

Dipartimento di Fisica Teorica  
Università di Torino

STEFANO SCIUTO

Appunti dalle lezioni di  
Metodi Matematici della Fisica II

# 1. Complementi sulle funzioni analitiche

A.A 2001-2002

REVISIONE 2010-2011

REVISIONE 2012-2013 di Ezio Maina

A Laurent Schwarz (1915-2002), crea-  
tore della teoria delle distribuzioni,  
maestro di scienza e di impegno civile.



# Indice

<b>1</b>	<b>Cenni di topologia</b>	<b>1</b>
1.1	Definizione di spazio topologico . . . . .	1
1.2	Limite e continuità . . . . .	4
1.3	Insiemi aperti e insiemi chiusi; spazi connessi . . . . .	6
1.4	Spazi compatti; separabilità . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Complementi sulle funzioni analitiche</b>	<b>11</b>
2.1	Il piano complesso esteso e la sfera di Riemann . . . . .	11
2.2	Studio del punto all'infinito . . . . .	15
2.2.1	Esempi . . . . .	18
2.2.2	Calcolo del residuo nel punto all'infinito . . . . .	20
2.3	Cenno alle trasformazioni conformi . . . . .	24
2.4	Continuazione analitica . . . . .	28
2.4.1	Metodo di Weierstrass per la continuazione analitica . . . . .	35
2.5	Funzioni $\Gamma$ e $B$ di Eulero . . . . .	37
2.6	Funzioni polidrome . . . . .	41
2.6.1	Un primo esempio: la radice quadrata . . . . .	42
2.6.2	Un secondo esempio: il logaritmo . . . . .	46
2.6.3	Definizione generale di punto di diramazione . . . . .	51
2.6.4	Prescrizione pratica per trattare funzioni polidrome . . . . .	53
2.6.5	Polidromie di tipo potenza . . . . .	57
2.6.6	Calcolo di un integrale notevole. . . . .	59
2.6.7	Funzioni con polidromia logaritmica costruite come primitive . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Sviluppi asintotici e metodo del punto a sella</b>	<b>69</b>
3.1	Successioni e sviluppi asintotici . . . . .	69
3.2	Esempio importante: la trasformata di Laplace . . . . .	71
3.3	Proprietà delle serie asintotiche . . . . .	73
3.4	Valutazione asintotica di integrali nel campo reale con il metodo di Laplace. . . . .	75

3.5	Sviluppi asintotici di integrali mediante gli integrali gaussiani.	80
3.6	Sviluppo asintotico del fattoriale (la formula di Stirling) . . . .	83
3.7	Metodo del punto a sella . . . . .	84
3.7.1	Metodo della fase stazionaria. . . . .	88

# Capitolo 1

## Cenni di topologia

### 1.1 Definizione di spazio topologico

Le definizioni di *limite* e *continuità* sono basate sul concetto di *intorno*, definito nei corsi precedenti solo in  $\mathbb{R}^n$  (e in  $\mathbb{C}_1 \sim \mathbb{R}^2$ ); lo si può generalizzare introducendo anzitutto la:

**Definizione 1.1.1. Spazio topologico**  $T = (X, \tau)$  è un insieme  $X$ , detto **supporto**, dotato di una **topologia**  $\tau$ , cioè di una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ , detti **aperti** (sostantivo o aggettivo), che soddisfa i tre assiomi:

**T1.**  $\emptyset, X \in \tau$ , dove  $\emptyset$  è l'insieme vuoto.

**T2.**  $\forall A_1, A_2 \in \tau, A_1 \cap A_2 \in \tau$ , ovvero l'intersezione di due aperti è un aperto.

**T3.** L'unione di una sottofamiglia *qualsiasi* di aperti è un aperto.

**Notare:** T2 e T3 sono asimmetrici: l'intersezione di un numero finito di aperti è aperta, l'unione anche di *infiniti* aperti è aperta.

**Esempio 1.1.1.** Gli insiemi aperti in  $\mathbb{R}^n$  (in particolare  $\mathbb{R}^2$ ) soddisfano T1, T2, T3.

**Notare:** Dato un supporto  $X$  non è affatto detto che su di esso si possa stabilire una sola topologia  $\tau$ ; anzi, se ne possono sempre scegliere almeno due, estreme:

a) La topologia dei **punti incollati** :  $\tau = \{\emptyset, X\}$

b) La topologia dei **punti separati**:  $\tau = \{\text{Tutti i sottoinsiemi di } X\}$

**Esempio 1.1.2.** Detto  $I_{\frac{1}{n}} = \{|\vec{x}| < \frac{1}{n}\} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{\frac{1}{n}} = \{\vec{x} = 0\} \notin \tau$ , a conferma che T2 non può essere esteso all'intersezione di infiniti aperti.

**Definizione 1.1.2.**  $\forall x \in X$ , l'aperto  $A \in \tau$  si dice **intorno** di  $x$  se  $x \in A$ ; di solito gli intorni di  $x$  si indicano con  $I(x)$ , mentre con  $\bar{I}(x) = I(x) - \{x\}$  indichiamo gli **intorni bucati**, cioè privati del punto  $x$ .

Per dare una topologia su  $X$  bisogna dare  $\tau$ , cioè elencare *tutti* i sottoinsiemi aperti di  $X$ : che fatica! Un modo più comodo per ottenere lo stesso risultato è basato sulle seguenti definizioni e teoremi.

**Definizione 1.1.3.**  $\mathcal{B} \subset \tau$  è una **base di intorni** (e i suoi elementi si chiamano **intorni base**) se ogni  $A \in \tau - \{\emptyset\}$  può essere scritto come unione di intorni base, ovvero  $\forall A \in \tau - \{\emptyset\}, \exists \{B_\sigma\}, B_\sigma \in \mathcal{B} / A = \bigcup_\sigma B_\sigma$ .

**Esempio 1.1.3.** In  $\mathbb{R}^n$  una  $\mathcal{B}$  è data da tutti gli:

$$I_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - x_0| < \varepsilon\} \quad (1.1)$$

ovvero:

$$\mathcal{B} = \{I_\varepsilon(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0\} \quad (1.2)$$

**Teorema 1.1.1.** In uno spazio topologico  $T = (X, \tau)$  ogni base di intorni  $\mathcal{B}$  soddisfa le due proprietà seguenti:

**T1'.**  $X$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$

**T2'.** L'intersezione di due intorni base qualsiasi o è vuota o è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

**Dimostrazione:**  $X$  è aperto <sup>1</sup> per T1, quindi dalla Def. 1.1.3 segue T1'. Inoltre  $\forall u, v \in \mathcal{B}$  l'assioma T2  $\Rightarrow u \cap v$  è aperto, quindi la Def. 1.1.3  $\Rightarrow$  T2'.

*q.e.d.*

Vale anche il viceversa:

**Teorema 1.1.2.** Dato un insieme  $X$  e una famiglia  $\mathcal{B}$  di suoi sottoinsiemi che soddisfino T1' e T2', la famiglia  $\tau$  formata da  $\emptyset$  e da tutti i sottoinsiemi di  $X$  che siano unione di una collezione qualsiasi di elementi di  $\mathcal{B}$  è una topologia su  $X$ , ovvero  $\tau$  soddisfa gli assiomi T1, T2, T3 della Def. 1.1.1 di spazio topologico.

**Dimostrazione:** T1 segue da T1'; T3 è vero per costruzione di  $\tau$ . Per dimostrare T2 si osserva che:  $\forall A_1, A_2 \in \tau - \{\emptyset\} \quad \exists \{B_\rho^{(1)}, B_\sigma^{(2)} \in \mathcal{B}\} / A_1 = \bigcup_\rho B_\rho^{(1)}, A_2 = \bigcup_\sigma B_\sigma^{(2)}$

$$\text{quindi: } A_1 \cap A_2 = \bigcup_{\rho\sigma} (B_\rho^{(1)} \cap B_\sigma^{(2)})$$

Per T2':  $\forall B_\rho^{(1)}, B_\sigma^{(2)} / B_\rho^{(1)} \cap B_\sigma^{(2)} \neq \emptyset \quad \exists \{B_{\rho\sigma\tau} \in \mathcal{B}\} / B_\rho^{(1)} \cap B_\sigma^{(2)} = \bigcup_\tau B_{\rho\sigma\tau}^{(3)}$ . Quindi, o  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , o  $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau}^{(3)}$  e quindi, per costruzione,  $A_1 \cap A_2 \in \tau$ .

<sup>1</sup>Non vuoto; sottintendiamo che il nostro spazio topologico non sia banale.

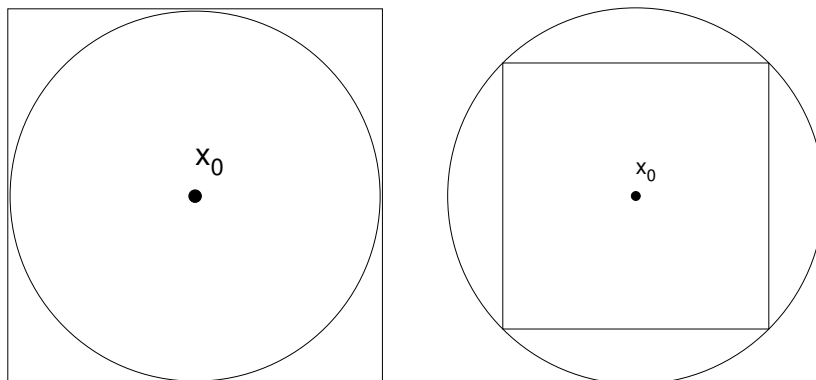


Figura 1.1: Interni (iper)sferici e (iper)cubici

*q.e.d.*

Quindi un modo alternativo alla Def. 1.1.1, molto più maneggevole, per definire uno spazio topologico  $T$  su un supporto  $X$  è di assegnare su  $X$  una **base di interni**, cioè una famiglia  $\mathcal{B}$  di sottoinsiemi di  $X$  che soddisfi gli assiomi T1' e T2', e di costruire la topologia  $\tau$  (cioè l'insieme di tutti gli aperti) mediante il Teor. 1.1.2.

Perché non assumere questa come definizione di spazio topologico? Perché può succedere che  $\{X, \mathcal{B}\}$  e  $\{X, \mathcal{B}'\}$  con  $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$  portino allo stesso  $\tau$  e quindi in realtà individuino lo stesso spazio topologico.

**Esempio 1.1.4.** In  $\mathbb{R}^n$ , accanto alla base d'intorni  $\mathcal{B}$  dell'Es. 1.1.3 consideriamo la base  $\mathcal{B}'$ :

$$\mathcal{B}' = \{I'_\varepsilon(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0\}$$

con:

$$I'_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x_i - (x_0)_i| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\}$$

(interni (iper)cubici anziché interni (iper)sferici), che soddisfa ovviamente gli assiomi T1' e T2'.

Osservando che (vedi Fig. 1.1):

1.  $\forall I'_\varepsilon(x), \exists I_\delta(x) \subset I'_\varepsilon(x)$  e analogamente,
2.  $\forall I_\varepsilon(x), \exists I'_\delta(x) \subset I_\varepsilon(x)$

e che ogni aperto  $A' \in \tau'$  si può scrivere come  $A' = \bigcup_{x \in A'} I'(x)$ , dalla 1) segue  $A' = \bigcup_{x \in A'} I(x) \in \tau$  Dalla 2) segue il viceversa:  $A \in \tau \Rightarrow A \in \tau'$

Quindi  $\tau = \tau'$ . La situazione è quindi analoga a quella degli spazi vettoriali, la cui definizione astratta non richiede il concetto di **base**, ma che

possono essere più facilmente trattati scegliendone una, fermo restando che i risultati ottenuti non devono dipendere dalla base prescelta.

**Definizione 1.1.4. Topologia indotta**

Dato  $T = (X, \tau)$ ,  $\forall X' \subset X$ ,  $\tau_{X'} = \{A \cap X', A \in \tau\}$  è una topologia su  $X'$  (è immediato verificare gli assiomi T1, T2, T3); quindi  $T = (X, \tau)$  induce  $T' = (X', \tau_{X'})$ , sottospazio topologico;  $\tau_{x'}$  si dice **topologia indotta**.

**Esempio 1.1.5.** La Def. 1.1.4 permette di stabilire immediatamente una topologia su  $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $S_n$  è la superficie ipersferica (più brevemente *sfera*) di equazione  $\sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = R^2$ , dove  $R$  è il raggio); gli intorni base sono calotte.

## 1.2 Limite e continuità

**Definizione 1.2.1.** Dato  $T = (X, \tau)$ ,  $x_n \in X$  si dice che  $x \in X$ , è il **limite della successione**  $\{x_n\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (1.3)$$

se  $\forall I(x)$  gli  $x_n$  cadono *definitivamente* in  $I(x)$ , ovvero se  $\exists n_0 / x_n \in I(x), \forall n > n_0$ .

È evidente che questa definizione di limite non è che la generalizzazione ad ogni spazio topologico di quella ben nota in  $\mathbb{R}^n$ , dove  $I(x)$  prende il ruolo della distanza  $\varepsilon$  da  $x$ .

Data una successione qualsiasi non è affatto detto che il limite esista (esempio: 1,-1,1,-1, ...).

Ma se esiste, vorremmo che fosse unico: affinché questo sia assicurato dobbiamo introdurre un assioma in più.

**Definizione 1.2.2.**  $T = (X, \tau)$  è di **Hausdorff** se:

**T4.**  $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists I(x), I(y) / I(x) \cap I(y) = \emptyset$

**Teorema 1.2.1.** In uno spazio topologico di Hausdorff il limite, se esiste, è unico.

**Dimostrazione:** per assurdo, ovvia.

**Definizione 1.2.3.** Siano  $T_1 = (X_1, \tau_1)$ ,  $T_2 = (X_2, \tau_2)$  spazi topologici. L'applicazione:  $f : X_1 \rightarrow X_2$  è **continua** in  $x \in X_1$  se  $\forall J(y)$ , intorno di  $y = f(x) \in X_2, \exists I(x) / f(I(x)) \subset J(y)$  (vedi Fig. 1.2).

**Definizione 1.2.4.**  $f : X_1 \rightarrow X_2$  si dice **continua** in  $X_1$  se è continua  $\forall x \in X_1$ .

È facile, anche se non ovvio, dimostrare:



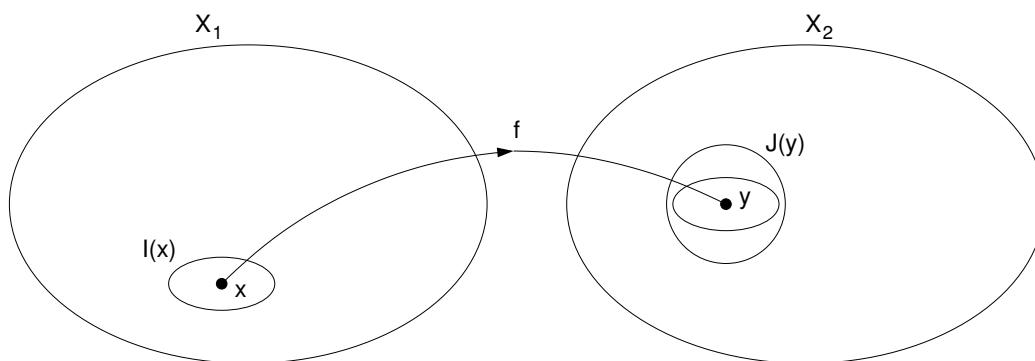


Figura 1.2: Applicazione continua

**Teorema 1.2.2.**  $f$  è continua se e solo se la *controimmagine* di ogni aperto di  $X_2$  è aperta, ovvero:

$$f : X_1 \rightarrow X_2 \text{ continua} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A_2 \in \tau_2, f^{-1}(A_2) \in \tau_1 \quad (1.4)$$

**Attenzione:** non è vero che l'immagine di un aperto sia necessariamente un aperto, anche se  $f$  è continua: un esempio in  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è  $f(x) = y_0 =$  costante.

**Definizione 1.2.5.**  $f : X_1 \rightarrow X_2$  è **omeomorfismo** se  $f$  è *biunivoca* e *bicontinua*, ovvero:

1.  $f$  è continua
2.  $\exists f^{-1}$  ed è continua.

Sotto omeomorfismo, per il teorema 1.2.2, l'immagine e la controimmagine di ogni aperto di  $T_1$  e  $T_2$  sono aperte. L'omeomorfismo stabilisce una corrispondenza biunivoca fra gli aperti di  $T_1$  e  $T_2$ , quindi fra  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

**Definizione 1.2.6.** Se  $\exists$  omeomorfismo  $X_1 \rightarrow X_2$  si dice  $T_1 \sim T_2$ :  $T_1$  e  $T_2$  sono **omeomorfi**. È immediato verificare che l'omeomorfismo è una *relazione di equivalenza*<sup>2</sup>;  $T_1$  e  $T_2$  possono essere identificati.

Tornando ad una generica funzione continua fra spazi topologici, si può dimostrare:

<sup>2</sup>cioè che gode delle proprietà **riflessiva**:  $T \sim T$ ; **simmetrica**:  $T_1 \sim T_2 \Rightarrow T_2 \sim T_1$ ; **transitiva**:  $T_1 \sim T_2, T_2 \sim T_3 \Rightarrow T_1 \sim T_3$ .

**Teorema 1.2.3.** Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f : X_1 \rightarrow X_2$  sia continua è che ogni  $\{x_n\}$  convergente ( $x_n \in X_1$ ) abbia come immagine  $\{y_n\}$  convergente ( $y_n = f(x_n)$ ) e che:

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (1.5)$$

**Dimostrazione: Necessità.** Detto  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X_1$  e  $y = f(x)$  la continuità di  $f$  implica:

$$\forall J(y), \exists I(x) / f(I(x)) \subset J(y) \text{ Inoltre: } \exists n_0 / \forall n > n_0, x_n \in I(x) \Rightarrow f(x_n) \in J(y) \Rightarrow y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

*q.e.d.*

Tralasciamo la dimostrazione della sufficienza.

### 1.3 Insiemi aperti e insiemi chiusi; spazi connessi

**Definizione 1.3.1.** In uno spazio topologico  $T = (X, \tau)$ , si dice che il punto  $x \in S$  è **interno** al sottoinsieme  $S \subset X$  se  $\exists I(x) \subset S$ .

L'insieme dei punti interni a  $S$  si dice **interno** di  $S$ :

$$\text{int}S = \{x \in S / \exists I(x) \subset S\} \quad (1.6)$$

**Teorema 1.3.1.**  $S \in \tau$  (cioè  $S$  è aperto)  $\iff S = \text{int}S$

**Dimostrazione:** Hp.  $S \in \tau \Rightarrow \forall x \in S, S = I(x) \subset S \Rightarrow x \in \text{int}S \Rightarrow S = \text{int}S$ .

**Viceversa:**

Hp.  $S = \text{int}S$ . Scegliamo  $\forall x \in S, I(x) \subset S$ ; ne segue  $S = \bigcup_{x \in S} I(x) \xrightarrow{T3} S \in \tau$ .

Occorre notare che è essenziale che l'assioma T3 valga per una qualunque famiglia di aperti, anche di potenza infinita, non importa quanto grande.

**Definizione 1.3.2.** Un sottoinsieme  $C$  di  $X$  si dice **chiuso** se il suo complemento in  $X$  è aperto:

$$C \subset X \text{ chiuso} \iff \mathcal{C}C (\equiv X - C) \in \tau \quad (1.7)$$

**Definizione 1.3.3.** In uno spazio topologico  $T = (X, \tau)$  si dice che il punto  $x \in X$  è **punto di aderenza** del sottoinsieme  $S \subset X$  se ogni intorno di  $x$  contiene almeno un punto di  $S$ , ovvero:  $\forall I(x), I(x) \cap S \neq \emptyset$ ;

In altre parole  $x$  è punto di aderenza di  $S$  se **non** è interno al complemento di  $S$ :  $x \notin \text{int}CS$ ; infatti:

$$\text{int}CS = \{y \in X / \exists I(y) / I(y) \cap S = \emptyset\}. \quad (1.8)$$

È ovvio che ogni  $x \in S$  è punto di aderenza di  $S$ , ma ce ne possono essere altri (che devono essere punti di accumulazione di  $S$ ).

**Definizione 1.3.4.**  $x$  è **punto di accumulazione** di  $S$  se:  $(I(x) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset, \forall I(x)$ .

**Definizione 1.3.5.**  $x$  è **punto isolato** di  $S$  se  $x \in S$  e  $x$  non è punto di accumulazione di  $S$ .

**Definizione 1.3.6.** La **chiusura**  $[S]$  di ogni sottoinsieme  $S \subset X$  è l'insieme dei punti di aderenza di  $S$ , ovvero  $[S] = \text{Cint}CS$ , ovvero:

$$[S] = \{x / \forall I(x), I(x) \cap S \neq \emptyset\}. \quad (1.9)$$

**Teorema 1.3.2.**  $S \subset X$  è chiuso se e solo se  $S = [S]$ .

$$\begin{aligned} \text{Dimostrazione: } S \text{ chiuso} &\stackrel{\text{Def. 1.2.2}}{\iff} CS \in \tau \stackrel{\text{Teor. 1.3.1}}{\iff} CS = \text{int}CS \iff \\ &\iff S = \text{Cint}CS \stackrel{\text{Def. 1.3.6}}{\iff} S = [S] \end{aligned}$$

*q.e.d.*

$$\begin{aligned} \text{Riassumendo: } A \text{ aperto} &\iff A = \text{int}A \\ C \text{ chiuso} &\iff C = [C] \end{aligned}$$

**Definizione 1.3.7.** Si dice **frontiera**  $\partial S$  del sottoinsieme  $S \subset X$ :

$$\partial S = [S] - \text{int}S \quad (1.10)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \forall C \text{ chiuso} &: \partial C = C - \text{int}C \Rightarrow \partial C \subset C \\ \forall A \text{ aperto} &: \partial A = [A] - A \Rightarrow A \cap \partial A = \emptyset \end{aligned} \quad (1.11)$$

Un generico  $S$  né aperto né chiuso conterrà un pezzo della sua frontiera, ma non tutta.

**Corollario della Def. 1.3.2.**  $\emptyset$  e  $X$  (insieme vuoto e supporto) sono sia aperti che chiusi, come ovvio da  $\emptyset = \mathcal{C}X$ ,  $X = \mathcal{C}\emptyset$ .

Sono i soli aperti-chiusi?

**Definizione 1.3.8.** Lo spazio topologico  $T = (X, \tau)$  si dice **connesso** se gli unici sottoinsiemi aperti-chiusi sono  $\emptyset$  e  $X$ .

**Teorema 1.3.3.** Condizione necessaria e sufficiente affinché  $T$  sia connesso è che sia impossibile scrivere il suo supporto  $X$  come unione di due aperti non vuoti disgiunti, ovvero:

$$\nexists X_1, X_2 \in \tau, X_1, X_2 \neq \emptyset, X_1 \cap X_2 = \emptyset / X = X_1 \cup X_2 \quad (1.12)$$

**Dimostrazione:**

**Necessità:**  $X = X_1 \cup X_2$ ;  $X_1, X_2 \in \tau, X_1 \cap X_2 = \emptyset \Rightarrow X_2 = \mathcal{C}X_1$  chiuso e aperto insieme; se  $X_1, X_2 \neq \emptyset$ ,  $X$  **non** è connesso.

**Sufficienza:**  $X$  non connesso  $\Rightarrow \exists X_1 \neq \emptyset$ ,  $X_1$  aperto e chiuso  $\Rightarrow X = X_1 \cup \mathcal{C}X_1$ ,  $\mathcal{C}X_1 \neq \emptyset$ , aperto perché complemento di un chiuso.

*q.e.d.*

**Esempio 1.3.1.** Dato  $T = (X, \tau)$  connesso costruiamo uno spazio topologico disconnesso con supporto  $F = F_1 \cup F_2$  dove  $F_1$  e  $F_2$  sono aperti disgiunti non vuoti e la topologia è quella indotta da  $\tau$  (vedi Def. 1.1.4).

**Esempio 1.3.2.** Si può dimostrare:

- $\mathbb{R}$  e ogni suo intervallo sono connessi;
- $\mathbb{R}^n$  è connesso;
- $\forall S \subset \mathbb{R}^n$  aperto **connesso per archi** (vedi il corso di Analisi II) è connesso e viceversa (dimostrazione in *Ahlfors*, pag. 56).

## 1.4 Spazi compatti; separabilità

**Definizione 1.4.1.** Una famiglia di sottoinsiemi (aperti)  $V_\sigma$  di uno spazio topologico  $T = (X, \tau)$  si dice **ricoprimento** (aperto) di  $T$  se  $\bigcup_{\sigma} V_\sigma = X$ .

**Esempio 1.4.1.** Ogni base di intorni di  $T$  è un ricoprimento aperto di  $T$ .

**Definizione 1.4.2.** Uno spazio topologico si dice **compatto** se da *ogni* suo ricoprimento aperto è possibile estrarne uno finito (cioè formato da un numero finito di elementi).

**Esempio 1.4.2.** Un possibile ricoprimento aperto di  $\mathbb{R}^n$  è dato dagli insiemi  $U_0, U_1, U_2, \dots$  con  $U_0 = \{|x| < 1\}$ ,  $U_n = \{n - 0.1 < |x| < n + 1\}$ ; è evidente che dalla famiglia  $\{U_n\}$  non posso togliere nemmeno un elemento senza lasciare un “buco”; quindi  $\mathbb{R}^n$  **non** è compatto.

Lo studente dimostri analogamente che l'intervallo semiaperto  $[0, 1)$  **non** è compatto.

Si può dimostrare che vale:

**Teorema 1.4.1.** In  $\mathbb{R}^n$  un sottoinsieme è compatto se e solo se è **chiuso e limitato**.

**Esempio 1.4.3.** La sfera  $S_n$ , cioè l'ipersuperficie di equazione:  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = R^2$  è compatta

Infatti  $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  è ovviamente limitata; inoltre è chiusa perché il suo complemento è l'unione dei due aperti  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| < R\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| > R\}$ .

Introduciamo ora il concetto di insieme denso in un altro, preliminare alla definizione di spazio separabile.

**Definizione 1.4.3.** In uno spazio topologico  $T = (X, \tau)$  si dice che  $A$  è **denso** in  $B$  ( $A, B \subset X$ ) se  $B \subset [A]$ , dove  $[A]$  è la chiusura di  $A$  (vedi Def. 1.3.6), ovvero  $I(b) \cap A \neq \emptyset, \forall$  intorno  $I(b)$  di  $\forall b \in B$ .

**Esempio 1.4.4.** L'insieme  $\mathbb{Q}$  dei razionali è denso in  $\mathbb{R}$ ; infatti in ogni intorno di ogni numero reale cade almeno un numero razionale (in realtà infiniti).

**Teorema 1.4.2.**  $A$  denso in  $B$ ,  $B$  denso in  $C \Rightarrow A$  denso in  $C$  (*proprietà transitiva*).

**Dimostrazione:**  $[A] \supset B, [B] \supset C \quad \Rightarrow \quad [A] \supset [B] \supset C$

*q.e.d.*

**Definizione 1.4.4.** Lo spazio topologico  $T = (X, \tau)$  è **separabile** se esiste un insieme **numerabile denso** in  $X$ .

