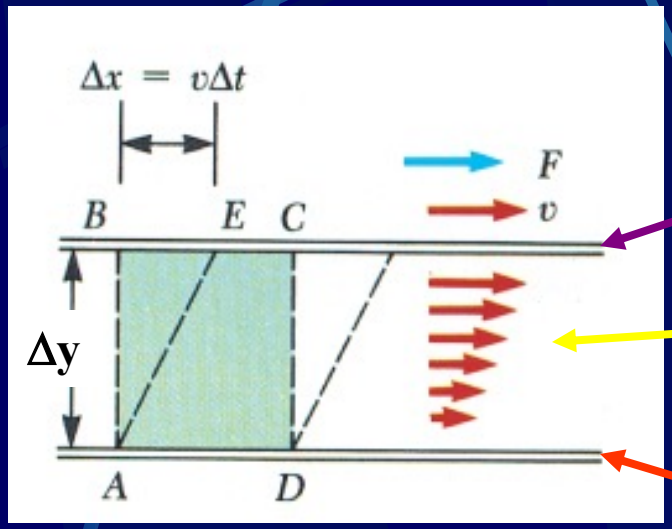


La resistenza idrodinamica

- **Viscosità**
- Flusso laminare
- Resistenza idrodinamica
- Flusso turbolento

Definizione operativa di viscosità

Domanda: come faccio a tener conto dell'attrito tra le molecole di un fluido?



Esperimento

Lastra in moto con velocità **v**

Fluido viscoso
(non aria o acqua, magari miele)

Lastra fissata a terra

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

La viscosità

- η è la viscosità
- Si misura in Pa·s (pascal x secondo)
- poise (P) = 0.1 Pa·s (è c.g.s .....)

DIMENSIONALMENTE

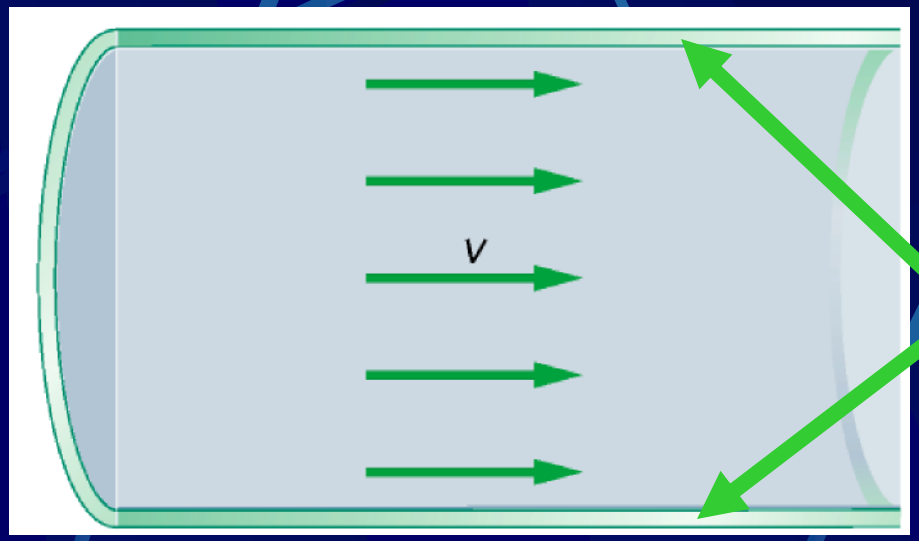
$$\frac{F/A}{\Delta v/\Delta y} = \frac{[MLT^{-2}]/[L^2]}{[LT^{-1}]/[L]} = [ML^{-1}T^{-1}]$$

Temperatura °C	Olio di ricino (!)	Acqua	Aria	Sangue	Plasma
20	0.986	1.005×10^{-3}	1.81×10^{-5}	3.015×10^{-3}	1.810×10^{-3}
37	-	0.695×10^{-3}	1.87×10^{-5}	2.084×10^{-3}	1.257×10^{-3}

Nota: $\eta_{sangue}/\eta_{acqua}$ e $\eta_{plasma}/\eta_{acqua}$ rimangono ~ costanti tra 0° e 37°

