

Riprodotta con il permesso dell'autore da:

Cesare Rossetti
METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Libreria Editrice Universitaria LEVROTTO&BELLA,
Torino, ed 2000

CAPITOLO VIII

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

1. Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo prevalentemente dello studio delle equazioni differenziali ordinarie, lineari ed omogenee del secondo ordine, riguardando le soluzioni come funzioni di una variabile complessa. La ragione di questa particolare attenzione è molteplice; in primo luogo si ha che tali equazioni compaiono assai frequentemente nello studio di molti importanti fenomeni fisici; inoltre esistono dei metodi generali per la ricerca delle loro soluzioni, cosa che invece non può dirsi a proposito di equazioni non lineari che pure giocano un ruolo importantissimo nello studio di molti problemi; infine si ha che esse sono le meglio studiate dai matematici e che la maggior parte delle funzioni trascendenti non elementari che il matematico ed il fisico sono portati a considerare sono soluzioni di equazioni di questo tipo.

Per completezza, tuttavia, inizieremo con l'analisi delle equazioni lineari del primo ordine, per le quali è sempre possibile dare, almeno formalmente, la soluzione generale. Effettueremo poi alcune considerazioni di carattere generale sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, non necessariamente omogenee, e faremo vedere come, nota che sia una soluzione particolare di una equazione omogenea, sia possibile, almeno in linea di principio, determinarne l'integrale generale nonché quello della corrispondente equazione non omogenea. Esamineremo poi alcune proprietà interessanti delle soluzioni delle equazioni omogenee, riguardate come funzioni di variabile reale, per passare poi, finalmente, allo studio dettagliato delle soluzioni di tali equazioni.

2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

La più generale equazione differenziale, lineare, del primo ordine è del tipo

$$a(x)u' + b(x)u + c(x) = 0, \quad [2.1]$$

con $a(x) \neq 0$, e può pertanto sempre essere messa sotto la forma

$$u' + p(x)u + q(x) = 0, \quad [2.2]$$

con

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}. \quad [2.3]$$

Nel caso particolare in cui sia $q(x) = 0$, cioè nel caso dell'*equazione omogenea*

$$u' + p(x)u = 0, \quad [2.4]$$

questa risulta a variabili separabili e pertanto di integrazione immediata, fornendo

$$u = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad [2.5]$$

Altrettanto immediata risulta l'integrazione della [2.2] nel caso in cui sia $p(x) = 0$, cioè nel caso dell'equazione semplificata

$$u' = -q(x), \quad [2.6]$$

da cui si ha subito

$$u = - \int q(x) dx + C. \quad [2.7]$$

L'equazione più generale [2.2] può sempre essere risolta, almeno formalmente, riconducendo la sua soluzione a quella di una equazione equivalente di tipo [2.6], con un opportuno cambiamento della funzione incognita. Il metodo utilizzato a tal fine viene sovente indicato come il *metodo di variazione delle costanti (arbitrarie)* e consiste nello scrivere la funzione incognita $u = u(x)$ sotto la forma

$$u(x) = \alpha(x) \cdot v(x), \quad [2.8]$$

riguardando $v(x)$ come nuova funzione incognita e disponendo della funzione $\alpha(x)$ per far sì che l'equazione per v che si ottiene dalla [2.2] con la posizione [2.8], cioè l'equazione

$$\alpha v' + (\alpha' + p\alpha)v + q = 0, \quad [2.9]$$

non contenga il termine in v ; la richiesta è soddisfatta se α è soluzione dell'equazione differenziale omogenea

$$\alpha' + p\alpha = 0,$$

cioè se, a meno di una costante moltiplicativa (inessenziale), si pone

$$\alpha = e^{-\int_{x_0}^x p(x') dx'} \quad [2.10]$$

(dove x_0 è un punto fisso scelto arbitrariamente). Con tale determinazione di $\alpha(x)$ la [2.9] diventa (dividendo per α) l'equazione

$$v' = -\frac{q(x)}{\alpha(x)} \quad [2.11]$$

che è appunto di tipo [2.6] e ammette come soluzione

$$v(x) = - \int_{x_0}^x \frac{q(x')}{\alpha(x')} dx' + v(x_0). \quad [2.12]$$

Confrontando le [2.8], [2.10] e [2.12] si ha in definitiva che la soluzione generale della [2.2] è data da

$$u(x) = -e^{-\int_{x_0}^x p(x') dx'} \left\{ \int_{x_0}^x q(x_1) e^{\int_{x_0}^{x_1} p(x_2) dx_2} dx_1 + v(x_0) \right\}, \quad [2.13]$$

dove x_0 è un punto arbitrario e compare un'unica costante, chiamata $v(x_0)$, che può venire fissata dando una condizione al contorno per $u(x)$.

