Dipartimento di Fisica Teorica

Università di Torino

Stefano Sciuto

Appunti dalle lezioni di

Metodi Matematici della Fisica II

2. Spazi di Hilbert e Analisi Funzionale

A.A 2001-2002

REVISIONE 2010-2011

REVISIONE 2012-2013 di Ezio Maina

Indice

1 Spazi di Hilbert, funzionali lineari ed endomorfismi continui 1

- 1.1 Riassunto del corso di Metodi I . . . 1
- 1.2 Operatori lineari continui . . . 5
  - 1.2.1 Richiami sugli spazi unitari . . . 5
  - 1.2.2 L'operazione di dualità . . . 8
- 1.3 Endomorfismi . . . 10
  - 1.3.1 Automorfismi . . . 11
- 1.4 Operatori di proiezione . . . 11
- 1.5 Aggiunto di un endomorfismo continuo . . . 12
  - 1.5.1 Operatori hermitiani, antihermitiani ed unitari . . . 14
  - 1.5.2 Esempi di endomorfismi continui . . . 16
- 1.6 Autovalori e autovettori, in generale . . . 18
- 1.7 Isomorfismo $E_N \sim \mathbb{C}^n$ e spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H} \sim l_2$ . . . 21
  - 1.7.1 Calcolo matriciale . . . 21
  - 1.7.2 Cambiamenti di base (O.N.) . . . 22
  - 1.7.3 Isomorfismo $\mathcal{H} \sim l_2$ . . . 24
- 1.8 Autovalori e autovettori per operatori su E_N . . . 26

2 Operatori lineari in spazi ad infinite dimensioni 31

- 2.1 Dominio, continuità e limitatezza di un operatore. . . . 31
- 2.2 Aggiunto di un operatore lineare non continuo, in spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ . . . 34
- 2.3 Lo spettro degli operatori autoaggiunti nello spazio di Hilbert separabile. . . . 39
- 2.4 Teoria delle distribuzioni e spazio di Hilbert equipaggiato (Rigged Hilbert Space). . . . 45
- 2.5 Equazione agli autovalori generalizzata e teorema spettrale. . . . 54

Capitolo 1

Spazi di Hilbert, funzionali lineari ed endomorfismi continui

1.1 Riassunto del corso di Metodi I

Inquadriamo adesso il contenuto del Cap. 5 del corso di MMF I, in particolare il concetto di **spazio di Hilbert separabile** nella molto più generale nozione di **spazio topologico**. È inoltre consigliato rivedere i capitoli 5, 6 e 7 del testo di Geometria I: E. Abbena, A.M. Fino, G.M.Gianella,"Algebra Lineare e Geometria Analitica" (Volume I) che introducono gli stessi concetti in campo reale.

Al centro del nostro interesse sta lo **spazio unitario**.

Definizione 1.1.1. Si dice **spazio unitario** (o **euclideo**) uno spazio vettoriale E sui complessi dotato di **prodotto scalare**

$$(a, b) \in \mathbb{C}$$

che gode delle seguenti proprietà[1]:

$$(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 (a, b_1) + \beta_2 (a, b_2) \qquad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C},\ \forall a, b_1, b_2 \in E \tag{1.1}$$

$$(b, a) = (a, b)^\star \tag{1.2}$$

$$(a, a) > 0 \qquad \forall a \neq 0 \tag{1.3}$$

[1]**Importante**: la notazione da noi usata (e da tutti i fisici) è opposta a quella usata da tutti i matematici, per i quali il prodotto scalare è lineare nel primo fattore ed antilineare nel secondo.

Notare che le 1.1 e 1.2 implicano:

$$(a,0) = (0,a) = 0 \qquad \forall a \in E \tag{1.4}$$

Definizione 1.1.2. Due vettori $a, b \in E$ si dicono **ortogonali** se $(a,b) = 0$.

Prop. 1.1.1. Dalla 1.3 segue che l'unico vettore ortogonale a se stesso è il vettore nullo; un vettore ortogonale a tutti i vettori di E (in particolare a se stesso) è quindi nullo; in simboli:

$$(a,b) = 0 \qquad \forall b \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0 \tag{1.5}$$

Non è difficile dimostrare che dagli assiomi 1.1-1.3 segue:

Disuguaglianza di Schwarz

$$|(a,b)|^2 \leq (a,a)\,(b,b) \tag{1.6}$$

Ogni spazio unitario è naturalmente uno spazio normato con norma definita da:

$$\|a\| = \sqrt{(a,a)} > 0 \qquad \forall a \neq 0 \tag{1.7}$$

È immediato dimostrare che tale norma soddisfa gli assiomi della:

Definizione 1.1.3. Si dice **spazio normato** uno spazio vettoriale E su $\mathbb{C}$ dotato della **norma**:

$$\|a\| \geqslant 0$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall a \in E \tag{1.8}$$

$$\|a\| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \tag{1.9}$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \tag{1.10}$$

A sua volta ogni spazio normato (e quindi ogni spazio unitario) è naturalmente metrico, con distanza definita da:

$$d\,(a,b) = \|a - b\| \tag{1.11}$$

Definizione 1.1.4. Si dice **spazio metrico** un insieme E dotato di una **distanza** che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} d\left(a,b\right)=d\left(b,a\right)\geq 0 \\ d\left(a,b\right)=0 \iff a=b \end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered} d\left(a,c\right)\leq d\left(a,b\right)+d\left(b,c\right) \qquad \forall a,b,c\in E \\ \text{disuguaglianza triangolare} \end{gathered} \tag{1.13}$$

Infine ogni spazio metrico possiede una topologia naturale con intorni base definiti da:

$$I_{\varepsilon}\left(x_0\right)=\left\{x\in E\,/\,d\left(x,x_0\right)<\varepsilon\right\} \qquad \forall x_0\in E,\,\forall\varepsilon>0$$

che lo rende uno **spazio topologico di Hausdorff**.

Avendo così definito una topologia sugli spazi metrici (quindi su quelli normati, quindi su quelli unitari), abbiamo anche definito il limite di una successione in questi stessi spazi:

$$x=\lim_{x\to\infty}x_n \tag{1.14}$$

significa allora:

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x,x_n\right)=0 \tag{1.15}$$

negli spazi metrici e:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-x_n\right\|=0$$

negli spazi normati ed unitari.

Dalla definizione di limite negli spazi unitari e dalla disuguaglianza di Schwarz segue immediatamente l'importantissima proprietà:

P1: **Continuità del prodotto scalare**. il prodotto scalare è continuo in entrambi i termini, ovvero: se la successione $\{x_n\}$è convergente vale $\forall y\in E$:

$$\left(\lim_{n\to\infty}x_n,y\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n,y\right) \tag{1.16}$$

$$\left(y,\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(y,x_n\right) \tag{1.17}$$

Tutto quanto abbiamo discusso finora vale per *qualsiasi* spazio unitario, indipendentemente dalla sua dimensione, finita od infinita (e "quanto" infinita).

Nel corso di MMF I abbiamo visto che fra gli spazi unitari di dimensione infinita quelli **separabili** hanno proprietà in qualche modo simili a quelli di dimensione finita, poichè ammettono una base numerabile; questa definizione di separabilità (vedi MMF I, Cap. 6), che è tutto quanto serve per fare i conti, non è che l'applicazione ad uno spazio unitario (quindi topologico) della più generale definizione di **spazio topologico separabile** (vedi Cap. 1). Infatti non è difficile dimostrare che in uno spazio normato $\mathbf{E}$ inteso come spazio topologico la separabilità è equivalente alla presenza di una base finita od infinita numerabile $\{\Psi_n\}$ (Cap. 1 S., Def. 19 e Teor. 14), cioè di un insieme finito od infinito numerabile di vettori $\{\Psi_n\}$ tale che la varietà lineare $L(\{\Psi_n\})$ da esso generata sia densa in $\mathbf{E}$; in particolare $\mathbb{C}^n$ é separabile (cosí $\mathbb{R}^n$).

L'ulteriore concetto necessario per caratterizzare completamente lo spazio che più ci interessa, lo spazio **di Hilbert** separabile, è la **completezza** (dello spazio, che non ha nulla a che fare con la completezza di un sistema di vettori che formano una base); anche tale concetto, già introdotto nel corso di MMF I (vedi Cap. 6) nel modo più "conveniente per l'uso", può essere formulato in modo più generale (e in conformità con la letteratura matematica) risalendo agli spazi metrici (e non fino agli spazi topologici come nel caso della separabilità). Infatti in uno spazio metrico ha senso definire le **successioni di Cauchy** (Cap. 1 S.[2], Def. 13):

Definizione 1.1.5. La successione $\{x_n\}$ si dice di Cauchy se $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \,/\, d(x_n, x_m) < \varepsilon,\ \forall n, m > n_0$.

È facile dimostrare che *ogni successione convergente è di Cauchy* (Cap. 1, Teor. 3, S.). Non sempre è vero il viceversa:

Definizione 1.1.6. Uno spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy è convergente si dice **completo**. Uno spazio normato completo è detto spazio di **Banach**; uno spazio unitario completo è detto di **Hilbert**.

Non è difficile dimostrare che nel caso particolare di spazi unitari separabili tale definizione di completezza dello spazio è equivalente a quella data nel corso di Metodi 1:

Definizione 1.1.7. Uno spazio **unitario separabile** è completo se $\forall\ \{c_l \in \mathbb{C}\}$ tale che $\sum_l |c_l|^2 < \infty$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} c_l \varphi_l\,,$$

dove $\{\varphi_l\}$ è un qualsiasi sistema O.N.,

[2]Con S indichiamo in tutto questo capitolo la ref. XXX

Uno spazio non completo può sempre essere *completato* "aggiungendo ad esso i limiti delle serie di Cauchy non convergenti"; più precisamente si stabilisce la relazione di equivalenza tra successioni di Cauchy:

Definizione 1.1.8. $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ se $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n\right) = 0$

e si costruisce lo spazio completo come insieme delle successioni di Cauchy quozientato con $\sim$, utilizzando un'opportuna e ovvia definizione della distanza tra due successioni di Cauchy (si veda a questo proposito il Cap. 3, S.).

L'integrale di Lebesgue si costruisce proprio per completamento degli spazi di funzioni con norma integrale alla Riemann, che infatti *non* sono completi.

1.2 Operatori lineari continui

1.2.1 Richiami sugli spazi unitari

Ricordiamo qualche definizione relativa a spazi vettoriali sui complessi, dando per nota la definizione di spazio vettoriale stesso.

Definizione 1.2.1. Uno spazio vettoriale E ha **dimensione** N se esistono N vettori linearmente indipendenti appartenenti ad E, mentre ogni sistema di $N+1$ vettori è linearmente dipendente.

Definizione 1.2.2. Uno spazio vettoriale E ha **dimensione infinita** se per ogni numero naturale N si possono trovare N vettori linearmente indipendenti appartenenti ad E.

Definizione 1.2.3. Un sottoinsieme L non vuoto di E si dice **sottospazio** o **varietà lineare** se $\forall a, b \in L$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ anche $\alpha a + \beta b \in L$.

Definizione 1.2.4. Si dice **varietà lineare** $L\left(F\right)$ **generata da un sottoinsieme** $F \subset E$ la varietà lineare i cui elementi sono le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di F.

Definizione 1.2.5. Un'applicazione $A : E \to K$ di uno spazio vettoriale E in uno spazio vettoriale K si dice **applicazione lineare o omorfismo** se $\forall a_1, a_2 \in E$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ vale:

$$A\left(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\right) = \alpha_1 A a_1 + \alpha_2 A a_2 \tag{1.18}$$

Ricordiamo che con Aa si indica l'immagine dell'elemento $a \in E$ sotto l'applicazione A e $\forall a \in E$ si scrive $A : a \mapsto Aa \in K$.

Definizione 1.2.6. Un'applicazione lineare $A : E \to K$ che sia biunivoca (biettiva) si dice **isomorfismo** e gli spazi vettoriali K ed E si dicono **isomorfi**.

È immediato verificare la:

Prop. 1.2.1. L'insieme degli omomorfismi di E in K, che si indica con $\mathrm{Hom}\,(E, K)$, è esso stesso uno spazio vettoriale, con la seguente definizione di combinazione lineare: $\forall A_1, A_2 \in \mathrm{Hom}\,(E, K)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, l'omomorfismo $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ è definito da:

$$Ba = \alpha_1 A_1 a + \alpha_2 A_2 a \qquad \forall a \in E \tag{1.19}$$

In particolare l'elemento nullo $0 \in \mathrm{Hom}\,(E, K)$ è definito da $0a = 0 \in K$, $\forall a \in E$.

Definizione 1.2.7. Se negli spazi E e K è definito il concetto di limite (in particolare se E e K sono spazi normati), l'omorfismo $A \in \mathrm{Hom}\,(E, K)$ si dice **continuo** se per ogni successione convergente $\{x_n\}$, $x_n \in E$, anche la successione delle immagini in K è convergente, cioè $\exists \lim_{n\to\infty} A\,(x_n)$ e vale:

$$\lim_{n\to\infty} A\,(x_n) = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Ricordando che $\mathbb{C}$ è esso stesso uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ne segue che ha senso parlare di spazio vettoriale $\mathrm{Hom}\,(E, \mathbb{C})$: i suoi elementi si chiamano **forme lineare** o **funzionali lineari**.

Si può quindi introdurre la seguente:

Definizione 1.2.8. I **funzionali lineari continui** sono quegli elementi $\mathbf{f}$ di $\mathrm{Hom}\,(E, \mathbb{C})$ tali che per ogni successione $\{x_n\}$ convergente in E converga anche la successione $\{\mathbf{f}\,(x_n)\}$ e valga:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}\,(x_n) = \mathbf{f}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \tag{1.20}$$

Definizione 1.2.9. Il sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}\,(E, \mathbb{C})$ formato dai **funzionali lineari continui** si dice **spazio duale** dello spazio normato E e si indica con $E^\star$.

Torniamo a considerare operatori lineari fra due spazi generici E e K che siano **spazi normati**. È utile introdurre la seguente

Definizione 1.2.10. L'operatore A è **limitato** se esiste un $C > 0$ tale che per ogni $x \in E$ vale

$$\|Ax\| \leq C\,\|x\|\,,$$

ovvero se $\forall x \in E$, $\|x\| = 1$, si ha

$$\|Ax\| \leq C.$$

Si può definire **norma** di A:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|\,, \tag{1.21}$$

che esiste certamente perchè $\|Ax\|$ è limitato.

Per ogni $x \in E$ si può quindi scrivere

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|\,. \tag{1.22}$$

Mostriamo ora che se E e K sono spazi normati, le definizioni 1.2.7 e 1.2.10 sono equivalenti.

Teorema 1.2.1. Un operatore lineare è continuo se e solo se è limitato.
Dimostrazione:

- ($\Rightarrow$):

  $$A \text{ è limitato} \Rightarrow A \text{ è continuo.}$$

  Dalla 1.22 segue $\|Ax - Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x - x_n\|$ e quindi:

  $$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|Ax - Ax_n\| = 0,$$

  ovvero:

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax.$$

- ($\Leftarrow$):

  $$A \text{ è continuo} \Rightarrow A \text{ è limitato.}$$

  Procediamo per assurdo: se A non è limitato $\exists\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1/\|Ax_n\| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ciò contraddice la continuità di A poichè

  $$\|x_n\| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

  mentre

  $$\left\|\frac{Ax_n}{n}\right\| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A\frac{x_n}{n} \neq 0.$$

q.e.d.

1.2.2 L'operazione di dualità

Se E è uno spazio unitario, il prodotto scalare permette di costruire un importante esempio di funzionale lineare continuo; infatti, fissato il primo vettore $f \in E$, il prodotto scalare associa ad ogni vettore $a \in E$ il numero complesso (f, a) e tale applicazione è lineare, grazie alla 1.1, e continua (per la 1.17).

In tal modo ogni $f \in E$ si associa una forma lineare continua $\mathbf{f} \in E^\star$ mediante la definizione:

$$\mathbf{f} \,:\, a \mapsto \mathbf{f}(a) = (f, a)\,, \qquad \forall a \in E \tag{1.23}$$

Definizione 1.2.11. L'applicazione di E in $E^\star$

$$\dagger \,:\, f \in E \mapsto \mathbf{f} \in E^\star, \tag{1.24}$$

dove $\mathbf{f}$ è definito dalla 1.23, si dice operazione di **dualità**; la forma $\mathbf{f}$ si dice duale del vettore f.

Prop. 1.2.2. L'operazione di dualità è un'applicazione **antilineare** di E in $E^\star$. Infatti $\forall f_1, f_2 \in E$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ il vettore $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in E$ viene mandato dalla $\dagger$ nella forma lineare $\mathbf{g} \in E^\star$ definita mediante la 1.23:

$$\mathbf{g}\,(a) = (g, a) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, a) = \alpha_1^\star\,(f_1, a) + \alpha_2^\star\,(f_2, a) =$$

$$= \alpha_1^\star \mathbf{f}_1\,(a) + \alpha_2^\star \mathbf{f}_2\,(a)$$

dove $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$sono le forme duali dei vettori f_1 e f_2; quindi vale:

$$\dagger \,:\, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \mapsto \alpha_1^\star \mathbf{f}_1 + \alpha_2^\star \mathbf{f}_2 \tag{1.25}$$

Chiediamoci se la corrispondenza 1.24 fra i vettori $\in E$ e le forme lineari $\in E^\star$ è biunivoca. Dimostriamo subito la:

Prop. 1.2.3. L'operazione di dualità $\dagger$ è un'applicazione **iniettiva** ovvero, se valgono contemporaneamente:

$$\dagger \,:\, f_1 \mapsto \mathbf{f} \tag{1.26}$$

$$\dagger \,:\, f_2 \mapsto \mathbf{f} \tag{1.27}$$

$$f_1, f_2 \in E \qquad \mathbf{f} \in E^\star,$$

necessariamente $f_1 = f_2$.

Infatti le 1.26, 1.27 e 1.23 implicano $(f_1, a) = (f_2, a)$ e quindi $(f_1 - f_2, a) = 0$, $\forall a \in E$; in particolare $(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = 0$ da cui per la 1.3 segue $f_1 = f_2$.

Per poter affermare che l'operazione di dualità è biunivoca bisognerebbe ancora dimostrare che essa è **suriettiva**, cioè che per ogni forma lineare continua $\mathbf{f} \in E^\star$ è possibile trovare (in modo unico per la proprietà 1.2.3) un vettore $f \in E$ tale che valga la 1.23.

Ciò non è vero per uno spazio unitario qualsiasi; tuttavia è facile dimostrare che l'operazione di dualità è **biunivoca** per una larga classe di spazi unitari (gli spazi di **Hilbert separabili**) che comprende tutti gli spazi di dimensione finita e gli spazi di dimensione infinita più importanti per la fisica.