- Viscosità
- **Flusso laminare**
- Resistenza idrodinamica
- Flusso turbolento

Un fluido ideale scorre in un condotto

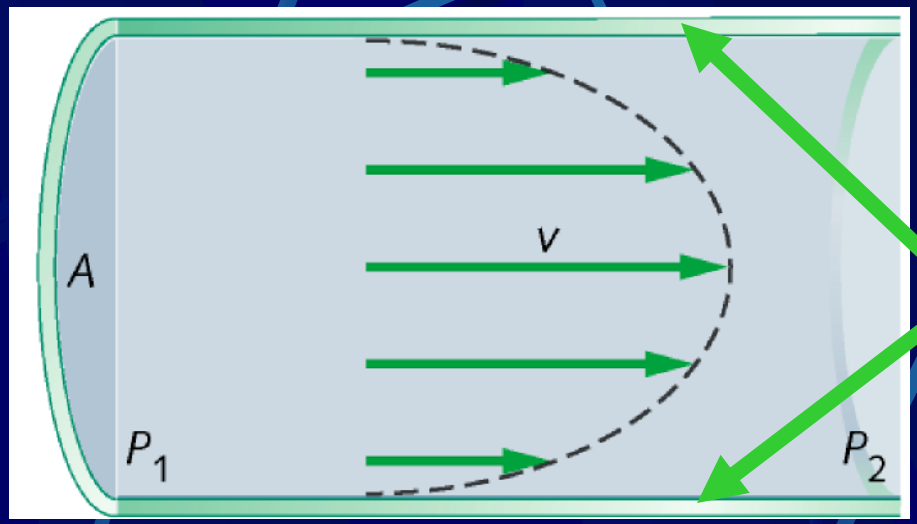


Pareti del condotto

In ogni punto, i vettori velocità hanno modulo uguale

Tutte le molecole viaggiano alla stessa velocità

Un fluido reale scorre in un condotto



Pareti del condotto

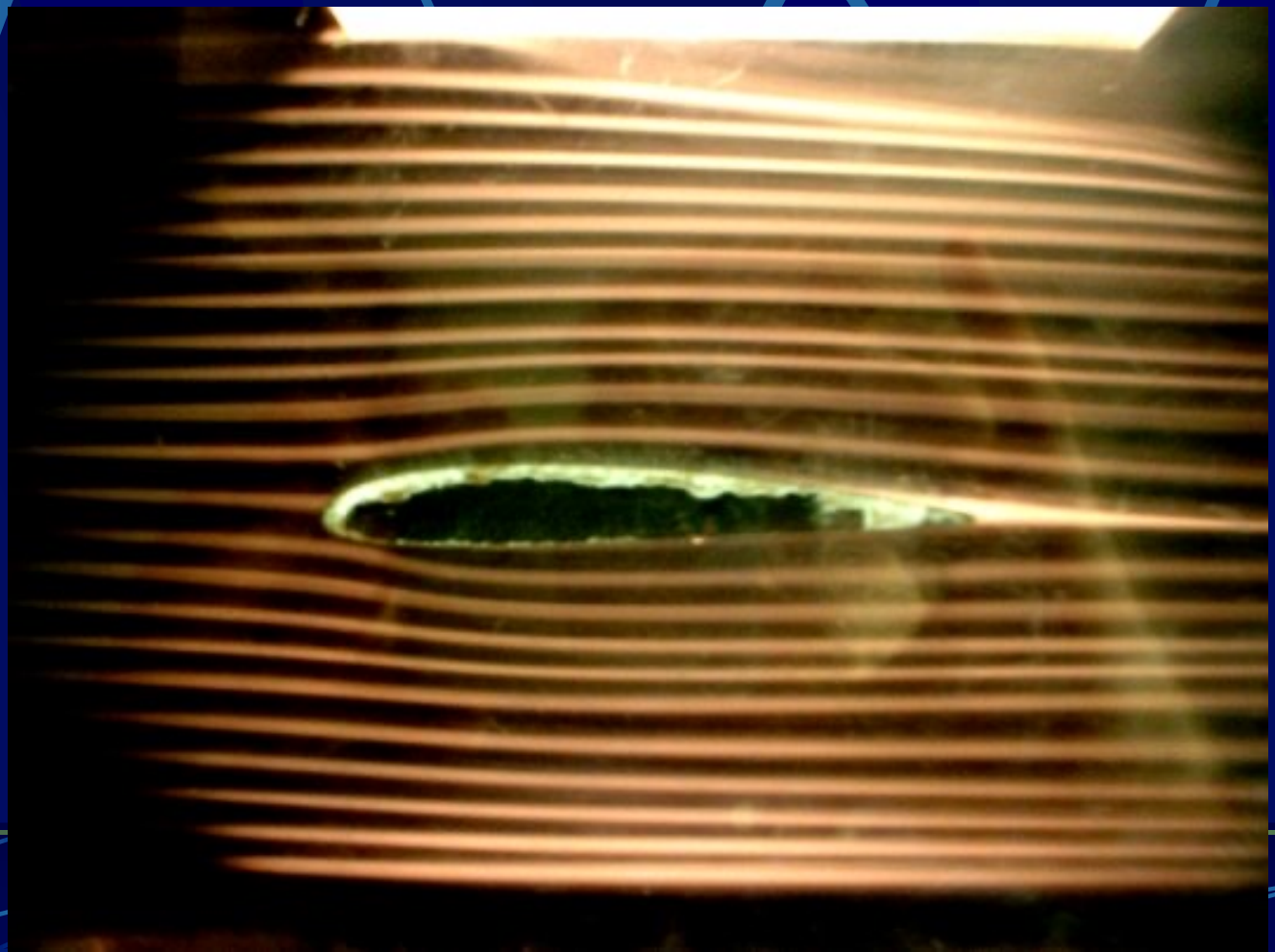
In ogni punto, i vettori velocità hanno modulo diverso