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

La più generale equazione differenziale lineare del secondo ordine è del tipo

$$A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u = F(x), \quad [3.1]$$

con $A(x) \neq 0$. L'equazione

$$A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u = 0 \quad [3.2]$$

viene detta *equazione omogenea associata* all'equazione [3.1].

3.1. Forma standard

Assumeremo nel seguito come *forma standard* di una equazione differenziale lineare del secondo ordine quella in cui il coefficiente della derivata seconda sia uguale all'unità; l'equazione [3.1], scritta in forma standard, è dunque l'equazione

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad [3.3]$$

dove, ovviamente,

$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}, \quad f(x) = \frac{F(x)}{A(x)}. \quad [3.4]$$

L'equazione omogenea [3.2], scritta in forma standard, è l'equazione

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \quad [3.5]$$

ed è quella a cui faremo riferimento prevalente nel seguito.

Alle funzioni $p(x)$ e $q(x)$ ci si riferisce abitualmente come ai coefficienti dell'equazione differenziale considerata e sono essi quelli che determinano le caratteristiche delle soluzioni dell'equazione omogenea [3.5].

3.2. Forma ridotta dell'equazione omogenea

Un'equazione di tipo [3.5] può sempre essere ricondotta ad una nuova equazione del secondo ordine, ad essa equivalente, in cui il coefficiente della derivata prima sia nullo; a tal fine è sufficiente porre

$$u(x) = k(x)v(x), \quad [3.6]$$

considerando $v(x)$ come nuova funzione incognita e determinando la funzione $k(x)$ in modo opportuno. Sostituendo questa posizione nella [3.5], si ha

$$(kv'' + 2k'v' + k''v) + (kv' + k'v)p + kvq = 0$$

ovvero, riordinando i termini,

$$kv'' + (2k' + kp)v' + (k'' + k'p + kq)v = 0; \quad [3.7]$$

possiamo ora disporre della funzione $k(x)$ per far sì che il coefficiente di v' si annulli, richiedendo dunque che sia

$$\frac{k'}{k} = -\frac{1}{2}p; \quad [3.8]$$

questa è una banale equazione differenziale del primo ordine per k , di soluzione immediata; a meno di una costante moltiplicativa inessenziale, si ha

$$k(x) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int p(x) dx \right]. \quad [3.9]$$

Con tale scelta per $k(x)$, l'equazione [3.7] per v risulta, scritta in forma standard, l'equazione

$$v'' + J(x)v = 0, \quad [3.10]$$

essendosi posto

$$J(x) = \frac{k''}{k} + \frac{k'}{k}p + q; \quad [3.11]$$

se si osserva che, derivando la [3.8], si ha

$$\frac{k''}{k} - \left(\frac{k'}{k} \right)^2 = -\frac{1}{2}p'$$

e si tiene conto della [3.8] stessa, si vede che la funzione $J(x)$ [3.11] può essere espressa in funzione dei coefficienti dell'equazione originaria, come

$$J(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}[p(x)]^2. \quad [3.11']$$

In conclusione, se dall'equazione [3.5] si vuole ottenere una equazione equivalente priva del termine con la derivata prima, si deve effettuare la sostituzione

$$u(x) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int p(x) dx \right] v(x), \quad [3.12]$$

con il che si ottiene per la nuova funzione incognita $v(x)$ l'equazione [3.10], essendo il coefficiente $J(x)$ dato dalla [3.11'].

3.3. Forma autoaggiunta dell'equazione omogenea

Una equazione differenziale, lineare, omogenea, del secondo ordine viene detta essere in forma autoaggiunta se può essere scritta sotto la forma

$$\frac{d}{dx} \omega(x) \frac{d}{dx} u + Q(x)u = 0. \quad [3.13]$$

Si noti che, se nell'equazione [3.2] fosse $B(x) = A'(x)$, allora essa sarebbe praticamente in forma autoaggiunta, essendo equivalente alla [3.13], con le identificazioni $\omega(x) = A(x)$ e $Q(x) = C(x)$.