**Esempio 1.4.5.**  $\mathbb{R}$  è separabile perché  $\mathbb{Q}$  è numerabile e denso in  $\mathbb{R}$  (Esempio 1.4.4).

Nel Cap.4 (par.4.1) mostreremo che sono separabili anche  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n, \forall n$ .



# Capitolo 2

## Complementi sulle funzioni analitiche

### 2.1 Il piano complesso esteso e la sfera di Riemann

Possiamo definire lo **spazio topologico**  $\mathbb{C}$ , dotando ogni punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  di un **insieme di intorni**  $I_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$  per ogni  $\varepsilon > 0$  in modo da poter definire nel modo usuale i concetti di limite e punto di accumulazione<sup>1</sup>.

Notiamo subito che  $\mathbb{C}$  è uno spazio topologico **non compatto**, (come  $\mathbb{R}^n$ ), poiché esistono insiemi infiniti di punti, come  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ , privi di punto di accumulazione in  $\mathbb{C}$ .

Lo si può “compattificare” e definire il **piano complesso esteso**  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  aggiungendo **un punto all’infinito**,  $\infty$ , e il relativo insieme di intorni:

$$I_\Omega(\infty) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > \Omega\} \cup \{\infty\}, \quad (2.1)$$

per ogni  $\Omega > 0$ , cioè **l’esterno di cerchi centrati nell’origine** di raggio  $\Omega$  arbitrario.

È facile vedere che si ottiene l’identica *topologia* (cioè gli stessi concetti di limite e punto di accumulazione) sostituendo agli intorni  $I_\Omega(\infty)$  l’esterno di cerchi centrati in qualsiasi punto  $a \in \mathbb{C}$  prefissato:  $I'_\Omega(\infty) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| > \Omega\} \cup \{\infty\}$ <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Questa definizione soddisfa i requisiti discussi nel Cap. 1 per una **base di intorni**.

<sup>2</sup>L’equivalenza fra l’insieme di intorni  $I_\Omega(\infty)$  e  $I'_\Omega(\infty)$  segue dal fatto che per ogni  $I_\Omega(\infty)$  esiste un  $I'_{\Omega'}(\infty)$  che lo contiene e viceversa, qualunque sia la scelta di  $a \in \mathbb{C}$ .

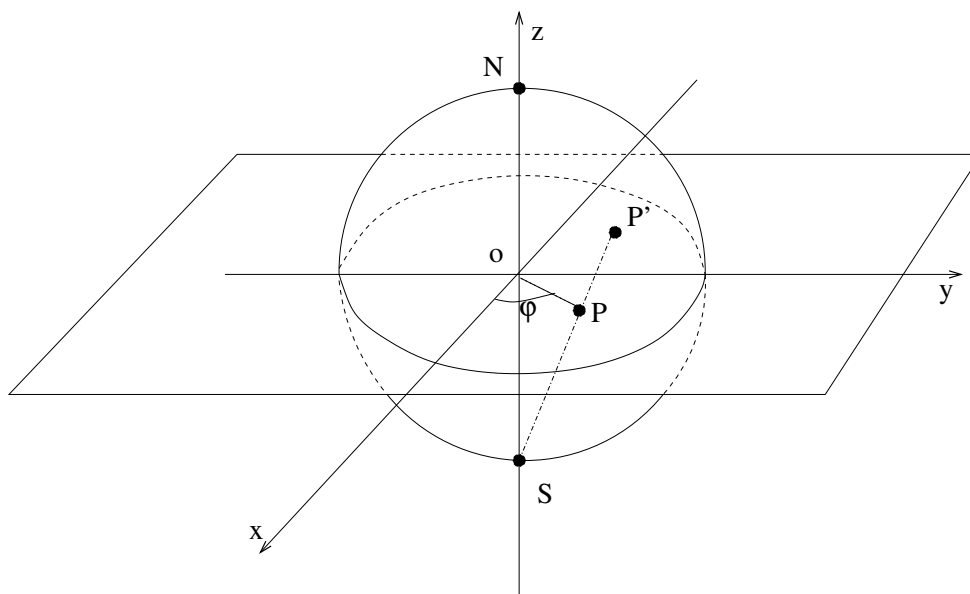


Figura 2.1: Proiezione stereografica.

Da questa definizione segue che per qualsiasi applicazione  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , la scrittura  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$  significa:

$$\forall J(w_0), \exists \Omega > 0 / f(z) \in J(w_0), \quad \forall z / |z| > \Omega.$$

Analogamente, la scrittura  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \infty$  significa:

$$\forall \Omega > 0, \exists I(z_0) / |g(z)| > \Omega, \quad \forall z \in I(z_0).$$

Avendo introdotto il punto all'infinito e la sua topologia possiamo introdurre un ricoprimento aperto di  $\mathbb{C}$  aggiungendo agli insiemi  $U_0, U_1, U_2, \dots$  con  $U_0 = \{|x| < 1\}$ ,  $U_n = \{n - 0.1 < |x| < n + 1\}$  introdotti nell'Esempio 1.4.2 un qualsiasi intorno dell'infinito  $I_\Omega(\infty)$ . È evidente che dalla famiglia  $\{U_n\}$  posso togliere tutti gli elementi con  $n > \Omega + 1$  riducendomi a un ricoprimento finito. Ovviamente questo non dimostra che  $\mathbb{C}$  è compatto perché vale solamente per **un** ricoprimento.

Il piano complesso esteso  $\overline{\mathbb{C}}$  può essere messo in corrispondenza biunivoca e bicontinua (che in topologia si chiama **Omeomorfismo**) con  $S_2$ , la **sfera di Riemann**, mediante la **proiezione stereografica** dal polo Sud della sfera unitaria sul piano passante per l'equatore (vedi figura 2.1 e [1] pag. 83):

$$\mathcal{P} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S_2 \tag{2.2}$$



$$\mathcal{P} : \begin{cases} z \in \mathbb{C} \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in S_2 \\ \infty \in \overline{\mathbb{C}} \mapsto (0, 0, -1) \in S_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2} \\ x_2 = \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2} \\ x_3 = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

Notare:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in S_2$ .

La biunivocità dell'applicazione  $\mathcal{P}$  è evidente. Infatti dalle 2.3 segue subito, per  $x_3 \neq -1$ :

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3},$$

ovvero, in coordinate polari, avendo posto  $z = \rho e^{i\varphi}$ :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{1-x_3}{1+x_3}} \\ \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{con } \begin{cases} |\varphi| < \frac{\pi}{2} & \text{per } x_1 > 0 \\ |\varphi| > \frac{\pi}{2} & \text{per } x_1 < 0 \end{cases}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

È anche facile verificare la **bicontinuità**, cioè la corrispondenza biunivoca fra intorni in  $\overline{\mathbb{C}}$  e in  $S_2^3$ .

L'omeomorfismo  $\overline{\mathbb{C}} \sim S_2$  ci dice che **il piano complesso esteso è compatto** (poichè  $S_2$ , sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^3$ , è compatta). Ne segue che ogni insieme infinito in  $\overline{\mathbb{C}}$  ha ivi almeno un punto di accumulazione; per esempio  $\mathbb{Z}$  ha come punto di accumulazione proprio il punto all'infinito.

Si può dimostrare che l'applicazione  $\mathcal{P}$  è *conforme*, cioè *conserva gli angoli*: se due rette si incontrano con un angolo  $\varphi$  in  $w_0 \in \mathbb{C}$ , altrettanto faranno in  $\mathcal{P}(w_0)$  le loro immagini sulla sfera (che sono cerchi passanti per il polo Sud); per esempio le rette uscenti dall'origine  $O$  sono ortogonali ai cerchi centrati in  $O$ , così come lo sono le loro immagini sulla sfera (meridiani e paralleli).

Gli angoli vengono conservati anche in segno (trasformazione conforme diretta): una curva chiusa semplice in  $\mathbb{C}$  attorno a  $w_0 \in \mathbb{C}$  viene mandata in una curva chiusa su  $S_2$  percorsa nello stesso verso attorno all'immagine. Ciò vale anche per curve attorno all' $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$  (la cui immagine è il polo sud della sfera), tenendo conto che su  $\mathbb{C}$  per lasciare l'infinito a sinistra bisogna muoversi in verso *orario* (definizione euristica di verso di percorrenza positivo di una curva chiusa  $\gamma$ ). Si può anche vedere così: due curve che si incontrano nel polo Sud hanno come tangenti dei meridiani; quindi l'angolo fra loro viene mandato nell'angolo fra le rette immagini, cambiato di segno perchè girare attorno al polo Sud in un verso è come girare attorno al polo Nord nel verso opposto; quindi l'angolo fra rette uscenti

<sup>3</sup>in particolare gli intorni dell'infinito vanno in calotte sferiche centrate nel polo Sud.

dall'infinito va considerato come l'opposto dell'angolo visto dal punto di intersezione al finito.

Il noto aforisma “la palla è rotonda” suggerisce che in  $\overline{\mathbb{C}}$  il punto all'infinito sia un punto come tutti gli altri. Infatti  $\infty$  può essere mandato in un qualsiasi punto di  $\mathbb{C}$  mediante una opportuna *trasformazione lineare fratta*  $L : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  con la prescrizione:

$$L : z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -\frac{d}{c}, \quad (2.4)$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ .

Per  $c \neq 0$ , le immagini dei punti  $-\frac{d}{c}$  e  $\infty$  vengono ottenute per continuità:

$$L : -\frac{d}{c} \mapsto \infty, \quad L : \infty \mapsto \frac{a}{c} \quad (2.5)$$

Naturalmente, nel caso particolare  $c = 0$  l'applicazione  $L$  manda il punto all'infinito in se stesso.

È facile verificare che l'applicazione  $L$

- è invertibile, e la trasformazione inversa è data da<sup>4</sup>

$$w \mapsto z = \frac{fw + g}{kw + l}, \quad w \in \mathbb{C}, w \neq -\frac{l}{k} \quad (2.6)$$

con

$$\begin{pmatrix} f & g \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1};$$

(per  $w = -\frac{l}{k}$  e  $w = \infty$  si procede per continuità)

- è continua
- rimane la stessa se ai numeri complessi  $a, b, c, d$  si sostituiscono  $ha, hb, hc, hd$ ,  $\forall h \neq 0, h \in \mathbb{C}$ .

Le trasformazioni lineari fratte sono quindi **automorfismi** di  $\overline{\mathbb{C}}$ , cioè omeomorfismi di  $\overline{\mathbb{C}}$  in se stesso.

<sup>4</sup>La condizione  $ad - bc \neq 0$  ha proprio la funzione di garantire l'invertibilità della matrice 2x2.

[NOTA] Il modo più elegante di trattare le trasformazioni lineari fratte è di usare coordinate proiettive:  $z = \frac{z_1}{z_2}$ ;  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|z_1| + |z_2| \neq 0$ , con la convenzione  $z_2 = 0 \Leftrightarrow z = \infty$ ; allora  $L : z \mapsto w$ ,  $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ , corrisponde a  $L : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , da cui segue subito la 2.6.

Notare che le trasformazioni lineari fratte formano un gruppo, isomorfo a  $SL(2, c)/\mathbb{Z}_2$ ;  $L(2, c)$  significa gruppo *Lineare*, cioè di matrici 2x2 a elementi complessi;  $S$  significa *Speciale*, cioè con determinante che può sempre essere scelto uguale a 1; infine  $/\mathbb{Z}_2$  significa che le matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

vanno identificate poiché corrispondono alla stessa trasformazione.

## 2.2 Studio del punto all'infinito

Il comportamento della funzione  $f(z)$  per  $z \rightarrow \infty$  si studia effettuando il cambiamento di variabile

$$t = \frac{1}{z - a} \tag{2.7}$$

per un opportuno  $a \in \mathbb{C}$ , che molto spesso si prende uguale a zero, e valutando il comportamento della funzione  $\phi(t) = f(a + 1/t)$  per  $t \rightarrow 0$ . La sostituzione (2.7) manda un intorno circolare (di raggio  $\varepsilon$ ) dell'origine nel piano complesso di  $t$  in un **intorno dell'infinito**  $I_\Omega(\infty)$ , cioè nell'**esterno** di un cerchio di raggio  $\Omega = 1/\varepsilon$  centrato in  $a$ .

Per **definizione**, la funzione  $f(z)$  ha all'infinito lo stesso comportamento di  $\phi(t)$  nell'origine.

Per esempio, se  $t = 0$  è un *polo* di ordine  $n$  di  $\phi(t)$ ,  $z = \infty$  è un polo di ordine  $n$  di  $f(z)$ ; se  $t = 0$  è uno *zero* di ordine  $n$  di  $\phi(t)$ ,  $z = \infty$  è uno zero di ordine  $n$  di  $f(z)$ , eccetera.

### Esempi

- La funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$  è regolare all'infinito e ivi ha uno zero semplice; lo stesso vale per  $f(z) = \frac{1}{z-1}$ , come si vede usando la (2.7) con  $a = 1$ .
- La funzione  $f(z) = z^2$  ha un polo doppio all'infinito.
- La funzione  $f(z) = e^z$  ha una singolarità essenziale all'infinito, così come le funzioni  $\sin z$  e analoghe.

- La funzione  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  ha poli semplici nei punti  $z_k = k\pi$  con  $k$  intero qualsiasi; quindi in ogni intorno del punto all'infinito cade almeno un polo (in realtà ne cadono infiniti): l'infinito **non** è una singolarità isolata, ma un **punto di accumulazione** di poli.

Naturalmente, se  $f(z)$  è regolare all'infinito può essere sviluppata in serie di Taylor in un **intorno dell'infinito**  $I_\Omega(\infty)$ , cioè **all'esterno** di un cerchio, centrato in un punto  $a$  scelto secondo convenienza (spesso  $a = 0$ ), e di raggio  $\Omega$  tale che all'esterno del cerchio la  $f(z)$  non abbia singolarità. Tale serie si ottiene sviluppando in serie di Taylor la funzione  $\phi(t)$  nell'intorno del punto  $t = 0$ , tornando poi alla variabile originaria  $z$  con la sostituzione  $t = 1/(z-a)$ ; lo **sviluppo di Taylor** nell'intorno del punto **all'infinito** conterrà quindi solo **potenze negative** di  $z - a$ , oltre alla **potenza nulla**:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z-a} + \frac{a_2}{(z-a)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}, \quad (2.8)$$

valido per  $|z-a| > \Omega$ .

In particolare il punto all'infinito è uno **zero di ordine**  $N$  di  $f(z)$  se esso è un **punto regolare** con  $a_0 = a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$  e  $a_N \neq 0$ .

Per esempio lo sviluppo della funzione  $e^{1/z}$  in serie di Laurent nell'intorno della singolarità essenziale  $z = 0$  può anche essere letto come lo sviluppo di Taylor nell'intorno del punto regolare  $z = \infty$ .

È utile notare che vale

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

ma che i coefficienti successivi  $a_n$  **non** possono essere calcolati come derivate di  $f(z)$ , diversamente da quanto succede per lo sviluppo di Taylor nell'intorno di un punto al finito<sup>5</sup>.

Discorso analogo per lo sviluppo di Laurent; solo che stavolta la **parte principale** dello sviluppo (cioè quella singolare) conterrà solo **potenze positive** di  $(z-a)$ , in numero finito o infinito a seconda se il punto all'infinito è un polo o una singolarità essenziale:

$$f(z) = \cdots + a_{-1}(z-a) + a_0 + \frac{a_1}{z-a} + \cdots = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{(z-a)^n}, \quad (2.9)$$

valido per  $|z-a| > \Omega$ .

<sup>5</sup>se uno proprio vuole usare le derivate, deve passare dalla variabile  $t = 1/(z-a)$ .

**Nota importante:** Il passaggio alla variabile  $t$  è utile per dare una definizione formale del comportamento di  $f(z)$  nell'intorno del punto all'infinito, ma per fare i conti è meglio **evitarlo**; è molto più facile lavorare direttamente con la variabile  $z$ , ricordando che la quantità “piccola” è  $1/z$  o, più generalmente,  $1/(z - a)$ .

**Esempio importante:** La funzione  $\frac{1}{1-z}$ , che nell'intorno dell'origine si sviluppa con la serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

e che è essa stessa sviluppo in serie di Taylor<sup>6</sup> attorno all'infinito (in potenze di  $\frac{1}{z-1}$ ), può essere sviluppata in serie di Taylor attorno all'infinito in potenze di  $\frac{1}{z}$  con la procedura seguente:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{|z|} < 1.$$

**Teorema di Liouville:** una funzione regolare in tutto  $\overline{\mathbb{C}}$  è necessariamente una costante.

**Dimostrazione:** Per ipotesi,  $f(z)$  è intera, cioè non ha singolarità al finito, quindi il suo sviluppo di Taylor nell'intorno dell'origine  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge  $\forall z \in \mathbb{C}$ ; quindi può anche essere letto come sviluppo di Laurent nell'intorno dell'infinito. Ma per ipotesi  $f(z)$  è regolare anche all'infinito, quindi  $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$  e  $f(z) = a_0$ .

*q.e.d.*

Analogamente si dimostra il:

**Corollario 1:** una funzione intera con un polo di ordine  $N$  all'infinito è necessariamente un polinomio di grado  $N$ .

Infatti il suo sviluppo di Taylor nell'intorno dell'origine, letto come sviluppo di Laurent nell'intorno dell'infinito, deve arrestarsi alla potenza  $N$ -esima.

---

<sup>6</sup>con un solo termine.

**Corollario 2:** Una funzione **MEROMORFA**<sup>7</sup> in tutto  $\overline{\mathbb{C}}$  è necessariamente una funzione razionale.

**Dimostrazione:**

La funzione  $f(z)$  ha un **numero finito di poli**; altrimenti per la compattezza di  $\overline{\mathbb{C}}$  dovrebbe esserci un punto di accumulazione di poli, cioè una singolarità non isolata, in contrasto con l'ipotesi.

Dette  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  le posizioni dei poli al finito e  $n_i$  il loro ordine, la funzione

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{n_i}$$

è intera, perché tutti i poli al finito di  $f(z)$  sono compensati da zeri dello stesso ordine nella produttoria.

Inoltre all'infinito  $f(z)$  è regolare o, al più, ha un polo e quindi per  $z \rightarrow \infty$  si comporta come  $f(z) \sim cz^{M_1}$ , con un opportuno  $M_1 \in \mathbb{Z}$ ; comportamento analogo per  $g(z) \sim cz^{M_2}$ , con  $M_2 = M_1 + \sum_{i=1}^N n_i$ . Se ne deduce che all'infinito anche  $g(z)$  sarà regolare ( $M_2 = 0$ )<sup>8</sup> o avrà al più un polo ( $M_2 > 0$ ).

Il Corollario 1 ci dice quindi che la funzione  $g(z)$  è un polinomio  $P(z)$  e perciò:

$$f(z) = \frac{P(z)}{\prod_{i=1}^N (z - z_i)^{n_i}};$$

la funzione  $f(z)$  è quindi un rapporto di polinomi, cioè una funzione razionale.

*q.e.d.*

## 2.2.1 Esempi

**Esempio 1:**

Lo sviluppo in serie di Taylor intorno a  $z = 0$  che definisce la funzione esponenziale

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \dots$$

ha raggio di convergenza infinito e quindi vale anche in ogni intorno del punto all'infinito.

Quindi questa stessa serie può essere letta come sviluppo di Laurent nell'intorno bucato  $\mathbb{C}$  del punto all'infinito, con  $z = \infty$  singolarità essenziale di  $f(z)$ , perché il numero di potenze positive è infinito.

<sup>7</sup>Una funzione **meromorfa** in un aperto  $D$  è una funzione le cui **uniche singolarità in  $D$  siano poli**.

<sup>8</sup> $M_2 < 0$  implicherebbe  $g(z)$  identicamente nulla.

**Esempio 2:** la funzione

$$f(z) = e^{-1/z^2},$$

che ha una singolarità essenziale in  $z = 0$ , è regolare all'infinito. Infatti, lo sviluppo in serie di Laurent attorno all'origine

$$e^{-1/z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! z^{2k}} = 1 - \frac{1}{z^2} + \dots,$$

può anche essere letto come sviluppo di Taylor nell'intorno dell'infinito; esso non contiene infatti potenze positive di  $z$  e converge nell'intorno  $I_0(\infty) = \overline{\mathbb{C}} - \{0\}$  del punto regolare  $z = \infty$ .

**Esempio 3:** consideriamo la funzione

$$f(z) = ze^{-1/z} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k+1} = z - 1 + \frac{1}{2!z} + \dots$$

Letta come sviluppo di Laurent nell'intorno dell'origine, la serie ha un numero infinito di potenze negative e quindi il punto  $z = 0$  è una singolarità essenziale.

Invece, letta come sviluppo di Laurent nell'intorno dell' $\infty$ , la serie contiene una potenza positiva (la prima) di  $z$ , quindi la funzione ha un polo di ordine 1 in  $z = \infty$ .

**Esempio 4:** consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{z/(1-z)}.$$

Poniamo  $w = z - 1$ :

$$f(z) = e^{-(1+w)/w} = \frac{e^{-1/w}}{e} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/w)^k}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z-1)^k}$$

La serie di Laurent attorno al punto  $z = 1$  ha un numero infinito di potenze negative e quindi il punto  $z = 1$  è una singolarità essenziale.

Per  $z \rightarrow \infty$  la funzione ammette limite (uguale a  $e^{-1}$ ) e quindi il punto all'infinito è regolare e la serie può anche essere letta come serie di Taylor nell'intorno dell'infinito.

**Esempio 5:** sia

$$f(z) = e^{z-1/z} = e^z e^{-1/z}.$$

I punti  $z = 0$  e  $z = \infty$  sono singolarità essenziali.

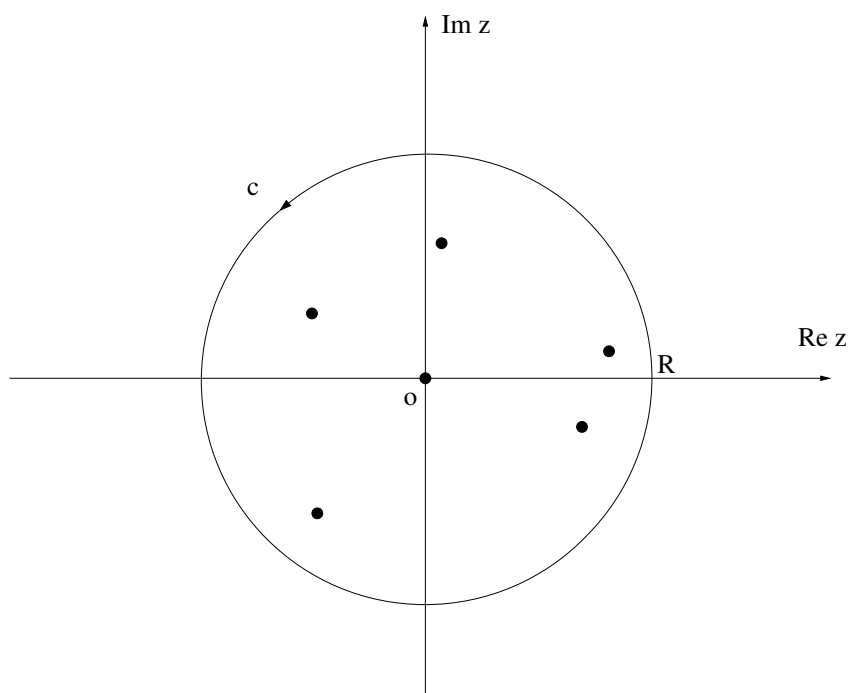


Figura 2.2: Curva chiusa di Jordan  $\gamma$  contenente al suo interno tutte le singolarità al finito di  $f(z)$ .

### 2.2.2 Calcolo del residuo nel punto all'infinito

Per valutare il residuo di una funzione  $f(z)$  in  $z = \infty$  supponiamo che esista una curva chiusa di Jordan  $\gamma$  che contenga al suo interno **tutte le singolarità al finito** di  $f(z)$  (per esempio una circonferenza  $c$  di raggio sufficientemente grande - Figura 2.2)

Allora nel **punto all'infinito** la funzione  $f(z)$  o è **regolare**, o ha una **singolarità isolata**. In **entrambi i casi** definiamo il **residuo all'infinito** come:

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (2.10)$$

dove l'integrale è calcolato percorrendo come al solito la curva  $\gamma$  in senso antiorario; il segno  $-$  ricorda che per avere  $z = \infty$  al suo *interno* la curva  $\gamma$  dovrebbe essere percorsa in senso orario<sup>9</sup>.

Sostituendo nella definizione (2.10) lo sviluppo in serie di Laurent (o di Taylor) della  $f(z)$  attorno al punto all'infinito, si può integrare termine a

<sup>9</sup>Ricordiamo che un punto  $z_0$  si definisce *interno* ad una curva chiusa  $\gamma$  se, immaginando di percorrere  $\gamma$  nel senso di percorrenza indicato,  $z_0$  viene lasciato a *sinistra*.



termine; ricordando l'identità:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^n} = \delta_{n,1},$$

che segue dal **teorema di Cauchy generalizzato** (a tal proposito si veda il paragrafo 1.6.1 di [3] ed in particolare l'integrale 1.14), si ricava che il residuo all'infinito è dato dal coefficiente, **cambiato di segno**, della potenza  $1/(z-a)$ . Per esempio, il residuo all'infinito della funzione regolare all'infinito  $f(z) = 1/z$  vale  $-1$ , mentre quello della funzione  $f(z) = z$  (che ha un polo semplice all'infinito) è nullo.

Una conseguenza immediata di quanto abbiamo detto è che una **funzione pari** ha sempre **residuo nullo all'infinito** (sempre che abbia senso definirlo), poichè il suo sviluppo in potenze di  $z$  (di Taylor o di Laurent che sia) non potrà contenere il termine  $1/z$ . Lo stesso succede per una **funzione che all'infinito sia regolare e  $O(\frac{1}{z^2})$**  e ovviamente anche per una **funzione intera**.

L'interesse principale nel definire il residuo all'infinito sta nel seguente:

**Teorema 14:** se una funzione analitica  $f(z)$  possiede **solo singolarità isolate in tutto il piano complesso esteso**, la somma di tutti i suoi residui, compreso l'eventuale residuo all'infinito, è zero.

NOTA: Se tutte le singolarità sono isolate il loro numero è finito.

**Dimostrazione.**

Sia  $\gamma$  una curva chiusa di Jordan che contenga al suo interno tutte le singolarità al finito di  $f(z)$ . Allora, per il teorema dei residui, si ha

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = +2\pi i \sum_{interni} \{\text{Res} f(z)\}$$

e per la definizione (eq.2.10) di residuo all'infinito

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \{\text{Res} f(z)\}_{z=\infty}$$

da cui si ottiene, sottraendo membro a membro,

$$\sum_{tot} \{\text{Res} f(z)\} = 0. \quad (2.11)$$

*q.e.d.*

Data una funzione  $f(z)$  che abbia un numero finito di singolarità isolate in un aperto  $D$  e una curva di Jordan  $\gamma$  tale che  $f(z) \neq 0$  per  $z \in \gamma$  e nessuna singolarità sia su  $\gamma$ , si consideri la derivata logaritmica di  $f$ ,  $L(z) = f'(z)/f(z)$  dove  $f' = df/dz$ . Definiamo indicatore logaritmico di  $f$  rispetto alla curva  $\gamma$  la quantità  $I(f, \gamma) = 1/(2\pi i) \oint_{\gamma} L(z) dz$

**Teorema 15 o dell'indicatore logaritmico:** si ha

$$I(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

dove  $Z$  e  $P$  sono rispettivamente il numero di zeri e il numero di poli di  $f$  interni a  $\gamma$ , contati con la loro molteplicità.