Teorema 1.2.2. (Fischer–Riesz) Per ogni funzionale lineare e continuo $\mathbf{f} \in E^\star$ esiste un unico elemento $f \in E$ tale che $\mathbf{f}(a) = (f, a)\,, \forall a \in E$
Dimostrazione: Sia $\{e_n, n = 1, \dots\}$ una base e a un vettore di E, $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i$. Per la continuità di $\mathbf{f}$ si ha $\mathbf{f}(a) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathbf{f}(e_i)$. Questo suggerisce di scegliere $f = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{f}(e_i)^\star e_i$. Bisogna solamente verificare che $f \in E$. Per farlo consideriamo $f_N = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{f}(e_i)^\star e_i$. Si ha $\mathbf{f}(f_N) = \| f_N \|^2$. Per la limitatezza di $\mathbf{f}$ si ha che esiste un reale positivo M tale che

$$\| f_N \|^2 \leq M \| f_N \|, \forall N \tag{1.28}$$

. Ne segue che $\| f_N \| \leq M, \forall N$ e quindi per la completezza di E la successione degli f_N converge ad un vettore di E.

In questo capitolo considereremo sempre, senza più ricordarlo esplicitamente, solo spazi unitari che siano spazi di Hilbert separabili.

Una notazione introdotta da Dirac è molto utile per mettere in evidenza il doppio significato che, grazie alla 1.23, assume il prodotto scalare.

In tale formalismo, per indicare un vettore $a \in E$ si scrive $|a\rangle$ e lo si chiama "ket"; la forma lineare $\mathbf{a} \in E^\star$ duale di a si indica con $\langle a|$ e si chiama "bra". L'operazione di dualità 1.24 si indica così:

$$\dagger \,:\, E \to E^\star, \quad \dagger \,:\, |a\rangle \mapsto |a\rangle^\dagger = \langle a| \tag{1.29}$$

non dà luogo ad equivoci chiamare ancora dualità ed indicare con lo stesso simbolo anche l'applicazione inversa

$$\dagger \,:\, E^\star \to E, \quad \dagger \,:\, \langle a| \mapsto \langle a|^\dagger = |a\rangle \tag{1.30}$$

che, nelle nostre ipotesi, è univocamente definita $\forall \langle a| \in E^\star$.

La relazione 1.25 si riscrive allora così:

$$\dagger \,:\, \alpha_1 |f_1\rangle + \alpha_2 |f_2\rangle \mapsto (\alpha_1 |f_1\rangle + \alpha_2 |f_2\rangle)^\dagger = \alpha_1^\star \langle f_1| + \alpha_2^\star \langle f_2| \tag{1.31}$$

$$\forall |f_1\rangle, |f_2\rangle \in E \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

Ponendo $\alpha_1^\star = \beta_1$ e $\alpha_2^\star = \beta_2$ nella 1.31 ed invertendo l'operazione di dualità si ottiene l'analoga:

$$\dagger : \beta_1 \langle f_1| + \beta_2 \langle f_2| \mapsto (\beta_1 \langle f_1| + \beta_2 \langle f_2|)^\dagger = \beta_1^\star |f_1\rangle + \beta_2^\star |f_2\rangle \tag{1.32}$$
$$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$$

Il prodotto scalare (a, b) fra due vettori $a, b \in E$ che mediante la 1.23 può scriversi come $\mathbf{a}(b)$ è rappresentato dal "bracket" $\langle a|\, b\rangle \in \mathbb{C}$; la proprietà di hermiticità 1.2 che, grazie alla 1.23, può anche scriversi nella forma:

$$\mathbf{a}(b) = (\mathbf{b}(a))^\star \tag{1.33}$$

assume nella notazione di Dirac l'aspetto più elegante:

$$\langle a|\, b\rangle = \langle b|\, a\rangle^\star$$

Il bracket $\langle a|\, b\rangle$ è naturalmente lineare sia nel $|b\rangle \in E$ che nel bra $\langle a| \in E^\star$ (per la 1.34 vedi 1.18; per la 1.35 la Proprietà 1.2.1):

$$\langle a| (\alpha_1 |b_1\rangle + \alpha_2 |b_2\rangle) = \alpha_1 \langle a|\, b_1\rangle + \alpha_2 \langle a|\, b_2\rangle \tag{1.34}$$

$$(\beta_1 \langle a_1| + \beta_2 \langle a_2|) |b\rangle = \beta_1 \langle a_1|\, b\rangle + \beta_2 \langle a_2|\, b\rangle \tag{1.35}$$

L'antilinearità nel primo fattore del prodotto scalare *inteso come ket* $|a\rangle$, è nascosta nella operazione di dualità 1.31; la 1.35 si può riscrivere, in modo più scomodo, come:

$$(\alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle)^\dagger |b\rangle = (\alpha_1^\star \langle a_1| + \alpha_2^\star \langle a_2|) |b\rangle = \alpha_1^\star \langle a_1|\, b\rangle + \alpha_2^\star \langle a_2|\, b\rangle \tag{1.36}$$

1.3 Endomorfismi

Gli *endomorfismi* sono gli omomorfismi di $\mathbf{E}$ su se stesso $\mathrm{End}(E) = \mathrm{Hom}(E, E)$; sono particolarmente importanti gli endomorfismi *continui*, spesso detti *operatori lineari* (vedi Cap 4 e Cap. 5 di S.) di cui sono in realtà un caso particolare.

$\mathrm{End}(E)$ non è solo uno spazio vettoriale, ma anche un'*algebra associativa con unità* con le ovvie definizioni di *prodotto di operatori*:

$$(AB) |a\rangle = A (B |a\rangle), \quad \forall |a\rangle \in E \tag{1.37}$$

e di *operatore identità*:

$$\mathbf{1} |a\rangle = |a\rangle, \quad \forall |a\rangle \in E \tag{1.38}$$

Attenzione: in generale *non* vale la proprietà commutativa:

$$AB \neq BA$$

1.3.1 Automorfismi

Gli *automorfismi* sono endomorfismi biettivi, ovvero:

$$A \in \mathrm{Aut}\,(E) \text{ se } \exists A^{-1}/AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1} \tag{1.39}$$

Gli automorfismi formano un gruppo, detto *gruppo lineare* di **E** che si indica con $GL\,(E)$; infatti:

1. $A, B \in \mathrm{Aut}\,(E) \Rightarrow AB \in \mathrm{Aut}\,(E)$, visto che anche AB ammette inverso, dato da $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. il prodotto è associativo
3. $\mathbf{1} \in \mathrm{Aut}\,(E)$
4. $A^{-1} \in \mathrm{Aut}\,(E)$

Se **E** ha dimensione N finita il gruppo lineare si indica con $\mathrm{GL}\,(N, \mathbb{C})$ ($\mathbb{C}$ ricorda che sono automorfismi di uno spazio vettoriale **sui complessi**) ed è costituito dalle matrici $N \times N$ a elementi complessi con **determinante non nullo**.

1.4 Operatori di proiezione

Definizione 1.4.1. Si dicono *operatori di proiezione* i $P \in \mathrm{End}\,(E)\,/P^2 = P$.

P1: Un proiettore ammette inverso (è automorfismo) solo nel caso banale $P = \mathbf{1}$.

Dimostrazione: Per ipotesi: $\exists P^{-1}/PP^{-1} = P^{-1}P = \mathbf{1}$. Quindi essendo $P^2 = P \Rightarrow$, allora $P^{-1}P^2 = 1 \Rightarrow P = \mathbf{1}$.

P2: Il codominio (o immagine) $F = \{Px,\ x \in E\}$ di P è una varietà lineare: ovvio.

P3: Se $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, allora anche $P = P_1 + P_2$ è operatore di proiezione: verifica immediata.

Inoltre, detti F, F_1 e F_2 i codomini di P, P_1 e P_2, vale $F = F_1 \oplus F_2$[3].

Dimostrazione: Essendo $Px = P_1x + P_2x$ ovviamente si ha $F = F_1 + F_2$.

Inoltre se il vettore $k \in F_1 \cap F_2$ allora esistono due vettori x, y tali che $k = P_1x = P_2y$. Essendo $P_1k = P_1^2x = P_1x = k$ si ha $P_1k = P_1P_2y = 0$ perche' P_1P_2 è l'operatore nullo.

[3] Richiamo: $F = F_1 \oplus F_2$ (*somma diretta*) se $\forall f \in F$, $\exists f_1 \in F_1, f_2 \in F_2/f = f_1 + f_2$ e inoltre $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ (dove $\{0\}$ indica l'insieme il cui unico elemento è il vettore nullo); ovvero la scomposizione è *unica*.

1.5 Aggiunto di un endomorfismo continuo

In questa sezione si indica con $\mathrm{End}\,(E)$ lo spazio degli endomorfismi **continui** nello spazio di *Hilbert*[4] *separabile* E (a dimensione finita od infinita). Ci occuperemo invece nel capitolo 2 dei più generali *operatori lineari* (che possono anche non essere continui).

Fissato $\langle x| \in E^\star$, la continuità di $A \in \mathrm{End}\,(E)$ implica che l'applicazione lineare $E \to \mathbb{C}$ definita da:

$$|y\rangle \mapsto \langle x| \left(A\,|y\rangle\right)$$

è un funzionale lineare continuo. Infatti se $|y\rangle = \lim |y_n\rangle$ vale:

$$\langle x| \left(A \lim_{n\to\infty} |y_n\rangle\right) = \langle x| \left(\lim_{n\to\infty} A\,|y_n\rangle\right) = \lim_{n\to\infty} \langle x| \left(A\,|y_n\rangle\right) \tag{1.40}$$

poichè sia A che il prodotto scalare sono continui.
Esiste perciò un $\langle w| \in E^\star$ tale che

$$\langle w|\, y\rangle = \langle x| \left(A\,|y\rangle\right) \qquad \forall\, |y\rangle \in E$$

L'applicazione $E^\star \mapsto E^\star$, che chiamiamo ancora A:

$$A: \qquad \langle x| \mapsto \langle w| = \langle x|\, A \quad / \quad \langle w|\, y\rangle = \langle x| \left(A\,|y\rangle\right) \tag{1.41}$$

è lineare (vedi 1.1) e continua, per la continuità del prodotto scalare nel primo fattore (vedi 1.16); quindi A, definito dalla 1.41, $\in \mathrm{End}\,(E^\star)$.

La 1.41 mostra come le parentesi sono superflue; anzichè $\langle x| \left(A\,|y\rangle\right)$ o $\left(\langle x|\, A\right)|y\rangle$ si scrive semplicemente $\langle x|\, A\,|y\rangle$[5], intendendo che A agisce a destra o a sinistra a seconda delle convenienze.

Introduciamo ora un **altro** endomorfismo $A^\dagger \in \mathrm{End}\,(E)$ mediante la:

Definizione 1.5.1. $\forall A \in \mathrm{End}\,(E)$, l'endomorfismo **aggiunto** o **hermitiano coniugato** $A^\dagger \in \mathrm{End}\,(E)$ è dato da:

$$A^\dagger: \qquad |x\rangle \mapsto A^\dagger\,|x\rangle = \left(\langle x|\, A\right)^\dagger \in E, \qquad \forall\, |x\rangle \in E \tag{1.42}$$

$A^\dagger$ appena definito è effettivamente un endomorfismo di E, infatti è continuo e lineare:

$$A^\dagger \left(\alpha_1\,|x_1\rangle + \alpha_2\,|x_2\rangle\right) = \left[\left(\alpha_1^\star\,\langle x| + \alpha_2^\star\,\langle x_2|\right) A\right]^\dagger =$$

[4] Ovvero *unitario* e *completo*.

[5] Così come si scrive ABC anzichè $A\,(BC)$ o $(AB)\,C$ se vale l'associatività.

$$= [\alpha_1^\star \langle x_1| A + \alpha_2^\star \langle x_2| A]^\dagger = \alpha_1 A^\dagger |x_1\rangle + \alpha_2 A^\dagger |x_2\rangle$$

Occorre notare come invece l'operazione di *dualità* (†, che si legge "dagger", letteralmente "pugnale", ma che in italiano si dice "croce") è *antilineare*, sia quando manda $E \to E^\star$ che, come qui, quando manda:

$$\dagger : \qquad \mathrm{End}\,(E) \to \mathrm{End}\,(E)$$

Infatti $\forall\, |x\rangle \in E$:

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^\dagger |x\rangle = [\langle x| (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)]^\dagger = \left(\alpha_1^\star A_1^\dagger + \alpha_2^\star A_2^\dagger\right) |x\rangle\,,$$

quindi:

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^\dagger = \alpha_1^\star A_1^\dagger + \alpha_2^\star A_2^\dagger \tag{1.43}$$

In breve † manda bra in ket e viceversa, $A \in \mathrm{End}\,(E)$ in $A^\dagger \in \mathrm{End}\,(E)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ in $\alpha^\star$. Usando $\left(A^\dagger |x\rangle\right)^\dagger = \langle x| A$, equivalente alla 1.42, e l'identità:

$$\langle a|\, b\rangle = \langle b|\, a\rangle^\star = \left(|b\rangle^\dagger |a\rangle\right)^\star, \tag{1.44}$$

si deduce l'importantissima proprietà:

$$\langle y| A^\dagger |x\rangle = \left(\left(A^\dagger |x\rangle\right)^\dagger |y\rangle\right)^\star = \langle x| A |y\rangle^\star \qquad \forall\, |x\rangle\,, |y\rangle \in E \tag{1.45}$$

da cui segue:

$$\langle y| A^{\dagger\dagger} |x\rangle = \langle x| A^\dagger |y\rangle^\star = \langle y| A |x\rangle \qquad \forall\, |x\rangle\,, |y\rangle \in E \tag{1.46}$$

e quindi:

$$A^{\dagger\dagger} = A \tag{1.47}$$

Analogamente da $\langle y| (AB)^\dagger |x\rangle = \langle x| AB |y\rangle^\star = \langle y| B^\dagger A^\dagger |x\rangle$ segue:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{1.48}$$

1.5.1 Operatori hermitiani, antihermitiani ed unitari

Sono particolarmente importanti gli endomorfismi continui **autoaggiunti**, che per brevità chiamiamo **operatori hermitiani** (anche se per i più generali operatori lineari, non continui, ci saranno altre sottigliezze), per cui $H^\dagger = H$.

Da:

$$(H_1 + H_2)^\dagger = H_1^\dagger + H_2^\dagger \quad \text{e} \quad (\alpha H)^\dagger = \alpha H \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.49}$$

segue che l'insieme degli operatori hermitiani forma uno *spazio lineare sui reali*. **Non** si tratta tuttavia di un'algebra perchè $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger \nRightarrow (AB)^\dagger = AB$; infatti $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$ che è uguale a AB se e solo se $[A, B] = 0$.

Quindi formano un'algebra (sui reali) solo (sotto)insiemi di operatori hermitiani *mutuamente commutanti.*

$A \in \mathrm{End}\,(E)$ si dice **antihermitiano** se $A^\dagger = -A$.

Ovviamente anche l'insieme degli operatori antihermitiani è uno *spazio vettoriale* sui reali; inoltre è un'*algebra di Lie*:

Definizione 1.5.2. Un'**algebra di Lie** è uno spazio vettoriale **V** sui **reali** con una legge di composizione interna $V \times V \to V$, detta *prodotto di Lie*, $[x, y] \in V$, $\forall x, y \in V$ che soddisfi i tre seguenti assiomi:

T1. linearità: $[x, \alpha y + \beta z] = \alpha\,[x, y] + \beta\,[x, y]\,, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \forall x, y, z \in V$

T2. antisimmetria: $[x, y] = -\,[y, x]\,, \qquad \forall x, y, \in V$

T3. identità di Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \qquad \forall x, y, z \in V$

Nota: il prodotto di Lie non è associativo; tale proprietà è sostituita dall'identità di Jacobi.

I tre assiomi sopra indicati sono soddisfatti dal commutatore di endomorfismi, in particolare dal commutatore di operatori antihermitiani che è ancora antihermitiano:

$$[A, B]^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = -\,[A, B] \tag{1.50}$$

se $A^\dagger = -A,\ B^\dagger = -B$.

Nota: il commutatore ha una proprietà aggiuntiva:

P4: $[A, BC] = [A, B]\,C + B\,[A, C]$

ma questa non ha nulla a che fare con l'algebra di Lie (dove di per sè il prodotto ordinario di operatori **non** è definito): essa ha senso perchè gli endomorfismi formano un'algebra.

Per motivi fisici in Meccanica Quantistica si preferiscono usare gli operatori hermitiani piuttosto che gli antihermitiani; spesso si considera dunque un'algebra di Lie fatta di operatori hermitiani, con l'intesa che il loro commutatore sarà i volte un'elemento dell'algebra di Lie. Esempio:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \qquad L_i^\dagger = L_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

Prop. 1.5.1. $\forall A = -A^\dagger$, $H = iA$ è hermitiano: $H^\dagger = H$ (vedi 1.43) e viceversa iH con $H = H^\dagger$ è antihermitiano.

È dunque possibile individuare l'analogia:

$$\begin{array}{ccc} \text{op. hermitiani} & \leftrightarrow & \text{numeri reali} \\ \text{op. antihermitiani} & \leftrightarrow & \text{numeri immaginari puri} \end{array}$$

Inoltre:

$$\forall A \in \mathrm{End}\,(E) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(A + A^\dagger\right) \text{ hermitiano} \\ \frac{1}{2}\left(A - A^\dagger\right) \text{ antihermitiano} \end{cases} \tag{1.51}$$

Definizione 1.5.3. $U \in \mathrm{Aut}\,(E)$ è un **operatore unitario** se:

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{1.52}$$

Prop. 1.5.2. Gli operatori unitari formano un gruppo:

1. $(U_1 U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger = U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2)^{-1} \qquad \forall U_1, U_2$ unitari
2. $\mathbf{1}^\dagger = \mathbf{1} = \mathbf{1}^{-1}$
3. U unitario $\Rightarrow U^{-1}$ unitario $\qquad U^{-1} = U^\dagger \Rightarrow (U^{-1})^\dagger = U = (U^{-1})^{-1}$

Gli operatori unitari $\in \mathrm{Aut}\,(E_N)$, dove E_N è lo spazio unitario N-dimensionale, formano il *gruppo unitario* $\mathrm{U}\,(N) \subset \mathrm{GL}\,(N, c)$.

Prop. 1.5.3. Esponenziando l'algebra di Lie degli operatori antihermitiani si ottiene il gruppo unitario; infatti

$$\forall A \quad / \quad A^\dagger = -A \tag{1.53}$$

$U = e^A$ è unitario; infatti $U^\dagger = e^{A^\dagger} = e^{-A} = U^{-1}$.