Una qualsiasi equazione di tipo [3.5] può sempre essere riscritta in forma autoaggiunta, moltiplicando semplicemente tale equazione per una funzione $\omega(x)$ che soddisfaccia alla richiesta

$$\omega'(x) = \omega(x)p(x); \quad [3.14]$$

questa è ovviamente soddisfatta dalla funzione

$$\omega(x) = \exp \left[\int p(x) dx \right]; \quad [3.15]$$

la [3.5] può essere allora riscritta sotto la forma [3.13], con

$$Q(x) = \omega(x)q(x). \quad [3.16]$$

Questa forma si rivela particolarmente utile per diverse considerazioni, come avremo occasione di mostrare tra breve. Il suo nome deriva dal fatto che, per x variabile reale e $p(x)$ funzione reale, l'operatore

$$\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}$$

è un operatore autoaggiunto.

3.4. Soluzioni linearmente indipendenti

Ricordiamo in primo luogo che, data l'equazione differenziale

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad [3.17]$$

il suo integrale generale è dato da

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x), \quad [3.18]$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie e u_1 e u_2 due soluzioni qualsiasi, purché linearmente indipendenti. Due soluzioni particolari della [3.17] che siano linearmente indipendenti vengono pertanto dette costituire un *sistema fondamentale di soluzioni*.

Condizione necessaria e sufficiente affinché due soluzioni u_1 e u_2 dell'equazione [3.17] costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni è che il loro wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \quad [3.19]$$

sia diverso da zero. Infatti, se u_1 ed u_2 sono linearmente indipendenti, la relazione

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \quad [3.20]$$

(con α e β costanti) implica necessariamente $\alpha = \beta = 0$. Ma la validità della [3.20] implica che valga anche l'identità

$$\alpha u_1' + \beta u_2' = 0 \quad [3.21]$$

che si ottiene derivando la [3.20] rispetto ad x . Le [3.20] e [3.21] si possono riguardare come costituenti un sistema di equazioni algebriche, lineari ed omogenee, nelle due incognite α e β . Ne segue, pertanto, che condizione necessaria e sufficiente affinché tale sistema ammetta come unica soluzione quella banale, $\alpha = \beta = 0$, è che il determinante dei suoi coefficienti, che è appunto il wronskiano [3.19], sia diverso da zero.

È opportuno ricordare che la dipendenza dalla variabile x del wronskiano [3.19] è indipendente dalla particolare coppia di soluzioni considerata e quindi dalla conoscenza della loro forma esplicita. Infatti, dalla [3.19], scritta esplicitamente come

$$W = u_1u_2' - u_1'u_2, \quad [3.22]$$

derivando rispetto ad x , segue la relazione

$$W' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2; \quad [3.23]$$

tenendo ora conto del fatto che, per ipotesi, u_1 e u_2 sono soluzioni dell'equazione [3.17] e che pertanto si ha

$$u_i'' = -p(x)u_i' - q(x)u_i \quad (i = 1, 2),$$

dalla [3.23] segue

$$W' = -p(x)(u_1 u_2' - u_1' u_2) \equiv -p(x)W.$$

È questa una semplice equazione differenziale del primo ordine per il wronskiano W la cui integrazione è immediata e fornisce (integrando tra un punto fisso, arbitrario x_0 ed il punto generico x)

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x p(x') dx' \right]. \quad [3.24]$$

La [3.24] è nota come *formula di Liouville* e mostra chiaramente che la dipendenza da x del wronskiano di due soluzioni della [3.17] è indipendente dalla particolare coppia di soluzioni considerata, ma dipende esclusivamente dal coefficiente $p(x)$ della derivata prima della funzione incognita. La conoscenza completa del wronskiano di due soluzioni dipende solo da quella della costante $W(x_0)$, cioè dal valore assunto dal wronskiano in un punto particolare arbitrario. Si ha così che, per conoscere il wronskiano di due soluzioni della [3.17], non è necessario conoscerle esplicitamente, ma è sufficiente conoscere il loro comportamento nell'intorno di un generico punto $x = x_0$.

La formula di Liouville mostra poi, in particolare, che il wronskiano di una arbitraria coppia di soluzioni di una equazione differenziale di tipo [3.17] in cui il coefficiente della derivata prima sia nullo è una costante.