Le molecole viaggiano a velocità diverse:

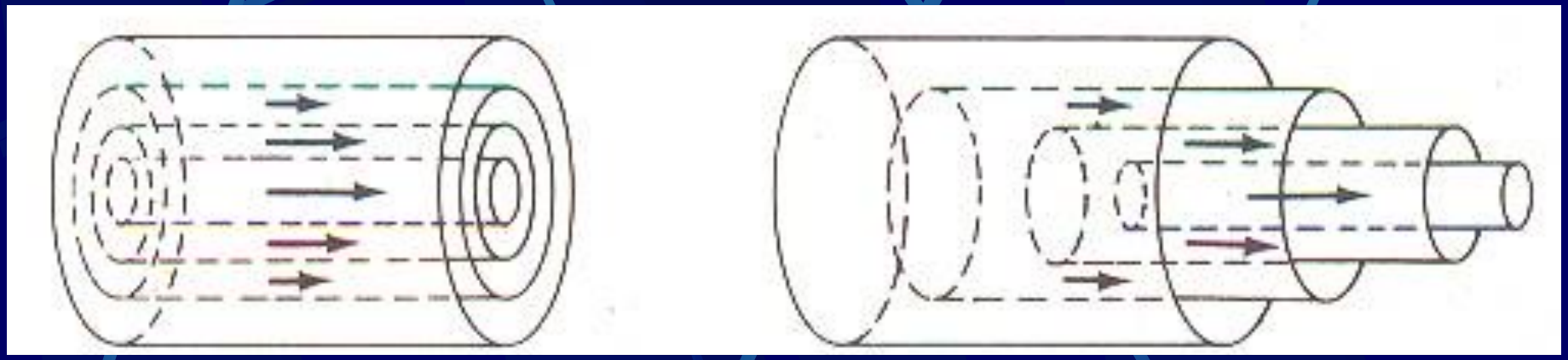
- Vicino alle pareti sono ferme
- Vicino al centro del tubo sono veloci

Il flusso laminare

- Il fluido è reale
- Non ho turbolenze (vedi dopo)