**Dimostrazione.** In un opportuno intorno di uno zero  $z_i$  di ordine  $n$ ,  $f$  può essere espressa come  $f(z) = (z - z_i)^n g(z)$ ,  $g(z_i) \neq 0$ . La derivata logaritmica quindi avrà la forma

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

dove  $g'/g$  è regolare in  $z_i$ . Pertanto il residuo di  $L$  in  $z_i$  vale  $n$ . Analogamente, in un opportuno intorno di un polo  $z_k$  di ordine  $m$ ,  $f$  può essere espressa come  $f(z) = (z - z_k)^{-m} h(z)$ ,  $h(z_k) \neq 0$ . La derivata logaritmica quindi avrà la forma

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_k} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

dove  $h'/h$  è regolare in  $z_k$ . Pertanto il residuo di  $L$  in  $z_k$  vale  $-m$ . Applicando il teorema dei residui a  $I(f, \gamma)$  si arriva alla tesi. Viene lasciato come esercizio la dimostrazione che le stesse relazioni sono valide per zeri e poli nel punto all'infinito.

**Corollario 1 (Il teorema fondamentale dell'algebra):** Un polinomio di grado  $n$  in  $\mathbb{C}$  ha esattamente  $n$  radici.

**Dimostrazione.** Si consideri l'indicatore logaritmico di un polinomio  $P_n$  di ordine  $n$  rispetto una curva  $\gamma$  che non contenga al suo interno alcuno zero di  $P_n$  né l'infinito. L'indicatore vale zero. Siano  $\{z_i, i = 1, \dots, m \leq n\}$  le radici del polinomio. Immaginando di percorrere la curva  $\gamma$  in verso orario si ottiene che  $\sum Res\{P'/P\}_{z_i} + Res\{P'/P\}_{\infty} = 0$ , dove  $\sum Res\{P'/P\}_{z_i}$  è il numero di zeri di  $P$ , contati col la loro molteplicità, e  $Res\{P'/P\}_{\infty} = -n$  per il teorema precedente, da cui la tesi.

**NOTA IMPORTANTE.** Ripetiamo che **esistono funzioni che, pur essendo regolari in  $z = \infty$ , hanno residuo non nullo all'infinito.** Per esempio la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

è regolare in  $z = \infty$  ma il suo residuo vale  $-1$ .

Naturalmente tale funzione è la verifica più immediata del teorema appena enunciato poiché essa ha residuo  $+1$  nell'origine e  $-1$  all'infinito; conviene richiamare questo esempio elementare per **ricordare infallibilmente** quale sia la potenza dello sviluppo di Taylor o Laurent il cui coefficiente dá il residuo all'infinito, e con quale segno.

- **Esempio 1.** A volte può essere conveniente usare l'eq. (2.11) per semplificare il calcolo di integrali in campo complesso. Per esempio l'integrale

$$\oint_C \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz \quad \text{con} \quad C = \{z, |z| = 1\}$$

richiederebbe di valutare i 4 residui interni alla curva  $C$ , nei punti  $z_i$  soluzioni di  $z^4 = -1/2$ . Utilizzando invece il teorema (2.11) si ha semplicemente

$$\oint_C \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz = -2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{z^3}{2z^4 + 1} \right\}_{z=\infty} = i\pi,$$

dove si è calcolato il residuo all'infinito dallo sviluppo di Taylor attorno all'infinito:

$$\frac{z^3}{2z^4 + 1} = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2z^4}} = \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^5}\right).$$

- **Esempio 2.** Il teorema 14 permette a volte di calcolare più facilmente il residuo di una funzione in una singolarità essenziale. Per esempio il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(\pi/z)}{z - 2}$$

nella singolarità essenziale  $z = 0$  è dato da<sup>10</sup>:

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=0} = -(\{\text{Res} f(z)\}_{z=2} + \{\text{Res} f(z)\}_{z=\infty}) = -\lim_{z \rightarrow 2} \sin \frac{\pi}{z} = -1.$$

<sup>10</sup>Si è usato il fatto che  $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$  per  $z \rightarrow \infty$  e quindi  $\text{Res} f(z)|_{z=\infty} = 0$ , perchè il coefficiente di  $\frac{1}{z}$  nello sviluppo di Taylor attorno all'infinito è nullo.

Invece il calcolo diretto è più complicato:

$$\begin{aligned} \{\text{Res}f(z)\}_{z=0} &= \left\{ \text{Res} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^l \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \right\}_{z=0} = \\ &= - \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\pi^{2k+1}}{2^{l+1}} \delta_{l-2k-1,-1} = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} = - \sin \frac{\pi}{2} = -1. \end{aligned}$$

### 2.3 Cenno alle trasformazioni conformi

Consideriamo una generica funzione di variabile complessa  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  con  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  funzioni  $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  di classe  $C_1$ .

Ponendo  $dz = dx + idy$ ,  $dz^* = dx - idy$ , si può scrivere:

$$\begin{aligned} df &= (u'_x + iv'_x) dx + (u'_y + iv'_y) dy = \\ &= \frac{1}{2} (u'_x + iv'_x) (dz + dz^*) + \frac{1}{2i} (u'_y + iv'_y) (dz - dz^*) = \\ &= \frac{1}{2} [(u'_x + v'_y) + i(v'_x - u'_y)] dz + \frac{1}{2} [(u'_x - v'_y) + i(v'_x + u'_y)] dz^* = \\ &= (\partial_z u + i\partial_z v) dz + (\partial_{z^*} u + i\partial_{z^*} v) dz^* = dz\partial_z f + dz^*\partial_{z^*} f, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{z^*} \equiv \frac{\partial}{\partial z^*} \equiv \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y).$$

Se  $f$  è analitica in  $z$ , per le condizioni di Cauchy-Riemann  $u'_x - v'_y = 0 = v'_x + u'_y$  e quindi  $\partial_{z^*} f = 0$ ,  $\partial_z f = \frac{df}{dz}$ .

Quindi se e solo se  $f$  è analitica:  $df = \frac{df}{dz} dz$  da cui  $\Delta f \equiv f(z+\Delta z) - f(z) = \frac{df}{dz} \Delta z + O((\Delta z)^2)$ .

La cosa importante è che  $f'(z)$  non dipende da  $dz$  (o  $\Delta z$ ), in particolare dalla loro fase; quindi se  $f'(z) \neq 0$  vale

$$|df| = \lambda |dz|,$$

dove  $\lambda = |f'(z)|$ ; quindi nell'intorno del punto  $z$  le distanze sono dilatate del fattore  $\lambda$ , indipendentemente dalla direzione dell'incremento  $dz$ .

Analogamente

$$\arg df = \alpha + \arg dz,$$

dove  $\alpha = \arg f'(z)$ . Allora se due incrementi  $(dz)_1$ ,  $(dz)_2$  hanno fra loro l'angolo

$$\varphi = \arg (dz)_2 - \arg (dz)_1$$

l'applicazione  $f : z \mapsto w = f(z)$  conserva lo stesso angolo fra gli incrementi: infatti  $(dw)_1 = f'(z)(dz)_1$ ,  $(dw)_2 = f'(z)(dz)_2$  implicano

$$\arg (dw)_2 - \arg (dw)_1 = [\alpha + \arg (dz)_2] - [\alpha + \arg (dz)_1] = \varphi.$$

Quindi  $f(z)$  realizza una **trasformazione conforme diretta**<sup>11</sup> nel punto  $z \in \mathbb{C}$  se:

- $f(z)$  è regolare in  $z$
- $f'(z) \neq 0$ .

Poco oltre generalizzeremo questa affermazione a un qualsiasi punto del piano complesso esteso.

In [2] è mostrato che le due condizioni enunciate sono anche condizioni necessarie perchè  $f(z)$  sia trasformazione conforme diretta in un intorno di  $z$ .

### Esempi di trasformazioni conformi dirette su tutto $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Esempio 2.3.1.** Dilatazione:  $\mathcal{D} : z \mapsto f(z) = az$  con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ;  $f'(z) = a$ .

**Esempio 2.3.2.** Traslazione:  $\mathcal{T} : z \mapsto f(z) = z + b$ ,  $\forall b \in \mathbb{C}$ ,  $f'(z) = 1$ .

$\mathcal{D}, \mathcal{T}$  hanno  $\infty$  come punto fisso e conservano gli angoli anche per  $z \rightarrow \infty$ ; infatti  $\arg(az) = \arg a + \arg z$ ;  $\arg(z + b) = \arg z + \arg(1 + \frac{b}{z}) \rightarrow \arg z$  per  $z \rightarrow \infty$ ; quindi sono conformi su tutto  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Esempio 2.3.3.** Inversione:  $\mathcal{I} : z \mapsto w = \frac{1}{z}$  è conforme  $\forall z \neq 0$ , perchè  $f(z) = \frac{1}{z}$  è analitica con  $f'(z) \neq 0$ ,  $\forall z \neq 0$ ; inoltre l'origine viene mandata nel punto all'infinito e viceversa; da  $\arg w = -\arg z$ , tenendo conto che il verso positivo per una curva che circonda l'infinito è quello orario, si deduce che  $w = \frac{1}{z}$  è conforme anche nell'origine e all'infinito.

$\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathcal{I}$  sono casi particolari delle **trasformazioni lineari fratte** discusse alla fine del primo paragrafo di questo capitolo. È immediato verificare che i loro prodotti le generano tutte. Le trasformazioni lineari fratte sono quindi *automorfismi conformi* di  $\overline{\mathbb{C}}$  (cioè omeomorfismi di  $\overline{\mathbb{C}}$  in se stesso che

<sup>11</sup>Notare che anche la *proiezione stereografica* è una trasformazione conforme diretta (vedi [1]).

conservano gli angoli); si può inoltre mostrare facilmente che sono **tutti** gli automorfismi conformi *diretti* (che conservano anche l'orientazione) su  $\overline{\mathbb{C}}$ .

DIMOSTRAZIONE: due casi sono possibili.

Caso a):  $\infty$  è punto fisso della applicazione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ; in tal caso  $\infty$  deve essere polo di  $f(z)$ , semplice perché la trasformazione sia invertibile; quindi  $f(z)$ , che deve essere intera perché l'applicazione  $f$  deve mandare  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  senza eccezioni, deve essere un polinomio di I grado, ovvero della forma  $f(z) = az + b$  con  $a \neq 0$ .

Caso b): stavolta è un punto al finito ad essere mandato in infinito; in tal caso il punto all'infinito è regolare per  $f(z)$ , che è meromorfa in  $\mathbb{C}$ , con un polo semplice nella controimmagine dell'infinito; quindi  $f(z)$  deve essere razionale e i polinomi a numeratore e a denominatore devono essere entrambi di primo grado, con il loro zero semplice controimmagine rispettivamente di 0 e di  $\infty$ .

q.e.d.

NOTA: Avendo esteso le nostre considerazioni a tutta la sfera di Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ , possiamo dire più in generale che in  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  l'applicazione  $f : z \mapsto w = f(z)$  è **conforme diretta**, quindi **localmente invertibile**, quando **aut**  $z_0$  è punto regolare di  $f(z)$  e  $f(z) - f(z_0)$  ha uno **zero semplice**, **aut**  $z_0$  è **polo semplice**.

È immediato vedere che

$$* : z \mapsto z^*$$

cambia segno agli angoli.

In generale, se  $f(z)$  è regolare in  $z_0$  ed  $f'(z_0) \neq 0$ , l'applicazione  $z \mapsto w = f(z^*)$  è **trasformazione conforme inversa** in  $z_0$ .

Le trasformazioni

$$z \mapsto w = \frac{az^* + b}{cz^* + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0$$

sono quindi tutti gli *automorfismi conformi inversi* di  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Se in  $z_0$  la funzione  $f(z)$  è regolare ed  $f'(z_0) = 0$ ,  $f''(z_0) \neq 0$ , allora  $dw = \frac{1}{2}f''(z_0)(dz)^2 + O(|dz|^3)$  quindi  $\arg(dw) = \text{cost} + 2 \arg(dz)$  La trasformazione **raddoppia gli angoli** in  $z_0$ , quindi in  $z_0$  è ovviamente non conforme.

**Esempio:** la funzione  $w = z^2$  è conforme  $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Nell'**origine** invece **raddoppia gli angoli**. Infatti se  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $w = z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$ . Quindi un intorno bucato dell'origine (anzi, in questo caso particolare, tutto  $\mathbb{C} - \{0\}$ ) è mappato da  $z \mapsto w = z^2$  ancora in un intorno dell'origine coperto due volte.

Discorso analogo per  $f(z)$  regolare in  $z_0$  con  $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ; gli angoli in  $z_0$  vengono moltiplicati per  $n$ , poichè  $dw = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (dz)^n + O(dz)^{n+1}$ .

Per esempio  $w = z^3$  è conforme  $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , ma **triplica gli angoli nell'origine (e all'infinito)**.

In preparazione a quanto vedremo più avanti a proposito delle funzioni polidrome, osserviamo che l'applicazione

$$f: z \mapsto w = f(z)$$

è **localmente invertibile** in tutti e soli i punti  $z_0$  in cui essa è conforme, cioè regolare con  $f'(z) \neq 0$ , ma non è detto che lo sia **globalmente**<sup>12</sup>; se, per esempio, in qualche punto  $f'(z)$  si annulla, la funzione non può essere globalmente invertibile.

Per esempio l'applicazione

$$f: z \mapsto w = z^2$$

non è globalmente invertibile, pur essendolo localmente in tutti i punti diversi dall'origine. La funzione inversa è la radice quadrata:

$$g: w \mapsto z = \sqrt{w},$$

che non è ben definita, perché  $z^2 = w \Leftrightarrow (-z)^2 = w$ ; si definisce allora la funzione  $g(w) = \sqrt{w}$  **localmente**, scegliendo uno dei due valori possibili in un punto  $w_0 \neq 0$ ; allora esisterà un intorno di  $w_0$  in cui il valore di  $g(w)$  è univocamente determinato; nell'esempio dato, questo intorno non può però comprendere l'origine<sup>13</sup>.

L'origine è quindi una singolarità di tipo nuovo della funzione  $g(w) = \sqrt{w}$ , che discuteremo in un paragrafo successivo.

<sup>12</sup>in analogia a quanto succede nel caso di funzioni di una variabile reale a valori reali, basti pensare ad una parabola ad asse verticale.

<sup>13</sup>cioè l'immagine  $w_0$  del punto  $z_0$  in cui l'applicazione originaria  $f$  non è localmente invertibile.

## 2.4 Continuazione analitica

Per risolvere problemi come quello accennato alla fine del paragrafo precedente, dobbiamo avere una prescrizione sicura che ci permetta di *continuare* una funzione definita localmente ad una regione più ampia del piano complesso; nel caso di funzioni a valori reali di una variabile reale non c'è speranza: nota una funzione in un intervallo non esiste alcun criterio, nemmeno la infinita derivabilità, per estenderne in modo univoco l'intervallo di definizione. Per esempio la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$$

è infinitamente derivabile in  $x = a$  e tutte le sue derivate sono nulle; ciononostante non è la funzione nulla.

Nel campo complesso invece la richiesta di analiticità della funzione permette una continuazione “*analitica*”, appunto, *quasi* unica; sarà compito di questo paragrafo precisare che cosa significa questo *quasi*.

Un ruolo cruciale gioca il Lemma seguente:

### Lemma 2.4.1.

#### IPOTESI

1.  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  è punto regolare di  $f(z)$
2.  $z_0$  è punto di accumulazione di zeri di  $f(z)$ .

#### TESI

$\exists I(z_0)$  tale che  $f(z) = 0, \forall z \in I(z_0)$

#### Dimostrazione:

Per ipotesi  $f(z)$  è regolare in  $z_0$ , quindi  $\exists I(z_0)$  in cui  $f(z)$  è sviluppabile in serie di Taylor (Vedi figura 2.3).

Mostriamo che l'ipotesi 2 implica che tutti i coefficienti siano nulli. Supponiamo dapprima  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

$$\exists I(z_0)/f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z - z_0)^l, \quad \forall z \in I(z_0).$$

**Per assurdo** supponiamo che esista qualche  $a_l \neq 0$ ; detto  $a_n$  il primo fra questi, si avrà  $a_n \neq 0, a_l = 0$  con  $l = 0, 1, \dots, n - 1$ <sup>14</sup>. Allora,  $\forall z \in I(z_0)$ ,  $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ ,  $g(z_0) \neq 0$ ,  $g(z)$  regolare in  $z_0$ . Inoltre  $(z - z_0)^n \neq$

<sup>14</sup> $z_0$  o è uno zero di ordine  $n$  di  $f(z)$  o, per  $n = 0$ , è tale che  $f(z_0) \neq 0$ .



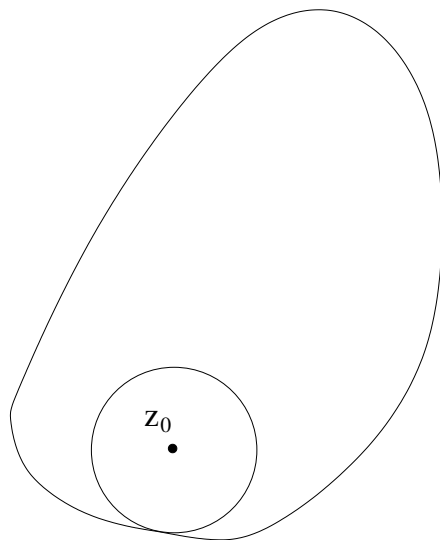


Figura 2.3: Se  $f(z)$  è regolare in  $z_0$  allora esiste un intorno in cui è sviluppabile in serie di Taylor.

$0, \forall z \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ . Per continuità di  $g(z)$  in  $z_0$ ,  $\exists \bar{I}(z_0)/g(z) \neq 0, \forall z \in \bar{I}(z_0)$ <sup>15</sup>. Quindi  $\forall z \in \bar{I}(z_0)$ ,  $f(z) \neq 0$  in contrasto con l'ipotesi che  $z_0$  sia punto di accumulazione di zeri di  $f(z)$ . Pertanto  $a_l = 0, \forall l \in \mathbb{N}$  e quindi  $f(z) = 0, \forall z \in I(z_0)$ .

La dimostrazione procede con un ragionamento analogo per  $z_0 = \infty$ , partendo dallo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{z^l}$$

che dà

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^n} \text{ se } a_n \neq 0, a_l = 0, l = 0, 1, \dots, n-1.$$

*q.e.d.*

**Commento:**  $I(z_0) = I_\delta(z_0)$  con  $\delta = \text{dist}(z_0, \partial D)$ , dove  $D$  è un aperto in cui  $f(z)$  è regolare.

Per esempio  $f(z) = \ln(1-z) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l}$ , è regolare, e identicamente nulla, in  $I_\delta(z_0)$  con  $z_0 = 0, \delta = 1$ , ovvero in  $D = \{z, |z| \leq 1\}$ .

**Commento:** Ragionamento analogo a quello usato per dimostrare il Lemma porta ad escludere che un polo possa essere un punto di accumulazione di zeri ( $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$  etc.), come d'altra parte è ovvio, visto che in un polo la funzione tende ad infinito.

<sup>15</sup>Con  $\bar{I}(z_0)$  si intende un *intorno bucato* di  $z_0$ , ovvero:  $\bar{I}(z_0) = I(z_0) - \{z_0\}$ .

Quindi<sup>16</sup>

$$z_0 \text{ punto di acc. di zeri} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{funzione ident. nulla in } I(z_0) \\ \text{AUT} \\ z_0 \text{ sing. isolata ess., per es. } \sin \frac{1}{z}, \text{ in } z_0 = 0 \\ \text{AUT} \\ z_0 \text{ sing. NON isolata, per es. } \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ in } z_0 = \infty \end{array} \right.$$

[NOTA] Non consideriamo il caso in cui  $\exists \bar{I}(z_0)/f(z) = 0, \forall z \in \bar{I}(z_0)$ , ma venga “artificialmente” scelto

$$f(z_0) \neq \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0;$$

assumiamo invece che siano state rimosse tutte le **singolarità rimovibili**; supponiamo cioè che se  $\exists \bar{I}(z_0)$  in cui  $f(z)$  è regolare e  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , allora

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Il Lemma è al servizio del seguente:

**Teorema 2.4.1.**

IPOTESI

1.  $f(z)$  regolare in un aperto  $D \subset \bar{\mathbb{C}}$  **connesso**
2.  $z_0 \in D$  punto di accumulazione di zeri di  $f(z)$

TESI

$$f(z) = 0, \forall z \in D.$$

**Dimostrazione:** Ci limitiamo qui alla dimostrazione più intuitiva, riproducendo in piccolo alla fine quella più elegante, che richiede però le nozioni di topologia del Cap.1.

Poiché  $D$  è connesso,  $\forall z_1 \in D$  esiste un cammino continuo tutto interno a  $D$  che lo connette a  $z_0$  (**connessione per archi**); si può quindi arrivare da  $z_0$  a  $z_1$  con una successione di cerchietti tutti contenuti in  $D$ , ciascuno con il

<sup>16</sup>Un’ulteriore possibilità, che impareremo a conoscere più oltre, potrebbe essere un *punto di diramazione*, per esempio:  $\sin \frac{1}{\sqrt{z}}$  in  $z_0 = 0$ .

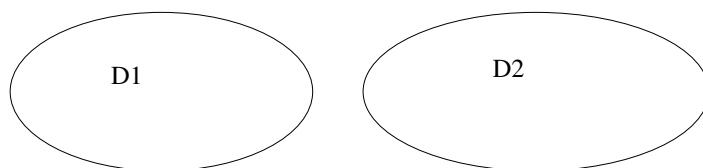


Figura 2.4:  $D$ , unione di  $D_1$  e  $D_2$ , non è connesso.

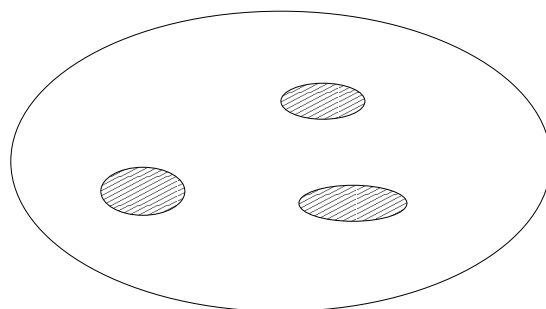


Figura 2.5:  $D$  molteplicemente connesso (“bucato”).

centro contenuto nel cerchietto precedente<sup>17</sup>; il lemma precedente ci dice che in ognuno di questi cerchietti  $f(z) = 0$  e quindi  $f(z)$  si annulla anche in  $z_1$ .

Dimostrazione elegante. Consideriamo  $D$  come spazio topologico con topologia indotta da quella di  $\overline{\mathbb{C}}$ ; quindi  $D$  è aperto e chiuso. Costruiamo il sottoinsieme  $D_0 \subset D$  unione di tutti gli aperti in cui  $f(z) \equiv 0$ , che è aperto perchè unione di aperti. Sicuramente  $D_0 \neq \emptyset$  per il Lemma e poichè per ipotesi  $z_0 \in D_0$ . Inoltre  $D_0$  è anche chiuso, infatti  $\forall z_1 \in D$  che sia punto di accumulazione di  $D_0$  è punto di accumulazione di zeri; quindi per il lemma precedente  $z_1 \in D_0$  e pertanto  $[D_0] = D_0$ . Allora essendo  $D_0$  aperto e chiuso in uno spazio topologico connesso, coincide con il supporto  $D$ :  $D_0 = D$ .

*q.e.d.*

**Commento:** 1) Ovviamente il teorema non vale se  $D$  non è connesso (Vedi figura 2.4). Esempio:  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ; si può avere  $f(z) = 0$ ,  $\forall z \in D_1$ , e nello stesso tempo  $f(z) = 1$ ,  $\forall z \in D_2$ ; naturalmente  $z_0 \in D_1$ .

$D$  invece può essere molteplicemente connesso (Vedi figura 2.5).

<sup>17</sup>la continuità del cammino ci assicura che l'estremo inferiore dei raggi dei cerchietti è un minimo e quindi non nullo.

**Commento: 2)** Il teorema può essere riformulato con ipotesi uguale a quella del Lemma, ma con tesi più forte:  $f(z) = 0, \forall z \in D_c$  dove  $D_c$  è la componente connessa del dominio di analiticità, che contiene  $z_0$  (e non solo  $f(z) = 0$  nel disco di convergenza dello sviluppo di Taylor, come nel Lemma).

Tutto questo interesse per le funzioni identicamente nulle è ovviamente motivato dal corollario seguente:

### Corollario 2.4.1.

IPOSTESI

1.  $f_1(z), f_2(z)$  regolari in  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$  connesso
2.  $I = \{z/f_1(z) = f_2(z)\}$  ha punto di accumulazione interno a  $D$

TESI

$$f_1(z) = f_2(z), \forall z \in D.$$

**Dimostrazione:** Basta applicare il Teorema per  $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ .

*q.e.d.*

Una prima interessante conseguenza di quanto visto finora è il Principio di riflessione di Schwarz, ma lo scriviamo in piccolo perché non è necessario per il prosieguo del discorso verso la continuazione analitica.

### Teorema 2.4.2. Principio di riflessione di Schwarz

IPOSTESI

1.  $f(z)$  regolare in  $D$  connesso invariante sotto complessa coniugazione, ovvero  $\forall z \in D, z^* \in D$ ;
2.  $\exists$  un intervallo  $E$ , sottoinsieme dell'asse reale,  $E \subset D$ , per cui  $f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in E$ .

TESI

$$f(z^*) = (f(z))^*, \quad \forall z \in D$$

**Dimostrazione:**

È noto che la funzione  $f_1(z) = (f(z^*))^*$  è regolare in  $D$  (ciò può essere dimostrato utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann oppure con uno sviluppo in serie di Taylor; tale dimostrazione viene lasciata come esercizio per il lettore). Inoltre per l'ipotesi 2)  $f_1(x) = (f(x^*))^* = f(x), \forall x \in E$ . Quindi per il corollario 2.4.1  $f_1(z) = f(z), \forall z \in D$ , perciò  $f(z^*)^* = f(z)$ .