3.41. Costruzione della soluzione generale di una equazione differenziale omogenea, partendo dalla conoscenza di un suo integrale particolare

Nota una soluzione particolare $u_1(x)$ dell'equazione omogenea [3.17], è sempre possibile costruirne, almeno formalmente, una seconda soluzione, linearmente indipendente da u_1 , utilizzando il cosiddetto metodo di variazione delle costanti. Poniamo pertanto

$$u_2(x) = u_1(x)\psi(x) \quad [3.25]$$

e sostituiamo questa posizione nella [3.17]; tenuto conto che $u_1(x)$ ne è per ipotesi soluzione, si vede così che anche u_2 è tale se $\psi(x)$ ubbidisce alla equazione differenziale

$$\psi'' + \left[2 \frac{u_1'}{u_1} + p(x) \right] \psi' = 0. \quad [3.26]$$

Integrando la [3.26] tra un punto fisso x_0 ed il punto generico x si ottiene per $\psi'(x)$ l'espressione

$$\psi'(x) = W(x_0) \frac{1}{u_1^2(x)} e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}, \quad [3.27]$$

dove si è posto

$$W(x_0) \equiv \psi'(x_0)u_1^2(x_0), \quad [3.28]$$

dato che la costante $W(x_0)$ è proprio il wronskiano tra la soluzione u_1 e la soluzione u_2 , data dalla [3.25], calcolato nel punto x_0 . Una integrazione formale della [3.27] fornisce per ψ , a meno di una costante additiva inessenziale, l'espressione

$$\psi(x) = W(x_0) \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{u_1^2(\xi)} e^{-\int_{x_0}^{\xi} p(\eta)d\eta} \quad [3.29]$$

che, sostituita nella [3.25], definisce una soluzione u_2 dell'equazione differenziale [3.17] che risulta certamente linearmente indipendente da u_1 se la costante $W(x_0)$ viene scelta diversa da zero:

$$u_2(x) = u_1(x)W(x_0) \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{u_1^2(\xi)} e^{-\int_{x_0}^{\xi} p(\eta)d\eta}. \quad [3.30]$$

Per finire osserviamo, per scopi futuri, che, se ricordiamo la formula di Liouville che fornisce il wronskiano di due generiche soluzioni di una equazione differenziale di tipo [3.17] come

$$W[u_1(x), u_2(x)] \equiv u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(\eta)d\eta}, \quad [3.31]$$

la [3.30] può essere formalmente scritta sotto la forma

$$u_2(x) = u_1(x) \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{u_1^2(\xi)} W[u_1(\xi), u_2(\xi)]. \quad [3.32]$$

3.5. Sulla soluzione generale di una equazione differenziale non omogenea

Anche la soluzione generale di una equazione differenziale non omogenea, del tipo

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad [3.33]$$

può sempre essere costruita, almeno formalmente, quando sia nota una soluzione particolare u_1 dell'equazione differenziale omogenea [3.17], ad essa associata. La conoscenza di u_1 permette infatti, come dianzi visto, la costruzione di una seconda soluzione u_2 , linearmente indipendente da u_1 , della [3.17] e quindi la conoscenza del suo integrale generale $\alpha u_1 + \beta u_2$ (con α e β costanti arbitrarie); noto questo, l'integrale generale della [3.33] è dato da

$$u = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) + u_p(x), \quad [3.34]$$

dove u_p indica un arbitrario integrale particolare della [3.33] stessa. Come mostreremo qui, un integrale particolare della [3.33] può sempre essere costruito, almeno formalmente, utilizzando ancora il metodo della variazione delle costanti, una volta che siano note due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea [3.17] ad essa associata.

Cominciamo col postulare per u_p una forma del tipo

$$u_p(x) = u_1(x)\phi(x). \quad [3.35]$$

Sostituendo la [3.35] nella [3.33], e tenendo conto del fatto che u_1 è per ipotesi soluzione della [3.17], si vede che essa ne è effettivamente soluzione se ϕ ubbidisce all'equazione

$$\phi'' + \left[\frac{2u_1'(x)}{u_1(x)} + p(x) \right] \phi' = \frac{f(x)}{u_1(x)}. \quad [3.36]$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine per ϕ' e, come tale, può certo essere integrata (almeno formalmente); ottenuta ϕ' , una seconda integrazione fornisce il "moltiplicatore" ϕ che definisce u_p , tramite la [3.35]. Il calcolo effettivo può essere agevolato riscrivendo il coefficiente di ϕ' che compare nella [3.36] in un modo più opportuno. Si osservi in primo luogo che vale l'identità

$$2 \frac{u_1'}{u_1} = \frac{d}{dx} \ln u_1^2 \quad [3.37]$$

e che inoltre, come si vede dalla formula di Liouville [3.31], risulta

$$p(x) = - \frac{W'[u_1(x), u_2(x)]}{W[u_1(x), u_2(x)]} \equiv - \frac{d}{dx} \ln W[u_1(x), u_2(x)], \quad [3.38]$$