Il flusso laminare

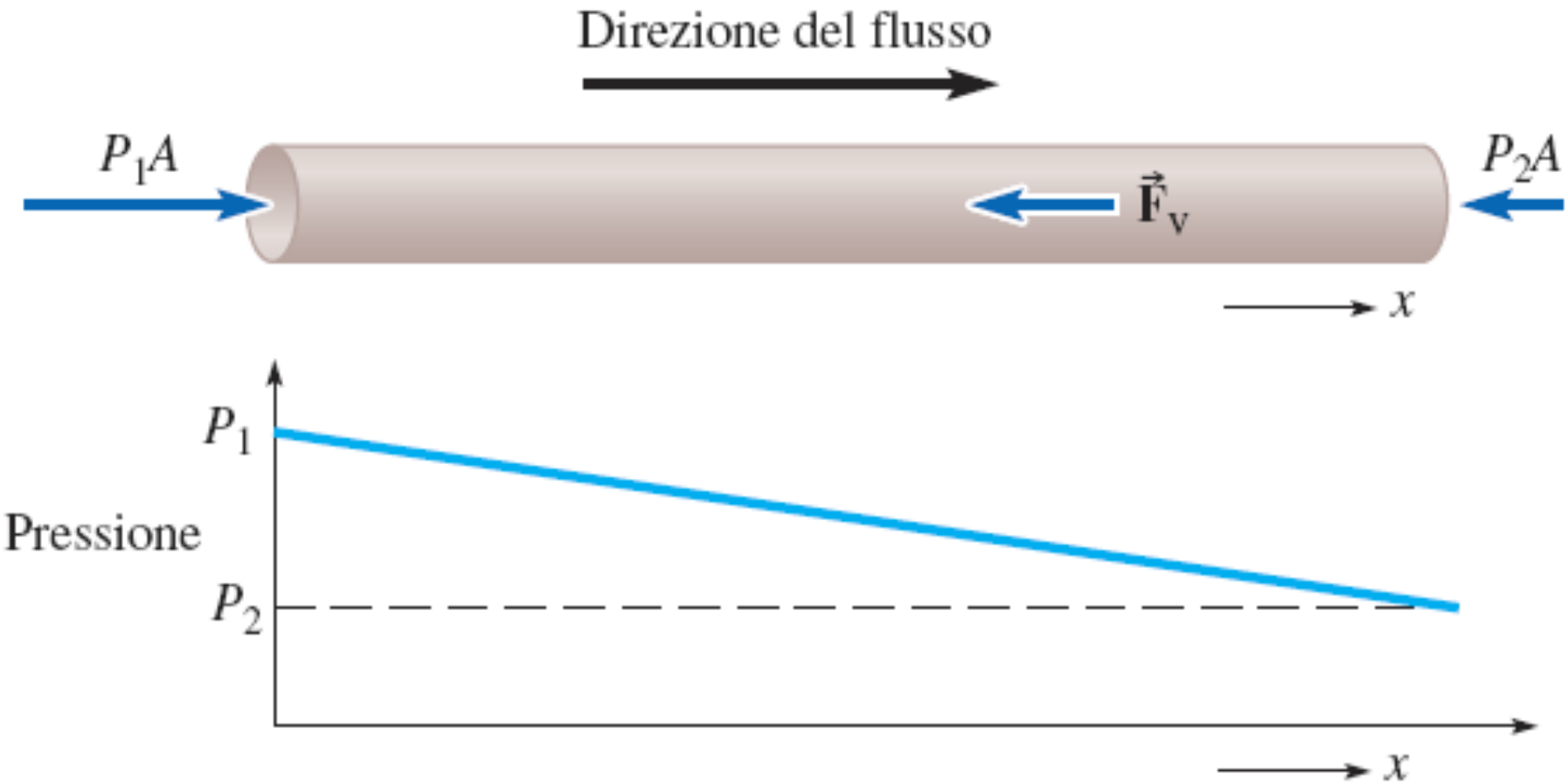


Se la velocità al centro è v_{max}, si trova che la $v_{media} = 0.5\ v_{max}$

PORTATA $Q = Av_{media} = 0.5Av_{max}$

dove A è l'area del condotto

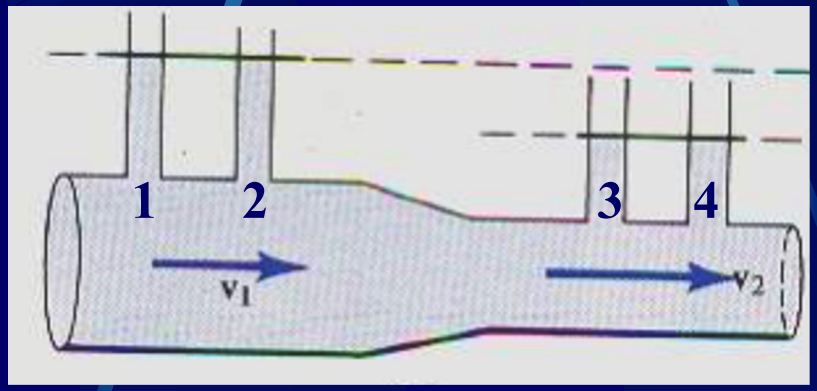
Caduta di pressione dovuta alla viscosità