*q.e.d.*

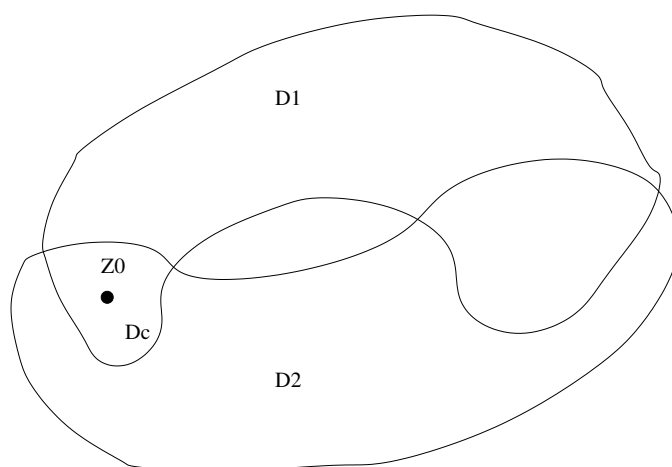


Figura 2.6: Componente connessa  $D_c$  del dominio  $D = D_1 \cap D_2$  contenente il punto di accumulazione di zeri  $z_0$ .

Una riformulazione equivalente del corollario 2.4.1 è:

**Corollario 2.4.2.**

**IPOTESI**

1.  $f_1(z)$  regolare in  $D_1$ ,  $f_2(z)$  regolare in  $D_2$
2.  $I = \{z/f_1(z) = f_2(z)\}$  ha punto di accumulazione  $z_0$  interno a  $D = D_1 \cap D_2$

**TESI**

$f_1(z) = f_2(z)$ ,  $\forall z \in D_C$  dove  $D_C$  è la componente connessa di  $D$  che contiene  $z_0$  (Vedi figura 2.6).

Siamo ora finalmente pronti a dare la definizione seguente, che è lo scopo di tutta la trattazione.

**Definizione 2.4.1.** Sia  $f(z)$  definita su un insieme di punti  $E \subset \mathbb{C}$ . Sia invece  $f_1(z)$  una funzione **regolare** in  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ,  $D$  **connesso**;  $f_1(z)$  si dice **continuazione analitica** di  $f(z)$  in  $D$ , se  $f_1(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in E \cap D$  e  $E \cap D$  ha almeno un punto di accumulazione in  $D$  (Vedi figura 2.7).

**Commento:** Non si richiede che  $f(z)$  sia regolare in  $E$ , quindi  $E$  può anche non essere aperto, per esempio un segmento dell'asse reale (notare che

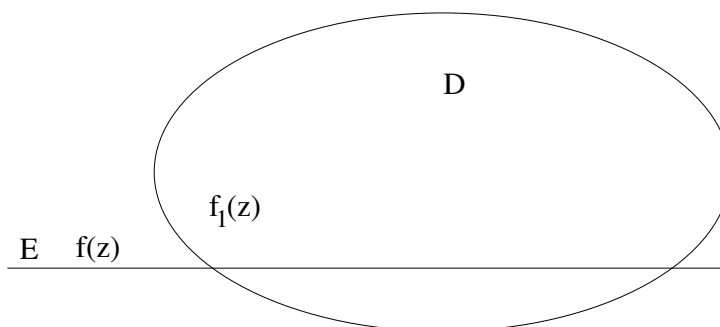


Figura 2.7:  $f_1(z)$  continuazione analitica in  $D$  di  $f(z)$  definita in  $E$ .

per esempio  $(0, 1)$  o lo stesso  $\mathbb{R}$  è aperto in  $\mathbb{R}$  ma non è aperto in  $\mathbb{C}$ , poiché i suoi punti non sono interni ad  $\mathbb{R}$  con la topologia di  $\mathbb{C}$ .

Anzi,  $E$  potrebbe essere anche soltanto un'infinità numerabile di punti; in tal caso è cruciale distinguere fra il caso in cui il punto di accumulazione di  $E$  sia o no interno a  $D$ ; il primo caso rientra fra quelli previsti dalla Definizione, il secondo no. Per esempio, se  $E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+\}$  e  $f(z) = 0, \forall z \in E$ , sia  $f_1(z) = 0$  che  $f_2(z) = \sin \frac{\pi}{z}$  coincidono con  $f(z), \forall z \in E$ ; per  $f_1(z)$  posso scegliere un dominio di regolarità  $D$  che comprende l'origine (punto di accumulazione di  $E$ ) e quindi essa può fregiarsi del titolo di continuazione analitica; per  $f_2(z)$  devo per forza escludere l'origine da  $D$ , perché è una singolarità essenziale di  $f_2(z)$ , e quindi essa **non** è continuazione analitica di  $f(z)$ .

#### PROPRIETÀ FONDAMENTALE: “PRINCIPIO DELLA CONTINUAZIONE ANALITICA”

La continuazione analitica è unica.

Infatti, se  $f_1(z)$  e  $f_2(z)$  sono entrambe continuazioni analitiche di  $f(z)$  in  $D$  **connesso**, per il corollario 2.4.1, devono necessariamente coincidere  $\forall z \in D$ .

#### ESEMPIO ELEMENTARE

Funzioni razionali e trascendenti elementari sono le uniche continuazioni analitiche in  $\mathbb{C}$  delle analoghe definite su  $\mathbb{R}$ .

Per esempio

$$e^{Rez} \equiv e^x \text{ per } z \in \mathbb{R} (z = x + iy)$$

estende  $e^x$  su tutto  $\mathbb{C}$ , ma non è analitica.

Notare che, per esempio,  $f(z) = \frac{1}{z}$  continua analiticamente  $\frac{1}{x}$ , definita su  $E = \mathbb{R} - \{0\}$ , su tutto  $D = \mathbb{C} - \{0\}$ , che non è semplicemente connesso; ma ciò che conta è solo che  $D$  sia connesso.

### 2.4.1 Metodo di Weierstrass per la continuazione analitica

Il metodo di Weierstrass procede per sviluppi in serie successivi. Questo metodo è scomodo ma ha una validità generale. Illustriamolo su un esempio elementare ( vedi figura [?])

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \text{ regolare in } D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor attorno a  $z_1 = -1/2 \in D$ ; sapendo che  $\forall z \in D$ ,  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ , troviamo subito (verificarlo) <sup>18</sup>

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (z - z_1)^n \quad (2.12)$$

Per il teorema di Taylor sappiamo che  $f_1(z) = f(z)$ ,  $\forall z / |z - z_1| < \frac{1}{2}$  ( $1/2$  è la distanza di  $z_1 = -\frac{1}{2}$  da  $\partial D$ ), quindi dentro il cerchio  $D_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_1| < \frac{1}{2}\}$ . Tuttavia con il criterio del rapporto troviamo che il raggio di convergenza della serie a secondo membro di 2.12 è  $3/2$ . Quindi  $f_1(z)$  è definita e regolare in  $C_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_1| < \frac{3}{2}\}$ . Poichè  $f_1(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in C_1 \cap D$ ,  $f_1(z)$  è continuazione analitica di  $f(z)$  in tutto  $C_1$  (Vedi figura ??).

Si può poi ripetere il gioco sviluppando attorno a  $z_2 = 3/2 \in C_1$  e definendo una continuazione analitica  $f_2(z)$  definita in un nuovo cerchio  $C_2$  e così via indefinitamente coprendo tutto  $\overline{\mathbb{C}}$ , punti di singolarità a parte (nel nostro esempio riproduciamo la funzione  $\frac{1}{1-z}$  in  $\mathbb{C} - \{1\}$ ).

**OSSERVAZIONE IMPORTANTE:** Non è detto che una funzione analitica definita da una serie convergente possa essere continuata analiticamente al di fuori del cerchio di convergenza della serie.

La serie  $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$  non può essere continuata al di fuori del cerchio  $|z| < 1$  in cui è analitica. Infatti chiaramente diverge per  $z = \pm 1$ . Si ha inoltre  $f(z) = z^2 + f(z^2)$ , quindi anche le quattro radici di  $z^2 = \pm 1$  sono singolarità di  $f$ . Iterando il procedimento si ottiene  $f(z) = \sum_{n=1}^k z^{2^n} + f(z^{2^k})$ , quindi tutte le soluzioni di  $z^{2^k} = \pm 1$ ,

<sup>18</sup>Si osservi che:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1 - \frac{(z-z_0)}{(1-z_0)}}$$

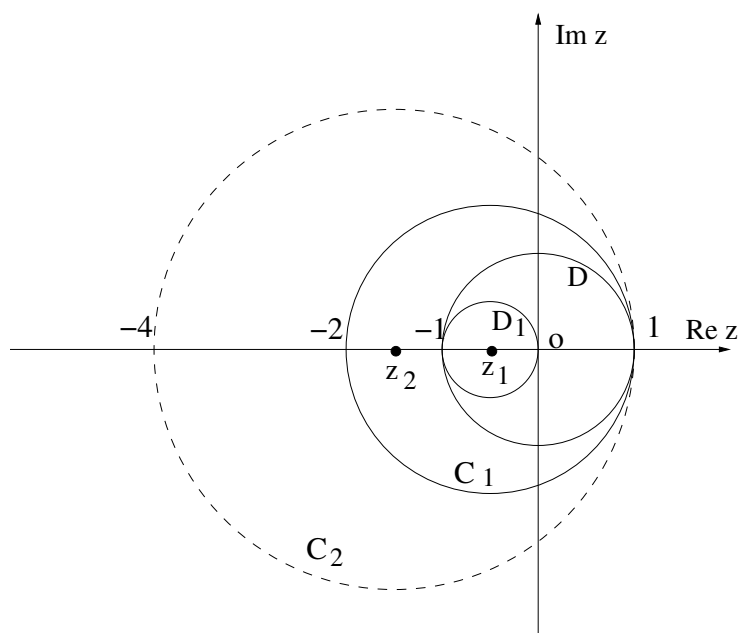


Figura 2.8: Metodo di Weierstrass: sviluppo in cerchi successivi.

$k \in \mathbb{N}_+$  sono punti singolari. L'insieme dei punti singolari è quindi denso sulla circonferenza  $|z| = 1$  e non c'è modo di continuare analiticamente  $f$ .

Nel **paragrafo successivo** discuteremo un importante esempio di continuazione analitica che permette di estendere in modo univoco a tutto  $\mathbb{C}$ , singolarità a parte, una funzione originariamente definita da un integrale che converge solo nel semipiano a destra dell'asse immaginario. Tale procedura è così naturale che spesso la si usa senza accorgersene (lo si è fatto per la Trasformata di Laplace in Metodi Matematici per la Fisica I), ma essa trae la sua legittimità dal principio di continuazione analitica che abbiamo appena discusso, altrimenti si potrebbe ottenere solo un'estrapolazione fra le tante.

Ancora **più oltre** discuteremo invece il caso più delicato delle *funzioni polidrome*, quando una stessa funzione può essere continuata in *domini diversi*, con *intersezione non connessa*, cosicché l'unicità della continuazione analitica non è più assicurata.

Vedremo che la richiesta imprescindibile di avere funzioni a un sol valore ci imporrà di impedire a domini diversi di sovrapporsi e di conseguenza introdurrà *tagli*, cioè linee di discontinuità della funzione in esame.



## 2.5 Funzioni $\Gamma$ e $B$ di Eulero

Diamo per ora una definizione “provvisoria” della *funzione*  $\Gamma$  :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.13)$$

con  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $t^z = e^{z \ln t}$ ,  $\ln t \in \mathbb{R}$ .

La condizione  $\operatorname{Re} z > 0$  è necessaria per assicurare la convergenza dell'integrale in  $t = 0$ ; infatti:

$$|t^z| = |t^{\operatorname{Re} z} t^{i \operatorname{Im} z}| = t^{\operatorname{Re} z};$$

per  $t \rightarrow +\infty$  non ci sono problemi di convergenza poichè  $e^{-t} \rightarrow 0$  più in fretta di ogni potenza.

Se cerco di derivare sotto il segno ottengo:

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \cdot t^{z-1} dt \quad (2.14)$$

che ancora converge per  $\operatorname{Re} z > 0$ ; inoltre è facile vedere che  $\forall \varepsilon, \Omega > 0$  e  $\forall z/\varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq \Omega$  l'integrando della 2.14 può essere maggiorato da una funzione<sup>19</sup>  $F(t)$  sommabile indipendente da  $z$ ; quindi, per un teorema sugli integrali di Lebesgue riportato nell'appendice C di [3], è lecito derivare sotto il segno. [Notare l'analogia con la Trasformata di Laplace].

Quindi, scegliendo opportunamente  $\varepsilon$  e  $\Omega$ , si vede che la  $\Gamma(z)$  definita dalla 2.13 è derivabile, quindi **analitica** in ogni punto  $z$  con  $\operatorname{Re} z > 0$ , ovvero **nel semipiano a destra della retta**  $\operatorname{Re} z = 0$  (Vedi figura 2.9). Tenendo conto che

$$t^{z-1} dt = d\left(\frac{t^z}{z}\right)$$

e integrando per parti si ottiene, per  $\operatorname{Re} z > 0$ ,

$$\Gamma(z) = e^{-t} \frac{t^z}{z} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z} \Gamma(z+1),$$

ovvero

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re} z > 0. \quad (2.15)$$

---

19

$$F(t) = \begin{cases} e^{-t} \ln t \cdot t^{\varepsilon-1}, & t \leq 1 \\ e^{-t} \ln t \cdot t^{\Omega-1}, & t \geq 1 \end{cases}$$

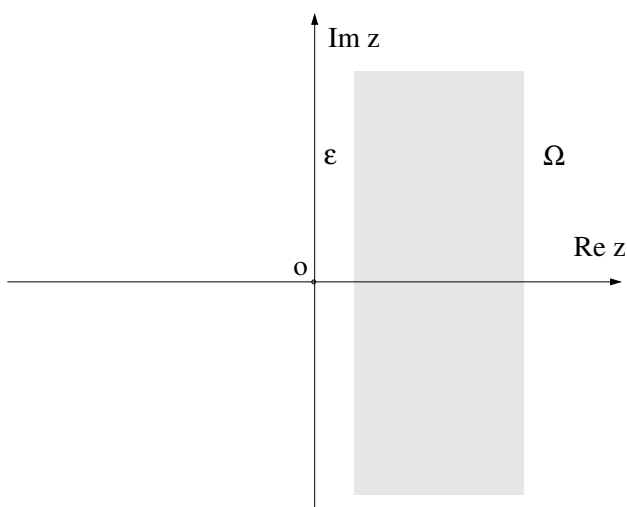


Figura 2.9: Semipiano per cui  $\varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq \Omega$ .

Questa è la **proprietà più importante della funzione  $\Gamma$** , anzi si può mostrare che la definisce, a parte una costante moltiplicativa che è fissata da

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1. \quad (2.16)$$

Dalla 2.15 e 2.16 segue che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n! \quad (2.17)$$

che giustifica la convenzione un po' sorprendente:  $0! = \Gamma(1) = 1$ .

La 2.15 può essere riscritta come

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad (2.18)$$

Il secondo membro è regolare  $\forall z / \operatorname{Re} z > -1 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ , ad esclusione di un polo semplice nell'origine, visto che  $\Gamma(z+1)$  è regolare e diversa da zero in  $z = 0$ .

Quindi, in accordo con la definizione 2.4 di continuazione analitica, il secondo membro della 2.18 può essere visto come la continuazione analitica della  $\Gamma(z)$ , definita dalla 2.13, all'insieme connesso

$$D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -1 + \varepsilon, z \neq 0\}, \forall \varepsilon > 0.$$

Il gioco si può ripetere indefinitamente scrivendo

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

ottenendo così una funzione regolare nell'insieme connesso:

$$D_\varepsilon^{(n)} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -n - 1 + \varepsilon, z \neq 0, -1, -2, \dots, -n\}$$

con poli semplici in  $z = 0, -1, -2, \dots, -n$ .

Considerando l'unione di tutti gli aperti  $D_\varepsilon^{(n)}$ , la 2.19 può quindi essere usata come **nuova definizione** della  $\Gamma(z)$ , regolare in tutto  $\mathbb{C}$ , a meno di **poli semplici** in  $z_n = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . È chiaro che il punto all'infinito è un **punto di accumulazione di poli**, quindi non è una singolarità isolata della  $\Gamma(z)$ .

**ESERCIZIO** Dimostrare che

$$\operatorname{Res} \Gamma(z)|_{z=-n} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.20)$$

Diamo ora una definizione “provvisoria” della **Beta di Eulero**:

$$B(z, u) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{u-1} dt; \quad \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} u > 0 \quad (2.21)$$

.Con la sostituzione  $t = \sin^2 \theta$  si può anche scrivere

$$B(z, u) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2z-1} d\theta \quad (2.22)$$

mentre ponendo  $t = 1 - t'$  si mostra subito

$$B(z, u) = B(u, z). \quad (2.23)$$

**Teorema 2.5.1.**

$$B(z, u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)} \quad (2.24)$$

**Dimostrazione:** Ponendo  $t = y^2$  conviene riscrivere la 2.13 nella forma

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2z-1} dy \quad (2.25)$$

da cui

$$\Gamma(z)\Gamma(u) = 4 \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-(x^2+y^2)} x^{2z-1} y^{2u-1}$$

Ponendo poi  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $dx dy = \rho d\rho d\theta$  si ottiene

$$\Gamma(z)\Gamma(u) = 4 \int_0^\infty \rho d\rho e^{-\rho^2} \rho^{2(u+z-1)} \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{2z-1} (\sin \theta)^{2u-1} = \Gamma(z+u)B(z, u)$$

dove si sono usate le equazioni 2.25 e 2.22. La 2.24 definisce  $B(z, u)$  per *continuazione analitica*  $\forall z, u \in \mathbb{C}$ , salvo  $z, u = 0, -1, -2, \dots$ .

### CASO PARTICOLARE

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (2.26)$$

L'identità segue da

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)B(z, 1-z) = 1 \cdot \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

(per il calcolo dell'integrale si veda più avanti, negli esercizi sulle funzioni polidrome).

Il risultato è stata ottenuto per  $-1 < \operatorname{Re} z < 1$ , ma il principio della continuazione analitica ci assicura che l'identità (2.26) vale in tutto il dominio connesso  $D = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ .

Importante conseguenza:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.27)$$

(nessuna ambiguità di segno perchè dall'equazione 2.13 segue  $\Gamma(z) > 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}_+$ ).

Notare che usando le identità (2.15) e (2.26) è molto facile calcolare  $\Gamma(n + 1/2)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ :

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}, \quad \Gamma(-n + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(-2)^n}{(2n-1)!!}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

dove il **semifattoriale**  $(2n-1)!!$  è il prodotto dei primi  $n$  numeri dispari:  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ .

Notare anche che il secondo membro dell'equazione 2.26 ha poli semplici  $\forall z \in \mathbb{Z}$ ; al primo membro quelli per  $z = 0, -1, -2, \dots$  sono "colpa" di  $\Gamma(z)$ , quelli per  $z = 1, 2, \dots$  sono dovuti a  $\Gamma(1-z)$ .

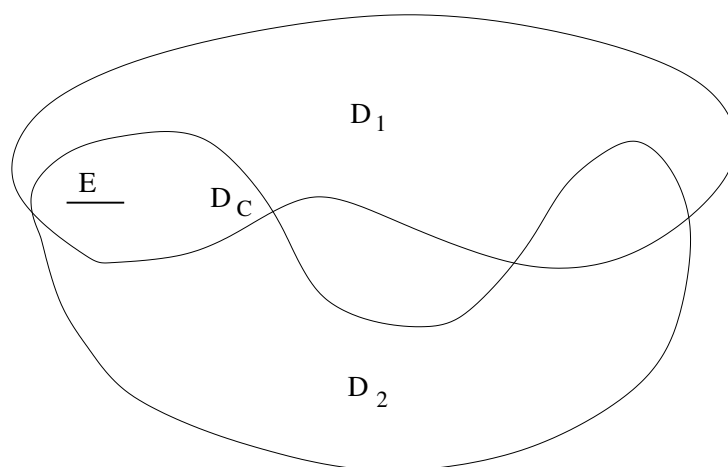


Figura 2.10:  $D_c$  è la componente connessa di  $D = D_1 \cap D_2$  contenente un punto di accumulazione di  $E$ .

Dalla 2.26 segue che

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\pi} \sin \pi z \cdot \Gamma(1 - z)$$

è **funzione intera**. Infatti i poli semplici di  $\Gamma(1 - z)$  in  $z = 1, 2, \dots$  sono cancellati da zeri semplici di  $\sin \pi z$ ; all'infinito  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  ha invece una singolarità essenziale, punto di accumulazione di zeri.

Ne segue che  $\Gamma(z)$  **non si annulla mai**  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

## 2.6 Funzioni polidrome

Affrontiamo adesso il caso in cui una stessa funzione può essere continuata in *domini diversi*, con *intersezione non connessa*, cosicché l'unicità della continuazione analitica non è più assicurata.

**RIFORMULAZIONE DEL PRINCIPIO DELLA CONTINUAZIONE ANALITICA.**

Sia  $f(z)$  definita su un insieme di punti  $E \subset \mathbb{C}$  e siano  $f_1(z)$  la continuazione analitica di  $f(z)$  in  $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$  ( $D_1$  connesso) e  $f_2(z)$  la continuazione analitica di  $f(z)$  in  $D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$  ( $D_2$  connesso); allora  $f_1(z) = f_2(z)$ ,  $\forall z \in D_c$  dove  $D_c$  è la componente connessa di  $D = D_1 \cap D_2$  che contiene almeno un punto di accumulazione di  $E$  (Vedi figura 2.10).

È possibile definire una nuova  $\tilde{f}(z)$  che sia la continuazione analitica di  $f(z)$  in tutto  $D_1 \cup D_2$ ?

Certamente sì, se  $D_1 \cap D_2$  è connesso:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

perchè per il principio della continuazione analitica  $f_1(z) = f_2(z)$ ,  $\forall z \in D_1 \cap D_2$ .

Se invece  $D_1 \cap D_2$  è **disconnesso**, allora il principio della continuazione analitica ci dice solo che  $f_1(z) = f_2(z)$ ,  $\forall z \in (D_1 \cap D_2)_C$ , cioè nella **componente connessa** che comprende il punto di accumulazione dell'insieme  $E$  in cui è definita  $f(z)$ ; quindi per poter scrivere  $\tilde{f}(z)$  come in 2.28, bisogna verificare a parte che  $f_1(z) = f_2(z)$  anche nella parte disconnessa di  $D_1 \cap D_2$ , e questo a volte è vero, a volte no.

### 2.6.1 Un primo esempio: la radice quadrata

Un primo esempio è la **radice quadrata**, cui abbiamo già accennato alla fine del paragrafo sulle trasformazioni conformi.

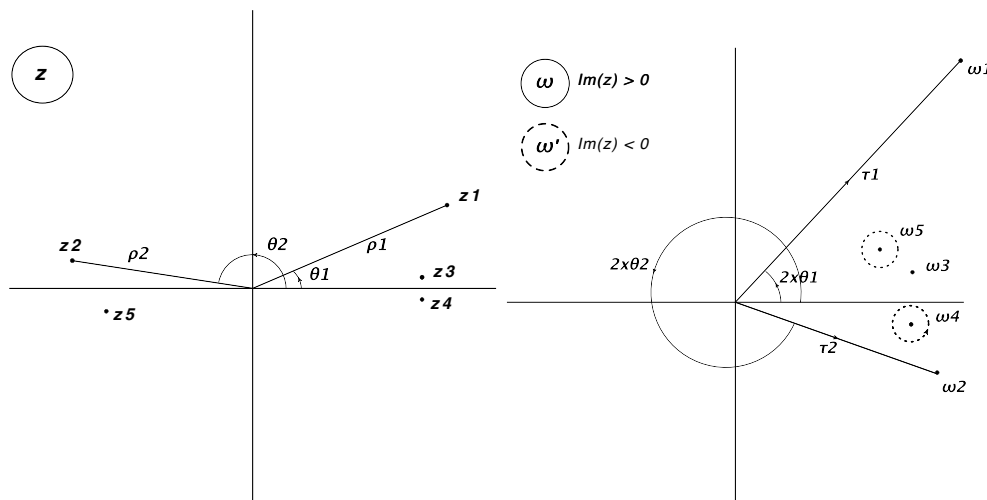


Figura 2.11: Il piano complesso della variabile  $z$  (sinistra) e quello della funzione  $w = z^2$  (destra);  $w_i = z_i^2$ . L'immagine del semipiano superiore  $0 \leq \theta < \pi$  ricopre l'intero piano complesso. Anche l'immagine del semipiano inferiore  $\pi \leq \theta < 2\pi$  ricopre l'intero piano. Per visualizzare questa situazione gli oggetti che appartengono a questo secondo piano sono circondati da un cerchietto tratteggiato.

Il modo più semplice di visualizzare la situazione è partire dalla funzione inversa  $w = z^2$  pensandola come una trasformazione del piano complesso  $\mathbb{C}$  in

se stesso, Fig. 2.11 . L'immagine del semipiano superiore  $0 \leq \theta < \pi$ , incluso l'asse reale positivo, ricopre l'intero piano complesso. Anche l'immagine del semipiano inferiore  $\pi \leq \theta < 2\pi$ , incluso l'asse reale negativo, ricopre l'intero piano. Quindi l'immagine di  $\overline{\mathbb{C}}$  sotto la trasformazione  $\omega = z^2$  è formata da **due copie** di  $\overline{\mathbb{C}}$  che chiamiamo  $\Omega$ , l'immagine del semipiano superiore, e  $\Omega'$ , l'immagine del semipiano inferiore<sup>20</sup>. C'è una corrispondenza biunivoca, tramite la funzione  $z^2$ , fra i punti del piano della variabile  $z$  e l'insieme dei punti di  $\Pi = \Omega \cup \Omega'$ . Per ciascun punto di  $\Pi$  possiamo risalire in modo univoco al punto di cui è immagine. È quindi ovvio come definire l'inverso della funzione  $\omega : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \Pi, \omega(z) = z^2$ : questa funzione è la radice quadrata

$$\sqrt{\omega} = \sqrt{\tau e^{i2\theta}} = \begin{cases} \sqrt{\tau} e^{i\theta} & \text{se } \omega \in \Omega \\ \sqrt{\tau} e^{i(\theta+\pi)} & \text{se } \omega \in \Omega' \end{cases} \quad (2.29)$$

Poichè la metà positiva dell'asse reale viene mappato in  $\Omega$  e la metà negativa in  $\Omega'$ , entrambi i piani risultano **tagliati** lungo l'asse reale positivo. Sia in  $\Omega$  che in  $\Omega'$ , per qualunque punto del semipiano inferiore, vicino all'asse reale positivo, è possibile trovare un intorno completamente contenuto nel semipiano stesso. Il punto  $z = 0$ , l'unico punto in  $\overline{\mathbb{C}}$  per cui le due radici coincidono, viene mappato nell'origine sia di  $\Omega$  che di  $\Omega'$  che pertanto vengono considerati coincidenti. Sull'asse reale positivo di  $\Omega$ , dove  $\theta = 0$ , la radice quadrata di un numero reale  $x$  coincide con la determinazione positiva dell'ordinaria radice quadrata in  $\mathbb{R}$ . Il punto  $z_a = x - i\epsilon$ , con  $\epsilon$  reale, positivo e arbitrariamente piccolo, che si trova subito al di sotto del taglio, viene mappato in un punto che si trova subito *al di sopra* dell'asse reale *negativo* di  $\overline{\mathbb{C}}$ . Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  va a coincidere con la determinazione negativa dell'ordinaria radice quadrata in  $\mathbb{R}$ . È quindi chiaro che la funzione radice quadrata non è continua in  $\Omega$ . Consideriamo ora il numero reale  $x$  sull'asse reale di  $\Omega'$  e il punto  $z_b = x - i\epsilon$ , che si trova subito al di sotto del taglio. Il punto  $x$ , la cui anomalia vale zero viene mappato in  $\sqrt{x} e^{i(\pi)}$ , cioè in  $-\sqrt{x}$ . Il punto  $z_b$ , d'altra parte, avendo anomalia prossima a  $2\pi$  viene mappato in un punto che si trova subito *al di sotto* dell'asse reale *positivo* di  $\overline{\mathbb{C}}$  che nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  va a coincidere con la determinazione positiva dell'ordinaria radice quadrata in  $\mathbb{R}$ . Quindi la funzione radice quadrata non è continua in  $\Omega'$ . Notiamo però che, a parità di ascissa, il valore della funzione sul bordo *superiore* di  $\Omega$  coincide con il valore sul bordo *inferiore* di  $\Omega'$  e che il valore della funzione sul bordo *inferiore* di  $\Omega$  coincide con il valore sul bordo *superiore* di  $\Omega'$ . Si può quindi costruire la funzione radice quadrata in modo che sia continua su  $\Pi$  saldando il bordo *superiore* di  $\Omega$  con il bordo *inferiore* di  $\Omega'$  e il bordo

<sup>20</sup>In realtà sarebbe possibile e completamente equivalente dividere  $\overline{\mathbb{C}}$  lungo una qualunque retta passante per l'origine.