dove $W(u_1, u_2)$ è il wronskiano tra u_1 ed una qualsiasi altra soluzione u_2 della [3.17] che sia linearmente indipendente da u_1 . Dalle [3.37] e [3.38] segue dunque l'identità

$$\frac{2u_1'(x)}{u_1} + p(x) \equiv \frac{d}{dx} \ln \frac{u_1^2(x)}{W[u_1(x), u_2(x)]}; \quad [3.39]$$

posto ora

$$\frac{u_1^2(x)}{W[u_1(x), u_2(x)]} \equiv Z(x), \quad [3.40]$$

la [3.39] può essere riscritta sotto la forma

$$\frac{2u_1'(x)}{u_1} + p(x) = \frac{1}{Z(x)} \frac{d}{dx} Z(x). \quad [3.41]$$

Sostituendo la [3.41] nella [3.36], e moltiplicando per Z , l'equazione per ϕ' diventa

$$Z\phi'' + Z'\phi' = \frac{fZ}{u_1},$$

cioè l'equazione

$$(Z\phi')' = \frac{fu_1}{W(u_1, u_2)}, \quad [3.42]$$

dove si è tenuto conto della definizione [3.40] di Z per riscrivere il secondo membro; di qui integrando tra un punto fisso x_0 ed il punto generico x (e dividendo per Z) si ottiene

$$\phi'(x) = \frac{1}{Z(x)} \int_{x_0}^x \frac{f(x')u_1(x')}{W[u_1(x'), u_2(x')]} dx', \quad [3.43]$$

essendosi scelto $\phi'(x_0) = 0$. Osserviamo ora che dalla [3.40], tenendo conto della forma del wronskiano $W[u_1(x), u_2(x)]$, si ha che vale l'identità

$$\frac{1}{Z(x)} \equiv \frac{u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)}{u_1^2(x)} = \frac{d}{dx} \frac{u_2(x)}{u_1(x)} \quad [3.44]$$

e che pertanto la [3.43] può risciversi come

$$\phi'(x) = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \right) \right] \int_{x_0}^x \frac{f(x')u_1(x')}{W[u_1(x'), u_2(x')]} dx'.$$

Questa forma di ϕ' può essere riespressa ancora più convenientemente come

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \int_{x_0}^x \frac{u_1(x')f(x')}{W[u_1(x'), u_2(x')]} dx' \right] - \frac{u_2(x)f(x)}{W[u_1(x), u_2(x)]}.$$

Integrando quest'ultima espressione tra x_0 ed x , trascurando la costante di integrazione $\phi(x_0)$ e moltiplicando il risultato per u_1 si ottiene in definitiva (si ricordi la posizione [3.35]) che un integrale particolare della [3.33] è dato da

$$u_p(x) = u_2(x) \int_{x_0}^x \frac{u_1(x')f(x')}{W[u_1(x'), u_2(x')]} dx' - u_1(x) \int_{x_0}^x \frac{u_2(x')f(x')}{W[u_1(x'), u_2(x')]} dx'. \quad [3.45]$$

4. Sulla regione di oscillazione delle soluzioni di una equazione omogenea

La forma autaggiunta [3.13] di una equazione differenziale omogenea è utile, in particolare, per ricavare informazioni sui possibili andamenti delle sue soluzioni, in opportuni intervalli. A partire dalla [3.13], cioè dall'equazione

$$\frac{d}{dx} \omega(x) \frac{d}{dx} u + Q(x)u = 0, \quad [4.1]$$

è infatti facile vedere che una qualsiasi sua soluzione $u(x)$ si annulla al più una volta in ogni intervallo in cui $\omega(x)$ e $Q(x)$ abbiano segni discordi, che lo stesso succede per la sua derivata prima $u'(x)$ ed inoltre che l'annullarsi, in un tale intervallo, di una delle due funzioni u o u' implica l'impossibilità di annullarsi per l'altra.