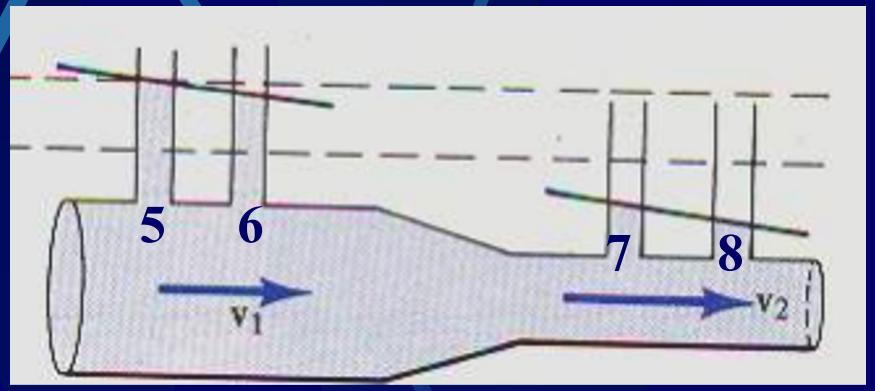
Il cambiamento di velocità è determinato dall'equazione di continuità

Caduta di pressione dovuta alla viscosità

Fluido non viscoso



Fluido viscoso



- Tubo orizzontale
- Fluido viscoso
- Lavoro per vincere le forze di viscosità
- Caduta di pressione

Caduta di pressione dovuta alla viscosità in un tubo cilindrico orizzontale

$$Q = \frac{\Delta P \, \pi \, R^4}{8 \, \eta \, l}$$

Q = Portata

Legge di Poiseuille

Conseguenza: Blocco Arterioso (vedi Esercizio 3)

- Viscosità
- Flusso laminare
- **Resistenza idrodinamica**
- Flusso turbolento

La resistenza idrodinamica

- Fluido viscoso
- Condotto con pareti rigide
- Se voglio una portata Q devo applicare una ΔP
- Definisco **Resistenza di un condotto**:

$$R = \frac{\Delta P}{Q}$$

Unità di misura $Pa \cdot s \cdot m^{-3}$

Ma se utilizzo Poiseuille:

$$Q = \frac{\Delta P \, \pi \, r^4}{8 \, \eta \, l}$$

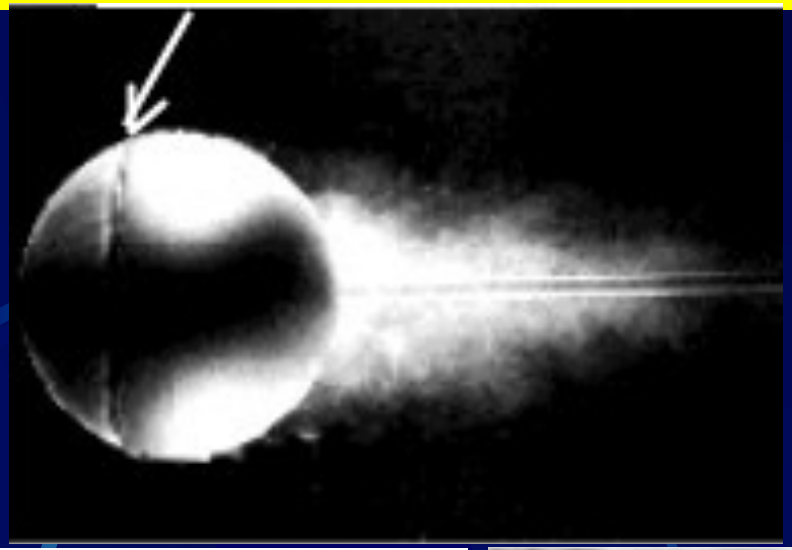
$$R = \frac{8 \, \eta \, l}{\pi r^4}$$

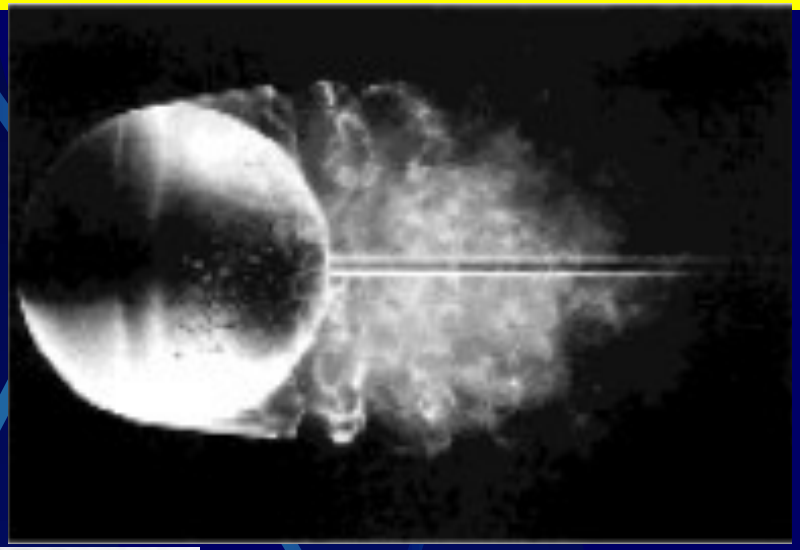
Analoga alla resistenza elettrica (legge di Ohm):