*inferiore* di  $\Omega$  con il bordo *superiore* di  $\Omega'$ . La superficie che si ottiene con questa procedura si chiama la superficie di Riemann della radice quadrata, i piani  $\Omega$  e  $\Omega'$  ne costituiscono i *fogli* ( per essere più precisi due “possibili” fogli).

La superficie di Riemann della radice può essere ottenuta anche con un procedimento di continuazione analitica alla Weierstrass, partendo dallo sviluppo in serie della funzione  $f = z^{1/2}$  nel punto regolare  $z = 1$ , assumendo la determinazione  $f(1) = 1^{21}$  (vedi figura 2.12 ).

Si ha:

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!(z-1)^n}{n! 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!(z-1)^n}{(1-2n)(n!)^2 4^n}. \quad (2.30)$$

Questo sviluppo è valido in  $B(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| < 1\}$ , dove abbiamo definito  $B(e^{i\theta}) = \{z \in \mathbb{C}, |z - e^{i\theta}| < 1\}$ .

Moltiplicare un qualunque numero complesso  $z$  per  $e^{i\theta}$  equivale a ruotare  $z$  di un angolo  $\theta$  in verso antiorario. Moltiplicando per  $e^{i\theta}$  la relazione  $z - (z^{1/2})^2 = 0$ , valida in  $B(1)$ , si ottiene  $e^{i\theta}z - (e^{i\theta/2}z^{1/2})^2 = 0$  che ci fornisce lo sviluppo in serie della funzione  $f$  in  $B(e^{i\theta})$ , ovviamente con  $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta/2}$ . Quindi, in  $B(e^{i\theta})$  vale:

$$f(z' = e^{i\theta}z) = e^{i\theta/2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!(e^{-i\theta})^n(e^{i\theta}z - e^{i\theta})^n}{n! 2^n} \right) \quad (2.31)$$

che si può anche ottenere facilmente sviluppando direttamente in serie la funzione. È importante notare che la variabile  $z$  può variare solo nell'intorno  $B(1)$ , mentre  $z' = e^{i\theta}z$  varia in  $B(e^{i\theta})$ .

Questa procedura permette di continuare analiticamente la funzione  $f$  da  $B(1)$  al cerchio di raggio 2 centrato nell'origine. Per convincersene è sufficiente valutare i valori assunti dalla serie Eq.(2.30) e dalla serie in Eq.(2.31) per punto generico  $z = e^{i\alpha}$ . Nel primo caso si ottiene:

$$f_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!(e^{i\alpha} - 1)^n}{n! 2^n} = e^{i\alpha/2}. \quad (2.32)$$

<sup>21</sup>Si potrebbe partire assumendo la determinazione  $f(1) = -1$ . La serie di partenza sarebbe diversa ma il procedimento sarebbe il medesimo.

Notare che lo sviluppo della radice quadrata è un caso particolare di:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k-1)}{k!}$$



Nel secondo:

$$f_2 = e^{i\theta/2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-3)!! (e^{i(\alpha-\theta)} - 1)^n}{n! 2^n} \right) = e^{i\theta/2} \cdot e^{i(\alpha/2 - \theta/2)} = e^{i\alpha/2}. \quad (2.33)$$

Quindi sul tratto di circonferenza tratteggiata in figura 2.12 appartenente all'intersezione di  $B(1)$  e  $B(e^{i\pi/2})$  i due sviluppi in serie coincidono e, di conseguenza, le due funzioni analitiche sono una la continuazione analitica dell'altra.

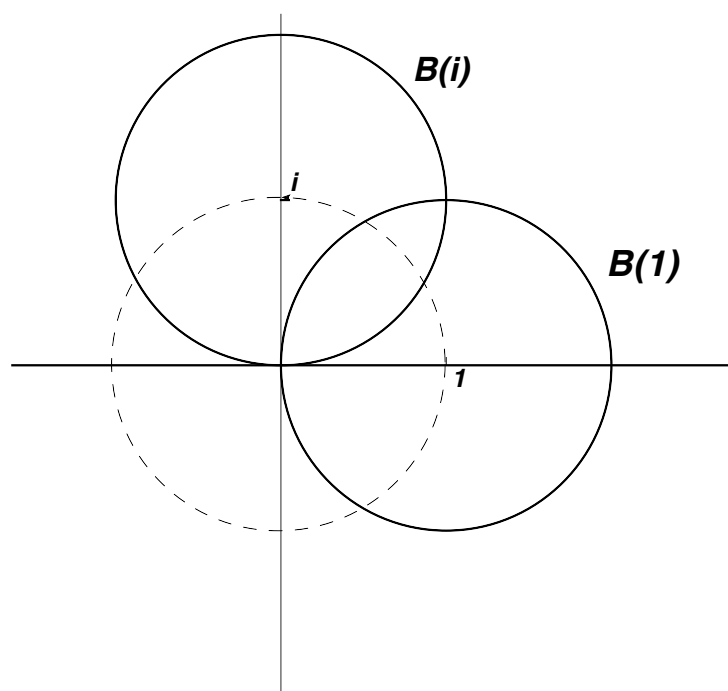


Figura 2.12: Continuazione analitica alla Weierstrass della radice quadrata

Utilizzando questo metodo, la funzione di variabile reale a valori reali:

$$\sqrt{x} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

può essere prolungata nel campo complesso fino al semiasse reale negativo **aut** passando **sopra** l'origine, e allora si trova

$$“f(-1)” = (e^{i\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i,$$

**aut** passando **sotto** l'origine, e allora si trova

$$“f(-1)” = (e^{-i\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

Il semiasse reale negativo rappresenta una linea di discontinuità sul foglio di Riemann così ottenuto. Applicando lo stesso procedimento a partire dalla determinazione  $f(1) = -1$  si ottiene un secondo foglio di Riemann, anch'esso con una linea di discontinuità sul semiasse reale negativo. Quando però saldiamo i due fogli otteniamo la **stessa superficie di Riemann** ottenuta considerando il mapping  $\omega = z^2$ . I fogli di Riemann si ottengono tagliando la superficie di Riemann lungo due linee opportune che partono da zero e arrivano all'infinito. Per ciascun punto  $z$  sulla prima linea che viene mappato nella determinazione  $f_1$  di  $\sqrt{z}$ , la seconda passa per il punto  $z'$  che viene mappato nella determinazione  $-f_1$ , in modo da preservare l'univocità della funzione  $f$  su ciascun foglio. Diverse scelte dei tagli producono diversi fogli di Riemann. In ogni caso saldando per continuità i due fogli si ottiene sempre la stessa superficie.

Potremmo addirittura scegliere come taglio una qualsiasi curva di Jordan dall'origine all'infinito, non necessariamente una semiretta; quel che conta è che dobbiamo impedire alla continuazione analitica di fare un giro completo attorno all'origine (in questo caso ciò equivale anche girare attorno all'infinito); quindi il taglio deve sempre terminare in questi due punti speciali, l'origine e l'infinito in questo caso. I punti da cui deve necessariamente partire un taglio si chiamano **punti di diramazione**.

Renderemo più formali e generali le definizioni di *taglio* e di *punto di diramazione* dopo aver esaminato in dettaglio un altro esempio.

(NOTA INTIMIDATORIA del docente: in qualsiasi scritto segnerò come errore grave espressioni del tipo  $(-1)^{1/2}$  o simili, salvo che sia specificato in modo univoco il loro significato).

## 2.6.2 Un secondo esempio: il logaritmo

Stavolta intendiamo continuare analiticamente la funzione di variabile reale a valori reali:

$$\ln x \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.34)$$

Studiamo il mapping generato dall'esponenziale, la funzione inversa del logaritmo. È immediato rendersi conto che l'immagine di una qualunque striscia parallela all'asse reale di altezza  $2\pi$ ,  $\alpha \leq \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi$  del mapping  $\omega = e^z$  ricopre l'intero piano complesso  $\overline{\mathbb{C}}$ , si veda la figura 2.13. Pertanto l'immagine del piano complesso per azione della funzione esponenziale è una **collezione infinita di copie di  $\overline{\mathbb{C}}$** , tagliati lungo la semiretta uscente dall'origine ad angolo  $\alpha$ . La superficie di Riemann del logaritmo è quindi composta da un numero infinito di fogli.

Allo stesso risultato si può arrivare studiando le radici dell'equazione

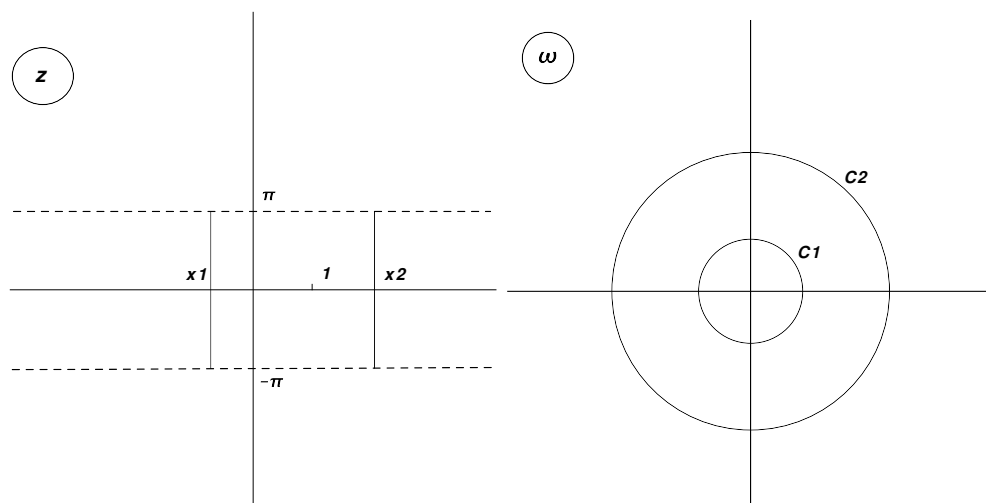


Figura 2.13: Il piano complesso della variabile  $z$  (sinistra) e quello della variabile  $\omega = e^z$  (destra). Le circonferenze  $C_i$  sono le immagini dei segmenti  $x_i$ . L'immagine della striscia  $-\pi \leq \text{Im}(z) < \pi$  ricopre l'intero piano complesso. Lo stesso vale per qualunque striscia orizzontale di altezza  $2\pi$ .

$$e^w = z, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad w \text{ incognita}$$

Posto

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = |z| > 0, \quad \varphi = \arg z \in I_{2\pi},$$

dove  $I_{2\pi}$  = qualsiasi intervallo semiaperto di ampiezza  $2\pi$ , posso scrivere

$$z = e^{\ln \rho + i\varphi}, \quad \ln \rho \in \mathbb{R}.$$

Quindi le possibili radici sono

$$w = \ln \rho + i\varphi + 2\pi in, \quad n \in \mathbb{Z}$$

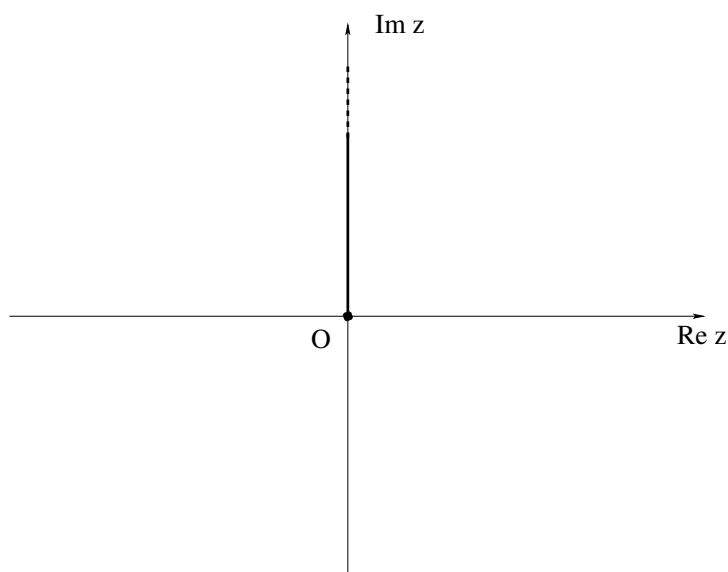
poichè  $e^{2\pi in} = 1$ .

Non ci sono altre radici; infatti  $e^{w'} = z \Rightarrow e^{w'-w} = 1$  e le soluzioni di  $e^z = 1$  sono  $z = 2\pi in, n \in \mathbb{Z}$ . Infatti posto  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a) & e^x \cos y = 1 \\ b) & e^x \sin y = 0 \Leftrightarrow \sin y = 0 \Leftrightarrow y = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Gli  $n$  dispari vanno scartati perchè contraddicono a) (infatti  $\cos(2m+1)\pi = -1, e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ) e quindi a)  $\Rightarrow x = 0, y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Figura 2.14: Dominio  $D_I$ .

Quindi  $e^w = z$  ha infinite soluzioni  $\forall z \neq 0$ <sup>22</sup>:

$$w = \ln |z| + i \arg z + 2\pi in, \quad \ln |z| \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e non posso definire  $\ln z$  come **la** soluzione di  $e^w = z$ .

Definisco  $\ln z$  come continuazione analitica della funzione di variabile reale a valori reali 2.34 scegliendo una particolare soluzione.

Per esempio

$$(\ln z)_I = \ln |z| + i \arg z, \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

è continuazione analitica di  $\ln x$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$  nel dominio:  $D_I = \mathbb{C} - \{z = iy, y \geq 0\}$  (Vedi figura 2.14) con **taglio** sull'asse immaginario positivo dove  $(\ln z)_I$  è **discontinua** (Ricordiamo che la continuazione analitica ha supporto in un aperto).

Un'altra possibile scelta (con discontinuità, ovvero **taglio**, sull'asse immaginario negativo) è

$$(\ln z)_{II} = \ln |z| + i \arg z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

<sup>22</sup> $z = 0$  è il *punto lacunare* (cioè l'unico non raggiunto in un intorno di una singolarità essenziale) di  $e^w$  relativo alla singolarità essenziale  $w = \infty$ ;  $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , l'insieme dei punti  $w_n$  per cui  $e^{w_n} = z$  ha l'infinito come punto di accumulazione.

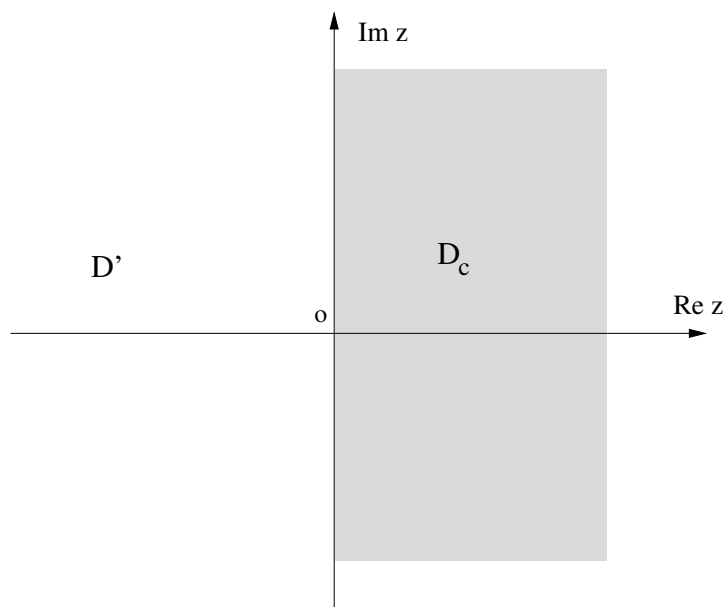


Figura 2.15: Rappresentazione di  $D_c$  e  $D'$ .

Anche  $(\ln z)_{II}$  è continuazione analitica di  $\ln x$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$  nel dominio  $D_{II} = \mathbb{C} - \{z = iy, y \leq 0\}$  con **taglio** sull'asse immaginario negativo (Vedi figura 2.15).

**Domanda:** La proprietà fondamentale (principio della continuazione analitica) mi dice che  $(\ln z)_I = (\ln z)_{II}$ ??

Sì! Ma solo per la parte connessa di  $D_I \cap D_{II}$  che contiene  $\mathbb{R}_+$ . Infatti (Vedi figura 2.15)

$$D_I \cap D_{II} = \mathbb{C} - \{z = iy, y \in \mathbb{R}\} = D_C + D'$$

$$D_C = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad D' = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0\}$$

dove  $\mathbb{R}_+ \subset D_C$  e  $D_C \cap D' = \emptyset$

$$(\ln z)_I = (\ln z)_{II} = \ln |z| + i \arg z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad \forall z \in D_C$$

$$\left. \begin{aligned} (\ln z)_I &= \ln |z| + i \arg z, & -\frac{3\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{2} \\ (\ln z)_{II} &= \ln |z| + i \arg z, & \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \right\} \forall z \in D'$$

$$\Rightarrow (\ln z)_{II} = (\ln z)_I + 2\pi i, \quad \forall z \in D'$$

Dobbiamo quindi prendere atto che la **funzione analitica globale**  $\ln z$  ammette **determinazioni** diverse; il modo più generale per descriverla è di

scegliere un **taglio** una volta per tutte, per esempio l'asse reale negativo per non far torto a nessuno, e di definire tutte le determinazioni:

$$f_n(z) = \ln |z| + i \arg z + 2\pi in, \quad -\pi < \arg z \leq \pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

$$\forall z \in D = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Ogni  $f_n(z)$  è discontinua sull'asse reale negativo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_n(-|x| + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_n(-|x| - i\epsilon) + 2\pi i;$$

Ripetiamo che la linea di discontinuità si chiama **taglio** ed i suoi estremi (nella fattispecie 0 e  $\infty$ ) **punti di diramazione**.

Vale però una sorta di continuità generalizzata nel senso che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_n(-|x| + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{n+1}(-|x| - i\epsilon); \quad (2.36)$$

quindi il valore della determinazione  $f_n(z)$  sopra il taglio coincide con quello della determinazione  $f_{n+1}(z)$  sotto il taglio; se, arrivando da sopra, procedo con continuità attraverso il taglio, passo dalla determinazione  $f_n$  alla determinazione  $f_{n+1}$ .

Se si saldano tra loro i domini  $D$  di ogni determinazione come suggerito dalla equazione 2.36 si ottiene la **superficie di Riemann** del logaritmo, parametrizzabile come

$$\mathcal{R} = \{(\rho, \varphi), \rho > 0, \varphi \in \mathbb{R}\},$$

che riproduce infinite volte  $D$  (cioè il piano complesso tagliato) e su cui la funzione analitica globale  $\ln z$  diventa una funzione a un sol valore

$$\ln : (\rho, \varphi) \mapsto \ln \rho + i\varphi.$$

I piani complessi tagliati  $D$  si ottengono tagliando  $\mathcal{R}$  lungo l'asse  $\mathbb{R}_-$  (di qui il nome *taglio*) e vengono chiamati **fogli** della superficie di Riemann.

Tutto il discorso si può naturalmente ripetere mettendo il taglio da un'altra parte, per esempio scegliendo  $\mathbb{R}_+$ ; stavolta avrò le determinazioni:

$$g_n(z) = \ln |z| + i \arg z + 2\pi in, \quad 0 < \arg z \leq 2\pi.$$

Ricucendo tutti i fogli riottengo la stessa identica superficie di Riemann di prima. Notare che i  $g_n(z)$  e gli  $f_n(z)$  descrivono sempre la stessa funzione logaritmo, ma su supporti diversi. Vale infatti

$$g_n(z) = f_n(z), \quad 0 < \arg z \leq \pi$$

$$g_n(z) = f_{n+1}(z), \quad \pi < \arg z \leq 2\pi.$$

Ci sono infinite altre possibilità: il **taglio** può essere qualsiasi linea (di Jordan) che colleghi i due **punti di diramazione**, che sono invece fissi in zero e infinito.

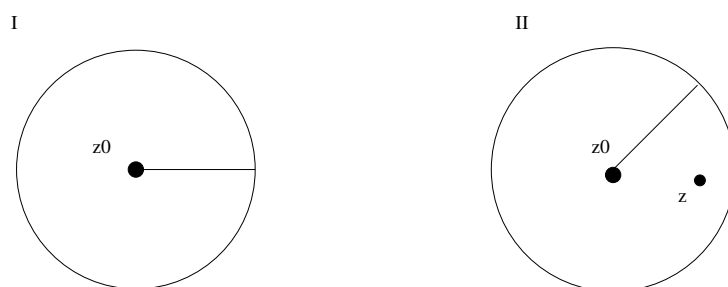


Figura 2.16: La linea di discontinuità può essere scelta dove ci fa più comodo (per esempio se voglio  $f(z)$  regolare in  $z$  posso spostare il taglio come in II).

### 2.6.3 Definizione generale di punto di diramazione

La lezione generale che possiamo trarre dagli esempi visti finora ci permette di enunciare la seguente

**Definizione:** Il punto  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  è **punto di diramazione** di  $f(z)$  se non esiste  $\overline{I}(z_0)$  tale che  $f(z)$  sia regolare in  $\overline{I}(z_0)$ , ma esiste  $\overline{I}(z_0)$  tale che  $\forall z \in \overline{I}(z_0)$  si può trovare **una determinazione** di  $f(z)$  regolare in  $z$  (Vedi figura 2.16).

L'apparente paradosso si risolve notando che non esiste cioè una *singola* determinazione di  $f(z)$  regolare in tutto  $\overline{I}(z_0)$  e che per evitare che determinazioni diverse portino ad ambiguità si deve sempre stabilire un **taglio**, cioè una linea di discontinuità che parte da  $z_0$  e che arriva sulla frontiera di  $\overline{I}(z_0)$ ; naturalmente, se ci spingiamo fuori dell'intorno  $\overline{I}(z_0)$ , il taglio dovrà finire da qualche parte, in generale su un altro punto di diramazione<sup>23</sup>.

È importante notare che, per definizione, un **punto di diramazione**  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  è una **singolarità non isolata**, infatti da esso parte sempre una linea di discontinuità; quindi **non ha senso** parlare di sviluppi di Taylor o di Laurent nell'intorno di un punto di diramazione, né tantomeno di residuo.

**OSSERVAZIONE 1:** Il **modo pratico** per accertare se  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  è un punto di diramazione di una funzione  $f(z)$  è il seguente: partire da un punto  $z_1$  in un intorno abbastanza piccolo di  $z_0$ , in cui non ci siano altre singolarità, e prolungare analiticamente  $f(z)$  **facendo un giro attorno a  $z_0$**  e verificare se  $f(z)$  torna o no allo stesso valore in  $z_1$ .

<sup>23</sup>salvo casi patologici di funzioni definite solo su una porzione del campo complesso; in tal caso un taglio potrà anche finire sul bordo del dominio di definizione.

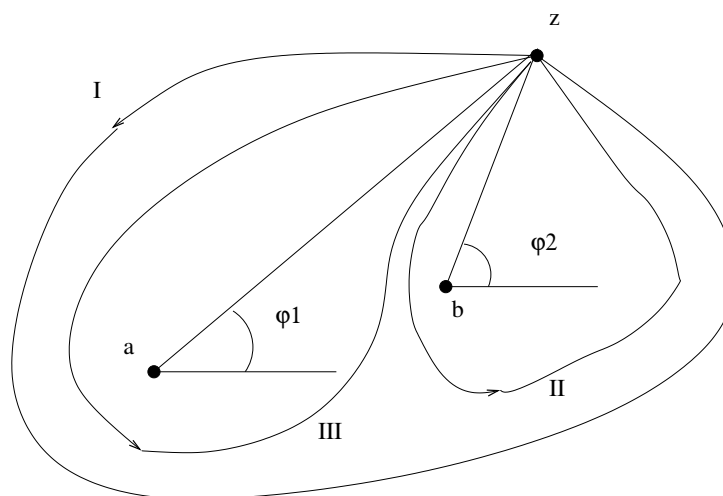


Figura 2.17: Diversi percorsi corrispondono a diverse variazioni di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Tornando all'esempio del logaritmo occorre inoltre osservare che  $0$  e  $\infty$  non sono per nulla dei punti speciali; dobbiamo infatti ricordare che con una trasformazione lineare fratta possiamo sempre mandare  $0 \rightarrow a$  e  $\infty \rightarrow b$ . Se per esempio consideriamo

$$f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$$

questa ha punti di diramazione in  $a$  e  $b$ , cioè nei punti in cui il suo argomento si annulla o va a infinito;  $f(z)$  è invece regolare in  $z=0$  e  $z=\infty$ .

Invece

$$g(z) = \ln [(z-a)(z-b)] = \ln(z-a) + \ln(z-b)$$

ha punti di diramazione in  $a, b$  ed  $\infty$ .

CHECK (usando l'osservazione 1)

$$f(z) = \ln \left( \frac{z-a}{z-b} \right) = \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right| + i(\varphi_1 - \varphi_2),$$

con  $\ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right| \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_1 = \arg(z-a)$ ,  $\varphi_2 = \arg(z-b)$ ;

mentre

$$g(z) = \ln [(z-a)(z-b)] = \ln |(z-a)(z-b)| + i(\varphi_1 + \varphi_2).$$



Girando attorno al punto all'infinito lungo  $I$  (Vedi figura 2.17) sia  $\varphi_1$  che  $\varphi_2$  aumentano di  $2\pi$ ,  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 2\pi^{24}$ ; girando invece attorno al punto  $b$  lungo  $II$ ,  $\Delta\varphi_1 = 0$ ,  $\Delta\varphi_2 = 2\pi$ , mentre girando attorno al punto  $a$  lungo  $III$ ,  $\Delta\varphi_1 = 2\pi$ ,  $\Delta\varphi_2 = 0$ .

Quindi ritornando in  $z$ , dopo aver fatto un giro lungo  $I$ , cioè attorno all'infinito,  $f(z)$  torna al suo valore; invece  $g(z)$  cresce di  $4\pi i$ ; naturalmente sia  $f(z)$  che  $g(z)$  cambiano di valore dopo un giro lungo  $II$  o lungo  $III$ .