Si consideri infatti la funzione

$$\eta(x) \equiv \omega(x)u(x)u'(x) \quad [4.2]$$

e se ne calcoli la derivata; tenuto conto della [4.1], che può leggersi come

$$(\omega u')' = -Qu, \quad [4.3]$$

si ha

$$\eta'(x) = \omega(x)[u'(x)]^2 - Q(x)[u(x)]^2 \quad [4.4]$$

e pertanto, in ogni intervallo in cui sia $\text{sign} \omega \neq \text{sign} Q$, risulta necessariamente $\eta' \geq 0$ se $\omega > 0$ e $\eta' \leq 0$ se $\omega < 0$. Ne segue che $\eta(x)$ è funzione non decrescente (rispettivamente non crescente) in ogni intervallo in cui sia $\omega > 0$ e $Q < 0$ ($\omega < 0$ e $Q > 0$) e quindi essa presenta ivi al più uno zero semplice. Dalla definizione [4.2] di η segue la validità dell'asserto iniziale che in ogni intervallo in cui ω e Q hanno segni discordi esiste al massimo uno zero di una soluzione della [4.1], ovvero della sua derivata prima, e che il verificarsi di una di queste eventualità esclude quello dell'altra.

Indicando come *intervallo di oscillazione* di una funzione $u(x)$ un intervallo in cui la sua derivata prima $u'(x)$ si annulli più di una volta, possiamo concludere dicendo che gli intervalli di oscillazione delle soluzioni della [4.1] possono essere solo quegli intervalli in cui $\omega(x)$ e $Q(x)$ hanno segni concordi.

Come esempio si consideri l'equazione

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u + \nu(\nu+1)u = 0 \quad [4.5]$$

(che è un caso particolare dell'equazione di Legendre), con $\nu > 0$. Poiché in tal caso $Q \equiv \nu(\nu+1)$ è sempre positivo, si vede subito che la regione di oscillazione delle sue soluzioni è quella in cui risulta $1-x^2 > 0$ e coincide quindi con l'intervallo $(-1,1)$. Si noti, per inciso, che questo è l'intervallo in cui sono contenuti gli zeri dei polinomi di Legendre, che sono appunto le soluzioni polinomiali della [4.5] che si hanno nel caso in cui ν sia un numero naturale.

4.1. Sugli zeri delle soluzioni

Gli zeri di una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad [4.6]$$

che cadono nella regione R di analiticità dei coefficienti $p(x)$ e $q(x)$, sono tutti semplici. La validità di questa affermazione deriva dal fatto che la soluzione di una tale equazione differenziale che soddisfi le condizioni al contorno $u(x_0) = u_0$ e $u'(x_0) = u_1$, essendo x_0 un punto di continuità di $p(x)$ e $q(x)$, è definita in modo univoco; poiché la condizione di annullamento contemporaneo della soluzione e della sua derivata prima in uno stesso punto $x = x_0$ è certo soddisfatta dalla soluzione identicamente nulla della [4.6], ne segue che questa è l'unica soluzione soddisfacente a tali condizioni e pertanto che qualsiasi soluzione non banale della [4.6] stessa può avere al più degli zeri semplici nella regione R .

Una proprietà delle soluzioni della [4.6] che è di verifica praticamente immediata è che due sue soluzioni che si annullino in uno stesso punto sono sostanzialmente la stessa soluzione (nel senso che sono necessariamente l'una multipla dell'altra). Infatti, dette u_1 e u_2 le due soluzioni, se $u_1(x_0) = u_2(x_0) = 0$, il loro wronskiano

$$W[u_1(x), u_2(x)] = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \equiv u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$$

si annulla in $x = x_0$; ma se un wronskiano è nullo in un punto esso è nullo ovunque*; pertanto, essendo nullo il loro wronskiano, si ha che necessariamente u_2 è multipla di u_1 .

4.2. Teorema del confronto di Sturm

A proposito degli zeri delle soluzioni di una equazione differenziale, esiste un interessante teorema, noto col nome di *teorema del confronto di Sturm*, che permette di ottenere informazioni sugli zeri delle soluzioni di un'equazione di

* Si ricordi la formula di Liouville.

tipo [4.1] (e quindi di qualsiasi equazione differenziale lineare, omogenea, del secondo ordine), confrontandola con un'altra equazione dello stesso tipo di cui siano note le soluzioni ovvero, almeno, si abbiano informazioni sugli zeri delle sue soluzioni.