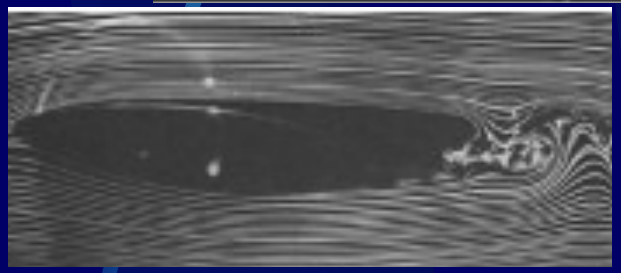
- ΔP analoga a ΔV (differenza di potenziale)
- Q analoga alla i (corrente)

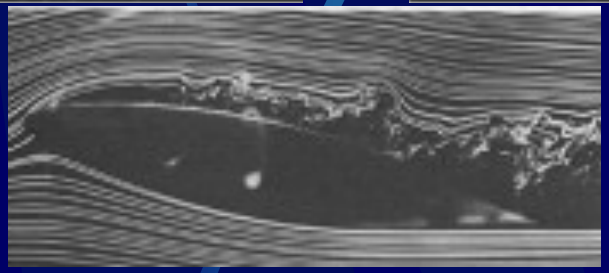
- Viscosità
- Flusso laminare
- Resistenza idrodinamica
- **Flusso turbolento**

Il flusso turbolento









Dissipazione di energia meccanica

Il numero di Reynolds

- I vortici dissipano energia meccanica
- La legge di Poiseuille non è più valida
- È la patria della fisica non-lineare
- Uso regole empiriche

- Definisco il Numero di Reynolds (N_R). È adimensionale.
- Nel caso di un **tubo di flusso di raggio R**, N_R vale:

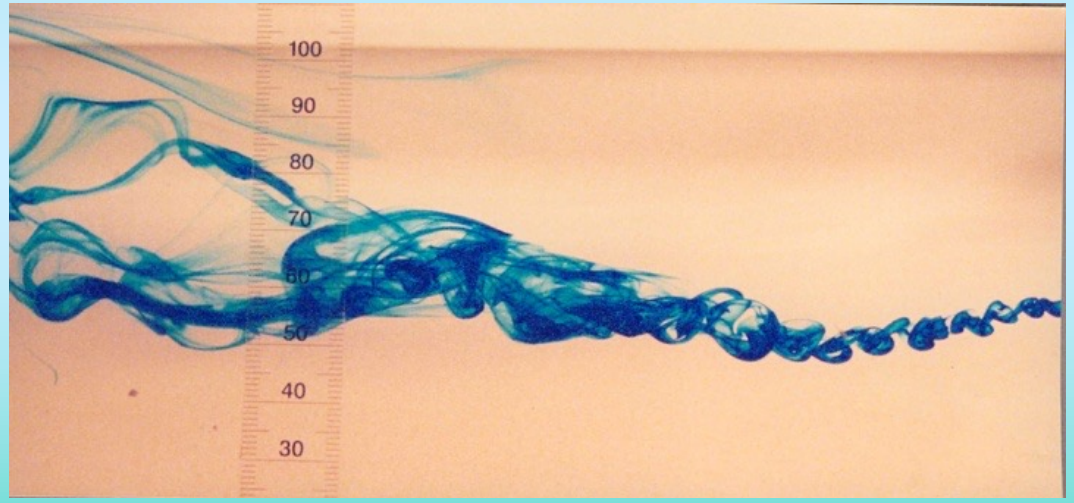
$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta}$$