### 2.6.4 Prescrizione pratica per trattare funzioni polidrome

Se  $f(z)$  è una funzione sospetta di polidromia è anzitutto necessario darle un senso univoco, senza il quale non è degna di essere chiamata funzione; a questo scopo si deve  **fissare il foglio di Riemann**  su cui si lavora.

Convieni procedere effettuando i passi seguenti, nell'ordine suggerito:

- **Passo 1**

Individuare i punti di diramazione con la procedura descritta nell'Osservazione 1 del paragrafo precedente.

- **Passo 2**

Unire i punti di diramazione con tagli; ci sono infinite scelte possibili, si faccia la più conveniente per il problema che si sta studiando; si eviti per esempio di passare sopra punti di particolare interesse, come possibili singolarità isolate.

Nel caso in cui si debba calcolare un integrale lungo un cammino che unisca due punti di diramazione, come si vedrà in un paragrafo seguente, si fissi il taglio proprio lungo il cammino di integrazione.

- **Passo 3**

In un punto  $z_0$  opportuno scegliere per la funzione **uno** fra i valori possibili; questo si ottiene fissando in  $z_0$  i valori degli angoli che entrano *sempre* in gioco, che a priori sono definiti  $\pmod{2\pi}$ .

Per una funzione che sia la continuazione analitica di una funzione reale di variabile reale, definita in un certo intervallo, conviene fissare gli angoli proprio su quell'intervallo (o *sopra di esso*, se si è scelto come taglio) in modo che lì  $f(z)$  sia reale.

---

<sup>24</sup> $\Delta$  sta per incremento.

- **Passo 4**

In tal modo si è **fissato il foglio di Riemann** su cui si lavora e la funzione è univocamente determinata in tutti i punti, che devono essere raggiunti muovendosi con continuità a partire da  $z_0$  senza che  $z$  attraversi i tagli.

- **Passo 5**

Se invece si permette che  $z$  attraversi un taglio, continuando analiticamente  $f(z)$  oltre di esso, **si passa ad un altro foglio**, o, se si preferisce, ad un'altra determinazione della funzione analitica globale; i tagli funzionano come lo specchio di Alice, solo che al di là non c'è il paese delle meraviglie, ma solo un'altra determinazione della stessa funzione.

Attraversando ripetutamente i tagli in tutti i modi possibili si esplorano tutti i fogli della Superficie di Riemann associati alla funzione analitica globale  $f(z)$ .

ATTENZIONE: questo ultimo passo è inutile qualora si voglia discutere soltanto una ben precisa determinazione della funzione  $f(z)$ .

### Esempio 2.6.1.

$$f(z) = \ln \left( \frac{z-a}{z-b} \right) = \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right| + i\varphi$$

dove

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \varphi_1 = \arg(z-a), \quad \varphi_2 = \arg(z-b)$$

ed  $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$ .

1. Prima scelta: taglio sul segmento  $a, b$ .

Fisso gli angoli dove  $f(z_0)$  è reale, per esempio per  $z_0 = x > b$ ; allora  $f(x) \in \mathbb{R}$  per  $x > b$  implica  $\varphi = 0$  per  $z_0 = x > b$  (Vedi figura 2.18).

In  $z_0 = x > b$  scelgo quindi  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ; potrei anche sceglierli entrambi uguali a  $2\pi$ , ma dovrei proprio essere masochista.

Questa scelta fissa il valore di tutti gli altri angoli; per esempio:

$$\begin{aligned} z = x + i\varepsilon \text{ con } a < x < b \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0+, \quad \varphi_1 \rightarrow 0, \quad \varphi_2 \rightarrow \pi \\ \Rightarrow \varphi \rightarrow -\pi \end{aligned}$$

(Vedi figura 2.19)

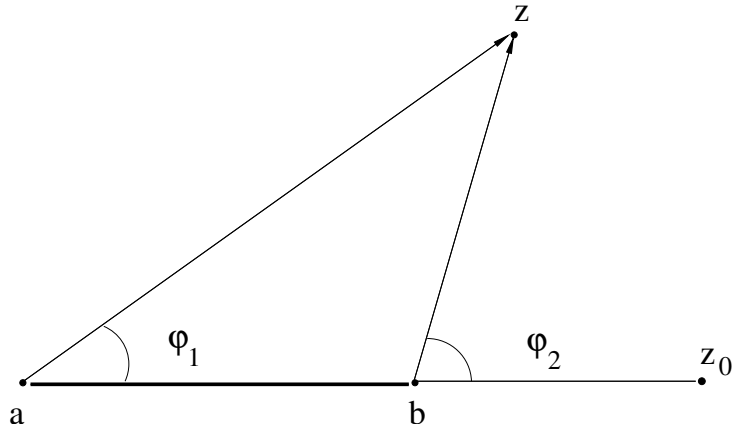


Figura 2.18: Taglio sul segmento  $ab$ .

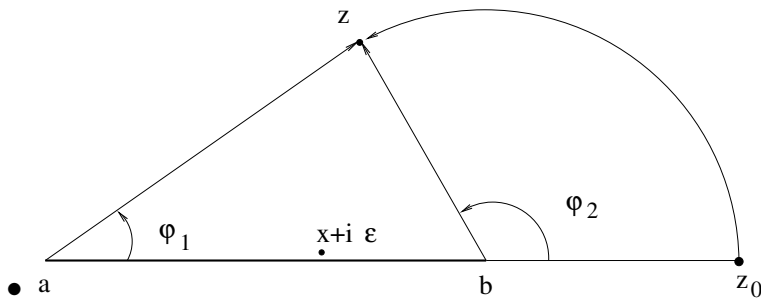


Figura 2.19: Taglio sul segmento  $ab$ ; valore degli angoli sopra il taglio.

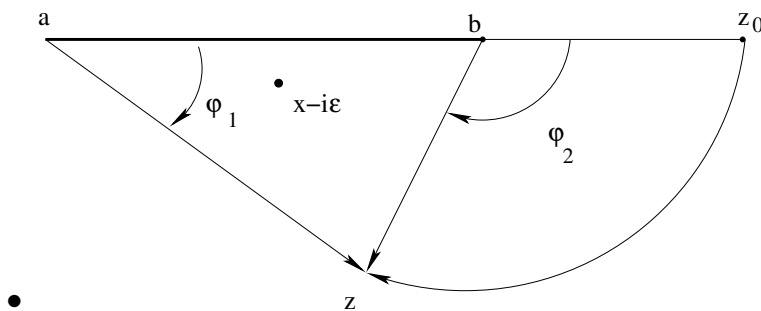


Figura 2.20: Taglio sul segmento  $ab$ ; valore degli angoli sotto il taglio.

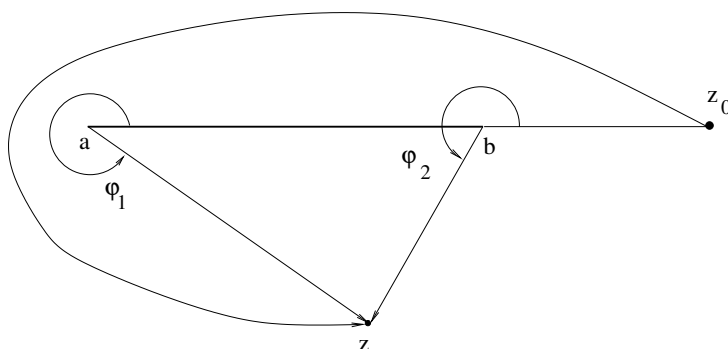


Figura 2.21: Taglio sul segmento  $ab$ ; valore degli angoli sotto il taglio con un altro cammino.

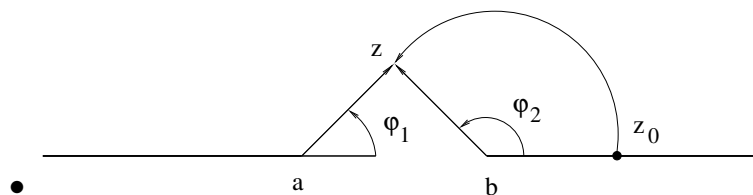


Figura 2.22: Taglio con semirette uscenti da  $a$  e  $b$ .

$$z = x - i\varepsilon \text{ con } a < x < b \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0+, \varphi_1 \rightarrow 0, \varphi_2 \rightarrow -\pi \\ \Rightarrow \varphi \rightarrow +\pi$$

(Vedi figura 2.20)

- Altro cammino (Vedi figura 2.21):  $\varphi_1 \rightarrow 2\pi, \varphi_2 \rightarrow \pi \Rightarrow \varphi \rightarrow +\pi \Rightarrow$  stesso risultato che nel caso precedente.

2. Un'altra possibile scelta del taglio è quella con due semirette uscenti da  $a, b$ ,  $x \leq a$ ,  $x \geq b$ . Fisso  $f(z_0) \in \mathbb{R}$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ) con  $z_0 = x + i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0+$ ,  $x > b$ .

Deduco quindi:

$$a < x < b, z = x + i\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0+, \varphi_1 \rightarrow 0, \varphi_2 \rightarrow \pi \\ \Rightarrow \varphi \rightarrow -\pi$$

(Vedi figura 2.22)

$$x > b, z = x - i\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0+, \varphi_1 \rightarrow 0, \varphi_2 \rightarrow 2\pi \\ \Rightarrow \varphi \rightarrow -2\pi$$

(Vedi figura 2.23)

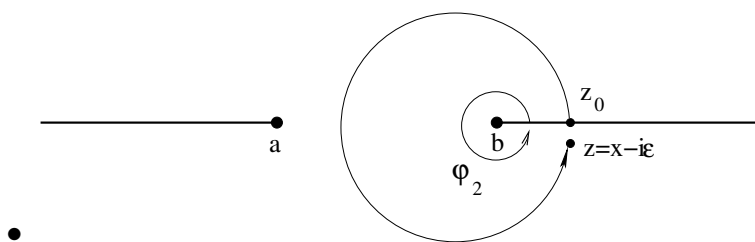


Figura 2.23: Valore degli angoli sotto il taglio.

### 2.6.5 Poldromie di tipo potenza

**Definizione 2.6.1.**  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

Per  $\alpha$  generico, si ha la stessa superficie di Riemann del  $\ln z$ ; i punti di diramazione sono 0 e  $\infty$ .

CASI PARTICOLARI

Per  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z^n = e^{n \ln z} = e^{n(\ln z + 2\pi i)}$$

è funzione monodroma;  $z = 0$  è punto regolare per  $n \geq 0$  mentre per  $n < 0$  è polo di ordine  $|n|$ ; il discorso è analogo per  $z = \infty$ , che è punto regolare per  $n \leq 0$  e polo per  $n > 0$ .

Per  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $q \in \mathbb{N}_+$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  con  $p$  e  $q$  primi fra loro

$$z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} \ln |z|} e^{i \frac{p}{q} \arg z}$$

è periodica di periodo  $2\pi q$  in  $\arg z$ ;  $z = 0$  e  $z = \infty$  sono punti di diramazione “di ordine  $(q - 1)$ ”.

DEFINIZIONE

Un punto di diramazione si dice **di ordine**  $n$  se la funzione ritorna al suo valore dopo  $(n + 1)$  giri attorno ad esso, ovvero se la corrispondente superficie di Riemann ha  $(n + 1)$  fogli (Vedi figura 2.24).

In particolare:  $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{1}{2} \arg z}$  cambia segno facendo variare con continuità  $\arg z$  di  $2\pi$ . Si hanno dunque 2 fogli in cui  $\sqrt{z}$  ha segno opposto.

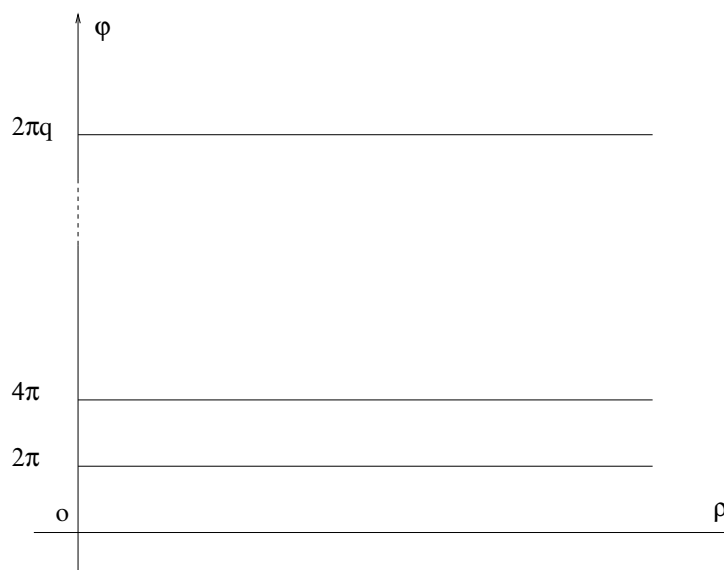


Figura 2.24: Superficie di Riemann per  $z^{\frac{p}{q}}$  con  $q$  fogli (la linea  $\varphi = 2\pi q$  viene identificata con la linea  $\varphi = 0$ ).

Invece  $\ln z$  e  $z^\alpha$  con  $\alpha \neq \frac{p}{q}$  hanno polidromia di ordine infinito attorno all'origine (e all'infinito) perchè continuando a girare non si ritorna mai al valore precedente<sup>25</sup>.

**ESERCIZIO 1** Considerare le seguenti funzioni e studiarne la polidromia:

$$f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b.$$

Si ottiene che  $a, b$  sono punti di diramazione di ordine 1;  $\infty$  è invece un polo semplice.

**ESERCIZIO 2**

$$f(z) = [(z-a)(z-b)(z-c)]^{\frac{1}{3}}, \quad a \neq b \neq c \neq a.$$

Si ottiene che  $a, b, c$  sono punti di diramazione di ordine 2;  $\infty$  è invece un polo semplice.

<sup>25</sup>Non ci sono altri valori di  $\alpha$  (oltre ai razionali) per cui  $z^\alpha$  sia periodica in  $\arg z$ ; infatti  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\alpha n \in \mathbb{Z}$ ; se poi  $\text{Im } \alpha \neq 0$ ,  $|z^\alpha| = e^{\text{Re } \alpha \ln |z|}$ ,  $e^{-\text{Im } \alpha \arg z}$  non può essere periodico in  $\arg z$ .

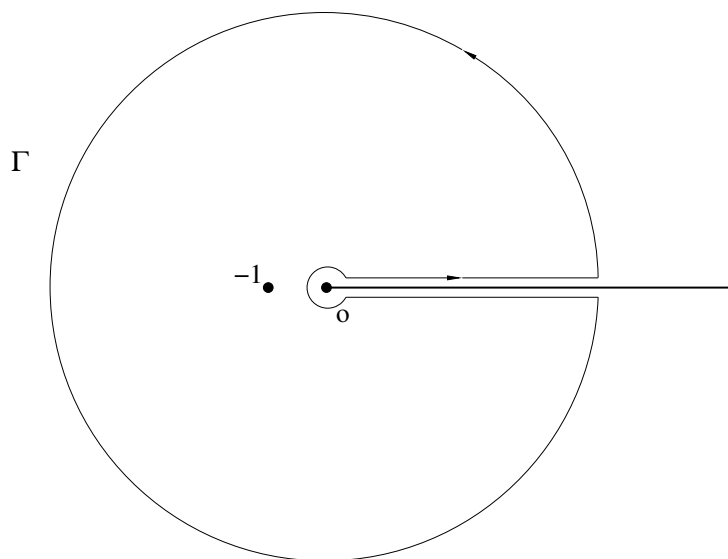


Figura 2.25: Taglio su  $\mathbb{R}_+$ ; punti di polidromia in 0 ed  $\infty$ . Cerchio grande  $C_R$  di raggio  $R$ ; cerchio piccolo  $C_\varepsilon$  di raggio  $\varepsilon$ .

### 2.6.6 Calcolo di un integrale notevole.

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 dt \cdot t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha} \quad (2.37)$$

con  $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ , perchè l'esistenza richiede  $\operatorname{Re}(\alpha-1) > -1$  e  $\operatorname{Re}(-\alpha) > -1$ .

Il calcolo diventa più semplice con il cambio di variabili  $w = \frac{t}{1-t}$ , che manda all' $\infty$  il punto di diramazione in 1.

Poiché  $0 < t < 1$  implica  $\frac{t}{1-t} > 0$ , l'intervallo d'integrazione viene mandato sul semiasse reale positivo; inoltre  $t = \frac{w}{1+w} \Rightarrow dt = \frac{1}{(1+w)^2} dw$  e quindi l'integrale diventa:

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^\infty dw \frac{w^{\alpha-1}}{1+w}, \quad (2.38)$$

dove le condizioni prima determinate per  $\alpha$  sono (ovviamente) anche quelle che danno senso a questo integrale.

Considero ora (Vedi figura 2.25):

$$I = \oint_{\Gamma} dz f(z), \quad f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$$

il cui integrando ha punti di diramazione in 0 e  $\infty$  e polo semplice in  $-1$ . Taglio su  $\mathbb{R}_+$  e scelgo  $0 \leq \arg z < 2\pi$ , cosicchè  $\arg z = 0$  per  $z = x + i\varepsilon$ ,  $x > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .

Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)|_{z=-1} = 2\pi i (e^{i\pi})^{\alpha-1} = -2\pi i e^{i\pi\alpha}; \quad (2.39)$$

ma vale anche, a meno di termini  $O(\varepsilon^2)$ :

$$I = \int_0^R dx f(x + i\varepsilon) + \int_{C_R} dz f(z) + \int_R^0 dx f(x - i\varepsilon) - \int_{C_\varepsilon} f(z) dz;$$

grazie alla disuguaglianza di Darboux gli integrali  $\int_{C_R}$  e  $\int_{C_\varepsilon}$  vanno a zero per  $R \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  sotto le stesse condizioni per cui esiste l'integrale di partenza.

Quindi

$$I = \int_0^\infty dx (f_+(x) - f_-(x)) = (1 - e^{2\pi i\alpha}) B(\alpha, 1 - \alpha)$$

dove

$$f_\pm(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x \pm i\varepsilon);$$

si è inoltre usato:

$$f_+(x) = f(x), \quad f_-(x) = e^{2\pi i\alpha} f(x).$$

Usando la 2.39 si ottiene perciò:

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{-2\pi i e^{i\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} = \frac{-2i}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} \pi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Il risultato è stato ottenuto per  $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$  ma può essere esteso per continuazione analitica  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ; un'utile verifica è che per  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $0 < \alpha < 1$  sono positivi sia  $B(\alpha, 1 - \alpha)$ , data dall'integrale 2.38, che  $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ .

#### ALTRO MODO DI CALCOLARE L'INTEGRALE

Si può calcolare l'integrale 2.37 anche senza il cambio di variabili in  $w$ , considerando

$$I = \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

lungo il cammino  $\Gamma$  di figura 2.26).

L'integrando è

$$f(z) = z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} = \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha$$



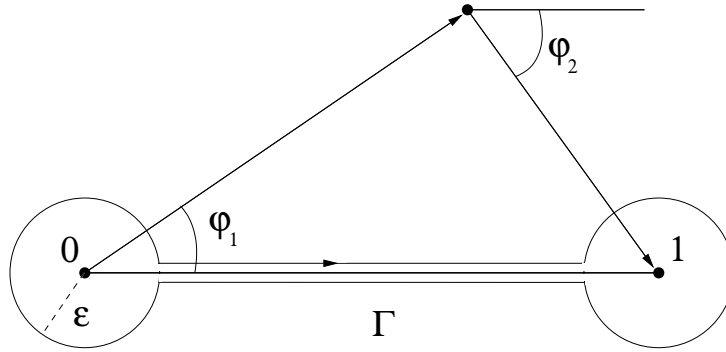


Figura 2.26:  $f(z)$  ha punti di diramazione in 0 ed 1 ma non ha singolarità all'esterno di  $\Gamma$ .

che ha punti di diramazione in 0 e 1 ed

è regolare all'infinito, anzi ivi ha uno zero del I ordine; quindi  $f(z)$  non ha singolarità all'esterno di  $\Gamma$  (Vedi figura 2.26) e si può scrivere<sup>26</sup> :

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = \\ &= 2\pi i \left( - \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) \right) = 2\pi i \left( - \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{1-z} \right)^\alpha \right) = \\ &= -2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{z}{1-z} \right|^\alpha e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)\alpha} \right) \end{aligned}$$

Per  $z = x + i\varepsilon$ ,  $0 < x < 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , scegliamo  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  con  $\varphi_1 = \arg z$  e  $\varphi_2 = \arg(1-z)$ .

**NOTA PRATICA IMPORTANTE:** Mentre  $z - a$  è rappresentato da un vettore da  $a$  verso  $z$ , e quindi  $\arg(z - a)$  dall'angolo (rispetto alla direzione del semiasse reale positivo) con cui  $a$  vede  $z$ , il vettore  $a - z$  va invece da  $z$  verso  $a$  e quindi  $\arg(a - z)$  è l'angolo con cui  $z$  vede  $a$ .

Mandando  $z$  all'infinito lungo il semiasse reale positivo si ha quindi:

$$z = x \rightarrow +\infty, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = -\pi;$$

quindi  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ .

Lo stesso risultato si raggiungerebbe mandando  $z$  all'infinito lungo il semiasse reale negativo:

$$z = x \rightarrow -\infty, \quad \varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = 0,$$

<sup>26</sup>il segno più è dovuto al fatto che  $\Gamma$  è percorsa in verso orario; il calcolo del Residuo all'infinito con il limite è possibile perché è uno zero del I ordine.

oppure lungo il semiasse immaginario positivo:

$$z \rightarrow +i\infty, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2},$$

e così via; quindi, qualunque sia il modo in cui  $z \rightarrow \infty$ <sup>27</sup> :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$$

e

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi.$$

Quindi

$$I = -2\pi i e^{i\pi\alpha}.$$

D'altra parte, al I ordine in  $\varepsilon$ :

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(t + i\varepsilon) dt + \int_{C_{1,\varepsilon}} f(z) dz + \int_1^0 f(t - i\varepsilon) dt + \int_{C_{0,\varepsilon}} f(z) dz;$$

per  $\varepsilon \rightarrow 0$  gli integrali  $\oint_{1,\varepsilon}$  e  $\oint_{0,\varepsilon}$  vanno a zero per la Disuguaglianza di Darboux, come nel caso precedente; quindi

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^1 f_+(t) dt - \int_0^1 f_-(t) dt \quad .$$

Inoltre, analogamente al caso precedente:

$$f_+(t) = f(t), \quad f_-(t) = f(t)e^{i2\pi\alpha},$$

(come si vede girano attorno a zero in senso antiorario:  $\Delta\varphi_1 = 2\pi$ ,  $\Delta\varphi_2 = 0$ ; o attorno a 1 in senso orario:  $\Delta\varphi_1 = 0$ ;  $\Delta\varphi_2 = -2\pi$ ) e quindi vale anche:

$$I = (1 - e^{i2\pi\alpha}) B(\alpha, 1 - \alpha)$$

da cui

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{-2\pi i e^{i\pi\alpha}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \frac{-2\pi i}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

---

<sup>27</sup>l'indifferenza del risultato rispetto alla direzione con cui si va a infinito conferma che esso **non** è un punto di diramazione.

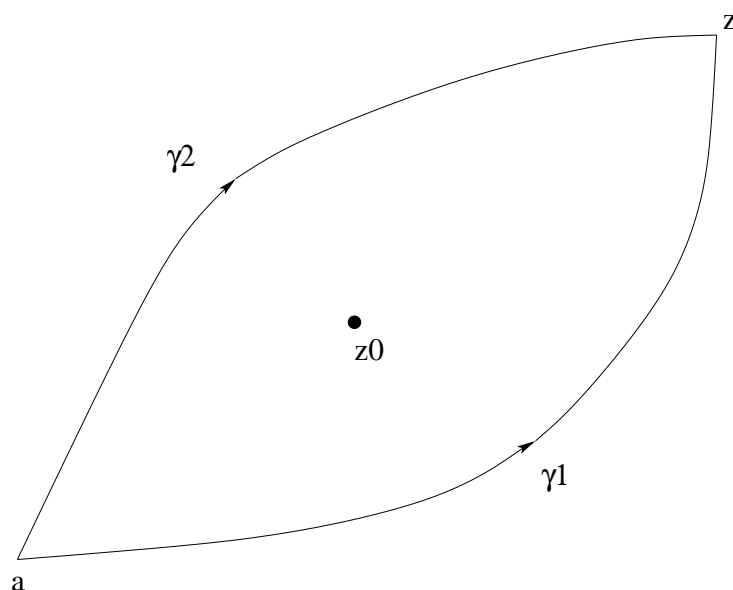


Figura 2.27: Se  $f(z)$  è regolare in  $D$ , non semplicemente connesso, l'integrale può dipendere dal cammino.

### 2.6.7 Funzioni con polidromia logaritmica costruite come primitive

Un altro modo per costruire una classe di funzioni polidrome con polidromia di tipo logaritmico consiste nel considerare

$$F(z) = \int_a^z f(z') dz', \quad a, z \in D$$

con  $f(z)$  regolare in  $D$  connesso

Se  $D$  è semplicemente connesso allora  $F(z)$  è regolare in  $D$  (infatti  $F(z)$  dipende solo dagli estremi; inoltre  $\exists F'(z) = f(z)$ ).

Ma se il dominio  $D$  di regolarità di  $f(z)$  non è semplicemente connesso (Vedi figura 2.27), può succedere

$$F_1(z) = \int_{a, \gamma_1}^z f(z') dz' \neq F_2(z) = \int_{a, \gamma_2}^z f(z') dz'$$

se

$$\gamma_1 \gamma_2^{-1} \not\sim 0 \text{ in } D$$

Un esempio paradigmatico è  $f(z) = \frac{1}{z}$ : il dominio di analiticità di  $\frac{1}{z}$  è  $\mathbb{C} - \{0\}$ , non semplicemente connesso; lo diventa se faccio un taglio da 0

all' $\infty$  (pensare alla sfera di Riemann) e la primitiva,  $\ln z$ , diventa definita univocamente; se invece non faccio alcun taglio e pongo per esempio  $a = -1$ ,  $z = 1$ , con  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che aggirano l'origine rispettivamente di sotto e di sopra,  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  fa un giro attorno all'origine e  $F_1(1) - F_2(1) = 2\pi i$ . In generale se  $z_0$  è singolarità isolata di  $f(z)$ , e non ci sono altre singolarità all'interno di  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ , allora

$$F_1(z) - F_2(z) = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)|_{z_0}.$$

Quindi: singolarità isolata di  $f(z)$  con  $\operatorname{Res} \neq 0 \Rightarrow$  punto di diramazione logaritmico della primitiva  $F(z)$ . Questo è ovvio se si considera la serie di Laurent attorno a  $z_0$ :

$$f(z) = \dots + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) +$$

$$F(z) = \sum_{\substack{n \neq -1 \\ n \in \mathbb{Z}}} \left[ \frac{1}{n+1} a_n (z - z_0)^{n+1} \right] + a_{-1} \ln(z - z_0) + \text{cost.}$$

Notare che  $F(z)$  soddisfa l'equazione differenziale  $F'(z) - f(z) = 0$  con  $f(z)$  nota. Più in generale, per ogni equazione differenziale nel campo complesso<sup>28</sup>:

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0$$

sappiamo che  $u(z)$  è regolare dove lo sono  $p(z)$  e  $q(z)$ ; ne segue, ricordando la definizione di punto di diramazione nel paragrafo 2.6.3, che le singolarità isolate di  $p(z)$  e  $q(z)$  sono punti di diramazione di  $u(z)$  (salvo possibili eccezioni in cui una soluzione particolare può ivi essere regolare o avere una singolarità isolata).