Equivalentemente:

$$e^{iH} \quad \text{unitario} \qquad \forall H = H^\dagger \tag{1.54}$$

Prop. 1.5.4. Gli operatori unitari conservano i prodotti scalari (sono dunque delle *isometrie*):

$$\text{Posto: } |a'\rangle = U|a\rangle\,, |b'\rangle = U|b\rangle$$

$$\langle a'|\, b'\rangle = \langle a|\, U^\dagger U\, |b\rangle = \langle a|\, b\rangle\,, \qquad \forall\, |a\rangle\,, |b\rangle \in E, \qquad \forall U/U^\dagger U = \mathbf{1} \tag{1.55}$$

1.5.2 Esempi di endomorfismi continui

Esempio 1.5.1. $A = |a\rangle\langle b|$, è un endomorfismo continuo $\forall\, |a\rangle\,, |b\rangle \in E$
Infatti:

$$A:\ |x\rangle \mapsto A\,|v\rangle = |a\rangle\langle b|\, v\rangle = \beta\,|a\rangle \in E, \qquad \forall\, |v\rangle \in E$$

dove $\beta = \langle b|\, v\rangle \in \mathbb{C}$, ed è lineare e continuo per le analoghe proprietà del prodotto scalare.

Esempio 1.5.2. $A = |a\rangle\langle a|\,,\ \forall\, |a\rangle \in E$ è hermitiano.
Infatti $\forall\, |u\rangle\,,\ |v\rangle \in E$:

$$\begin{aligned}\langle u|\, A^\dagger\, |v\rangle &= \langle v|\, A\, |u\rangle^\star = \langle v|\, a\rangle^\star \langle a|\, u\rangle^\star = \\ &= \langle u|\, a\rangle\langle a|\, v\rangle = \langle u|\, A\, |v\rangle\end{aligned}$$

Esempio 1.5.3. $P = |e\rangle\langle e|\,,\ \forall\, |e\rangle \in E/\ \langle e|\, e\rangle = 1$ è operatore di proiezione hermitiano.
Infatti:

$$P^2 = |e\rangle\langle e|\, e\rangle\langle e| = |e\rangle\langle e| = P$$

Il codominio di P ha dimensione 1, qualunque sia E; infatti:

$$P\,|x\rangle = |e\rangle\langle e|\, x\rangle = \alpha\,|e\rangle\,, \qquad \forall\, |x\rangle \in E, \qquad \alpha = \langle e|\, x\rangle \in \mathbb{C}$$

Esempio 1.5.4. Sia $\{|e_i\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots N\}$ un sistema O.N. in E non necessariamente completo, cioè:

$$\langle e_i|\, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots N$$

e siano $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ (nessuna somma sugli indici ripetuti) i rispettivi proiettori unidimensionali.

Vale:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i;$$

infatti:

$$|e_i\rangle \langle e_i|\, e_j\rangle \langle e_j| = \delta_{ij} |e_i\rangle \langle e_i| \tag{1.56}$$

Quindi, ricordando **P3** (sezione 1.4 pag. 11):

$$P_{(F_N)} = \sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle \langle e_i| \tag{1.57}$$

è operatore di proiezione hermitiano sullo spazio N dimensionale F_N[6] generato da $\{|e_i\rangle\}$.

$$P_{(F_N)} |v\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |e_i\rangle \,, \qquad \forall\, |v\rangle \in E$$

dove $c_i = \langle e_i|\, v\rangle \in \mathbb{C}$ sono le componenti di $|v\rangle$ lungo i vettori $|e_i\rangle$.

P6: Se $E \equiv E_N$ (dimensione finita N):

$$\sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbf{1} \qquad \text{se } \langle e_i|\, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\ldots N$$

Dimostrazione:

$$\forall\, |v\rangle \in E_N,\ \exists c_i \in \mathbb{C} / \ |v\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |e_i\rangle \tag{1.58}$$

(in caso contrario E_N sarebbe a dimensione maggiore di N); inoltre:

$$\langle e_j|\, e_i\rangle = \delta_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad \langle e_j|\, v\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \langle e_j|\, e_i\rangle = c_j \tag{1.59}$$

Quindi $\forall\, |v\rangle \in E_N$:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|\, v\rangle |e_i\rangle = \left(\sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle \langle e_i| \right) |v\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbf{1}$$

q.e.d.

[6] $F_N = L\left(\{|e_i\rangle\}\right)$ è la varietà lineare generata dal sistema $\{|e_i\rangle\}$.

P7: Se $E = \mathcal{H}$, *spazio di Hilbert separabile* (a ∞ dimensioni) e $\{|e_i\rangle\}$ è un sistema O.N.C. (costituisce dunque una base O.N.), vale:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbf{1}, \tag{1.60}$$

dove il limite sottinteso nella somma della serie va inteso in *senso debole*, ovvero **prima** bisogna applicare ad un $|v\rangle \in \mathcal{H}$ e **poi** fare il limite in $\mathcal{H}$:

$$|v\rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle \langle e_i|\, v\rangle \right) \tag{1.61}$$

Infatti dal corso di MMF I sappiamo che $\forall\, |v\rangle \in \mathcal{H}$ si può scrivere:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, |e_i\rangle\,, \qquad c_i = \langle e_i|\, v\rangle \tag{1.62}$$

dove il limite:

$$|v\rangle = \lim_{N\to\infty} |S_N\rangle\,, \qquad |S_N\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\, |e_i\rangle \in \mathcal{H} \tag{1.63}$$

va inteso nel senso della norma:

$$\lim_{N\to\infty} \| |v\rangle - |S_N\rangle \| = 0 \tag{1.64}$$

Più tardi si userà la:

P8: Basta dire $\sum |i\rangle \langle i| = \mathbf{1}$ e che i ket $|i\rangle$ sono *linearmente indipendenti* per dedurre $\langle i|\, j\rangle = \delta_{ij}$.

Dimostrazione:

$$\sum |i\rangle \langle i| = \mathbf{1} \qquad \Rightarrow \qquad |j\rangle = \sum_j |i\rangle \langle i|\, j\rangle = \sum_i c_i^{(j)}\, |i\rangle\,, \qquad c_i^{(j)} = \langle i|\, j\rangle$$

I $c_i^{(j)}$ sono unici per la indipendenza lineare delle $|i\rangle$ e quindi $c_i^{(j)} = \delta_{ij}$ necessariamente.

1.6 Autovalori e autovettori, in generale

Definizione 1.6.1. In ogni spazio vettoriale E (di dimensione finita od infinita)[7] si dice che $|x\rangle$ è un **autovettore** dell'endomorfismo A, appartenente

[7] Le definizione di autovalore e autovettore ed il resto di questo paragrafo possono essere facilmente estesi ai più generali operatori lineari (non solo per gli endomorfismi continui).

all'**autovalore** λ, se vale:

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle, \qquad |x\rangle \neq 0 \tag{1.65}$$

Inoltre:

$$L_\lambda = \{|x\rangle / A|x\rangle = \lambda|x\rangle\} \tag{1.66}$$

è l'**autospazio** di A appartenente a λ; si tratta di una varietà lineare in quanto $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{gathered} A|x_1\rangle = \lambda|x_1\rangle, \ A|x_2\rangle = \lambda|x_2\rangle \Rightarrow \\ A(\alpha_1|x_1\rangle + \alpha_2|x_2\rangle) = \lambda(\alpha_1|x_1\rangle + \alpha_2|x_2\rangle) \end{gathered} \tag{1.67}$$

Se $\dim(L_\lambda) > 1$ si dice che λ è *degenere*.

Prop. 1.6.1. Gli operatori di proiezione $P^2 = P$ hanno solo autovalori 0 e 1.

Infatti:

$$P|x\rangle = \lambda|x\rangle, |x\rangle \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad P|x\rangle = \lambda P|x\rangle \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda - 1)P|x\rangle = 0$$

quindi o $\lambda = 1$, oppure $P|x\rangle = 0$, quindi $\lambda = 0$.

L'autospazio appartenente a $\lambda = 1$ è dato dagli $|x\rangle$ appartenenti al codominio di P (infatti $|x\rangle = P|y\rangle \Rightarrow P|x\rangle = |x\rangle$), mentre l'autospazio appartenente a $\lambda = 0$ è costituito dal codominio di $(\mathbf{1} - P)$ (infatti $|x\rangle = (\mathbf{1} - P)|y\rangle \Rightarrow P|x\rangle = 0$ che a sua volta implica $(\mathbf{1} - P)|x\rangle = |x\rangle$).

Definizione 1.6.2. In uno spazio di Hilbert separabile (a dimensione finita od infinita) l'operatore N si dice **normale** se $NN^\dagger = N^\dagger N$.

Lemma 1.6.1. Sia $N|x\rangle = 0$, $\left[N, N^\dagger\right] = 0$. Allora $N^\dagger|x\rangle = 0$.

Dimostrazione:

$$0 = \|N|x\rangle\|^2 = \langle x|N^\dagger N|x\rangle = \langle x|NN^\dagger|x\rangle = \left\|N^\dagger|x\rangle\right\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad N^\dagger|x\rangle = 0$$

q.e.d.

Lemma 1.6.2. Sia $\left[N, N^\dagger\right] = 0$, $N|x\rangle = \lambda|x\rangle$: allora $N^\dagger|x\rangle = \lambda^\star|x\rangle$.

Dimostrazione: anche $N' = N - \lambda\mathbf{1}$ è normale: infatti $N'^\dagger = N^\dagger - \lambda^\star\mathbf{1}$ commuta con N'.

Ma:

$$N|x\rangle = \lambda|x\rangle \iff N'|x\rangle = 0$$

e in conseguenza del Lemma 1.6.1 segue:

$$N'^{\dagger}\left|x\right\rangle = 0$$

e ciò implica infine la tesi:

$$\left(N^{\dagger} - \lambda^{\star}\mathbf{1}\right)\left|x\right\rangle = 0 \tag{1.68}$$

q.e.d.

Corollario 1.6.1. Gli autovalori degli operatori hermitiani sono reali.

Infatti se $H^{\dagger} = H$ e $H\left|x\right\rangle = \lambda\left|x\right\rangle$, per il Lemma 1.6.2 vale anche $H\left|x\right\rangle = \lambda^{\star}\left|x\right\rangle$ da cui segue:

$$0 = \left(\lambda - \lambda^{\star}\right)\left|x\right\rangle,\ \left|x\right\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^{\star} \tag{1.69}$$

Ovviamente gli autovalori di un operatore antihermitiano sono immaginari puri.

Corollario 1.6.2. Gli autovalori di un operatore unitario hanno modulo 1.
Dimostrazione:

$$U\left|x\right\rangle = \lambda\left|x\right\rangle, \qquad U^{\dagger}\left|x\right\rangle = \lambda^{\star}\left|x\right\rangle$$

$$U^{\dagger}U\left|x\right\rangle = \lambda U^{\dagger}\left|x\right\rangle \quad \underset{U^{\dagger}U = \mathbf{1}}{\Rightarrow} \quad \left|x\right\rangle = \left|\lambda\right|^{2}\left|x\right\rangle$$

ma $\left|x\right\rangle \neq 0$, quindi $\left|\lambda\right|^{2} = 1$.

q.e.d.

Teorema 1.6.1. Autovettori di operatori normali appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali.
Dimostrazione:

$$N\left|x\right\rangle = \lambda\left|x\right\rangle, \qquad N\left|y\right\rangle = \mu\left|y\right\rangle \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{array}{lcccl} N\left|x\right\rangle = \lambda\left|x\right\rangle & \Rightarrow & N^{\dagger}\left|x\right\rangle = \lambda^{\star}\left|x\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle y\right|N^{\dagger}\left|x\right\rangle = \lambda^{\star}\left\langle y|x\right\rangle \\ N\left|y\right\rangle = \mu\left|y\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle x\right|N\left|y\right\rangle = \mu\left\langle x|y\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle y\right|N^{\dagger}\left|x\right\rangle = \mu^{\star}\left\langle y|x\right\rangle \end{array}$$

Dalle ultime due relazioni segue:

$$0 = \left(\lambda - \mu\right)^{\star}\left\langle y|x\right\rangle \quad \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \quad \left\langle y|x\right\rangle = 0 \tag{1.70}$$

q.e.d.

1.7 Isomorfismo $E_N \sim \mathbb{C}^n$ e spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H} \sim l_2$

1.7.1 Calcolo matriciale

Cominciamo a discutere uno spazio unitario E_N di dimensione finita N. In E_N esistono certamente N vettori linearmente indipendenti che possono essere resi ortonormali; quindi:

$$\exists \{|i\rangle\,,\ i=1,2,\dots N\}\,, \qquad \langle i|\,j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{N} |i\rangle\,\langle i| = \mathbf{1} \tag{1.71}$$

Esiste perció l'applicazione lineare $E_N \to \mathbb{C}^N$ definita da:

$$|v\rangle \mapsto \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \qquad v_i = \langle i|\,v\rangle \in \mathbb{C} \tag{1.72}$$

e viceversa $\mathbb{C}^N \to E_N$ con:

$$\underline{v} \mapsto |v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i\,|i\rangle \in E_N. \tag{1.73}$$

Si tratta di un isomorfismo fra E_N e $\mathbb{C}^n$ intesi come spazi vettoriali, ma anche come spazi unitari poichè sono conservati i prodotti scalari:

$$\langle w|\,v\rangle = \langle w|\,i\rangle\,\langle i|\,v\rangle = w_i^\star v_i = \underline{w}^\dagger \underline{v} \tag{1.74}$$

dovi si è sottointesa $\sum_{i=1}^{N}$ sugli indici ripetuti, come si farà sempre nel seguito, e inoltre con $\underline{w}^\dagger$ si intende la matrice ad una sola riga ed N colonne:

$$\underline{w}^\dagger = (w_1^\star w_2^\star \dots w_N^\star) \qquad \text{con } \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \tag{1.75}$$

e $\underline{w}^\dagger \underline{v}$ è il prodotto matriciale di una riga per una colonna.

Per ogni endomorfismo A si può associare a

$$|w\rangle = A\,|v\rangle \tag{1.76}$$

l'espressione in componenti $w_i = \langle i|\, w\rangle = \langle i|\, A\,|v\rangle = \langle i|\, A\,|j\rangle\,\langle j|\, v\rangle = A_{ij}v_j$, dove:

$$A_{ij} = \langle i|\, A\,|j\rangle \in \mathbb{C} \tag{1.77}$$

e quindi, in termini matriciali:

$$\underline{w} = \underline{A}\,\underline{v}$$

dove:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \\ A_{21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ & & & A_{NN} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^n)$$

Se $AB = C$, allora:

$$C_{ij} = \langle i|\, C\,|j\rangle = \langle i|\, A\,|l\rangle\,\langle l|\, B\,|j\rangle = A_{il}B_{lj} \tag{1.78}$$

e quindi:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{C} \tag{1.79}$$

dove si è usato il prodotto matriciale. Ne segue:

1. $A \in \mathrm{Aut}\,(E_N)$ (cioè $\exists A^{-1}$) $\iff \det \underline{A} \neq 0$
2. $\left(A^\dagger\right)_{ij} = \langle i|\, A^\dagger\,|j\rangle = \langle j|\, A\,|i\rangle^\star = A^\star_{ji}$
   ovvero $\underline{A}^\dagger = \underline{A}^{\star T}$ (dove A^T sta per trasposta di A)
3. $H = H^\dagger \iff \underline{H} = \underline{H}^{\star T}$
   Sono quindi hermitiane le matrici reali simmetriche, le matrici immaginarie pure antisimmetriche e ogni loro combinazione lineare a **coefficienti reali**.

1.7.2 Cambiamenti di base (O.N.)

Se U è un operatore unitario:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \tag{1.80}$$

e $|i\rangle$ un sistema O.N.C., allora:

$$|i'\rangle = U\,|i\rangle \tag{1.81}$$

è ancora O.N.C. perchè U conserva i prodotti scalari.

Viceversa se $\{|i\rangle\}$ e $\{|i'\rangle\}$ sono entrambi O.N.C. l'operatore unitario

$$U = \sum_{s=1}^{N} |s'\rangle \langle s| \tag{1.82}$$

soddisfa le 1.80 e 1.81.

Qual'è la relazione che lega le componenti v'_i e v_i dello **stesso** vettore $|v\rangle$ nelle due basi?

$$v'_i = \langle i'|\, v\rangle = \langle i'|\, j\rangle \langle j|\, v\rangle = \langle i|\, U^\dagger\, |j\rangle \langle j|\, v\rangle = U^\dagger_{ij} v_j \tag{1.83}$$

ovvero:

$$\underline{v}' = \underline{U}^\dagger \underline{v} \tag{1.84}$$

dove:

$$U_{ij} = \langle i|\, U\, |j\rangle = \langle i|\, j'\rangle \tag{1.85}$$

Analogamente, per gli elementi di matrice:

$$\begin{aligned} A'_{lm} &= \langle l'|\, A\, |m'\rangle = \langle l'|\, r\rangle \langle r|\, A\, |s\rangle \langle s|\, m'\rangle = \\ &= \langle l|\, U^\dagger\, |r\rangle \langle r|\, A\, |s\rangle \langle s|\, U\, |m\rangle = U^\dagger_{lr} A_{rs} U_{sm} \end{aligned} \tag{1.86}$$

ovvero:

$$\underline{A}' = \underline{U}^\dagger \underline{A}\, \underline{U} \tag{1.87}$$

È evidente che il cambio di base lascia inalterati i prodotti scalari:

$$\langle w|\, A\, |v\rangle = \underline{w}^\dagger \underline{A}\, \underline{v} = \underline{w}^\dagger \underline{U}\, \underline{U}^\dagger \underline{A}\, \underline{U}\, \underline{U}^\dagger \underline{v} = \underline{w}'^\dagger\, \underline{A}' \underline{v}' \tag{1.88}$$

pur cambiando componenti dei vettori ed elementi di matrice.