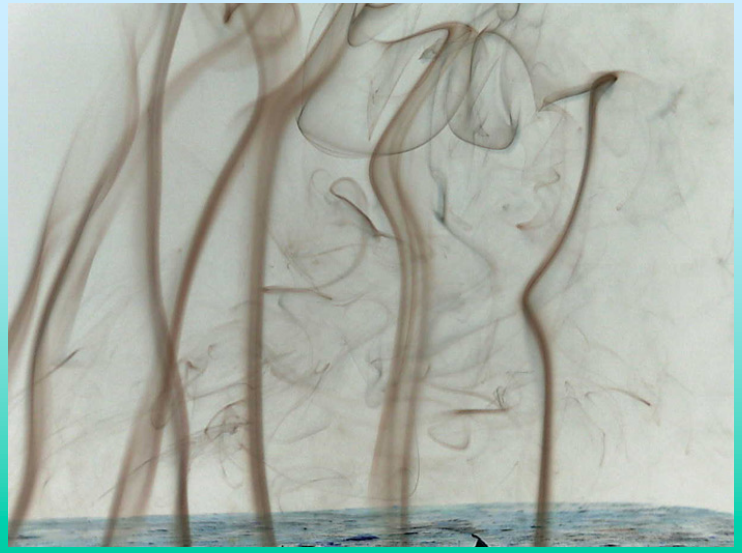
Sperimentalmente si trova che:

- **$N_R < 2000$: flusso laminare**
- **$2000 < N_R < 3000$: flusso instabile (può cambiare da laminare ↔ turbolento)**
- **$N_R > 3000$: flusso turbolento**

Riassumendo

Nei fluidi reali l'attrito tra le molecole causa fenomeni di turbolenza e dissipazione
dell'energia meccanica





Esercizio da svolgere a casa:

Nell'aorta umana di raggio interno r_a=1 cm, la portata del sangue è Q= 5 l/min. La viscosità del sangue è $\eta=4.75\cdot10^{-3}$ Pa·s. Se vi sono $5\cdot10^{9}$ capillari nel letto vascolare dell'aorta, e ciascuno di essi ha un raggio interno di r_c=4 μm, determinare:

1. La velocità media del sangue nell'aorta
2. La velocità massima del sangue nell'aorta
3. La velocità media del sangue nei capillari
4. La perdita di carico ($\Delta P/l$) nell'aorta

Soluzione

Domanda 1

$$Q = A\, v_{media}$$

$$v_{media} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{\left(5\,\frac{l}{min}\right)\left(10^{-3}\,\frac{m^3}{l}\right)\left(\frac{l\,min}{60\,s}\right)}{(3.14)(10^{-2})^2} = 3\cdot 10^{-1}\ m/s$$

Domanda 2

$$v_{max} = 2 \cdot v_{media}$$

$$v_{max} = 2 \cdot v_{media} = 2 \cdot (2.65 \cdot 10^{-1}\ m/s) = 5 \cdot 10^{-1}\ m/s$$

Domanda 3

L'area dei capillari si ottiene moltiplicando l'area di 1 capillare per l'area del singolo capillare

$$A_{capillari} = (5 \cdot 10^9) \cdot \left(\pi \cdot (4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m})^2\right) = 0.251\ \mathrm{m}^2$$

La portata è costante per l'equazione di continuità

$$Q = A\ v_{media}$$

$$v_{media} = \frac{Q}{A_{capillari}} = \frac{\left(5\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right)\left(10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{l}}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}}\right)}{0.251\ \mathrm{m}^2} = 0.3\ \mathrm{mm/s}$$

Domanda 4

Applico Poiseuille per calcolare la $\Delta P/l$

$$Q = \frac{\Delta P \, \pi \, R^4}{8 \, \eta \, l}$$

$$\frac{\Delta P}{l} = \frac{8 \, \eta \, Q}{\pi \, R^4} = \frac{(8)(4.75 \cdot 10^{-3})\left(5 \, \frac{l}{min}\right)\left(10^{-3} \, \frac{m^3}{l}\right)\left(\frac{1 \, min}{60 \, s}\right)}{(3.14)(10^{-2})} = 100 \; N/m^3$$

Continuazione dell'esercizio precedente

5. La perdita di carico media dei capillari nel letto vascolare dell'aorta
6. La resistenza idrodinamica per unità di lunghezza nell'aorta
7. La resistenza idrodinamica media per unità di lunghezza in ciascun capillare

Domanda 5

Applico Poiseuille per calcolare la ΔP/l, sapendo che la portata in ciascun capillare è data da

$$Q_{capillare} = \frac{\left(5\,\frac{l}{min}\right)\left(10^{-3}\,\frac{m^3}{l}\right)\left(\frac{1\,min}{60\,s}\right)}{5\cdot 10^{9}} = 1.7\cdot 10^{-14}\ m^3/s$$

$$Q = \frac{\Delta P\,\pi\,R^4}{8\,\eta\,l}$$

$$\frac{\Delta P}{l} = \frac{8\,\eta\,Q}{\pi\,R^4} = \frac{(8)(4.75\cdot 10^{-3})(1.7\cdot 10^{-14})}{(3.14)(4\cdot 10^{-6})^4} = 8\cdot 10^{5}\ N/m^3$$