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} \exp \left( \int_{1,\gamma}^z \frac{d\omega}{\omega} \right)$$

fornisce un esempio notevole.  $f(z)$  è analitica in tutto il piano complesso ad esclusione dell'origine e del punto all'infinito. Si verifica facilmente che la derivata di  $f$  è zero  $\forall z$ , quindi la funzione è costante. In particolare  $f(1) = 1$  e quindi  $f(z) = 1 \forall z$  da cui segue

$$\exp \left( \int_{1,\gamma}^z \frac{d\omega}{\omega} \right) = z \quad \forall z.$$

<sup>28</sup>Scriviamo un'equazione del secondo ordine, ma il discorso è facilmente generalizzabile agli ordini più alti.

---

Di conseguenza  $g(z) = \int_{1,\gamma}^z \frac{d\omega}{\omega}$  è la funzione inversa dell'esponenziale, cioè il logaritmo, in tutto il piano complesso. La polidromia del logaritmo può quindi essere interpretata come conseguenza della polidromia della funzione  $g$ , il cui valore nel punto  $z$  dipende soltanto dal numero di avvolgimenti attorno all'origine della curva  $\gamma$  con estremi in 1 e  $z$  su cui viene calcolato l'integrale. Ogni avvolgimento aggiunge o toglie  $2\pi i$  a  $g(z)$ , a seconda del verso di percorrenza.



# Bibliografia

- [1] Buzano M.L.-Mathis M.L.: *Analisi matematica 2* ; Torino,Levrotto&Bella ,1992
- [2] Ahlfors L.V: *Complex analysis. An introduction to the theory of analitic functions of one complex variable* ; McGraw-Hill,1979
- [3] M.B.Barbaro, M.Frau, S.Sciuto: *Introduzione ai metodi matematici della Fisica* ; Dipartimento di Fisica Teorica dell'università di Torino, 2001.
- [4] Whittaker and Watson: *Modern Analysis* ; Cambridge University Press





# Capitolo 3

## Sviluppi asintotici e metodo del punto a sella

### 3.1 Successioni e sviluppi asintotici

Richiamo sui simboli di *ordine asintotico* (di Landau) (si veda [1]).

Siano  $f(z)$ ,  $\varphi(z)$  analitiche in  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in [D]$ ; non è necessario  $z_0 \in D$ , il caso interessante è proprio quando  $z_0 \notin D$  ed è punto di accumulazione di  $D$ , cioè  $z_0 \in \partial D$ . Spesso  $z_0 = \infty$ .

**S1** : Supponiamo inoltre per semplicità che  $z_0$  non sia un punto di accumulazione di zeri di  $\varphi(z)$ .

**Definizione 3.1.1.** (“O grande”)  $f = O(\varphi)$ ,  $z \rightarrow z_0$ ,  $z \in D$ ,  $z_0 \in [D]$ , se  $\exists I_\delta(z_0)$  tale che  $\left| \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right|$  è limitato in  $I_\delta(z_0) \cap D$ , cioè se  $\exists A > 0$ ,  $\exists I_\delta(z_0) / |f(z)| < A |\varphi(z)|$ ,  $\forall z \in D \cap I_\delta(z_0)$

**Commento:** La seconda parte della definizione è più generale ed ha senso anche se non vale S1

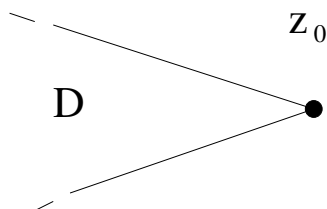


Figura 3.1:  $z_0 \notin D$  ma è punto di accumulazione di  $D$ .

**Definizione 3.1.2.** (“o piccolo”)  $f = o(\varphi)$ , per  $z \rightarrow z_0$ ,  $z_0 \in [D]$  se

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0$$

(Più in generale, anche senza **S1** :  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists I_\delta(z_0)$  /  $|f(z)| < \epsilon |\varphi(z)|$ ,  $\forall z \in D \cap I_\delta(z_0)$  )

*Attenzione:* il simbolo  $=$  è usato impropriamente, non vale la proprietà transitiva ( $f = O(\varphi)$ ,  $g = O(\varphi)$  non implica affatto  $f = g$ ); i simboli  $= O$  e  $= o$  sono un tutt'uno e vanno piuttosto intesi come *relazioni d'ordine*:  $= O$  è come  $\leq$ ,  $= o$  è come  $<$ ; ovviamente  $f = o(\varphi) \Rightarrow f = O(\varphi)$ .

È sottinteso che  $f = g + O(\varphi)$  sta per  $f - g = O(\varphi)$  ed analogamente per  $o$ .

**Definizione 3.1.3.** La successione  $\varphi_0(z), \varphi_1(z) \dots$ , regolari in  $D$  è **successione asintotica** per  $z \rightarrow z_0$ ,  $z_0 \in [D]$ ,  $z \in D$  se  $\varphi_n(z) = o(\varphi_{n-1}(z))$ ,  $z \rightarrow z_0$ ,  $z \in D$  per  $n = 1, 2, \dots$

**Esempio:** Sono comunemente usate :

$$\varphi_n(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad z \rightarrow z_0 \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{z^n} g(z), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

**Definizione 3.1.4.** Si dice che  $f(z)$  regolare in  $D$  ha lo **sviluppo in serie asintotica** :

$$f(z) \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}}{\sim} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \varphi_l(z) \quad (3.3)$$

se  $\{\varphi_l\}$  è una successione asintotica per  $z \rightarrow z_0$ ,  $z_0 \in [D]$ ,  $z \in D$  e il **resto asintotico**

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{l=0}^n a_l \varphi_l(z) \quad (3.4)$$

è  $o$  dell'ultimo termine della sommatoria :  $R_n(z) = o(\varphi_n(z))$ ,  $z \rightarrow z_0$ ,  $z \in D$ ,  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ . In altre parole si può dire che la 3.3 è equivalente a

$$f(z) = \sum_{l=0}^n a_l \varphi_l(z) + o(\varphi_n(z)), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Quasi sempre si usano come successioni asintotiche le (3.1) e le (3.2); ci si può sempre ricondurre a  $g(z) = 1$  dividendo  $f(z)$  per  $g(z)$ .

Attenzione:  $\sim$  non è un simbolo di *equivalenza vera*; così come  $= O$  e  $= o$ , anche  $\sim \sum$  va considerato come un *simbolo unico*, indivisibile; infatti *non è affatto detto che*  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \varphi_l(z)$  *abbia senso* di per sè, cioè che rappresenti una serie convergente.

## 3.2 Esempio importante: la trasformata di Laplace

Sia  $f(x)$  infinitamente derivabile in  $\mathbb{R}_+^1$  ed ammetta trasformata di Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}_s(f) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad \forall \text{Res} > \alpha_0 \quad (3.6)$$

con  $\alpha_0$  ascissa di convergenza.

Applicando ripetutamente

$$\mathcal{L}_s(f') = s\mathcal{L}_s(f) - f(0) \quad (3.7)$$

si ottiene

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{f^{(1)}(0)}{s^2} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n} + \frac{\mathcal{L}_s(f^{(n)})}{s^n}, \quad \forall n \in N \quad (3.8)$$

(vedi 5.52 di [1])

Dimostriamo che

$$F(s) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{s^{l+1}}, \quad \text{per } s \rightarrow \infty, \text{ Res} > \alpha > \alpha_0 \quad (3.9)$$

Ci serve come premessa dimostrare che  $\forall g$  che ammette trasformata di Laplace,  $\mathcal{L}_s(g)$  è limitata nella regione  $\text{Res} > \alpha > \alpha_0$  (dove  $\alpha_0$  è l'ascissa di convergenza).

$$\begin{aligned} \text{Dim. } & \left| \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)x} e^{-\alpha x} g(x) dx \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-(s-\alpha)x}| e^{-\alpha x} |g(x)| dx; \\ & |e^{-(s-\alpha)x}| < 1 \text{ per } \text{Res} > \alpha \\ & \Rightarrow |\mathcal{L}_s| \leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} |g(x)| dx \text{ che converge per } \forall \alpha > \alpha_0 \text{ e non dipende da } s. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Vedremo più avanti che basta che  $f(x) \in C_{\infty}$  in un intorno destro dell'origine.

Dalla equazione (3.8) per  $n = 1$  segue quindi che  $\forall g \in C_1$  nell'origine ( a destra) che ammetta trasformata di Laplace, vale

$$\mathcal{L}_s(g) = O\left(\frac{1}{s}\right). \quad (3.10)$$

Quindi il resto ennesimo della (3.9)

$$R_n(s) = F(s) - \sum_{l=1}^n \frac{f^{(l-1)}(0)}{s^l} = \frac{\mathcal{L}_s(f^{(n)})}{s^n} \quad (3.11)$$

$$\text{è } O\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

e ciò dimostra che la (3.9) è proprio una serie asintotica.

### Esempio

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \alpha_0 = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

perciò

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{1+x} dx \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l!}{s^{l+1}}, \quad s \rightarrow \infty, \text{Res} > \epsilon > 0 \quad (3.12)$$

La serie ha raggio di convergenza nullo: è una *serie divergente* ! Sono proprio queste le serie asintotiche interessanti<sup>2</sup>. Valutiamo il resto :

$$\begin{aligned} R_n(s) &= \frac{\mathcal{L}_s(f^{(n)})}{s^n} \\ &= \frac{1}{s^n} \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^n n!}{s^n} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{(1+y/s)^{n+1}} \frac{dy}{s} \\ &\quad s > 0 \\ &\quad y = sx \\ &= (-1)^n n! \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{(s+y)^{n+1}} dy \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Di solito quando si parla di serie asintotica si sottintende che sia divergente, altrimenti si parla di serie convergente *tout court*, che è un concetto molto più forte.

poi continuiamo analiticamente a  $\text{Re } s > 0$ . Tenendo conto che per  $y > 0$  e  $\text{Re } s > 0$  vale  $|s + y| > |s|$ , si ha

$$|R_n(s)| \leq \frac{n!}{|s|^{n+1}} \quad (3.13)$$

**Esercizio 1** Trovare lo sviluppo asintotico per  $t \rightarrow +\infty$  della funzione  $\text{Erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx$ , con la sostituzione  $y = x - t$  si ottiene una trasformata di Laplace e si può quindi usare lo sviluppo 3.9.

### 3.3 Proprietà delle serie asintotiche

**P1)** Se la serie asintotica è divergente, non bisogna calcolare troppi termini! È meglio essere pigri che troppo zelanti. Infatti a  $n$  fisso (nell'ipotesi naturale che  $\varphi_n(z) \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow z_0$ , per  $n = 1, 2, \dots$ )  $R_n \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow z_0$  ( $z_0 = \infty$  nell'esempio precedente) e quindi l'approssimazione migliora per  $z \rightarrow z_0$ . Invece, fissato  $z$ , l'approssimazione migliora con il crescere di  $n$  fino a un certo  $n_0$  e poi, se la serie non converge, comincia a peggiorare sempre più drammaticamente. Quindi a  $z$  fisso esiste un  $n_0$  optimum che minimizza l'errore e che può essere valutato se si riesce a dare una qualche maggiorazione del resto  $R_n$ . Nell'esempio precedente si vede subito che  $R_n(s)$  maggiorato dalla (3.13) tende a zero per  $s \rightarrow \infty$ , qualunque sia  $n$ , ma a fisso la sua maggiorazione tende a  $\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ , qualunque sia  $s$ .

(Ricordare la formula di Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$

da cui si ricava anche, derivando la (3.13) rispetto a  $n$ , che l'optimum si ha per  $n_0 \sim |s|$  e  $R_{n_0}(s = n_0) \sim \frac{\sqrt{2\pi} e^{-n_0}}{\sqrt{n_0}}$

Le considerazioni precedenti spiegano perché non si scrive quasi mai l'intera serie asintotica 3.3, ma ci si limita ai primi termini:  $f(z) \sim \sum_{l=0}^n a_l \varphi_l(z)$ , intendendo con questo che vale  $f(z) = \sum_{l=0}^m a_l \varphi_l(z) + o(\varphi_m(z))$ ,  $\forall m = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**P2)** Data  $f(z)$ , il suo sviluppo asintotico rispetto a una successione  $\{\varphi_l(z)\}$ , se esiste, è **unico**.

Dimostriamo scegliendo per semplicità  $z_0 = \infty$  e  $\varphi_l(z) = \frac{1}{z^l}$ . Allora

$$f(z) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{z^l}, \quad z \rightarrow \infty, z \in D \quad (3.14)$$

implica per la definizione di sviluppo in serie asintotica:

- per  $n = 0$ :  $f(z) - a_0 = o(1)$  ovvero

$$a_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} f(z); \quad (3.15)$$

- per  $n = 1$ :  $f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} = o(1/z)$ , quindi

$$a_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} z(f(z) - a_0) \quad (3.16)$$

e così via; così si determinano in modo univoco tutti gli  $a_l$ . È facile mostrare che il ragionamento è analogo anche per ogni altra scelta di successione asintotica.

**P3)** Uno sviluppo asintotico **non** individua una funzione in modo unico. Esempio: si verifica subito usando le (3.15), (3.16) e analoghe che

$$e^{-z} \sim 0 + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \dots \quad \begin{array}{l} z \rightarrow \infty \\ |arg(z)| < \pi/2 - \delta, \delta > 0 \end{array} \quad (3.17)$$

Infatti in  $D = \{z \in \mathbb{C}, |arg(z)| < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0\}$

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-z} = 0$$

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z(e^{-z} - a_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} ze^{-z} = 0$$

$$a_l = \lim_{z \rightarrow \infty} z^l e^{-z} = 0, \forall l \in \mathbb{N}$$

Quindi se

$$f(z) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{z^l}, z \rightarrow \infty, z \in D$$

anche  $g(z) = f(z) + bz^n e^{-z}, \forall n$ , ha lo stesso sviluppo asintotico.

In fisica quasi tutti i problemi non sono risolvibili esattamente (a partire da quello dei tre corpi) e le grandezze interessanti si valutano spesso mediante serie asintotiche, dette *sviluppi perturbativi*; termini esponenzialmente decrescenti, del tipo di quelli appena discussi, non contribuiscono allo sviluppo perturbativo e vengono detti *contributi non perturbativi*; essi possono tuttavia essere molto importanti, specie se ci si allontana da  $z_0$ , ma vanno calcolati con altri metodi perchè invisibili nello sviluppo perturbativo.

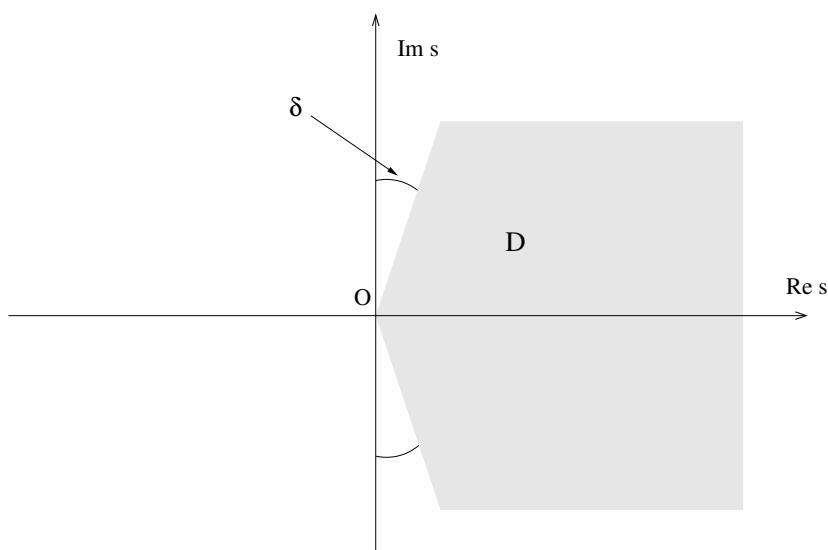


Figura 3.2: Il dominio  $D = \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s)| \leq \pi/2 - \delta, \delta > 0\}$ .

La proprietà P3 mostra un'altra cruciale differenza delle serie asintotiche da quelle convergenti: per queste la serie determina in modo unico la funzione in un intorno di  $z_0$ , che a sua volta può essere estesa a (quasi) tutto  $\mathbb{C}$  (punti singolari esclusi) per continuazione analitica; invece una serie asintotica (divergente per  $z \rightarrow z_0$ ) non ci da alcuna informazione per  $z$  lontano da  $z_0$ .

### 3.4 Valutazione asintotica di integrali nel campo reale con il metodo di Laplace.

Esempio elementare

$$D = \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s)| \leq \pi/2 - \delta, \delta > 0\} \text{ (vedi figura 3.2)}$$

$$\int_0^a e^{-sx} dx = \frac{1}{s} (1 - e^{-sa}) \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ s \in D}}{\sim} \frac{1}{s} \left( 1 + \frac{0}{s} + \frac{0}{s^2} + \dots \right),$$

dove si è usata la (3.17).

Quindi

$$\int_0^a e^{-sx} dx \sim \int_0^\infty e^{-sx} dx, \quad \forall a > 0 \tag{3.18}$$

per  $s \rightarrow \infty$  ed  $s \in D$  rispetto alla successione asintotica  $\{s^{-n}; n = 0, 1, \dots\}$

Analogamente si può dimostrare che vale

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-sx} x^n dx &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^a e^{-sx} dx = \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} + O(e^{-sa}) \sim \\ &\sim \frac{n!}{s^{n+1}} \left( 1 + \frac{0}{s} + \frac{0}{s^2} + \dots \right) \sim \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

Più in generale si dimostra facilmente il teorema seguente:

**Teorema 3.4.1.** Per ogni  $g(x)$  che ammetta trasformata di Laplace e per ogni  $a > 0$  vale

$$\int_a^\infty e^{-sx} g(x) dx = O(e^{-sa}), \quad s \rightarrow \infty, \quad s \in D. \quad (3.20)$$

Infatti, ponendo  $y = x - a$  si ha:

$$\int_a^\infty e^{-sx} g(x) dx = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-sy} g(a+y) dy,$$

dalla quale, ricordando che ogni trasformata di Laplace è limitata nella regione  $\text{Res} > \alpha > \alpha_0$  (vedi la “premessa” dopo l’equazione 3.9), segue subito la 3.20.

Dalla 3.20 segue quindi che lo sviluppo asintotico della trasformata di Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx \quad (3.21)$$

coincide con quello di

$$I_a(s) = \int_0^a e^{-sx} g(x) dx \quad (3.22)$$

per  $\forall a > 0$ ; quindi è completamente determinato dal comportamento di  $g(x)$  per  $x \rightarrow 0+$ : se per  $x \rightarrow 0+$  si può scrivere  $g(x) = \sum_{n=0}^\infty g_n x^{n+\nu}$ ,  $\text{Re} \nu > -1$ ,  $g_0 \neq 0$  allora

$$I_a(s) \sim F(s) \sim \sum_{n=0}^\infty g_n \frac{\Gamma(\nu + n + 1)}{s^{\nu+n+1}} = \frac{g_0 \Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right), \quad (3.23)$$

dove per  $\nu \in \mathbb{N}$  si è usata la 3.19 e per  $\nu$  non intero la più generale

$$\int_0^a e^{-sx} x^\nu dx \sim \int_0^\infty e^{-sx} x^\nu dx = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}, \quad \forall a > 0, \quad \text{Re} \nu > -1 \quad (3.24)$$



**Esercizio** L'identità

$$g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

e la (3.23) danno la (3.12) per la trasformata di Laplace di  $\frac{1}{1+x}$ . La  $\sum (-1)^n x^n$  converge solo per  $|x| < 1$ ; lo sviluppo asintotico (3.12) si ottiene integrando termine a termine come se convergesse su tutto  $\mathbb{R}_+$ , tanto conta solo il comportamento di  $g(x)$  per  $x \rightarrow 0+$ ; il prezzo che si paga è che la serie asintotica (3.12) è *divergente*.

**DIGRESSIONE: RISOMMAZIONE DI BOREL DI SERIE DIVERGENTI.**

Riscriviamo la 3.23 con  $a = \infty$  e  $\nu = 0$  :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s \rightarrow \infty, s \in D \text{ (Fig. 3.2)} \quad (3.25)$$

con

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n. \quad (3.26)$$

Ponendo  $s^{-1} = z$ ,  $a_n = n!g_n$  si può anche scrivere<sup>3</sup>:

$$\frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{z}} g(x) dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{per } z \rightarrow 0, z \in D. \quad (3.27)$$

Se lo sviluppo in serie di  $g(x)$  ha raggio di convergenza infinito la serie asintotica è anche convergente e la 3.27 è una vera uguaglianza.

Nel caso in cui la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  diverga ma la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = g(x) \quad (3.28)$$

abbia raggio di convergenza non nullo si assume la 3.27, letta da destra verso sinistra, come definizione di somma di Borel di una serie divergente; ponendo  $\frac{x}{z} = t$  si ottiene quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \int_0^{\infty} e^{-t} g(tz) dt = f(z), \quad (3.29)$$

---

<sup>3</sup>Notare che  $D$  va in se stesso sotto inversione.

con  $g(x)$  definito dalla continuazione analitica per  $t \in R_+$  della 3.28. La somma alla Borel permette quindi di risalire da una serie divergente ad *una* delle funzioni che la ammettono come sviluppo asintotico.

**Esempio 3.4.1.** Si consideri la serie divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! z^n, \quad (3.30)$$

che ha evidentemente raggio di convergenza nullo. Dalla 3.28 segue

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad (3.31)$$

che ha raggio di convergenza 1. Si può quindi usare la 3.29 per definire

$$f(z) = -\int_0^{\infty} e^{-t} \log(1-tz) dt. \quad (3.32)$$

Notare però che la 3.32 è ambigua perchè l'integrando, inteso come funzione di  $t$  a  $z$  fisso, ha un punto di diramazione in  $t = \frac{1}{z}$  (ed un altro in  $t = \infty$ ) e quindi l'integrando per  $t > \frac{1}{|z|}$  dipende dal foglio che si sceglie.

Tuttavia saltando da un foglio all'altro il logaritmo varia di  $2\pi i$ , quindi la differenza  $\Delta f$  fra due determinazioni di  $f(z)$  definito dalla 3.32 è proporzionale a

$$\int_{\frac{1}{z}}^{\infty} e^{-t} dt = e^{-\frac{1}{z}},$$

dove si è scelto per semplicità  $z \in R$  (e quindi  $z > 0$  poichè deve stare in  $D$ ). La proprietà **P3** (con  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ ) ci dice che

$$e^{-\frac{1}{z}} \sim 0 + 0z + 0z^2 + \dots, \quad z \rightarrow 0, \quad z \in D$$

e quindi l'ambiguità nella definizione di  $f(z)$  è proprio ciò che ci si deve aspettare, poichè non contribuisce allo sviluppo asintotico 3.30.

**Teorema 3.4.2.** Sviluppo asintotico di

$$I(s) = \int_0^a e^{sf(x)} g(x) dx \quad (3.33)$$

con  $a > 0$  (anche  $a = +\infty$ )

IPOTESI :

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ ,  $f_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in [0, a]$ ;  $f_1 = f'(0) < 0$
- $x = 0$  è massimo assoluto di  $f(x)$  in  $[0, a]^4$
- $\exists \delta > 0$  per cui  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^{n+\nu}$ , con  $x \in (0, \delta)$  e  $\text{Re} \nu > -1$ .

TESI :

$$I(s) = \frac{e^{sf_0}}{|f_1|} \int_0^{a/|f_1|} dy e^{-sy} G(s, y) \sim \frac{e^{sf_0}}{|f_1|^{\nu+1}} g_0 \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) \quad (3.34)$$

per  $s \rightarrow \infty$ ,  $s \in D = \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s)| \leq \pi/2 - \delta, \delta > 0\}$ , dove

$$G(s, y) = g\left(\frac{y}{|f_1|}\right) \exp\left[s \sum_{n=2}^{\infty} f_n \left(\frac{y}{|f_1|}\right)^n\right] = g_0 \cdot \left(\frac{y}{|f_1|}\right)^{\nu} (1 + O(y)) (1 + sO(y^2))$$

*Traccia della dimostrazione:*

$$I(s) = \int_0^a e^{sf_0} e^{-s|f_1|x} \mathcal{S}(s, x) g(x) dx$$

dove

$$\mathcal{S}(s, x) = e^{s \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n} = 1 + s f_2 x^2 + \frac{s^2}{2} f_2^2 x^4 + \dots$$

ed  $y = |f_1| x$ . Usando poi l'equazione (3.24) si giunge alla tesi.

I termini successivi dello sviluppo asintotico si possono calcolare applicando l'equazione (3.24) ai termini derivanti dallo sviluppo in serie di potenze di  $\mathcal{S}(s, x)g(x)$ ; malgrado  $\mathcal{S}(s, x)$  contenga la variabile  $s$ , questa compare sempre nella forma  $sx^n$  ( $n \geq 2$ ) e quindi, per la (3.24), ciò non cambia il termine dominante.

Ovvie generalizzazioni del teorema precedente:

**Corollario 3.4.1.**

$$I(s) = \int_a^b e^{sf(x)} g(x) dx \sim \frac{e^{sf(a)} \Gamma(\nu+1) g_0}{s^{\nu+1} |f'(a)|^{\nu+1}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) + \dots \right),$$

se la sostituzione  $y = x - a$  porta alle ipotesi del teorema, con  $f'(a) < 0$ ,

<sup>4</sup>A rigore bisogna richiedere un pò di più, cioè che non ci siano altri massimi interni a  $(0, a)$  il cui estremo superiore sia  $f(0)$ ; ovvero:  $\forall \varepsilon > 0$  deve  $\exists A < f(0) / f(x) \leq A, \forall x \in [\varepsilon, a]$ .

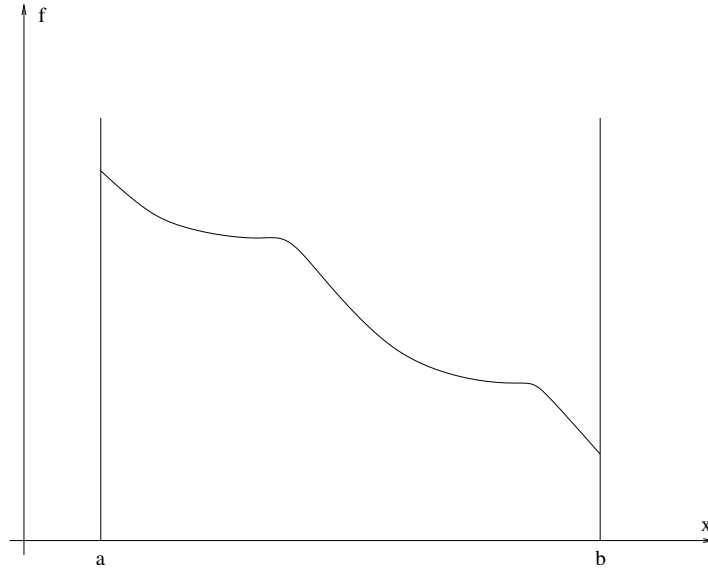


Figura 3.3: Generalizzazione del teorema 3.4.2 con  $f'(a) < 0$ .