Una matrice ha però alcuni **invarianti** sotto cambiamento di base:

$$\det \underline{A}' = \det \left(\underline{U}^\dagger \underline{A}\, \underline{U}\right) = \det \underline{A} \det \left(\underline{U}^\dagger \underline{U}\right) = \det \underline{A} \tag{1.89}$$

Ricordiamo la:

Definizione 1.7.1. Si definisce *traccia*:

$$Tr\underline{A} = \sum_i A_{ii} \tag{1.90}$$

con la proprietà:

$$Tr\left(\underline{A}\,\underline{B}\right) = A_{ij}B_{ji} = B_{ji}A_{ij} = Tr\left(\underline{B}\,\underline{A}\right) \tag{1.91}$$

Attenzione, in generale:

$$Tr\left(\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C}\right) = Tr\left(\underline{B}\,\underline{C}\,\underline{A}\right) = Tr\left(\underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B}\right) \neq Tr\left(\underline{B}\,\underline{A}\,\underline{C}\right) \tag{1.92}$$

$$\det\left(\underline{A}\,\underline{B}\right) = \det\left(\underline{A}\right)\det\left(\underline{B}\right)$$

$$Tr\left(\underline{A}\,\underline{B}\right) \neq Tr\left(\underline{A}\right)Tr\left(\underline{B}\right)$$

Oltre a $\det\left(\underline{A}\right)$ è anche invariante $Tr\left(\underline{A}\right)$, anzi:

$$\begin{gathered} Tr\left(\underline{A}'^{l}\right) = Tr\left(\underline{U}^{\dagger}\underline{A}\,\underline{U}\,\underline{U}^{\dagger}\underline{A}\,\underline{U}\ldots\underline{U}^{\dagger}\underline{A}\,\underline{U}\right) = \\ Tr\left(\underline{U}^{\dagger}\underline{A}^{l}\underline{U}\right) = Tr\left(\underline{A}^{l}\underline{U}\,\underline{U}^{\dagger}\right) = Tr\left(\underline{A}^{l}\right) \end{gathered} \tag{1.93}$$

Si può quindi lecitamente parlare di $\det A$ e TrA per ogni $A \in \mathrm{End}\left(E_N\right)$ senza bisogno di fissare una base e passare a $\mathbb{C}^n$.

1.7.3 Isomorfismo $\mathcal{H} \sim l_2$

L'isomorfismo $\mathcal{H} \sim l_2$ si stabilisce analogamente a quello $E_N \sim \mathbb{C}^n$: poichè $\mathcal{H}$ è separabile esiste una base numerabile, quindi:

$$\exists\left\{|i\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots\right\}, \qquad \langle i|\,j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|i\rangle\langle i| = \mathbf{1} \tag{1.94}$$

dove la somma della serie va intesa nel senso che $\forall\,|v\rangle \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{1}\cdot|v\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|i\rangle\langle i|\cdot|v\rangle \tag{1.95}$$

Si può quindi definire l'applicazione lineare $\mathcal{H} \to l_2$ come:

$$|v\rangle \mapsto \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad v_i = \langle i|\,v\rangle \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|v_i\right|^2 = \langle v|\,v\rangle < \infty \tag{1.96}$$

Importante:

$$l_2 = \left\{ \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad v_i \in \mathbb{C} / \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 < \infty \right\} \tag{1.97}$$

Non tutti i vettori colonna con una infinità numerabile di righe sono elementi dello spazio vettoriale l_2 (*spazio di Hilbert delle componenti*), ma solo quelli di norma quadra $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 < \infty$.

Viceversa la completezza di $\mathcal{H}$ assicura (un altro *teorema di Fischer Riesz*) che:

$$\forall \underline{v} \in l_2 \qquad \exists\, |v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} v_i\, |i\rangle \in \mathcal{H} \tag{1.98}$$

cosicchè è definita anche l'applicazione inversa: $l_2 \to \mathcal{H}$.

Poi tutto procede come alla sez. 1.7.1 (pag. 21) purchè gli endomorfismi A che si prendono in considerazione siano *continui*. Infatti si ha:

$$w_i = \langle i|\, w\rangle = \langle i|\, A\, |v\rangle = \langle i|\, A \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |j\rangle\, \langle j|\, v\rangle \tag{1.99}$$

Se e solo se A è continuo si può procedere scrivendo:

$$w_i = \langle i| \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} A\, |j\rangle\, \langle j|\, v\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \langle i|\, A\, |j\rangle\, \langle j|\, v\rangle \tag{1.100}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la continuità del prodotto scalare e quindi:

$$w_i = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} v_j \qquad \text{cioè} \qquad \underline{w} = \underline{Av} \tag{1.101}$$

dove $\underline{A}$ è una matrice con un'infinità numerabile di righe e colonne.

Nello spazio infinito dimensionale non basta invece che A sia un endomorfismo continuo per dare senso a $Tr\,(A)$ o $\det\,(A)$, basta pensare ad $A = 2 \cdot \mathbf{1}$ (per cui non sono definiti nè traccia nè determinante); Tr e $\det$ sono definiti solo per particolari sottoclassi di endomorfismi continui.

1.8 Autovalori e autovettori per operatori su E_N

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle\,,\ |x\rangle \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A - \lambda\mathbf{1})|x\rangle = 0 \tag{1.102}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_j (A_{ij} - \lambda\delta_{ij})\,x_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots N \tag{1.103}$$

Quello scritto è un sistema lineare omogeneo di N equazioni nelle N incognite x_j; ha soluzioni *non banali* ($|x\rangle \neq 0$) se e solo se:

$$\det(\underline{A} - \lambda\underline{\mathbf{1}}) = 0 \qquad \text{eq. secolare (o caratteristica) di } A \tag{1.104}$$

Tale equazione ha grado N nell'incognita λ e ammette n soluzioni fra semplici e multiple:

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n \end{matrix} \tag{1.105}$$

dove m_α è la molteplicità della soluzione λ_α, con:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha = N, \qquad 1 \leq n \leq N \tag{1.106}$$

A ogni autovalore λ_α è associato un autospazio:

$$F_\alpha = \{|x\rangle \in E_N / A|x\rangle = \lambda_\alpha |x\rangle\} \tag{1.107}$$

Si può dimostrare che $1 \leq \dim F_\alpha \leq m_\alpha$.

Esempio 1.8.1. Verificare che:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha un unico autovalore $\lambda_1 = 1$ di molteplicità $m_1 = 2$; inoltre $\dim F_1 = 1$. Quindi A_1 **non** possiede due autovettori linearmente indipendenti e non esiste alcuna base in cui A_1 sia diagonale.

Teorema 1.8.1. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una base O.N. formata da autovettori di A è che esso sia **normale**.

Dimostrazione:

Condizione necessaria

Sia $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle\,,\ \langle a_i|\,a_j\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots N$. Allora $AA^\dagger = A^\dagger A$.

Infatti dall'ipotesi segue:

$$A_{ij} = \langle a_i| A |a_j\rangle = a_j \delta_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad A^\dagger_{ij} = A^\star_{ji} = a^\star_j \delta_{ij} \tag{1.108}$$

Quindi nella base $|a_i\rangle$ sia A che $A^\dagger$ sono diagonali, quindi commutano.
Condizione sufficiente
Sia $AA^\dagger = A^\dagger A$. Allora $\exists\, |a_1\rangle$ autovettore normalizzato,

$$A |a_1\rangle = a_1 |a_1\rangle \qquad \Rightarrow \qquad A^\dagger |a_1\rangle = a_1^\star |a_1\rangle$$

in cui si è utilizzato il Lemma 1.6.2 (pag. 19).
Sia $E_{N-1} \subset E_N$ il sottospazio ortogonale a $|a_1\rangle$:

$$E_{N-1} = \{|y\rangle \in E_N / \langle a_1|\, y\rangle = 0\}$$

E_{N-1} è invariante sia sotto A che sotto $A^\dagger$; infatti:

$$\langle a_1| A |y\rangle = \langle y| A^\dagger |a_1\rangle^\star = (\langle y|\, a_1\rangle\, a_1^\star)^\star = 0, \qquad \forall\, |y\rangle \in E_{N-1} \tag{1.109}$$

Idem per $\langle a_1| A^\dagger |y\rangle = 0$; ovvero:

$$A |y\rangle\, ,\; A^\dagger |y\rangle \in E_{N-1},\; \forall\, |y\rangle \in E_{N-1} \tag{1.110}$$

La restrizione di A al sottospazio E_{N-1} è quindi ancora normale; si può costruire certamente un secondo autovettore normalizzato $|a_2\rangle \in E_{N-1}$, quindi per costruzione:

$$\langle a_1|\, a_2\rangle = 0$$

Si costruisce poi $E_{N-2} \subset E_{N-1}$ ortogonale ad $|a_2\rangle$ (e ovviamente ad $|a_1\rangle$) e così via. Si costruisce dunque un insieme di N autovettori ortonormali:

$$A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle\, , \qquad \langle a_i|\, a_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots N \tag{1.111}$$

q.e.d.

Notare che $\underline{A}$ nell'esempio 1.8.1 **non** è normale.

Esempio 1.8.2. Verificare che:

$$\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è normale e ha due autovettori linearmente indipendenti ma **non** ortogonali fra loro.

P1: **Rappresentazione spettrale** di un operatore normale A.

Nella base O.N. $\{|a_i\rangle\}$ (della 1.111) vale:

$$A_{ij} = \langle a_i| A |a_j\rangle = a_j \delta_{ij} \tag{1.112}$$

quindi

$$A = |a_i\rangle A_{ij} \langle a_j| = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle a_i \langle a_i| = \sum_{i=1}^{N} a_i P_i \tag{1.113}$$

dove $P_i = |a_i\rangle \langle a_i|$, $P_i^2 = P_i$.

Occorre notare che non è affatto escluso che si possa avere $a_i = a_j$ per $i \neq j$. Se ciò succede, cioè se qualche autovalore a_i è *degenere*, può essere utile affiancare alla rappresentazione spettrale di cui in **P1** un'altra, in cui si somma solo sugli autovalori diversi a_α (con $a_\alpha \neq a_\beta$, $\forall \alpha \neq \beta$) e si raggruppano tutti gli autovettori O.N. $\left|a_\alpha^{(i)}\right\rangle / A \left|a_\alpha^{(i)}\right\rangle = a_\alpha \left|a_\alpha^{(i)}\right\rangle$:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha P_\alpha, \qquad n \leq N \tag{1.114}$$

dove $n = N$ solo se non c'è degenerazione.

P_α è il proiettore sull'autospazio E_α ($\dim(E_\alpha) \geq 1$, vale l'uguaglianza solo se a_α non è degenere) appartenente all'autovalore a_α (notare che qui $\dim E_\alpha = m_\alpha$, vedi eq. 1.106).

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{\dim(E_\alpha)} \left|a_\alpha^{(i)}\right\rangle \left\langle a_\alpha^{(i)}\right|, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \dim(E_\alpha) = N \tag{1.115}$$

Le relazioni di O.N.C. degli autovettori $\left|a_\alpha^{(i)}\right\rangle$ si leggono quindi:

$$\left\langle a_\alpha^{(i)} \middle| a_\beta^{(j)} \right\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_\alpha} \left|a_\alpha^{(i)}\right\rangle \left\langle a_\alpha^{(i)}\right| = \mathbf{1} \tag{1.116}$$

Lo spazio di partenza E_N è quindi scomposto:

$$E_N = \sum_{\alpha=1}^{n\,\oplus} E_\alpha, \qquad E_\alpha = \{|x\rangle \in E_N / A|x\rangle = a_\alpha |x\rangle\} \tag{1.117}$$

e vale:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha P_\alpha \tag{1.118}$$

La 1.118 si dice **rappresentazione spettrale** di A e contiene tutta l'informazione sullo spettro, cioè sugli autovalori a_α e sui corrispondenti autospazi: $E_\alpha = \mathrm{Im} P_\alpha$ (ovviamente qui Im sta per immagine, o codominio).

Teorema 1.8.2. Condizione necessaria e sufficiente affinchè due operatori **normali** A e B siano diagonalizzabili nella **stessa** base O.N. (cioè che ammettano un sistema completo di autovettori in comune) è che essi commutino.

Dimostrazione:

Condizione necessaria

Se A e B sono entrambi diagonali certamente commutano.

Condizione sufficiente

Sia $AB = BA$. Scritto A nella sua rappresentazione spettrale 1.114, si vede subito che ogni autospazio E_α di A è invariante sotto B; infatti:

$$AB\left|v_\alpha\right\rangle = BA\left|v_\alpha\right\rangle = a_\alpha B\left|v_\alpha\right\rangle \qquad \Rightarrow \qquad B\left|v_\alpha\right\rangle \in E_\alpha$$

dove $\left|v_\alpha\right\rangle \in E_\alpha$.

Per il Lemma 1.6.1 (pag. 19) il sottospazio E_α è anche autospazio di $A^\dagger$; poichè $[A, B] = 0 \Rightarrow \left[A^\dagger, B^\dagger\right] = 0$, E_α è anche invariante sotto $B^\dagger$.

Si può quindi diagonalizzare la restrizione di B in E_α (che è normale) trovando autovettori di B, che lo sono anche di A.

$$B\left|a_\alpha, b_\alpha^{(i)}\right\rangle = b_\alpha^{(i)}\left|a_\alpha, b_\alpha^{(i)}\right\rangle, \qquad i = 1, 2 \ldots m_\alpha$$

Gli N autovettori contemporanei di A e B,

$$\left|a_\alpha, b_\alpha^{(i)}\right\rangle, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n, \qquad i = 1, 2, \ldots m_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha = N$$

formano un sistema O.N.C. in E_N.

q.e.d.

Capitolo 2

Operatori lineari in spazi ad infinite dimensioni

2.1 Dominio, continuità e limitatezza di un operatore.

Parecchi dei teoremi sugli operatori lineari negli spazi a dimensione finita possono essere estesi agli spazi di dimensione infinita; è necessario usare però una certa cautela poichè, in generale, essi valgono solo se si pongono opportune restrizioni sulle classi di operatori che si considerano.

Una prima complicazione nasce dal fatto che negli spazi ad infinite dimensioni in generale **non** è conveniente definire gli operatori lineari come omomorfismi fra due spazi E e K, associando ad **ogni** elemento di E un elemento di K.

Basti pensare allo spazio $L^{(2)}(a,b)$; l'operatore lineare **derivata**, $\frac{d}{dx}$, non si può applicare a tutte le funzioni che rappresentano vettori di $L^{(2)}(a,b)$, ma solo a quelle derivabili con derivata quadrato integrabile.

È quindi utile adottare la seguente

Definizione 2.1.1. Dati due spazi vettoriali E e K si dice **operatore lineare** di E in K l'applicazione lineare $\mathcal{D}_A \to K$, dove $\mathcal{D}_A$ è una varietà lineare contenuta in E, detta **dominio** dell'operatore A.

È importante osservare che $\mathcal{D}_A \subset E$ deve essere una varietà lineare, e non un sottoinsieme qualsiasi di E, per garantire che $\forall x, y \in \mathcal{D}_A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}$, abbia senso la proprietà

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y, \tag{2.1}$$

che definisce la linearità dell'applicazione.

Ciò mostra come il concetto di dominio sia superfluo negli spazi di dimensione finita; infatti se E ha dimensione finita N, qualsiasi varietà lineare $\mathcal{D}_A \subset E$ è ancora uno spazio vettoriale E' di dimensione finita $M \leq N$; l'operatore A è allora un omomorfismo fra lo spazio E' e lo spazio K.

Se invece E è uno spazio vettoriale ad infinite dimensioni, la varietà lineare $\mathcal{D}_A \subset E$ può essere uno spazio di natura diversa da E; abbastanza spesso succede, come nell'esempio $\frac{d}{dx}$, che $\mathcal{D}_A$ sia uno spazio normato non completo e che E sia il suo completamento, che valga cioè $[\mathcal{D}_A] = E$.

Vedremo tuttavia che anche negli spazi ad infinite dimensioni esiste una sottoclasse di operatori per i quali è superfluo introdurre il concetto di dominio.

Se E e K sono **spazi lineari topologici** (in particolare **spazi normati**) si può pensare al limite di una successione e chiedersi se si può scambiare l'operatore con il segno di limite; gli operatori per cui ciò è lecito si chiamano operatori lineari continui.

Definizione 2.1.2. L'operatore lineare A è **continuo** se per ogni successione convergente $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{D}_A$, con $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathcal{D}_A$, vale

$$Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n \tag{2.2}$$

ovvero

$$A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n. \tag{2.3}$$

È immediato verificare che ogni operatore lineare fra spazi a numero finito di dimensioni è continuo; fissate infatti arbitrariamente una base in E ed una base in K, le componenti di $y = Ax$ ($x \in E$, $y \in K$) sono funzioni lineari, quindi continue, delle componenti di x.

La derivata fornisce esempio di **operatore non continuo** in $L^2(-\pi, \pi)$: la successione $\frac{1}{n} \sin nx$ converge a zero in norma quadratica, mentre la successione delle derivate $\cos nx$ non converge affatto[1] (le funzioni $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$ formano un sistema ortonormale).

In modo analogo la definizione di operatore limitato fra **spazi normati** E e K diventa la seguente

Definizione 2.1.3. L'operatore A è **limitato** se esiste un $C > 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{D}_A$ vale

$$\|Ax\| \leq C \|x\|,$$

[1] La successione $\cos nx$ converge a zero solo **debolmente**, ovvero nel senso delle distribuzioni.

ovvero se $\forall x \in D_A$, $\|x\| = 1$, si ha

$$\|Ax\| \leq C.$$

La **norma** di A diventa:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}_A \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}_A \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| \,, \tag{2.4}$$

che esiste certamente perchè $\|Ax\|$ è limitato.

Per ogni $x \in \mathcal{D}_A$ si può quindi scrivere

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \,. \tag{2.5}$$

Pur avendo ammesso che l'operatore A sia definito soltanto su una varietà lineare contenuta in E, le definizioni 2.1.2 e 2.1.3 rimangono equivalenti.

Vale anche il seguente

Teorema 2.1.1. Un operatore lineare **limitato** A, che mandi lo spazio normato E nello spazio di Banach K, definito su un dominio $\mathcal{D}_A \subset E$ può essere esteso per continuità in modo unico alla chiusura $[\mathcal{D}_A]$.

Dimostrazione:

$$\forall x \in [\mathcal{D}_A],\ \exists \{x_n\},\ x_n \in \mathcal{D}_A \quad /x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$\{Ax_n\}$ è di Cauchy in K; infatti $\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|$; quindi, per la completezza di K, $\exists y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \in K$.

Mostriamo che il limite y non dipende dalla successione scelta a rappresentare x; infatti se

$$x = \lim_{n\to\infty} x'_n, \quad x'_n \in \mathcal{D}_A,$$

la 2.5 implica

$$\|Ax'_n - Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x'_n - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} (Ax'_n - Ax_n) = 0.$$

L'effetto di A su $x \in [\mathcal{D}_A]$ può quindi essere definito in modo univoco da: $Ax = y$. È immediato verificare che questa estensione di A ne conserva la linearità e la norma.

q.e.d.