Domanda 6

Applico Poiseuille per calcolare la R/l, sapendo che

$$R/l = \frac{\Delta P}{Ql}$$

e usando Poiseuille

$$R/l = \frac{8\,\eta}{\pi r^4}$$

$$R/l = \frac{8\,\eta}{\pi r^4} = \frac{(8)\cdot(4.75\cdot 10^{-3})}{(3.14)\cdot(10^{-2})^4} = 1\cdot 10^6\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-4}$$

Domanda 7

Applico Poiseuille per calcolare la R/l, usando il raggio del capillare e sapendo che

$$R/l = \frac{\Delta P}{Q}$$

e usando Poiseuille

$$R/l = \frac{8\,\eta}{\pi r^4}$$

$$R/l = \frac{8\,\eta}{\pi r^4} = \frac{(8)\cdot(4.75\cdot 10^{-3})}{(3.14)\cdot(4\cdot 10^{-6})^4} = 5\cdot 10^{19}\ N\cdot s\cdot m^{-4}$$

Esercizio 1

Una grande arteria di un cane ha raggio interno di 4.0 mm. Il sangue scorre con una portata di 1.0 cm^3/s. Si trovi:

1. Velocità media e massima del sangue

Condizioni a contorno

$$Q = A\bar{v}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{Max}$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = Q \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{1.0 \cdot 10^{-6}\ m^3 s^{-1}}{\pi (4.0 \cdot 10^{-3}\ m)^2} = 2.0 \cdot 10^{-2}\ ms^{-1}$$

$$v_{Max} = 2\bar{v} = 4.0 \cdot 10^{-2}\ ms^{-1}$$

Esercizio 1

2.La caduta di pressione in un tratto lungo 10 cm

Condizioni a contorno

$$Q = \frac{\Delta P \, \pi \, R^4}{8 \, \eta \, l}$$

$$\eta = 2.084 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{Pa \cdot s}$$

$$\Delta P = \frac{8 \, \eta \, l Q}{\pi \, R^4} = \frac{8 \cdot (2.084 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{Pa \cdot s})(0.1 \ \mathrm{m})(1.0 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{m^3 s^{-1}})}{\pi \cdot (4.0 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{m})^4} =$$

$$2.1 \ \mathrm{Pa}$$

Esercizio 1

3. La potenza necessaria a mantenere la portata

$$W = F \cdot \bar{v} =$$

$$\Delta P \cdot (\pi R^2) \cdot \bar{v} =$$

$$(2.1\,\mathrm{Pa})(\pi \cdot (4.0 \cdot 10^{-3})^2\ \mathrm{m}^2)(2.0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{ms}^{-1}) =$$

$$2.1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}$$

Esercizio 2

Nella grande arteria di un cane, il raggio è 4.0×10^{-3} m, la velocità media del sangue 1.99×10^{-2} ms^{-1} e la viscosità $\eta = 2.084 \times 10^{-3}$ Pa·s. La densità è $\rho = 1.06 \times 10^{3}$ $kg \cdot m^{-3}$.

Trovare il numero di Reynolds e stabilire se il flusso sia o meno laminare.

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta} =$$

$$= \frac{2 \cdot (1.06 \cdot 10^{3}\ kg \cdot m^{-3}) \cdot (1.99 \cdot 10^{-2}\ ms^{-1})(4.0 \cdot 10^{-3}\ m)}{2.084 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s} =$$

$$= 81$$

Il flusso è quindi laminare

Esercizio 3

Il raggio di un'arteria è diminuito del 10%. Calcolare l'aumento percentuale della caduta di pressione ai capi dell'arteria.

La portata deve rimanere costante per mantenere il normale flusso di sangue, quindi:

$$Q_1 = Q_2$$

ossia

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t}$$

Dalla Legge di Poiseuille ricavo:

$$\frac{\pi \Delta P_1 r_1^4}{8\eta l} = \frac{\pi \Delta P_2 r_2^4}{8\eta l}$$

Da cui:

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{r_1^4}{r_2^4} = \frac{1^4}{(0.9)^4} = 1.52$$

L'aumento del 52% della ΔP corrisponde a un aumento di lavoro fornito dal cuore del 52%