Cominciamo dunque col supporre di conoscere le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}u + Q_1(x)u = 0 \quad [4.7]$$

o, almeno, di conoscere la distribuzione dei loro zeri. Data un'altra equazione differenziale dello stesso tipo, che scriveremo dando il nome di z alla variabile indipendente, data cioè l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dz}\eta(z)\frac{d}{dz}v + Q(z)v = 0, \quad [4.8]$$

la domanda che vogliamo porci è se sia possibile ottenere informazioni sugli zeri delle sue soluzioni semplicemente confrontando la [4.8] con la [4.7]. È ovvio che il "confronto" tra le due equazioni sarebbe più immediato se le funzioni ω ed η che vi compaiono fossero le stesse; a questa situazione ci si può sempre ricondurre cambiando nella [4.8] la variabile indipendente, ponendo

$$z = z(x), \quad [4.9]$$

e determinando opportunamente il legame che deve intercorrere tra z ed x affinché appunto la [4.8] si trasformi in una equazione di tipo [4.7] con la stessa funzione $\omega(x)$. Con la posizione [4.9] e riguardando x come nuova variabile indipendente, la [4.8] si legge come

$$\frac{dx}{dz}\frac{d}{dx}\eta(z)\frac{dx}{dz}\frac{d}{dx}v + Q(z)v = 0. \quad [4.10]$$

Imponendo che sia

$$\eta(z)\frac{dx}{dz} = \omega(x), \quad [4.11]$$

cioè che il legame tra x e z sia dato da

$$\int \frac{dx}{\omega(x)} = \int \frac{dz}{\eta(z)}, \quad [4.12]$$

moltiplicando la [4.10] per dz/dx e ponendo

$$\frac{dz}{dx}Q[z(x)] \equiv Q_2(x), \quad [4.13]$$

la [4.10] diventa l'equazione

$$\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}v + Q_2(x)v = 0 \quad [4.14]$$

che ha appunto la forma desiderata, atta ad un confronto diretto con l'equazione [4.7].

Supponiamo ora di conoscere due zeri consecutivi, diciamo a e b , di una (arbitraria) soluzione u della [4.7]; tra di essi u mantiene sempre lo stesso segno, che, senza perdita di generalità*, possiamo supporre essere positivo:

$$u > 0 \quad \text{per } a < x < b; \quad u(a) = u(b) = 0. \quad [4.15]$$

Supposto ancora che la funzione $\omega(x)$ sia positiva** in (a, b) , vogliamo mostrare che, se

$$Q_2(x) \geq Q_1(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad [4.16]$$

allora necessariamente tra a e b cade almeno uno zero di qualsivoglia soluzione v della [4.14]. Cominciamo con l'osservare che, sotto le ipotesi fatte, la derivata prima di u è necessariamente positiva in a e negativa in b :

$$u'(a) > 0, \quad u'(b) < 0. \quad [4.17]$$

Moltiplichiamo ora la [4.7] per v e sottraiamo dal risultato la [4.14] moltiplicata per u , ottenendo l'uguaglianza

$$v \frac{d}{dx} \omega \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} \omega \frac{d}{dx} v = (Q_2 - Q_1)uv; \quad [4.18]$$

osservando che il primo membro della [4.18] può essere riscritto come

$$\frac{d}{dx} [v(\omega u') - u(\omega v')]$$

ed integrando la [4.18] tra a e b si vede, ricordando l'ipotesi [4.15], che vale l'uguaglianza

$$\int_a^b [Q_2(x) - Q_1(x)]u(x)v(x)dx = v(b)\omega(b)u'(b) - v(a)\omega(a)u'(a) \quad [4.19]$$

che non potrebbe essere soddisfatta se v mantenesse sempre lo stesso segno in (a, b) ; infatti se così fosse, e fosse, per esempio, sempre $v > 0$ in (a, b) , il primo membro della [4.19] sarebbe una quantità positiva o tutt'al più nulla (nel caso particolare di $Q_2 = Q_1$), mentre il secondo membro sarebbe una quantità decisamente negativa (si ricordi la [4.17]). Ne segue, come affermato, che v si annulla almeno una volta tra due zeri consecutivi di u se nell'intervallo tra di essi è sempre $Q_2 \geq Q_1$.

In quanto visto in precedenza è contenuta implicitamente anche l'importante affermazione che *gli zeri di due soluzioni linearmente indipendenti di una equazione differenziale di tipo [4.1] (e quindi, in generale, di tipo [3.5]) si separano mutuamente*. Il teorema del confronto di Sturm vale infatti anche per il confronto di una equazione differenziale con se stessa (è il caso di $Q_2 = Q_1$); poiché però, in questo caso, i ruoli di u e v (da intendersi ora come due soluzioni linearmente indipendenti della stessa equazione) possono essere scambiati, la

* Si noti che u è a priori definita solo a meno di una arbitraria costante moltiplicativa in quanto la [4.7] è una equazione omogenea e l'unica ipotesi che abbiamo fatto su u è che essa si annulli in a e in b .