Questo teorema mostra che, come per gli spazi a numero finito di dimensioni, anche nel caso degli spazi di Banach (ed in particolare di quelli di Hilbert) è supefluo introdurre il concetto di dominio, qualora ci si limiti a **operatori lineari limitati**; infatti in tal caso il dominio è (o può essere reso grazie al teorema 2.1.1) un sottospazio chiuso dello spazio di Banach E, quindi ancora uno spazio di Banach $E' \subset E$; quindi tanto vale limitarsi a studiare gli omomorfismi fra spazi di Banach $E' \to K$ e supporre che l'operatore sia definito su tutto E'.

Naturalmente lo stesso discorso non vale per gli **operatori non limitati** ed è proprio in questo caso che è essenziale introdurre il concetto di dominio.

Esercizio 1: Verificare che $\frac{d}{dx}$ non è limitato in $L^2(-\pi, \pi)$, applicandolo alla successione $\cos nx$.

Esercizio 2: Verificare che l'operatore lineare **posizione** X, definito da $X : f \mapsto g$, dove $g(x) = xf(x)$, è limitato in $L^2(a, b)$ con a, b finiti $[\|x\| = \max(|a|, |b|)]$; se l'intervallo è infinito, X non è limitato e il suo dominio non può essere tutto $L^2(a, b)$.

2.2 Aggiunto di un operatore lineare non continuo, in spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$

Supponiamo che il dominio $\mathcal{D}_A$ dell'operatore lineare $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}$ sia denso in $\mathcal{H}$ ($[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$),ma non coincida con $\mathcal{H}$; ciò succede se A non è continuo. (vedi teorema 2.1.1). Per definire l'aggiunto di A si procede come in 4.5 ma ci vuole più cautela. Fissato un *generico* bra $\langle u| \in \mathcal{H}^\star$ **non** è detto che l'applicazione $\mathcal{D}_A \to \mathbb{C}$:

$$|v\rangle \mapsto \langle u| (A |v\rangle) \tag{2.6}$$

che è certo lineare e ben definita $\forall |v\rangle \in \mathcal{D}_A$, sia continua , come dovrebbe essere[2] per poter definire un bra (funzionale lineare continuo, vedi la definizione data nel capitolo 4) $\langle w|$ tale che valesse:

$$\langle w| v\rangle = \langle u| (A |v\rangle) , \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{D}_A \tag{2.7}$$

Definizione 2.2.1. L'insieme $\mathcal{D}(A^\dagger)$ (che è una varietà lineare) dei ket

[2]Ricordare la continuità del prodotto scalare.

$|u\rangle$ per cui l'applicazione 2.6 è un funzionale lineare continuo (che chiamiamo $\langle w|$) si dice **dominio dell'operatore aggiunto** $A^\dagger$:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{|u\rangle \in \mathcal{H} / \exists \langle w| \in \mathcal{H}^\star / \langle w|\, v\rangle = \langle u|\,(A\,|v\rangle), \quad \forall\,|v\rangle \in \mathcal{D}_A\} \tag{2.8}$$

Per ogni $|u\rangle \in \mathcal{D}_{A^\dagger}$ si può allora scrivere

$$\langle u|\, A = \langle w|\,, \quad \text{ovvero } A^\dagger\,|u\rangle = |w\rangle \tag{2.9}$$

che definisce l'**aggiunto** $A^\dagger$ di A ; inoltre poichè $\langle w|\, v\rangle$ si può scrivere sia come $\langle u|\,(A\,|v\rangle)$ che come $(\langle u|\, A)\,|v\rangle$ si possono lasciar cadere le parentesi e scrivere semplicemente $\langle u|\, A\,|v\rangle$; da $\langle w|\, v\rangle = \langle v|\, w\rangle^\star$ e dalla 2.9 segue infine

$$\langle u|\, A\,|v\rangle = \langle v|\, A^\dagger\,|u\rangle^\star\,, \quad \forall\,|v\rangle \in \mathcal{D}_A, \forall\,|u\rangle \in \mathcal{D}_{A^\dagger} \tag{2.10}$$

Definizione 2.2.2. L'operatore A si dice **autoaggiunto** se $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{D}_A$ e inoltre $A^\dagger = A$.

P 1: **Proprietà:** La 2.10 implica che $\forall A$ autoaggiunto

$$\langle u|\, A\,|v\rangle^\star = \langle v|\, A\,|u\rangle\,, \quad \forall\,|u\rangle\,, |v\rangle \in \mathcal{D}_A \tag{2.11}$$

Notare che

$$\langle u|\,(A\,|v\rangle)^\star = \langle v|\,(A\,|u\rangle), \quad \forall\,|u\rangle\,, |v\rangle \in \mathcal{D}_A\ , \tag{2.12}$$

che è la definizione di operatore **simmetrico** o **hermitiano**, non basta di per sè dire che A è **autoaggiunto**; se A non è continuo bisogna verificare esplicitamente che valga $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{D}_A$. Quando in fisica si dice hermitiano, si intende quasi sempre **autoaggiunto** ! Le proprietà di ortogonalità degli autovettori appartenenti ad autovalori diversi dipendono solo da 2.11, quindi valgono per gli operatori simmetrici; è per avere la "completezza" (in senso generalizzato) dello spettro che ci vuole proprio la **autoaggiuntezza**, che è qualcosa in più della semplice **hermiticità**.[3]

Esempio 2.2.1. L'operatore posizione X in $L_2(\mathbb{R})$:

$$X : |f\rangle \mapsto |g\rangle = X\,|f\rangle\,, \quad \forall\,|f\rangle \in \mathcal{D}_X \tag{2.13}$$

[3]Per Dirac, che sapeva il fatto suo, la definizione di **osservabile dinamica** contiene esplicitamente la richiesta di completezza dello spettro; usando terminologia matematicamente rigorosa, oggi diciamo che le osservabili fisiche sono gli operatori autoaggiunti, che sono quella sottoclasse (propria) degli operatori hermitiani che ha "spettro completo" (vedi paragrafo 2.5).

dove $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$ (con tutta la classe delle funzioni ad essa quasi ovunque uguali) rappresenta il ket $|g\rangle$ ed è data da

$$g(x) = xf(x) \ . \tag{2.14}$$

Affinchè $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$, non basta $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Dobbiamo quindi definire:

$$\mathcal{D}_X = \{f(x) \in L_2(\mathbb{R})/xf(x) \in L_2(\mathbb{R})\} \ . \tag{2.15}$$

Per esempio $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R})$, ma non appartiene a $\mathcal{D}_X$. Da

$$\langle u| X |f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u^\star(x)xf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w^\star(x)f(x)\, dx$$

con $w(x) = xu(x)$ segue subito che, affinchè $w(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}_{X^\dagger} = \mathcal{D}_X$ e $X^\dagger = X$. Quindi X è autoaggiunto.

Esempio 2.2.2. L'operatore derivata D in $L_2(\mathbb{R})$

$$D : |f\rangle \mapsto |g\rangle = D\,|f\rangle \,, \quad \forall\, |f\rangle \in \mathcal{D}_D \tag{2.16}$$

dove

$$g(x) = \frac{d}{dx} f(x) \tag{2.17}$$

Per definire il dominio $\mathcal{D}_D$ notiamo anzitutto che $f(x)$ deve essere derivabile (in senso ordinario) in tutto $\mathbb{R}$ e che $f'(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Da

$$\langle u| D |f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\star(x)f'(x)dx \tag{2.18}$$

segue che per poterlo scrivere come

$$\langle w| f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w^\star(x)f(x)dx \tag{2.19}$$

bisogna effettuare un'integrazione per parti; ma per poterlo fare nell'ambito dell'integrazione alla Lebesgue ci vuole un po' di cautela. Infatti il teorema fondamentale del calcolo integrale vale anche per l'integrale di Lebesgue:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy =_{q.o.} f(x), \quad \forall f \in L(a,b), \quad \forall x \in [a,b] \tag{2.20}$$

ma non è detto che la funzione sia uguale all'integrale della sua derivata.

Definizione 2.2.3. $f(x) \in L(a,b)$ si dice **assolutamente continua** se $f'(x)$ esiste quasi ovunque in (a,b) e vale

$$\int_a^x \frac{d}{dy} f(y)dy = f(x) - f(a), \quad \forall x \in [a,b] \tag{2.21}$$

La 2.20 implica che ogni primitiva di una funzione $\in L(a,b)$ è assolutamente continua.

Un ovvio controesempio alla 2.21 è una funzione con discontinuità di prima specie in (a,b) (la derivata esiste q.o. ma non vale la 2.21); è facile mostrare che $\forall f \in C_1$ vale la 2.21, ma $f(x)$ è assolutamente continua anche se la sua derivata prima ha delle discontinuità di prima specie in (a,b); quindi per la classe delle funzioni assolutamente continue (che indichiamo con $\widetilde{C}$, anche se non esiste una notazione standard) vale $C_0 \supset \widetilde{C} \supset C_1$.

Come esempio di funzione continua ma non assolutamente continua si consideri

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ; \tag{2.22}$$

si vede subito che $f'(x)$ non è integrabile in un intervallo che comprenda l'origine, quindi non vale la 2.21 per $a < 0$, $x \geq 0$.

Si può dimostrare che somma e prodotto di f e $g \in \widetilde{C}$ appartengono ancora a $\widetilde{C}$. La 2.21 è evidentemente l'ingrediente essenziale per l'integrazione per parti.

La prima sottigliezza nel definire il dominio di D è allora che $f(x)$ deve essere *assolutamente continua*, quindi

$$\mathcal{D}_D = \left\{ f(x) \in L_2(\mathbb{R}), f \in \widetilde{C}, f'(x) \in L_2(\mathbb{R}) \right\} \tag{2.23}$$

A questo punto siamo a cavallo perchè se e solo se anche $u \in \mathcal{D}_D$ si può scrivere:

$$\langle u| \, D \, |f\rangle = u^\star(x) f(x) \, |_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^\star f(x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^\star f(x) dx = \langle w| \; f\rangle \tag{2.24}$$

dove il termine finito scompare perchè $u, v \in \mathcal{D}_D \Rightarrow u(x), f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$ e

$$w(x) = -\frac{du}{dx} \tag{2.25}$$

Quindi

$$\mathcal{D}_{D^\dagger} = \mathcal{D}_D, \quad D^\dagger = -D \tag{2.26}$$

da cui segue che

$$P = -iD = \begin{cases} -id/dx \\ \mathcal{D}_P \equiv \mathcal{D}_D \end{cases} \tag{2.27}$$

è *autoaggiunto.*

Esempio 2.2.3. L'operatore derivata D in $L^2(a,b)$. Dando per scontato che $\mathcal{D}_D \subset \widetilde{\mathcal{D}}_D = \left\{ f \in L_2(a,b), f \in \widetilde{C}, f' \in L^2(a,b) \right\}$ e lo stesso per $\mathcal{D}_{D^\dagger}$ e quindi che si possa effettuare l'integrazione per parti, le cose sono più complicate perchè in

$$\langle u | \, D \, | f \rangle = u^\star(x) f(x) \mid_a^b - \int_a^b u'(x)^\star f(x) dx \tag{2.28}$$

il termine finito non ha alcuna ragione di annullarsi; perchè ciò succeda dobbiamo *restringere* il dominio di D, usando per esempio **condizioni al contorno periodiche**:

$$D = \begin{cases} d/dx \\ \mathcal{D}_D = \left\{ f \in \widetilde{\mathcal{D}}_D / f(b) = f(a) \right\} \end{cases} \tag{2.29}$$

Allora 2.28 diventa

$$\langle u | \, D \, | f \rangle = \left(u^\star(b) - u^\star(a) \right) f(a) - \int_a^b u'(x)^\star f(x) dx \tag{2.30}$$

e il termine finito si annulla ($\forall f \in \mathcal{D}_D$) se e solo se anche $u \in \mathcal{D}_D$; quindi $\mathcal{D}_{D^\dagger} = \mathcal{D}_D, \quad D^\dagger = -D$ come nell'es.2.[4]

Se uno imponesse le c.c. (che devono sempre essere *omogenee*, affinchè $\mathcal{D}_D$ sia una varietà lineare)

$$\mathcal{D}_D^{(0)} = \left\{ f \in \widetilde{\mathcal{D}}_D / f(b) = f(a) = 0 \right\} \tag{2.31}$$

(buca di potenziale infinita in meccanica quantistica) allora il termine finito si annullerebbe comunque, $\forall u \in \widetilde{\mathcal{D}}_D$, quindi

$$\mathcal{D}_{D^\dagger}^{(0)} = \widetilde{\mathcal{D}}_D \neq \mathcal{D}_D^{(0)} \tag{2.32}$$

[4]Nota per i raffinati: anche c.c. twistate $f(b) = e^{i\alpha} f(a), \quad \alpha \in [0, 2\pi)$ andrebbero bene lo stesso, ma darebbero *altri* operatori autoaggiunti:

$$P_{(\alpha)} = \begin{cases} -id/dx \\ \mathcal{D}_{P_{(\alpha)}} = \left\{ f \in \widetilde{\mathcal{D}}_D / f(b) = e^{i\alpha} f(a) \right\} \end{cases}$$

Quindi l'operatore

$$P^{(0)} = \begin{cases} -id/dx \\ \mathcal{D}_D^{(0)}, \end{cases} \tag{2.33}$$

(che è evidentemente simmetrico) *non* è autoaggiunto; il suo *aggiunto* è

$$P^{(0)\dagger} = \begin{cases} -id/dx \\ \widetilde{\mathcal{D}}_D \end{cases} \tag{2.34}$$

che è $\neq P^{(0)}$, anche se ha la stessa espressione differenziale.

Se si restringe ulteriormente il dominio di $P^{(0)}$ a $f(x)$ con $f(x) \in \mathcal{D}_D^{(0)}$ ma tali che $f'(x) \in \widetilde{\mathcal{D}}_D$, allora ha senso parlare di $P^{(0)\dagger}P^{(0)}$ e si può facilmente vedere che è *autoaggiunto*.[5]

Discorso analogo si può fare per $\left(p_r = -i\frac{d}{dr}\right)$ sulla semiretta $(0, \infty)$.

Altri esempi di operatori *autoaggiunti* sono già stati discussi nel paragrafo 6.4.1 di [1].

NOTA IMPORTANTE: In fisica, una volta verificato che un operatore A sia **hermitiano**, cioè che soddisfi la 2.12, si può quasi sempre supporre che sia anche **autoaggiunto**, cioè che $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{D}_A$; bisogna controllarlo esplicitamente solo quando A sia un operatore differenziale su dominio dotato di bordo, con condizioni al contorno "strane", diverse dalle sicure condizioni al contorno periodiche.

2.3 Lo spettro degli operatori autoaggiunti nello spazio di Hilbert separabile.

Ulteriori approfondimenti a proposito si possono trovare nel paragrafo 4.5 di [2]; questi argomenti possono anche essere trovati nel capitolo 5 (ed in particolare nel 5.4) di [3], cui in buona parte ci ispiriamo, con qualche estensione.

Gli spazi di dimensione infinita si comportano molto diversamente da quelli a dimensione finita per quanto riguarda l'esistenza degli autovettori; infatti l'equazione secolare $det(A - \lambda\mathbf{1})$ perde di significato (è possibile generalizzare il concetto di determinante anche alle matrici infinite, ma solo in casi molto particolari). In uno spazio a dimensione infinita, in particolare in

[5] Questo è l'operatore che compare nell'hamiltoniana della buca di potenziale infinita in M.Q. .

uno spazio di Hilbert, un generico operatore, se vogliamo anche autoaggiunto, può anche essere del tutto privo di autovalori e autovettori.[6]

Esempio 2.3.1. Tipico è l'operatore di posizione X che è limitato, se (a,b) è un intervallo finito, ed è autoaggiunto. Ovviamente l'equazione

$$xf(x) = \lambda f(x), \quad f(x) \in L^2(a,b) \tag{2.35}$$

ha come unica soluzione $f(x) = 0$, $\forall x \neq \lambda$, quindi $f(x) \underset{q.o.}{=} 0$, cioè il vettore nullo.

Negli spazi di dimensione infinita conviene quindi dare una definizione più ampia di autovalore, introducendo il concetto di autovalore generalizzato.

Definizione 2.3.1. Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore generalizzato** dell'operatore A, agente sullo spazio di Banach E (in particolare di Hilbert), se esiste una successione $\{v_n\}$ di vettori $v_n \in E$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} (A - \lambda \mathbf{1})v_n = 0; \quad \|v_n\| \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.36}$$

Equivalentemente si può dire che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore generalizzato se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists v \in E,\ \|v\| \geq 1/\ \|(A - \lambda\mathbf{1})v\| < \varepsilon. \tag{2.37}$$

L'insieme degli autovalori generalizzati di A si dice **spettro** di A.

Ovviamente **ogni autovalore è un autovalore generalizzato**, ma non è detto il viceversa.

Prima di discutere alcuni esempi, introduciamo un modo equivalente di definire lo spettro di un **operatore autoaggiunto** A, con $[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$ (spazio di Hilbert separabile).

Definizione 2.3.2. $r \in \mathbb{C}$ è **punto regolare** di A se

$$\inf_{\substack{|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \\ |\psi\rangle \neq 0}} \frac{\|(A - r\mathbf{1})\,|\psi\rangle\|}{\||\psi\rangle\|} = c > 0 \tag{2.38}$$

Una definizione equivalente è **Definizione 2.3.3.** r è **punto regolare** di A se esiste $(A - r\mathbf{1})^{-1}$ ed è **limitato**.

Infatti la 2.38 è equivalente a:

[6] Qui naturalmente parliamo di autovalori e autovettori in senso proprio, cioè di soluzioni dell'equazione $Av = \lambda v$ con v appartenente allo spazio di Hilbert; è possibile generalizzare il concetto di autovettore allargando lo spazio, e allora le cose cambiano, come vedremo fra un momento.

- $$ker(A - r\mathbf{1}) = \{0\} \Rightarrow \exists (A - r\mathbf{1})^{-1}$$
- $$\begin{aligned} \left\|(A - r\mathbf{1})^{-1}\right\| &= \sup_{\substack{|\varphi\rangle \in Im(A - r\mathbf{1}) \\ |\varphi\rangle \neq 0}} \frac{\|(A - r\mathbf{1})^{-1}|\varphi\rangle\|}{\||\varphi\rangle\|} \\ &= \sup_{\substack{|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \\ |\psi\rangle \neq 0}} \frac{\||\psi\rangle\|}{\|(A - r\mathbf{1})|\psi\rangle\|} = \frac{1}{c}\ . \end{aligned}$$

Definizione 2.3.4. Lo **spettro** di A è l'insieme dei suoi punti <u>non</u> regolari; in altre parole $a \in \mathbb{C}$ appartiene allo **spettro** di A se

$$\inf_{\substack{|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \\ |\psi\rangle \neq 0}} \frac{\|(A - a\mathbf{1})|\psi\rangle\|}{\||\psi\rangle\|} = 0 \tag{2.39}$$

La 2.39 può realizzarsi in due modi alternativi:

Definizione 2.3.5. Se l'estremo inferiore nella 2.39 è un minimo, cioè esistono uno (o più, se c'è degenerazione) vettori $|a_i\rangle$ (linearmente indipendenti) per cui vale

$$(A - a_i\mathbf{1})|a_i\rangle = 0, \quad |a_i\rangle \neq 0 \tag{2.40}$$

allora a_i è un **autovalore** (in senso proprio).