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x-a)^{\nu+n} \text{ etc.}$$

**Corollario 3.4.2.**

$$I(s) = \int_a^b e^{sf(x)} g(x) dx \sim \frac{e^{sf(b)} \Gamma(\nu+1) g_0}{s^{\nu+1} (f'(b))^{\nu+1}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) + \dots \right)$$

se  $y = b-x$  porta alle ipotesi del teorema, con  $f'(b) > 0$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(b-x)^{n+\nu}$  etc.

**Corollario 3.4.3.**

Se  $f(x)$  ha massimo assoluto all'interno di  $(a, b)$  con cuspidi in  $x_0$  allora  $\int_a^b = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^b$  e si applicano i due corollari precedenti ai due integrali.

### 3.5 Sviluppi asintotici di integrali mediante gli integrali gaussiani.

Per discutere il caso ancora più importante:

$$I(t) = \int_a^b e^{tf(x)} g(x) dx \tag{3.35}$$

### 3.5 Sviluppi asintotici di integrali mediante gli integrali gaussiani 81

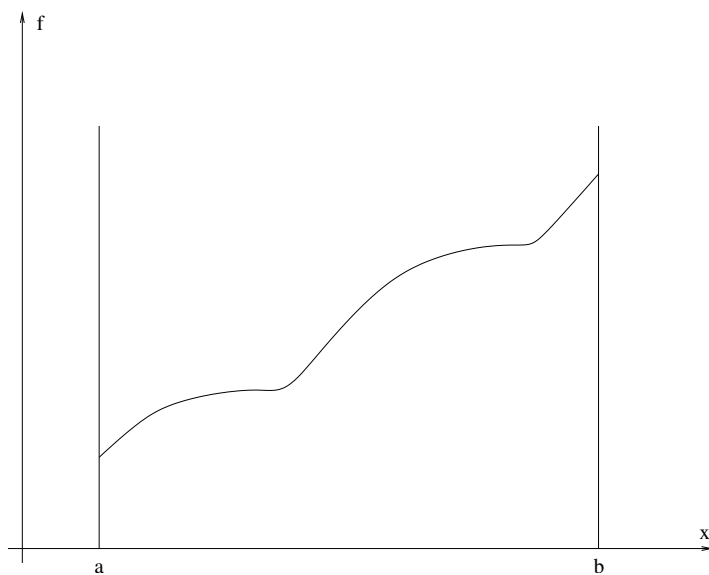


Figura 3.4: Generalizzazione del teorema 3.4.2 con  $f'(b) > 0$ .

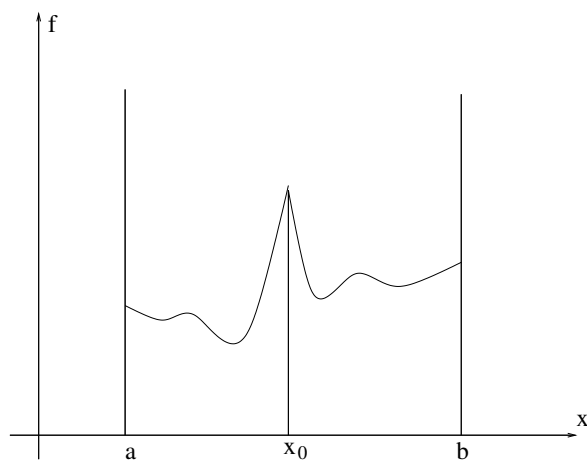


Figura 3.5: Generalizzazione del teorema 3.4.2 con cuspidi in  $x_0 \in (a, b)$ .

dove  $f(x)$  ha massimo assoluto<sup>5</sup> in  $x_0 \in (a, b)$  con  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) < 0$ , sempre nel limite  $t \rightarrow \infty$ ,  $t \in D = \{t \in \mathbb{C}; |\arg(t)| \leq \pi/2 - \delta, \delta > 0\}$ , è utile ricordare i seguenti *integrali gaussiani*:

$$I_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad I_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} x^k dx, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.36)$$

$$I_{2n+1} = 0, \quad I_{2n}(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} I_0(t) = \frac{(2n+1)!!}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{t^{n+1/2}}$$

dove si è usato il simbolo di **semifattoriale**  $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1$ .

Esattamente come per l'equazione 3.20 si dimostra subito che per ogni  $g(x)$  per cui, per  $t$  maggiori di un qualche  $\alpha_0$ , esista  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} g(x) dx$ , e per ogni  $\delta > 0$ , vale

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-tx^2} g(x) dx = O\left(e^{-\delta^2 t}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-tx^2} g(x) dx = O\left(e^{-\delta^2 t}\right), \quad \text{per } t \rightarrow \infty, t \in D.$$

Ne segue che gli integrali  $\int_{\delta_2}^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx$  e  $\int_{-\infty}^{-\delta_1} e^{-tx^2} x^{2n} dx$  sono esponenzialmente depressi rispetto a  $I_{2n}(t)$ , e quindi:

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} e^{-tx^2} x^{2n} dx \sim I_{2n}(t) \left(1 + \frac{0}{t} + \frac{0}{t^2} + \dots\right), \quad \forall \delta_1, \delta_2 > 0. \quad (3.37)$$

Per valutare l'integrale (3.35) scrivo quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-x_0)^n, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) < 0 \quad (3.38)$$

e con il cambio di variabile  $y = x - x_0$  ottengo

$$I(t) = e^{tf_0} \int_{a-x_0}^{b-x_0} e^{-t|f_2|y^2} \mathcal{S}(t, y) g(x_0 + y) dy, \quad \begin{array}{l} a - x_0 < 0 \\ b - x_0 > 0 \end{array} \quad (3.39)$$

con

$$\mathcal{S}(t, y) = e^{t \sum_{n=3}^{\infty} f_n y^n} = 1 + t f_3 y^3 + \dots$$

Con l'ulteriore cambio di variabile  $y' = \sqrt{|f_2|} y$ , (supponendo anche  $g(x) = g_0 + O(x - x_0)$ ) grazie alle (3.36) e (3.37) ottengo:

$$\int_a^b e^{tf(x)} g(x) dx \sim \frac{e^{tf(x_0)}}{\sqrt{t}} g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (3.40)$$

<sup>5</sup>Per la precisione la richiesta è analoga a quella della nota precedente.

per  $t \rightarrow \infty$  in  $D$ .

Per ricordare a memoria la formula ( $\sqrt{2\pi}$  a parte) uso un ragionamento dimensionale:  $f''x^2t = \text{adimensionale} \Rightarrow \left[ \frac{1}{\sqrt{|f''|t}} \right] = [x]$ ; il primo membro ha le dimensioni  $[g(x)][x]$  quindi il secondo deve avere un fattore  $\frac{g(x_0)}{\sqrt{|f''|t}}$ . Se, nell'intorno di  $x_0$ ,  $g(x)$  è sviluppabile in serie di Taylor i termini successivi dello sviluppo asintotico si calcolano usando le (3.37) e (3.39).

Esempio:  $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f''(0) = -1$ .  $\int_{-\delta_1}^{\delta_2} e^{-\frac{tx^2}{2}} g(x) dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t}} g(0)$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Confrontare con  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-\frac{tx^2}{2}} = \delta(x)$  nel senso delle distribuzioni (vedi [1]).

### 3.6 Sviluppo asintotico del fattoriale (la formula di Stirling)

Studiamo lo sviluppo asintotico di  $\Gamma(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ , o più in generale per  $t \rightarrow \infty$ ,  $t \in D$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = \int_0^\infty e^{-ty} (ty)^{t-1} t dy = t^t I(t) \quad (3.41)$$

con

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-ty} y^t \frac{dy}{y} = \int_0^\infty e^{-t(y-\ln y)} \frac{1}{y} dy;$$

per effettuare la sostituzione con  $y = \frac{x}{t}$  si è supposto  $t > 0$ , salvo poi continuare analiticamente  $\forall t \in D$ . L'integrale  $I(t)$  ha la forma (3.35) con :

$$f(y) = \ln y - y, \quad g(y) = \frac{1}{y}$$

dove  $f'(y) = \frac{1}{y} - 1$ ,  $f'(1) = 0$ ,  $f''(y)|_{y=1} = -1$ .

Dalla (3.40)

$$I(t) \sim \frac{e^{tf(x_0)}}{\sqrt{t}} g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} = e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$$

Quindi dalla 3.41 segue:

$$\Gamma(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t}} t^t e^{-t} = \sqrt{2\pi} t^{t-1/2} e^{-t}, \quad t \rightarrow +\infty$$

da cui

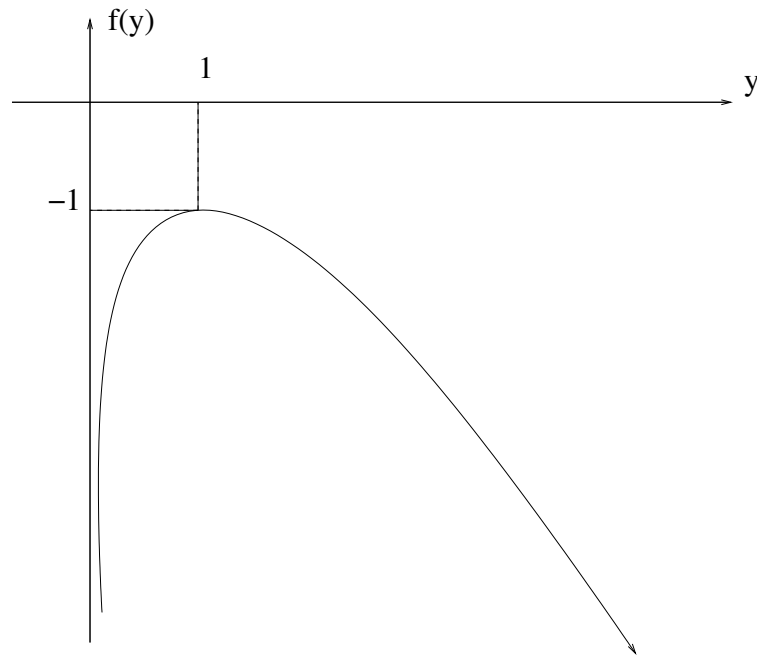


Figura 3.6:  $f(y) = \ln y - y$ .

$$n! = n\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2} \quad (3.42)$$

(approssimazione di *Stirling*), che da un'ottima approssimazione anche per valori piuttosto piccoli di  $n$ .<sup>6</sup>

**Esercizio** Dimostrare la formula incontrata nel corso di Laboratorio 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

### 3.7 Metodo del punto a sella

Estensione del metodo di Laplace per la valutazione asintotica di integrali al campo complesso.

$$I(t) = \int_{a_\gamma}^b e^{tf(z)} g(z) dz \quad (3.43)$$

<sup>6</sup>Per esercizio lo studente calcoli con Mathematica l'errore relativo dell'approssimazione di Stirling (equazione 3.42) di  $n!$  per valori fino a 10.



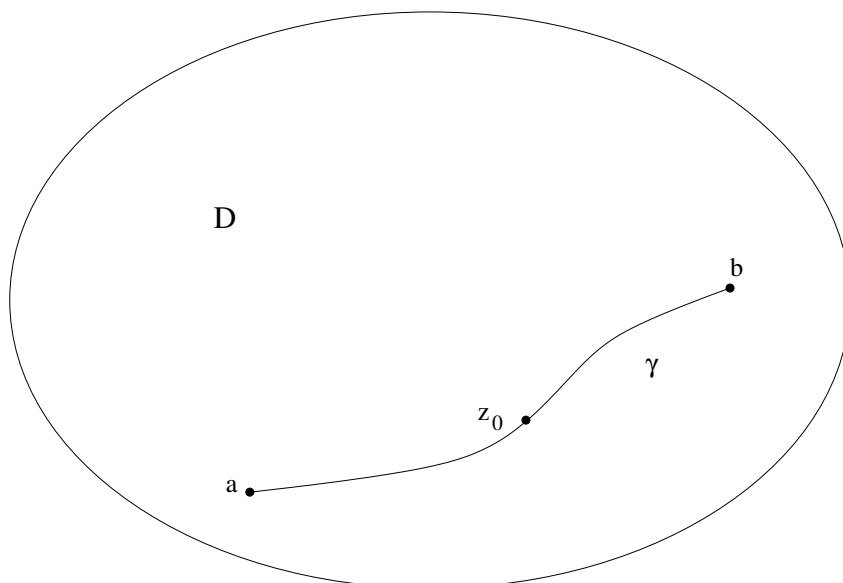


Figura 3.7: Metodo del punto a sella:  $a, b, z_0, \gamma$  interni a  $\mathcal{D}$  semplicemente connesso.

$f(z), g(z)$  regolari in  $\mathcal{D}$  semplicemente connesso ;  $a, b, \gamma$  interni a  $\mathcal{D}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .

$\gamma$  può essere deformato ad arbitrio, senza modificare gli estremi, restando dentro  $\mathcal{D}$  (vedi figura 3.7). Se possibile facciamo passare  $\gamma$  da un opportuno  $z_0 \in \mathcal{D}$  tale che:

- $f'(z_0) = 0$
- $z_0$  sia *massimo assoluto* di  $\operatorname{Re}f(z)$  su  $\gamma$  in modo che  $z_0$  sia massimo assoluto di  $|e^{tf(z)}|$ .

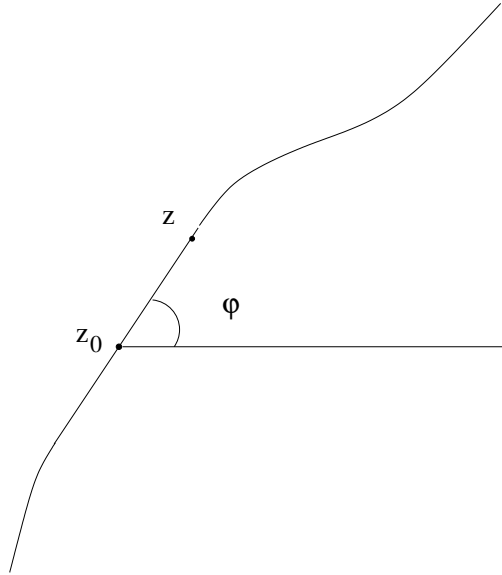
In un intorno  $I(z_0)$  di  $z_0$  vale:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3) \quad (3.44)$$

Ponendo<sup>7</sup> :

$$\frac{1}{2}f''(z_0) = Ae^{i\alpha}, \quad A = \left| \frac{f''(z_0)}{2} \right| > 0; \quad z - z_0 = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (3.45)$$

<sup>7</sup>**Attenzione:**  $\rho$  non è il modulo di  $(z - z_0)$ ; voglio che quando  $z$  attraversa  $z_0$  muovendosi lungo  $\gamma$  l'angolo  $\varphi$  non cambi, quindi  $\rho$  deve cambiare segno (vedi figura 3.8)

Figura 3.8: Metodo del punto a sella:  $z - z_0$ .

si può scrivere

$$f(z) - f(z_0) = A\rho^2 e^{i(\alpha+2\varphi)} + O(\rho^3) \quad (3.46)$$

da cui

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) &= A\rho^2 \cos(\alpha + 2\varphi) + O(\rho^3) \\ \operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0) &= A\rho^2 \sin(\alpha + 2\varphi) + O(\rho^3) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le equazioni (3.47) sono molto importanti di per sè perchè mostrano direttamente che nè la parte reale  $u(x, y) = \operatorname{Re} f$  nè la parte immaginaria  $v(x, y) = \operatorname{Im} f$  di una funzione analitica  $f(z)$  possono avere massimi o minimi all'interno del dominio di analiticità; infatti le (3.47) mostrano che nell'intorno di un punto  $z_0$  in cui si annulli  $f'(z)$  (e quindi  $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$ ) si ha, sia per  $u(x, y)$  che per  $v(x, y)$ , un punto a sella (ovvero *colle*):  $z_0$  è *massimo* di  $\operatorname{Re} f(z)$  per  $z$  che si muove su  $\gamma$  nella direzione  $\varphi$ ,  $\forall \varphi$  per cui  $\cos(\alpha + 2\varphi) < 0$ ; è invece *minimo* per  $\cos(\alpha + 2\varphi) > 0$  (si veda a tal proposito il teorema 2 dell'appendice B di [1]) e analogamente per  $\operatorname{Im} f(z)$ . Poichè  $|e^{tf(z)}| = e^{t\operatorname{Re} f(z)}$  scegliamo la direzione di  $\gamma$ , cioè l'angolo  $\varphi$ , in modo da avere *massima pendenza* per  $\operatorname{Re} f(z)$ , quindi  $\cos(\alpha + 2\varphi) = -1$  quindi  $\alpha + 2\varphi = \pi \pmod{2\pi}$ , ovvero

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi} \quad (3.48)$$

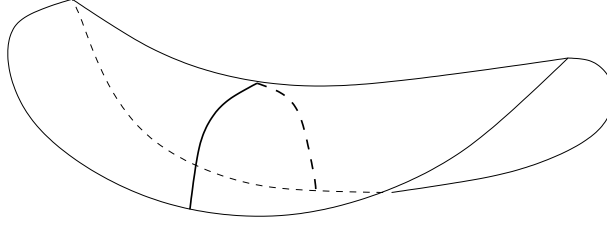


Figura 3.9: Punto a sella.

e in corrispondenza  $\text{Im}f(z)$ , cioè la *fase* di  $e^{tf(z)}$ , *stazionaria* (cioè costante, a meno di  $O(\rho^3)$ ), poichè  $\sin(\alpha + 2\varphi) = \sin \pi = 0$ .

Questa scelta ci garantisce che non solo il contributo dell'intorno di  $z_0$  sia il più grande possibile, ma anche che la fase rimanga costante, altrimenti per le formule di Riemann (si veda il primo capitolo di [1]) nel limite  $t \rightarrow +\infty$  i contributi si cancellerebbero. Per quanto visto nelle sezioni 3.4 e 3.5, in particolare eq.3.37, lo sviluppo asintotico dell'integrale 3.43 è determinato solo da un intorno arbitrariamente piccolo del punto  $z_0$ . Conviene quindi passare alla variabile di integrazione  $\rho$  dentro alla 3.45 con  $\varphi$  costante, con  $\frac{dz}{d\rho} = e^{i\varphi}$ ; quindi

$$I(t) \sim \int_{-\delta}^{\delta} d\rho e^{i\varphi} e^{tf(z_0)} e^{-tA\rho^2} g(z_0) \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \sim e^{i\varphi} e^{tf(z_0)} g(z_0) \sqrt{\frac{\pi}{At}} \quad (3.49)$$

per  $t \rightarrow +\infty$ , dove  $A = \left|\frac{f''(z_0)}{2}\right|$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$ . L'ambiguità di segno (il  $\pmod{\pi}$  nella definizione di  $\varphi$ ) si risolve scegliendo il cammino da  $a$  a  $b$  passante da  $z_0$  in modo che  $z_0$  sia massimo assoluto per  $\text{Re}f(z)$  su  $\gamma$ ; il punto di partenza e quello di arrivo individuano in modo unico il verso di attraversamento di un colle, in modo che questo sia il punto più alto. I termini successivi dello sviluppo asintotico si possono calcolare usando (3.37) e sviluppando  $f(z)$  e  $g(z)$  in serie di potenze:

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (z - z_0)^n = g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \rho^n e^{in\varphi} = g(z_0) + \tilde{g}(\rho) \\ f(z) &= f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_n (z - z_0)^n = \\ &= f(z_0) - A\rho^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_n \rho^n e^{in\varphi} = f(z_0) - A\rho^2 + \tilde{f}(\rho) \end{aligned}$$

$f_n, g_n \in \mathbb{C}$ ; quindi

$$e^{tf(z)}g(z_0) = e^{tf(z_0)}e^{-tA\rho^2} \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\tilde{f}(\rho))^l}{l!} \right) (g(z_0) + \tilde{g}(\rho))$$

e usando poi le equazioni (3.36), (3.37).

Notare che per ottenere lo sviluppo (3.49) è cruciale che  $t \rightarrow +\infty$  esattamente lungo l'asse reale positivo; non basta  $t \rightarrow \infty$ ,  $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \delta$  perchè una fase a moltiplicare le (3.46) cambierebbe sostanzialmente le (3.47). Se si vuole studiare l'andamento asintotico di (3.43) per  $t \rightarrow \infty$  nella direzione  $\theta$ , basta scrivere  $t = t'e^{i\theta}$ , far tendere  $t' \rightarrow +\infty$  e ripetere il ragionamento precedente con  $f(z)$  rimpiazzato da  $e^{i\theta}f(z)$ .

### 3.7.1 Metodo della fase stazionaria.

Questo metodo può essere considerato come un corollario del metodo del punto a sella. Consideriamo l'integrale

$$I(t) = \int_a^b e^{ith(x)}g(x)dx, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (3.50)$$

dove

- $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(z) = ih(z)$  e  $g(z)$  sono analitiche in  $\mathcal{D}$  semplicemente connesso
- $(a, b) \in \mathcal{D}$
- $\exists x_0 \in (a, b)$  tale per cui  $h'(x_0) = 0$ ,  $h''(x_0) \neq 0$ .

Possiamo allora applicare il metodo del punto a sella. Cercherò allora una curva  $\gamma$  da  $a$  a  $b$  passante per  $x_0$  tale che

$$\operatorname{Re}f(z) < \operatorname{Re}f(x_0) = 0,$$

ovvero

$$\operatorname{Im}h(z) > 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

ad esclusione ovviamente dei punti  $x_0, a, b$  in cui  $\operatorname{Re}f(z)$  si annulla.

Si possono allora distinguere due casi :

$$\begin{cases} \text{(I)} & h''(x_0) > 0 & \Rightarrow \alpha = \arg f''(z_0) = \frac{\pi}{2} \\ \text{(II)} & h''(x_0) < 0 & \Rightarrow \alpha = \arg f''(z_0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

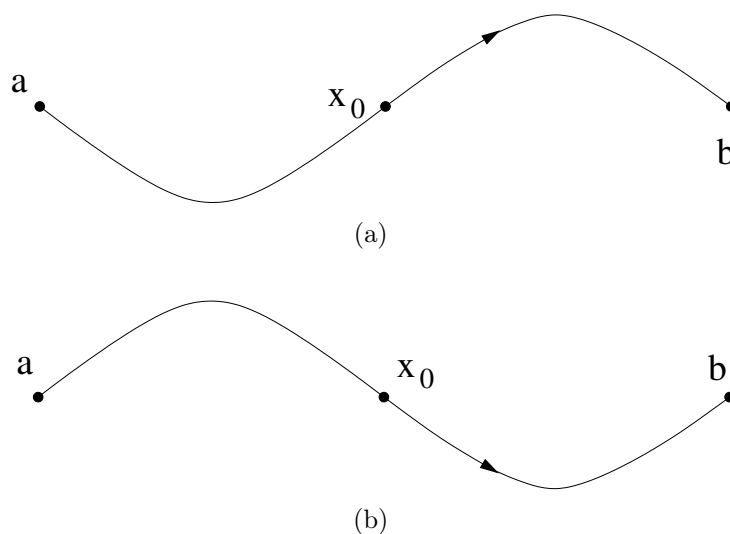


Figura 3.10: Metodo della fase stazionaria, due casi possibili.

e quindi essendo  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  risulta per (I)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  e per (II)  $\varphi = \frac{3\pi}{4} \pmod{\pi} = -\frac{\pi}{4}$  (vedi figura 3.10). Si ottiene allora

$$I(t) \sim e^{ith(x_0)} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{t|h''(x_0)|}} g(x_0), \quad t \rightarrow +\infty \quad (3.51)$$

dove  $e^{+i\frac{\pi}{4}}$  corrisponde a  $h''(x_0) > 0$  (caso I) ed  $e^{-i\frac{\pi}{4}}$  a  $h''(x_0) < 0$  (caso II).

In realtà  $\text{Re}f(z) = 0$  anche in  $z = a, b$  ma questi punti non contribuiscono al termine dominante dello sviluppo asintotico se  $h'(a) \neq 0$ ,  $h'(b) \neq 0$ ; il loro contributo è al più  $O\left(\frac{1}{t}\right)$  come si vede integrando per parti (si confronti con le formule di Riemann nel paragrafo 4.1 di [1]).

Se invece  $h'(a) = 0$ , questo non è che un caso particolare del caso in cui i punti  $x_0$  che soddisfano l'ipotesi siano più di uno; allora tutti questi contributi sono sullo stesso piano (sono tutti  $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ ) e vanno sommati fra loro.

**Esempio** Si considerino le funzioni di Bessel di prima specie (cilindriche, con  $n$  intero)<sup>8</sup>

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta \quad (3.52)$$

<sup>8</sup>Le  $J_n(t)$  non vanno confuse con le  $j_\nu(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(t)$ .

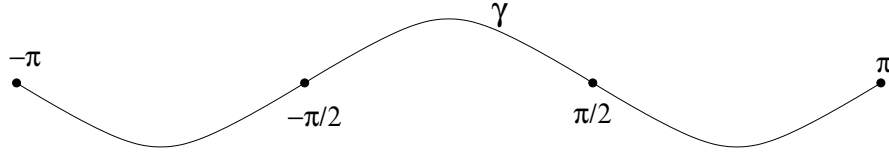


Figura 3.11: Metodo della fase stazionaria.

dove

$$h(\theta) = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad h'(\theta) = \cos \theta$$

e quindi la derivata prima si annulla in  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$  ed in  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . In questi punti la derivata seconda

$$h''(\theta) = -\sin \theta$$

vale  $h''(\theta_1) = 1$  ed  $h''(\theta_2) = -1$ . Ricordando poi che  $\sin(x+iy) = i \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$ , quindi  $\text{Im} \sin(x+iy) = \cos x \sinh y$ , si vede che  $\text{Im} h(z) \geq 0$  lungo  $\gamma$  dove l'uguaglianza vale solo per  $z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi$  (vedi figura 3.11).

Inoltre  $h'(\pm\pi) = -1 \neq 0$ , quindi contribuiscono all'andamento asintotico di  $J_n(t)$  solo i punti  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$  e  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ; usando la 3.51 si ha allora

$$\begin{aligned} J_n(t) &\sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left( e^{-i(t-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(t-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

In conclusione si ottiene l'andamento asintotico

$$J_n(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty$$

NOTA: lo sviluppo asintotico vale anche per  $J_\nu(t)$  con  $\nu \in \mathbb{C}$ , ma non si può ottenere in questo modo perchè non vale la 3.52 per  $\nu \notin \mathbb{Z}$ .

# Bibliografia

- [1] M.B.Barbaro, M.Frau, S.Sciuto *Introduzione ai metodi matematici della Fisica* ; Dipartimento di Fisica Teorica dell'Università di Torino, 2001.
- [2] N.G. De Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* , North-Holland, 1958.
- [3] E.T.Whittaker, G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1952.