Ciò è ovviamente equivalente a dire:

Definizione 2.3.6. a_i è autovalore se *non esiste* l'inverso di $(A - a_i\mathbf{1})$.

L'insieme degli *autovalori (propri)* di A si chiama **spettro discreto** ed è al più *numerabile.* Vale infatti il seguente

Teorema 2.3.1. L'insieme degli autovalori di un operatore normale (in particolare autoaggiunto) in uno spazio di Hilbert separabile è al più numerabile. Infatti autovettori appartenenti ad autovalori diversi di un operatore normale sono ortogonali ed in uno spazio separabile un insieme di vettori ortogonali non può essere più che numerabile (vedi [2]).

Definizione 2.3.7. Se $a \in SpA$, cioè vale la 2.39, ma non è un autovalore (cioè l'estremo inferiore *non* è raggiunto) si dice che a fa parte dello **spettro**

continuo ($SpcA$) o anche che è un **autovalore generalizzato non proprio**; infatti si può trovare una successione $|v_n\rangle$, $\||v_n\rangle\| \geq 1$ che soddisfa la definizione di autovalore generalizzato data precedentemente, cioè

$$\lim_{n\to\infty} (A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle = 0 \tag{2.41}$$

con $\||v_n\rangle\| \geq 1$, ma $\nexists\,|a\rangle$ che soddisfi la 2.40; viceversa lo stesso ragionamento mostra che se a è autovalore generalizzato ma non proprio, allora $a \in SpcA$.

Equivalentemente si può dire:

Definizione 2.3.8. $a \in SpcA$ se $\exists (A - a\mathbf{1})^{-1}$ ma *non è limitato.*

NOTA: Poichè $A = A^\dagger$, dimostriamo che $a \in \mathbb{C}, \quad a \notin \mathbb{R}$ non può soddisfare la 2.41 (nè la 2.40, ma questo lo sappiamo già .

Infatti la 2.41 è equivalente a :

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle\| = 0$$

che, essendo $\|(A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle\| = \|(A - a^\star\mathbf{1})\,|v_n\rangle\|$ (da $A = A^\dagger$), implica

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - a^\star\mathbf{1})\,|v_n\rangle\| = 0$$

e perciò

$$\lim_{n\to\infty} (A - a^\star\mathbf{1})\,|v_n\rangle = 0 \ .$$

Sottraendo a quest'ultimo limite il 2.41, si ottiene $\lim_{n\to\infty}(a - a^\star)\,|v_n\rangle = 0$, che, essendo $\||v_n\rangle\| \geq 1$ è possibile solo per $a = a^\star$.

Quindi, per A operatore autoaggiunto, $SpA \subset \mathbb{R}$.

Esempio 2.3.2. Lo spettro dell'operatore X dell'esempio 2.3.1, che è certamente continuo poichè non esistono autovalori, è costituito da tutti i reali $\lambda \in [a, b]$. Infatti l'operatore $(X - \lambda\mathbf{1})^{-1}$, che manda la funzione $f(x) \in L^2(a, b)$ in

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - \lambda},$$

è definito su tutto $L^2(a, b)$ ed e limitato per $\lambda \notin [a, b]$, come si vede ponendo $c = \min|\lambda - x|$ che è diverso da zero per $x \in [a, b]$ e calcolando

$$\|g\|^2 = \int_a^b \left|\frac{f(x)}{x - \lambda}\right|^2 dx \leq \frac{1}{c^2}\,\|f\|^2 \,.$$

Quindi ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin [a, b]$ è punto regolare di X (vedi la definizione 2.3.2). Se invece $\lambda \in [a, b]$, il dominio di $(X - \lambda\mathbf{1})^{-1}$, pur essendo denso in $L^2(a, b)$, non contiene tutte le $f(x) \in L^2(a,b)$, ma solo quelle che rimangono quadrato integrabili una volta divise per $(x-\lambda)$, con λ sul cammino di integrazione; quindi $(X-\lambda\mathbf{1})^{-1}$ esiste ma non è limitato; pertanto $SpcX = [a,b]$.

Si può verificare direttamente che i punti dello spettro, $\lambda \in [a,b]$, sono autovalori generalizzati.

Infatti la eq. 2.36 è soddisfatta dalla successione seguente

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right] \\ \frac{n}{2}, & x \in \left[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right] \end{cases} \tag{2.42}$$

(qui abbiamo scelto λ interno all'intervallo $[a,b]$; se λ è un estremo la modifica è ovvia).

Ovviamente vale

$$\|v_n\| = \sqrt{\int_a^b |v_n(x)|^2\, dx} = \sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1, \quad n = 2, 3, \ldots$$

inoltre

$$\begin{aligned} \|(X-\lambda\mathbf{1})v_n\|^2 &= \int_a^b (x-\lambda)^2\, v_n^2(x)dx \\ &= \int_{\lambda-\frac{1}{n}}^{\lambda+\frac{1}{n}} \frac{n^2}{4}(x-\lambda)^2 dx \\ &\leq \frac{n^2}{4}\frac{1}{n^2}\frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} (X-\lambda\mathbf{1})v_n = 0,$$

come volevamo mostrare.

Il lettore smaliziato intuisce che tutto sarebbe più semplice se potessimo dire che l'autovettore di X è $\lim_{n\to\infty} v_n$; questo non esiste in $L^2(a,b)$ (la successione $\{v_n\}$ non è Cauchy); per arrivarci bisogna allargare lo spazio ed immergere $L^2(a,b)$ nello spazio delle distribuzioni ed introdurre la sospirata δ di Dirac, ma lo faremo più avanti.

Esempio 2.3.3. $L_3 = -id/d\varphi$, con dominio nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ e condizioni al contorno periodiche, ha spettro discreto: $SpdL_3 = \mathbb{Z}$, ma non ha spettro continuo; infatti se riscrivo $(L_3 - r\mathbf{1})u = f, \quad \forall f \in L^2(-\pi, \pi)$, usando gli sviluppi trigonometrico di Fourier,

$$u(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad f(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} f_n \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

ottengo

$$(n-r)u_n = f_n$$

che posso risolvere $\forall r \neq n \in \mathbb{Z}$ (escludendo cioè gli autovalori di L_3), trovando:

$$u_n = \frac{f_n}{n-r}.$$

Notiamo anzitutto che l'uguaglianza di Parseval valida per i coefficienti di Fourier f_n implica che i coefficienti u_n vadano a zero per $n \to \infty$ più in fretta di $\frac{1}{n}$ e quindi che $u(\varphi)$ appartenga al dominio di L_3. Inoltre

$$\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|f_n|^2}{|n-r|^2} \ .$$

Ponendo $\Lambda = \min|n-r| > 0, \quad \forall r \notin \mathbb{Z}$ si ha

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 = \frac{\|f\|^2}{\Lambda^2}$$

Poichè $u = (L_3 - r\mathbf{1})^{-1} f$, $(L_3 - r\mathbf{1})^{-1}$ è limitato; quindi ogni $r \in \mathbb{C}$, $r \notin \mathbb{Z}$ (cioè non autovalore proprio) è *regolare.*

Riassumendo:

$$SpdL_3 = \mathbb{Z}, \quad SpcL_3 = \emptyset \ .$$

Discorso perfettamente analogo vale anche per $P = -id/dx$ su $L^2(a,b)$ con condizioni al contorno periodiche. Lo studente curioso verifichi che l'operatore $P_{(\alpha)}$, introdotto nella nota 4 (c.c. twistate) ha uno spettro discreto diverso da quello dell'operatore P e che l'operatore non autoaggiunto P^0 dell'equazione 2.31 (buca di potenziale infinita) ha spettro vuoto.

Esempio 2.3.4.

$$P = \begin{cases} -id/dx \\ \mathcal{D}_D \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ appartiene allo spettro continuo.

Infatti $Pu = ku \quad \Rightarrow \quad u = Ce^{ikx} \notin L^2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow SpdP = \emptyset$ (cioè lo spettro discreto di P è vuoto).

Ponendo $u_n = e^{ikx}e^{-\frac{x^2}{n^2}} \in L^2(\mathbb{R})$ si ottiene $\lim_{n\to\infty}(P-k\mathbf{1})u_n = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$, come da verifica diretta .

(per fare questa verifica diretta si consiglia di studiare $\lim_{\varepsilon\to 0}\|(P-k\mathbf{1})u_\varepsilon\|^2$ con $u_\varepsilon = e^{ikx}e^{-\varepsilon^2x^2}$ mediante un ragionamento dimensionale) .

Si può inoltre verificare che se $Imk \neq 0$ allora $\lim_{\varepsilon\to 0}\|(P-k\mathbf{1})u_\varepsilon\|^2 \to \infty$.

Quindi

$$SpcP = \mathbb{R} \quad , \quad SpdP = \emptyset \ .$$

Abbiamo esempi di operatori autoaggiunti (limitati o no, non importa) con spettro solo discreto (completo in $\mathcal{H}$) (se ne possono vedere nel 6.4 di [1]) , o con spettro solo continuo (X sia su $L^2(a,b)$ che su $L^2(\mathbb{R})$, $-i\frac{d}{dx}$ su $L^2(\mathbb{R})$); ce ne sono altri con spettro misto (per esempio quelli che si vedono nel corso di Meccanica Quantistica nella trattazione di buche di potenziale con $V(\overrightarrow{x}) \to 0$ per $\overrightarrow{x} \to \infty$ e per l'atomo d'idrogeno) .

È possibile classificare ulteriormente gli operatori autoaggiunti per trovare una sottoclasse che abbia solo spettro discreto (in cui gli autovettori formano un sistema ONC, ortonormale completo, in $\mathcal{H}$), ma è più interessante cercare di estendere il concetto di completezza dello spettro anche al caso dello spettro continuo (o misto).

Per questo dobbiamo arricchire lo spazio di Hilbert separabile, introducendo il concetto di **spazio di Hilbert equipaggiato** (o **rigged**), in modo da fare rientrare, per esempio, la δ di Dirac (esempio 2.3.2) o l'onda piana (esempio 2.3.4) fra le autofunzioni (generalizzate) ammissibili.

2.4 Teoria delle distribuzioni e spazio di Hilbert equipaggiato (Rigged Hilbert Space).

Richiamiamo qui, approfondendolo, il concetto di **distribuzione temperata**, già introdotto in [1]. Il punto di partenza è lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni di prova.

Definizione 2.4.1. Indichiamo con $\mathcal{S}$ (detto "spazio delle funzioni di prova" in relazione alla teoria delle distribuzioni temperate) l'insieme delle funzioni complesse di variabile reale, **indefinitamente derivabili** su tutto l'asse reale e decrescenti con tutte le loro derivate più rapidamente di ogni potenza, per $x \to \infty$ (in breve: **rapidamente decrescenti**).

In linguaggio formale

$$\mathcal{S} = \left\{ f(x) \ / \ f \in C_\infty ; \ \lim_{x\to\infty} x^n \frac{d^m f}{dx^m} = 0, \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \ldots \right\}. \qquad (2.43)$$

Osserviamo subito che la condizione di decrescenza rapida di $f(x)$ e delle sue derivate può anche essere espressa in modo del tutto equivalente[7]richiedendo che per ogni coppia di interi non negativi p e q esista una costante $C_{pq} > 0$ tale che

$$|x^p \frac{d^q f}{dx^q}| < C_{pq}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2.44)$$

Può essere utile anche definire uno spazio di funzioni di prova $\mathcal{S}(a,b)$, o $\mathcal{S}(S_1)$, dove S_1 è la circonferenza dfi raggio 1, contenuto in $L^2(a,b)$ o, il che è lo stesso, in $L^2(S_1)$; esso è formato da tutte le funzioni C_∞ periodiche su (a,b), o definite su S_1. La generalizzazione a funzioni di più variabili non presenta difficoltà e viene data per scontata; discutiamo il caso di una sola variabile solo per semplicità di notazioni.

Abbiamo già visto in [1] che lo spazio $\mathcal{S}$ gode della proprietà di essere mandato in se stesso dalla Trasformata di Fourier e che è utile per estendere la T.F. all'intero spazio $L^2(-\infty,+\infty)$.

Per ottenere questo scopo, si considera $\mathcal{S}$ come sottospazio (non chiuso) di qualche altro spazio normato (in particolare L^2); adesso invece stabiliremo su di esso una sua propria peculiare topologia, che ci permetterà di introdurre in modo rigoroso uno dei concetti più importanti (e di maggiore versatilità nelle applicazioni) dell'Analisi Matematica degli ultimi decenni.

A differenza di tutti i casi incontrati finora, la topologia sullo spazio vettoriale $\mathcal{S}$ non sarà assegnata stabilendo su di esso una norma (e quindi rendendolo spazio normato), ma usando invece una prescrizione più generale (e un po' più complicata); per informazione dei lettori diciamo che lo spazio $\mathcal{S}$ viene considerato come “spazio numerabilmente normato” (stabilendo su di esso una infinità numerabile di norme), che tale spazio è uno “spazio topologico lineare” e che può essere reso metrico; tuttavia per la definizione dei termini fra virgolette rimandiamo il lettore interessato alla letteratura (per esempio Kolmogorov-Fomin[4]).

Noi ci limitiamo invece a definire quanto ci è direttamente utile, cioè il concetto di convergenza implicato da tale topologia.

[7]Per convincersi che la 2.44 implica la rapida decrescenza basta porre $p = n+1$, $q = m$ e confrontare 2.44 e 2.43.

Definizione 2.4.2. Una successione di funzioni $f_n(x) \in \mathcal{S}$ si dice **convergente in $\mathcal{S}$** alla funzione $f(x) \in C_\infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{in}\, \mathcal{S} \tag{2.45}$$

se $\forall m = 0, 1, 2, \ldots$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^m f_n}{dx^m} = \frac{d^m f}{dx^m} \tag{2.46}$$

uniformemente rispetto ad x in ogni intervallo finito ed inoltre le costanti C_{pq} della maggiorazione in Eq. 2.44 possono essere scelte indipendentemente da n, cioè se vale

$$\left| x^p \frac{d^q f_n}{dx^q} \right| \leq C_{pq} \tag{2.47}$$

qualunque sia n.

È facile mostrare che le eq. 2.46 e 2.47 sono equivalenti a

$$\lim_{n\to\infty} x^l \frac{d^m f_n}{dx^m} = x^l \frac{d^m f}{dx^m} \tag{2.48}$$

uniformemente su tutto l'asse reale $\forall l, m = 0, 1, 2, \ldots$.

Enunciando la definizione 2.4.2 abbiamo appositamente tralasciato di richiedere che la funzione limite $f(x)$ appartenga ad $\mathcal{S}$; si può infatti mostrare che ciò è sempre vero se le condizioni 2.46 e 2.47 sono soddisfatte; ciò è un riflesso del fatto che lo spazio $\mathcal{S}$ inteso come spazio metrico (con un'opportuna definizione di distanza che non è il caso qui di riportare), è **completo**, come si può dimostrare (si veda per esempio [5]).

Intuitivamente, queste osservazioni possono sintetizzarsi nel notare che la definizione 2.4.2 di convergenza è molto più stringente della convergenza in L^2, L^1 o anche uniforme, e questo ci permette, calcolando il limite, di non uscire da $\mathcal{S}$. Un primo vantaggio della definizione 2.4.2 di convergenza, che avrà importantissime conseguenze, è che **l'operatore derivata** manda $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ed **è continuo**[8] **in $\mathcal{S}$**; infatti basta mandare m in $m+1$ e q in $q+1$ nelle 2.46, 2.47 per vedere come la 2.45 implichi

$$\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx} \quad \text{in}\, \mathcal{S} \tag{2.49}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx} \quad \text{in}\, \mathcal{S}\ . \tag{2.50}$$

Allo stesso modo si verifica che **l'operatore** X manda $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ed **è continuo in** $\mathcal{S}$, anche se definito su tutto $\mathbb{R}$. Quindi, diversamente che in L^2, in $\mathcal{S}$

[8]Diversamente che in L^2.

tutti gli operatori di interesse fisico sono continui.[9] Questa è forse la ragione principale per introdurre $\mathcal{S}$ con la sua peculiare topologia.

Abbiamo ora gli elementi per introdurre la

Definizione 2.4.3. Si dice **distribuzione temperata** ogni **funzionale lineare continuo** su $\mathcal{S}$; esplicitamente diremo che l'applicazione $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ è una distribuzione (e useremo la notazione $\langle T, g\rangle$ per indicare il numero complesso in cui T manda la funzione $g \in \mathcal{S}$) se essa è **lineare**:

$$\langle T, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\rangle = \alpha_1 \langle T, g_1\rangle + \alpha_2 \langle T, g_2\rangle \tag{2.51}$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}; \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{S},$$

e **continua**:

$$\left\langle T, \lim_{n\to\infty} g_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, g_n\rangle \tag{2.52}$$

naturalmente nella 2.52 le funzioni g_n appartengono a $\mathcal{S}$ e il limite nel primo membro della 2.52 va inteso nel senso della definizione 2.4.2 (il limite a secondo membro è ovviamente il solito limite di una successione di numeri complessi).

All'insieme dei funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$ si può dare la struttura di spazio lineare con la seguente definizione:

$$\langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, g\rangle = \alpha_1^\star \langle T_1, g\rangle + \alpha_2^\star \langle T_2, g\rangle\,, \quad \forall g \in \mathcal{S}, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

tale spazio si indica con $\mathcal{S}'$ e si chiama **spazio delle distribuzioni temperate** (**spazio duale** dello spazio delle funzioni di prova $\mathcal{S}$)[10].

L'insieme delle funzioni complesse di variabile reale $f(x)$ definite q.o. su tutto l'asse reale, **localmente sommabili** (cioè sommabili su ogni intervallo finito) e a **crescenza algebrica finita** (tali cioè che esistono un $x_0 > 0$, una costante $C > 0$ e un $m \in \mathbb{N}$ per cui

$$|f(x)| \le C\,|x|^m\,, \quad \forall\,|x| > x_0 \tag{2.53}$$

forma uno spazio vettoriale che indicheremo con G (questa notazione non è standard).

Fissata una $f(x) \in G$ si può definire in modo unico un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$, quindi una distribuzione temperata che indicheremo con lo stesso simbolo f, nel modo seguente:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\star(x) g(x) dx, \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{2.54}$$

---

[9]**Purchè si usi per il limite la definizione 2.4.2.**

[10]Notare la differenza con lo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$, il cui duale è isomorfo a $\mathcal{H}$ stesso.

L'integrale a secondo membro **esiste** certamente poichè l'integrando è una funzione localmente sommabile e decrescente all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza; esso è effettivamente un **funzionale**, poichè associa un numero complesso ad ogni $g \in \mathcal{S}$, **lineare**, per la linearità dell'integrale, e **continuo**, per il teorema di Lebesgue e la definizione 2.4.2 di limite in $\mathcal{S}$.

L'integrale 2.54 assomiglia molto alla definizione del prodotto scalare in L^2(non a caso si usa la notazione $\langle f, g\rangle$ che è una specie di compromesso fra la notazione usuale per il prodotto scalare (f, g) e quella di Dirac $\langle f|\, g\rangle$) salvo un'importante differenza: nella 2.54 i due fattori f e g appartengono a spazi diversi ($g \in \mathcal{S} \subset L^2$ e $f \in G \supset L^2$); il secondo fattore è costretto nello spazio $\mathcal{S}$, molto più piccolo di L^2, proprio affinchè il primo possa appartenere ad uno spazio più ampio.

La 2.54 definisce un'applicazione lineare dello spazio G delle funzioni localmente sommabili a crescenza algebrica finita nello spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate; infatti

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))^\star g(x)dx \\
&= \alpha_1^\star \langle f_1, g\rangle + \alpha_2^\star \langle f_2, g\rangle \qquad (2.55)\\
\forall g \in \mathcal{S} \quad \forall f_1, f_2 \in G \quad & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

È facile dimostrare che tale applicazione è **iniettiva** (vedi [2]), cioè

$$\langle f_1, g\rangle = \langle f_2, g\rangle\,, \quad \forall g \in \mathcal{S} \Rightarrow f_1(x) \underset{q.o.}{=} f_2(x) \qquad (2.56)$$

per funzioni $f_1(x), f_2(x) \in G$.

La 2.54 realizza quindi un'immersione dello spazio G in $\mathcal{S}'$; perciò possiamo, senza rischi di equivoco, identificare G con la sua immagine in $\mathcal{S}'$ e quindi **identificare ogni funzione localmente sommabile a crescenza algebrica finita con la distribuzione temperata da essa individuata mediante la 2.54**.

Già a questo punto è utile osservare la radicale differenza rispetto alla situazione descritta dal teorema di Riesz : lo spazio $\mathcal{S}'$ duale di $\mathcal{S}$, è molto più ampio di $\mathcal{S}$ poichè contiene al suo interno lo spazio G che è già di per sè più ampio di L^2 e L^1.

Anzi si può dire di più: l'applicazione di G in $\mathcal{S}'$ descritta dalla 2.54 **non è suriettiva**; esistono cioè delle distribuzioni temperate che non possono essere rappresentate mediante funzioni (appartenenti a G, ma questo bisogna richiederlo per forza se vogliamo che l'integrale 2.54 abbia senso). Proviamolo su un esempio illustre, la **delta di Dirac**.

Definizione 2.4.4. Si dice **delta di Dirac**, e si indica con il simbolo δ la distribuzione temperata così definita:

$$\langle \delta, g \rangle = g(0), \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{2.57}$$

Simbolicamente si scrive anche, come già visto in [1],

$$\langle \delta, g \rangle = \int dx \delta(x) g(x) \ . \tag{2.58}$$

Ammettiamo per assurdo che esista una funzione $h(x) \in G$ che riproduca la δ tramite la 2.54, tale cioè che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^\star(x) g(x) dx = g(0), \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{2.59}$$

In particolare la 2.59 dovrebbe valere per le funzioni $g_\epsilon \in \mathcal{S}$ così definite ($\epsilon > 0$)

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \epsilon \\ 0, \quad |x| \geq \epsilon; \end{cases} \tag{2.60}$$

poichè $g_\epsilon(0) = 1$ la 2.59 implica

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} h^\star(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) dx = 1. \tag{2.61}$$

Ma si ha anche

$$\left| \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} h^\star(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) dx \right| \leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |h(x)| \, dx$$

che tende a zero[11] per $\epsilon \to 0$; ma ciò è in contrasto con la 2.61 e quindi l'ipotesi 2.59 è assurda.

Abbiamo quindi la seguente catena di inclusioni **proprie**

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset G \subset \mathcal{S}'. \tag{2.62}$$

Le distribuzioni vengono spesso chiamate **funzioni generalizzate** poichè esse generalizzano, uscendo fuori dalla classe delle funzioni propriamente dette, il concetto di funzione localmente sommabile (e a crescenza algebrica finita). Le distribuzioni che possono essere rappresentate da funzioni ordinarie mediante la 2.54 si dicono **distribuzioni regolari**, le altre (come

[11] L'integrale di Lebesgue è una funzione continua dei suoi estremi.

per esempio la delta di Dirac) **distribuzioni singolari**. Per analogia al caso delle distribuzioni regolari, per ogni distribuzione T si scrive spesso $\langle T, g\rangle = \int T^\star(x)g(x)dx$; non bisogna però dimenticare che $T(x)$ è una notazione simbolica e che $T(x)$ **non** rappresenta il valore di T nel punto x[12]; per ulteriori commenti sulla notazione $T(x)$ vedi il paragrafo 8.2 di [2].

Per rendersi ragione dell'aggettivo temperata si veda [2]. Il sostantivo nasce dall'analogia con una semplice situazione fisica: per esempio una distribuzione continua di carica su una retta è rappresentata dalla funzione ordinaria densità: $\rho(x)$; una carica q puntiforme situata nel punto $x = 0$ dalla distribuzione singolare $q\delta(x)$.

Nello spazio lineare $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate è naturale introdurre il seguente concetto di **limite debole**

Definizione 2.4.5. Sia $\{T_n\}$ una successione di distribuzioni $T_n \in \mathcal{S}'$; si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ ne è il **limite debole** (o **nel senso delle distribuzioni**) e si scrive

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \text{ debole} \tag{2.63}$$

se $\forall g \in \mathcal{S}$ esiste il limite della successione di numeri complessi $\langle T_n, g\rangle$ e vale [13]

$$\langle T, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, g\rangle, \qquad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{2.65}$$

Nel linguaggio formale la 2.65 diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T^*(x)g(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_n^*(x)g(x)dx. \tag{2.66}$$

Nel caso molto frequente in cui le $T_n(x)$ siano distribuzioni regolari e la $T(x)$ sia singolare, gli integrali al secondo membro hanno senso proprio, mentre ciò non succede per quello al primo membro. Quindi in questo caso la definizione 2.4.5 può essere letta in un modo molto pratico: il limite 2.63 acquista senso (ordinario) qualora si moltiplichi la 2.63 per una funzione di prova $g(x)$ e si integri su x, con l'avvertenza che al secondo membro **bisogna** scambiare

[12] Ciò non è una novità: se f è un vettore $\in L^2$ esso è rappresentato da una classe di funzioni q.o. uguali e quindi $f(x)$ **non** è il valore di f in x (a meno che non si impongano ulteriori richieste, quali la continuità).

[13] La nostra definizione è in realtà ridondante: basta richiedere che esista

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, g\rangle, \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{2.64}$$

Infatti l'esistenza di tale limite numerico permette di definire, con la 2.63, il funzionale lineare T, che si può dimostrare (ma non è banale, si veda per esempio Vladimirov[5] pag.25) essere continuo e perciò rappresentare effettivamente una distribuzione.

d'ordine limite con integrale, cioè effettuare prima l'integrazione poi il limite, in accordo con la 2.66.
Se invece si cerca di effettuare il $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ nel senso della convergenza puntuale, in generale si ottiene o qualcosa che non ha senso o qualcosa che non ha nulla a che fare con la distribuzione $T(x)$. La definizione 2.4.5 permette di dare utilissime rappresentazioni della $\delta(x)$ come limite debole di successioni di funzioni ordinarie quali quelle discusse in [1].
Esistono però casi in cui il limite al secondo membro della 2.66 può essere fatto filtrare dentro l'integrale anche in senso ordinario. Infatti dal teorema di Lebesgue applicato all'integrale 2.66 segue immediatamente il

Teorema 2.4.1. Se la successione delle funzioni $f_n(x)$ localmente sommabili[14] converge puntualmente quasi ovunque alla funzione f localmente sommabile e inoltre esiste una $F(x)$ indipendente da n localmente sommabile tale che

$$|f_n(x)| \overset{\text{q.o.}}{\leq} F(x) \ , \qquad \forall n \in \mathbb{R}, \tag{2.67}$$

allora vale anche

$$f(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{debole.} \tag{2.68}$$

Avendo così richiamata la teoria delle distribuzioni, possiamo ora introdurre il concetto di "Rigged Hilbert space".

Un esempio di **spazio di Hilbert equipaggiato** è la terna (di Gel'fand)

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{S}' \tag{2.69}$$

dove

- L^2 può significare $L^2(\mathbb{R})$ o, con ovvie modificazioni, $L^2(\mathbb{R}_n)$, o anche $L^2(a,b)$; per comodità ci fissiamo su $L^2(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}$ è lo spazio delle funzioni di prova con la sua propria definizione di limite.
- $\mathcal{S}'$ è lo spazio delle *distribuzioni temperate* su $\mathcal{S}$ (funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$).
- Nella topologia di L^2 , $\mathcal{S}$ <u>non</u> è completo, ma è denso in L^2 , $[\mathcal{S}] = L^2$.
- La topologia di $\mathcal{S}$ è più forte di quella di L^2 , ovvero

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{in } \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{in } L^2$$

[14] e a crescenza algebrica finita se lavoriamo con distribuzioni temperate.

Spesso in Meccanica Quantistica lo spazio di Hilbert non è L^2 ma $L^2 \otimes \mathbb{C}_{2s+1}$ (particella di spin s), ma basta moltiplicare anche $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ per $\mathbb{C}_{2s+1}$ e non cambia nulla.

Tutto funziona tale e quale anche per lo spazio di Hilbert astratto $\mathcal{H}$, non realizzato da L^2, purchè $\mathcal{S}$ significhi *spazio nucleare perfetto*, che è la generalizzazzione astratta dello spazio delle funzioni di prova, e $\mathcal{S}'$ lo spazio dei funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$. Quanto diremo varrà in generale per la terna $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$, con $\mathcal{S}$ denso in $\mathcal{H}$ (secondo la topologia di $\mathcal{H}$), ma è bene pensare come esempio alla terna $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$.

P1: **Proprietà:** Un operatore autoaggiunto A in $\mathcal{H}$ (secondo la definizione data nel 5.2) tale che $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_A$ e che sia *continuo* in $\mathcal{S}$[15] può essere esteso ad $\mathcal{S}'$ ed è ivi **continuo**, con la **definizione** seguente:

$$\begin{aligned} A: &\quad \mathcal{S}' \to \mathcal{S}' \\ A: &\quad \langle T| \mapsto \langle T| A, \text{ dove} \\ \langle T| A: &\quad \mathcal{S} \to \mathbb{C} \\ \\ \langle T| A: &\quad |g\rangle \mapsto \langle T| (A |g\rangle) \ . \end{aligned} \tag{2.70}$$

$\langle T| A$ è un funzionale lineare *continuo* , per la linearità e la continuità di A (in $\mathcal{S}$!) e di $\langle T|$ (per definizione !).

Quindi si può scrivere $\langle T| (A |g\rangle) = \langle T| A |g\rangle$ come per gli endomorfismi continui nello spazio di Hilbert separabile, ma qui $|g\rangle \in \mathcal{S}$, $\quad \langle T| \in \mathcal{S}'$ ed A è continuo in $\mathcal{S}$, nonostante non lo fosse in $\mathcal{H}$. (Notare che nel linguaggio del 5.2 avrei $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{S}'$!). La continuità di A in $\mathcal{S}'$ segue poi dalla identità $\langle \lim_{n\to\infty} T_n| A |g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n| A |g\rangle$, ovvia conseguenza della definizione 2.63, 2.65 di limite debole.

Da fisici, definiamo in modo puramente formale

$$\langle g| T\rangle = \langle T| g\rangle^\star \ , \quad \forall |g\rangle \in \mathcal{S}, \forall \langle T| \in \mathcal{S}' \tag{2.71}$$

e continuiamo a chiamare $\mathcal{S}$ l'insieme delle $\langle g|$ ed $\mathcal{S}'$ quello delle $|T\rangle$; con questa notazione posso anche scrivere

$$\langle g| A |T\rangle = \langle T| A |g\rangle^\star \tag{2.72}$$

e quindi implicitamente definisco

$$A : |T\rangle \mapsto A |T\rangle \ , \quad \forall |T\rangle \in \mathcal{S}'.$$

[15] Naturalmente secondo la topologia propria di $\mathcal{S}$ (vedi def. 2.4.2); è quindi implicito $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

La proprietà appena enunciata è di estrema importanza ed è il cuore della teoria delle distribuzioni (o più propriamente degli spazi di Hilbert equipaggiati): si parte da un operatore A autoaggiunto in $\mathcal{H}$, ma, nel caso più interessante, non continuo in $\mathcal{H}$ e con dominio un sottospazio **proprio** di $\mathcal{H}$ (quindi nemmeno definito in tutto $\mathcal{H}$); si fa un passo indietro in $\mathcal{S}$ per prendere la rincorsa e si salta in $\mathcal{S}'$ ottenendo un operatore definito in tutto $\mathcal{S}'$ (e quindi in tutto $\mathcal{H}$) e per di più continuo! Come si è visto il miracolo è dovuto ad un sapiente uso delle varie topologie.

Esempio 2.4.1. X in $L^2(\mathbb{R})$ non è continuo, $\mathcal{D}_X = \{f/xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$ è sottospazio proprio di $\mathcal{H}$, ma $\forall f \in \mathcal{S}'$ (in particolare $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$) $xf(x) \in \mathcal{S}'$ (vedi anche la proprietà D4 del 8.2 di [2]) anche se non è detto che $xf(x) \in L^2$.

Esempio 2.4.2. La stessa cosa vale per $P = -i\frac{d}{dx}$; una $f \in L^2$ ma non derivabile non appartiene a $\mathcal{D}_P \subset L^2$ ma può essere derivata nel senso delle distribuzioni e $\frac{d}{dx}f \in \mathcal{S}'$.

Inoltre sia X che P sono **continui** in $\mathcal{S}'$, e così ogni operatore differenziale ottenuto dalla loro ripetuta composizione.

2.5 Equazione agli autovalori generalizzata e teorema spettrale.

Ha quindi senso considerare *l'equazione agli autovalori generalizzata* per l'operatore autoaggiunto A ($A = A^\dagger$, $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{S}$, $[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$, A continuo in $\mathcal{S}$)

$$A\,|a\rangle = a\,|a\rangle\,, \quad |a\rangle \in \mathcal{S}', \quad |a\rangle \neq 0 \tag{2.73}$$

Si può dimostrare che gli $a \in \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione 2.73 sono tutti e solo i punti dello spettro di A; se $|a\rangle \in \mathcal{D}_A \subset \mathcal{H}$ sono autovalori propri, altrimenti sono autovalori generalizzati. Quindi tale equazione equivale alla 2.36 che definisce gli autovalori generalizzati rimanendo all'interno dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Nel caso particolare della 2.73 in cui $|a\rangle \in \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$ allora a è un autovalore proprio, ovvero $a \in SpdA$; se invece vale la 2.73 con $|a\rangle \notin \mathcal{H}$, allora si potrà trovare una successione di $|v_n\rangle \in \mathcal{H}$, $\||v_n\rangle\| \geq 1 \quad / \lim_{n\to\infty}(A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle = 0$ in $\mathcal{H}$ con $\lim_{n\to\infty}|v_n\rangle = |a\rangle$ in $\mathcal{S}'$ (ma non in $\mathcal{H}$) ed allora $a \in SpcA$.

Esempio 2.5.1. Riprendendo la u_n definita nell'esempio 2 della precedente sezione:

$u_n = e^{ikx}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$considideriamo il $\lim_{n\to\infty}(P - k\mathbf{1})u_n = 0$ e vediamo anche che si può allora scrivere

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = e^{ikx}$$

dove il limite va inteso nel senso debole, cioè nel senso delle distribuzioni, ed $e^{ikx} \in \mathcal{S}'$, $e^{ikx} \notin \mathcal{H}$. Notare che è essenziale $k \in \mathbb{R}$, altrimenti la distribuzione non sarebbe temperata.

Analogamente, nell'esempio 5.3.2 $\lim_{n\to\infty} v_n = \delta(x - \lambda)$ in $\mathcal{S}'$.

Enunciamo, senza dimostrazione, il cruciale teorema sulla **completezza dello spettro degli operatori autoaggiunti**, che è lo scopo di tutta questa trattazione.

Teorema 2.5.1. L'equazione 2.73 ha un insieme di soluzioni *completo*, nel senso che, normalizzando opportunamente le $|a\rangle$, fissata una qualsiasi $|f\rangle \in \mathcal{S}$:

- i coefficienti
$$f_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_i |\, f\rangle \ , \tag{2.74}$$
ottenuti facendo correre i bra $\langle a_i|$ sullo $SpdA$, soddisfano a $\sum_i |f_i|^2 < \infty$ e quindi formano un vettore nello spazio di Hilbert delle componenti (o l_2, o di dimensione finita), i cui vettori base sono gli autovettori propri di A.

- La funzione
$$f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \langle a |\, f\rangle \ , \tag{2.75}$$
ottenuta facendo correre le distribuzioni $\langle a|$ sullo $SpcA$, è quadrato sommabile su $SpcA$, cioè $f(a) \in L^2(SpcA)$.

- Inoltre, $\forall\, |f\rangle\, , |g\rangle \in \mathcal{S}$ vale

$$\begin{aligned} \langle f|\, g\rangle &= \int_{a\in SpcA} da\, \langle f|\, a\rangle\, \langle a|\, g\rangle + \sum_{i\ /\ a_i\in SpdA} \langle f|\, a_i\rangle\, \langle a_i|\, g\rangle \\ &= \int_{a\in SpcA} da f(a)^\star g(a) + \sum_{i\ /\ a_i\in SpdA} f_i^\star g_i \end{aligned} \tag{2.76}$$

dove per comodità si è supposto che *non* ci sia degenerazione.

Talvolta per abbreviare si usa la notazione seguente:

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da \stackrel{\text{def}}{=} \int_{SpcA} da + \sum_{i\ /\ a_i \in SpdA} .$$

Ricordando la proprietà 8 del 4.4 e che gli $|a\rangle$ sono ovviamente linearmente indipendenti fra loro, la 2.76 permette di dire che le $|a\rangle$ formano un sistema ONC (generalizzato) e che vale:

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da\, |a\rangle \langle a| = \mathbf{1} \ , \tag{2.77}$$

detta **rappresentazione spettrale dell'identità**. Qualora l'operatore autoaggiunto A abbia solo spettro discreto (per esempio $L_3 = -i\frac{d}{d\varphi}$ su $L^2(-\pi, \pi)$ con condizioni al contorno periodiche, oppure l'hamiltoniana quantistica dell'oscillatore armonico), la 2.74 non è altro che la definizione dei coefficienti di Fourier di un generico vettore astratto $|f\rangle$ ($\in \mathcal{S}$) nella base ortonormale degli autovettori (propri) di A e la 2.76 è la corrispondente equazione di Parseval (generalizzata). In altre parole il teorema ci dice che, qualora un operatore autoaggiunto A abbia **solo spettro discreto**, l'insieme dei suoi autovettori, opportunamente normalizzato, forma un sistema ortonormale (ma questo lo sapevamo già) e soprattutto **completo**[16].

Notare che perchè valga questa proprietà è sufficiente che l'operatore A sia autoaggiunto (e con spettro soltanto discreto), mentre non è affatto necessario che sia continuo e limitato; succede così, come per L_3 per esempio, che $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{H}$ non coincida con $\mathcal{H}$ (pur valendo $[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$), ma che gli autovettori propri di A (che ovviamente appartengono a $\mathcal{D}_A$) formino una base per l'intero $\mathcal{H}$. Il teorema 2.5.1 non è che la generalizzazione di questa proprietà al caso in cui sia presente anche (o solo) spettro continuo; il prezzo da pagare è di ammettere anche gli autovettori generalizzati $|a\rangle$, che non stanno nè in $\mathcal{D}_A$ nè in $\mathcal{H}$, ma in $\mathcal{S}'$. Questo spiega perchè i vettori $|f\rangle$ e $|g\rangle$ devono appartenere a $\mathcal{S}$ e non essere generici elementi di $\mathcal{H}$: $\langle a|$ è una distribuzione e quindi $\langle a|\, g\rangle$ ha senso solo se $|g\rangle$ è una funzione di prova. Vedremo più oltre che non è difficile superare questa limitazione ed estendere il teorema 2.5.1 al caso che più ci interessa, con $|f\rangle$ e $|g\rangle \in \mathcal{H}$.

Il più semplice **esempio** di operatore autoaggiunto con spettro continuo è l'**operatore posizione** X (su $L^2(\mathbb{R})$, per esempio); detti $|x\rangle \in \mathcal{S}'$ gli autovettori generalizzati di X, la 2.75

$$f(x) = \langle x|\, f\rangle \tag{2.78}$$

[16] Il teorema 2.5.1 riguarda solo $\mathcal{S}$, ma $\mathcal{S}$ è denso in $\mathcal{H}$, secondo la topologia di $\mathcal{H}$, quindi gli autovettori di un operatore autoaggiunto, dotato di solo spettro discreto, formano una **base** in $\mathcal{H}$.

non è che la rappresentazione del vettore astratto $|f\rangle$ ($\in \mathcal{S}$ per ora) nello spazio delle configurazioni $L^2(SpcX) \equiv L^2(\mathbb{R})$, cioè come una funzione di x; la 2.76

$$\langle f|\, g\rangle = \int dx f^\star(x) g(x) \tag{2.79}$$

non fa che riprodurre la definizione di prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$. Si può anche simbolicamente scrivere, usando la 2.77,

$$|g\rangle = \int dx\, |x\rangle\, g(x), \text{ con } g(x) = \langle x|\, g\rangle \tag{2.80}$$

che non è che un'abbreviazione della 2.79.

La normalizzazione delle $|x\rangle$ che dà le 2.78 e le 2.79 è naturalmente quella della δ di Dirac; più precisamente scrivendo l'equazione agli autovalori[17]

$$X\, |x_0\rangle = x_0\, |x_0\rangle$$

nello spazio delle configurazioni:

$$x\delta_{x_0}(x) = x_0 \delta_{x_0}(x) \ ,$$

si sceglie come soluzione

$$\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) \in \mathcal{S}'$$

cosicchè la 2.78 diventa $f(x) = \langle \delta_x, f\rangle = \int dx' \delta(x' - x) f(x')$. Si constata qui che il fatto che la δ di Dirac, come ogni distribuzione, possa agire solo su funzioni di prova è all'origine della limitazione (provvisoria) nel teorema 2.5.1 a $|f\rangle\, , |g\rangle \in \mathcal{S}$.

L'**altro esempio** paradigmatico di operatore autoaggiunto con spettro solo continuo è l'**operatore momento** $P = -i\frac{d}{dx}$ su $L^2(\mathbb{R})$. Le autofunzioni generalizzate di P, opportunamente normalizzate, sono

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{S}', \quad k \in \mathbb{R} = SpcP \ ,$$

che rappresentano nello spazio delle configurazioni gli autovalori generalizzati $|k\rangle$.

La 2.75

$$F(k) = \langle k|\, f\rangle \tag{2.81}$$

[17] Chiamiamo qui x_0 l'autovalore per riservare il simbolo x alla variabile corrente.

non è che la rappresentazione nello spazio dei momenti del generico vettore $|f\rangle$ ($\in \mathcal{S}$ per ora). La 2.81 scritta nello spazio delle configurazioni diventa

$$F(k) = (\varphi_k, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

e quindi $F(k)$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = \langle x|\, f\rangle$.

La 2.76

$$\langle f|\, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dk F^{\star}(k) G(k) \ ,$$

confrontata con la definizione 2.79 di prodotto scalare nello spazio delle configurazioni non è che l'equazione di Parseval per la trasformata di Fourier.

Naturalmente esistono anche operatori autoaggiunti con spettro misto, cioè in parte discreto in parte continuo, ma ne lasciamo la discussione alla meccanica quantistica visto che gli esempi di maggiore interesse sono le hamiltoniane che ammettono sia stati legati che stati di scattering.

Estensione a $\mathcal{H}$.

Proprio pensando alla Meccanica Quantistica, ci lascia un po' insoddisfatti il doverci limitare ad applicare il teorema 2.5.1 (in particolare l'eq. 2.76) solo a $|f\rangle$, $|g\rangle \in \mathcal{S}$ e non a più generali $|f\rangle$, $|g\rangle \in \mathcal{H}$.

L'estensione a tutto $\mathcal{H}$ è immediata se A ha solo spettro discreto (vedi nota 16); affrontiamo ora il caso in cui A abbia anche spettro continuo, anzi, per semplicità di scrittura, <u>solo</u> spettro continuo.

Definizione 2.5.1.

Per ogni operatore autoaggiunto A, con $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{S}$, $[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$, e $\forall\, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ definisco $\langle a|\, \psi\rangle$, con $|a\rangle \in \mathcal{S}'$ che corre sullo spettro continuo di A, come

$$\langle a|\, \psi\rangle \equiv \psi(a) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \ \psi_n(a) \text{ in } L^2(SpcA) \ , \tag{2.82}$$

dove le $|\psi_n\rangle \in \mathcal{S}$ formano una successione convergente a $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}$:

$$|\psi\rangle = \lim_{n\to\infty} |\psi_n\rangle \ \text{ in } \mathcal{H} \tag{2.83}$$

e l.i.m. in 2.82 significa limite in media quadratica.

Tale definizione ha senso per i motivi seguenti:

- la successione $\{|\psi_n\rangle\}$ convergente a $|\psi\rangle$ esiste perchè $\mathcal{S}$ è denso in $\mathcal{H}$, naturalmente secondo la topologia di $\mathcal{H}$ (mentre $\mathcal{S}$ è completo secondo la propria topologia).

- la successione $\{|\psi_n(a)\rangle\}$ è di Cauchy in $L^2(SpcA)$ perchè tale è $\{|\psi_n\rangle\}$ in $\mathcal{S}$ (con la topologia indotta da $\mathcal{H}$) e la 2.76 ci dice che il prodotto scalare (quindi la norma) in $L^2(SpcA)$ coincide con quello in $\mathcal{H}$.

- la successione di Cauchy $\{|\psi_n(a)\rangle\}$ ammette limite, naturalmente in $L^2(SpcA)$, perchè $L^2(SpcA)$ è completo (o di Hilbert che dir si voglia). È ovvio che se $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ma non a $\mathcal{S}$, lo stesso succede per $\psi(a)$, che apparterrà a $L^2(SpcA)$ ma non a $\mathcal{S}$. [18]

Per evitare equivoci, deve essere molto chiaro che l'eq.2.82 **non** ci dà il valore della distribuzione $\langle a|$ su $|\psi\rangle$ che non appartiene allo spazio delle funzioni di prova $\mathcal{S}$; $\langle a|\, \psi\rangle$ **non** è un numero complesso ben definito una volta fissato $\langle a|$, ma rappresenta una classe di funzioni di $a \in SpcA$ quasi ovunque uguali (quindi non se ne sa il valore in un punto).

Come per tutte le funzioni quadrato sommabili, $\psi(a)$ porta a un numero complesso ben preciso solo quando viene moltiplicata per un'altra $\varphi^\star(a) \in L^2(SpcA)$, per esempio $\varphi^\star(a) = \langle\varphi|\, a\rangle$ con $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$, e integrata su a , ottenendo[19]

$$\langle\varphi|\, \psi\rangle = \int da\varphi^\star(a)\psi(a), \quad \forall\, |\varphi\rangle\,,\, |\psi\rangle \in \mathcal{H} \tag{2.84}$$

Non per nulla Dirac diceva che ha senso compiuto solo il bra(c)ket, e non i bra ed i ket separatamente.

Notare che l'eq.2.84 rappresenta l'estensione del teorema 2.5.1 a $\forall\, |\varphi\rangle\,,|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Ortonormalità degli autovettori generalizzati.

Visto che con la definizione 2.5.1 ci siamo incamminati sulla strada della licenza, percorriamola fino in fondo e cerchiamo di dare un senso a scritture del tipo $\langle x|\, x'\rangle = \delta(x - x')$ dove $|x\rangle$ e $|x'\rangle$ sono entrambe distribuzioni! Ritorniamo alla relazione di completezza 2.77 per precisare che sia il limite (sottinteso nella somma se lo spettro discreto ha un'infinità, numerabile, di autovalori) che l'integrale (se c'è spettro continuo) vanno intesi in senso doppiamente debole: la 2.77 va dapprima applicata a una funzione di prova

[18] È facile verificare che la classe di funzioni q.o. uguali $\psi(A)$ non dipende dalla successione $|\psi_n\rangle$, purché convergente a $|\psi\rangle$.

[19] Per scrivere la 2.84 abbiamo usato l'ipotesi semplificativa che A abbia solo spettro continuo; altrimenti, d'accordo con la 2.76, a secondo membre della 2.84 dovremmo aggiungere il contributo dello spettro discreto.

$|g\rangle$ per dare

$$\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da\, |a\rangle \langle a|\, g\rangle = |g\rangle \quad , \tag{2.85}$$

che va a sua volta applicata ad un'altra funzione di prova $\langle f|$, in modo che effettuando limite e/o integrale alla fine di tutto, si riproduce la 2.76.

Qualora l'operatore A abbia solo spettro discreto l'eq. 2.85 diventa

$$\sum_j |a_j\rangle \langle a_j|\, g\rangle = |g\rangle \,, \quad \forall\, |g\rangle \in \mathcal{H},$$

che saturata con $\langle a_i|$ dà:

$$\sum_j \langle a_i|\, a_j\rangle\, g_j = g_i \ ,$$

dove $g_i = \langle a_i|\, g\rangle$; per l'arbitrarietà dei coefficienti di Fourier g_i posso scegliere $g_i = 1$, $g_j = 0$, $\forall i \neq j$, da cui segue

$$\langle a_i|\, a_j\rangle = \delta_{ij} \ , \tag{2.86}$$

cioè la relazione di ortonormalità degli autovettori.

Cerchiamo di rifare lo stesso ragionamento qualora A abbia spettro continuo (supponiamo per semplicità $SpdA = \emptyset$). Allora l'eq. 2.85 diventa

$$\int_{SpcA} da\, |a\rangle \langle a|\, g\rangle = |g\rangle \,, \quad \forall\, |g\rangle \in \mathcal{S} \tag{2.87}$$

che implica[20]

$$\langle|\int_{SpcA} da\, |a\rangle \langle a|\, g\rangle = \langle|\, g\rangle \ , \tag{2.88}$$

ovvero, con licenza parlando

$$\int da\, \langle|\, a\rangle\, g(a) = g() \quad \text{con } g(a) = \langle a|\, g\rangle \,,$$

da cui segue

$$\langle|\, a\rangle = \delta(\,-a) \ . \tag{2.89}$$

Questa scrittura, di uso comune in Meccanica Quantistica ed essenziale per la corretta normalizzazione degli autovalori generalizzati, farebbe fremere di

[20] Con un certo coraggio, perchè l'integrale a primo membro della eq. 2.87 ha senso solo se viene effettuato dopo aver saturato con un'altra funzione di prova $\langle f|$.

sdegno qualsiasi matematico: passi applicare una distribuzione ad una funzione quadrato sommabile, come abbiamo fatto con la def. 2.5.1, ma applicarla ad un'altra distribuzione è proprio troppo! Per farci perdonare, diciamo che l'eq. 2.89 va intesa nel senso "debolissimo", cioè ha senso compiuto solo se viene moltiplicata per due altre funzioni di prova $g(a) = \langle a|\, g\rangle$ e $f^\star() = \langle f|\ \rangle$ e poi integrata su a e $\ \in SpcA$ per riprodurre il prodotto scalare $\langle f|\, g\rangle$ secondo la 2.76.

Nel caso in cui l'operatore A abbia spettro misto, ci limitiamo a dire che alle relazioni di ortonormalità 2.86 e 2.89 si aggiunge la

$$\langle a|\, a_i\rangle = 0 \quad \text{per } a \in SpcA,\ a_i \in SpdA\,. \tag{2.90}$$

Concludiamo osservando che con le tecniche, più o meno ardite, che abbiamo usato finora si arriva facilmente alla **rappresentazione spettrale di un operatore autoaggiunto**.

Applicando A alla rappresentazione spettrale dell'identità 2.77 si ottiene

$$A = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da\, |a\rangle\, a\, \langle a| \ \ , \tag{2.91}$$

che ha come al solito senso compiuto se limite e/o integrali sono effettuati dopo averla saturata con due funzioni di prova $\langle f|$ e $|g\rangle$, ottenendo

$$\langle f|\, A\, |g\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int da\, \langle f|\, a\rangle\, a\, \langle a|\, g\rangle \ \ . \tag{2.92}$$

Notare che l'eq. 2.92 segue direttamente e rigorosamente dalla 2.76, qualora si sostituisca $A\,|g\rangle$ a $|g\rangle$ e si tenga conto che $\langle a|\, A = \langle a|\, a$, $\langle a_i|\, A = \langle a_i|\, a_i$. Con le estensioni che abbiamo discusso prima, possiamo applicare l'eq. 2.91 anche a una qualsiasi $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$; bisogna osservare che se $|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A$ allora $A\,|\psi\rangle$ appartiene a $\mathcal{H}$, mentre se $|\psi\rangle \notin \mathcal{D}_A$ allora $A\,|\psi\rangle \in \mathcal{S}'$.

Per esempio applichiamo l'operatore posizione

$$X = \int dx\, |x\rangle\, x\, \langle x| \tag{2.93}$$

a $|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle\, \psi(x)$, con $\psi(x) = \langle x|\, \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R})$, (quindi $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$); il risultato è $X\,|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle\, x\psi(x)$ con $x\psi(x) \notin L^2(\mathbb{R})$, quindi $|\psi\rangle \notin \mathcal{D}_X$ e $|\psi\rangle \notin \mathcal{H}$, ma $X\,|\psi\rangle \in \mathcal{S}'$ perchè $x\psi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è una distribuzione temperata.

Discorso perfettamente analogo si può fare per l'operatore momento

$$P = \int dk\, |k\rangle\, k\, \langle k| \ \ ,$$

ricordando (vedi eq. 2.81) che $F(k) = \langle k|\, f\rangle$ è la Trasformata di Fourier di $f(x) = \langle x|\, f\rangle$.

Ruolo degli spazi $\mathcal{H}$ e $\mathcal{S}'$ in Meccanica Quantistica.
Viste le meraviglie che si rescono a combinare in $\mathcal{S}'$ si potrebbe essere tentati di dimenticarsi dello spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. La Meccanica Quantistica, che è di gran lunga la più importante applicazione di quanto visto in questo capitolo, mostra che sarebbe sbagliato; infatti sia $\mathcal{S}'$ che $\mathcal{H}$ giocano un ruolo essenziale.

1. Gli stati fisici (puri) sono vettori $|\psi\rangle$, più precisamente "raggi"[21], nello spazio $\mathcal{H}$.

2. Le osservabili sono operatori autoaggiunti A, di cui è essenziale considerare lo spettro: gli autovettori propri $|a_i\rangle$ ($a_i \in SpdA$) appartengono ad $\mathcal{H}$, quelli generalizzati ma non propri $|a\rangle$ ($a \in SpcA$) appartengono a $\mathcal{S}'$.

3. L'informazione fisica sta nelle quantità $p_i = |\langle a_i|\ \psi\rangle|^2$, $P(a, a+\Delta a) = \int_a^{a+\Delta a} d\,|\langle|\ \psi\rangle|^2$, che, per $\langle\psi|\ \psi\rangle = 1$, sono numeri compresi fra 0 e 1, definiti in modo univoco e senza alcuna ambiguità. L'espressione di $P(a, a+\Delta a)$ mostra che intervengono sia $\mathcal{H}$ che $\mathcal{S}'$ e anche quanto sia essenziale la definizione 2.5.1.

[21]Cioè vettori definiti a meno di una costante moltiplicativa arbitraria non nulla.

Bibliografia

[1] M.B.Barbaro, M.L.Frau, S.Sciuto *Introduzione ai metodi matematici della Fisica*; Dipartimento di Fisica Teorica dell' universitá di Torino, 2001.

[2] S.Sciuto, *Metodi Matematici della Fisica* Dipartimento di Fisica Teorica dell'università di Torino.

[3] G.Sartori, *Lezioni di Meccanica Quantistica*; Libreria Cortina, 1998.

[4] A.N.Kolmogorov- S.V.Fomin *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*; Edizioni MIR, 1980.

[5] V.S.Vladimirov *Equation of Mathematical physics*; Edizioni Dekker, 1971.