** Se ω fosse negativa basterebbe cambiare segno a tutta l'equazione per ridursi a questa situazione.

conclusione cui si arriva è appunto che tra ogni coppia di zeri consecutivi di u cade sempre uno e un solo zero di v .

4.3. Teorema di Sonine-Pólya (sui massimi e minimi delle soluzioni)

Data una equazione differenziale di tipo [4.1], che qui riscriviamo come

$$(\omega u')' + Qu = 0, \quad [4.20]$$

se in un certo intervallo (a, b) i coefficienti ω e Q sono sempre $\neq 0$ e di classe C^1 (cioè ivi continui insieme con le loro derivate prime) ed inoltre il prodotto ωQ è ivi funzione non decrescente (ovvero non crescente), allora gli eventuali massimi e minimi di una qualunque sua soluzione $u(x)$ sono tali che la successione dei valori assoluti ad essi corrispondenti è non crescente (ovvero non decrescente).

Per dimostrare la validità di questo asserto si consideri la funzione

$$\phi(x) = [u(x)]^2 + \frac{\omega(x)}{Q(x)} [u'(x)]^2 \equiv u^2 + \frac{1}{\omega Q} (\omega u')^2; \quad [4.21]$$

la sua derivata è

$$\phi' = 2uu' + \frac{2(\omega u')}{\omega Q} (\omega u')' - \frac{(\omega Q)'}{(\omega Q)^2} (\omega u')^2,$$

cioè (tenendo conto della [4.20] si vede che i primi due termini a secondo membro si elidono)

$$\phi'(x) = - \left(\frac{u'}{Q} \right)^2 \frac{d}{dx} (\omega Q). \quad [4.22]$$

Questa uguaglianza mostra che il segno della derivata della funzione ϕ definita dalla [4.21] è opposto a quello della derivata del prodotto ωQ . Ne segue che in ogni intervallo in cui il prodotto ωQ sia una funzione non decrescente, ϕ risulta una funzione non crescente e viceversa. Ora nei punti $x = x_i$ in cui una soluzione u dell'equazione differenziale [4.1] presenta dei massimi o dei minimi si ha che $u'(x_i) = 0$ e pertanto la funzione ϕ [4.21] è tale che

$$\phi(x_i) = [u(x_i)]^2. \quad [4.23]$$

Ne segue la validità di quanto affermato nell'enunciato del teorema e cioè che in ogni intervallo in cui il prodotto ωQ sia una funzione non crescente i valori assoluti degli eventuali massimi e minimi di una qualsiasi soluzione della equazione differenziale [4.1] sono ordinati in una successione non decrescente e viceversa.

Come esempio consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0,$$

con $n \geq 0$ (che, per $n =$ numero naturale, è l'equazione soddisfatta dall'ennesimo polinomio di Hermite). Per ridurla in forma autoaggiunta poniamo, secondo la prescrizione [3.15],

$$\omega(x) = e^{-x^2}$$

e quindi (vedi [3.16])

$$Q(x) = 2ne^{-x^2};$$

il prodotto

$$\omega Q \equiv 2ne^{-2x^2}$$

risulta dunque un funzione sempre crescente quando x cresce da $-\infty$ a 0 e decrescente quando x cresce da 0 a $+\infty$. Ne segue, in particolare, che i valori assoluti dei massimi e minimi dei polinomi di Hermite (che sono localizzati in posizioni simmetriche rispetto all'origine) sono ordinati per valori decrescenti per $x < 0$ e per valori crescenti per $x > 0$.

5. Sulle soluzioni di una equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine

Nel seguito ci occuperemo in dettaglio delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0, \quad [5.1]$$

riguardando z come una variabile complessa, e supporremo che esista una regione R del piano z tale che entrambi i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ siano funzioni olomorfe per $z \in R$.

Un generico punto $z_0 \in R$ viene detto *punto ordinario* o *punto regolare* dell'equazione considerata; viceversa i punti $z = z_i$ che siano punti singolari di $p(z)$ e/o di $q(z)$ prendono il nome di *punti singolari* dell'equazione [5.1]. L'importanza della distinzione tra punti ordinari e punti singolari deriva dal fatto che, come mostreremo, le uniche possibili singolarità delle soluzioni dell'equazione [5.1] sono i punti singolari dell'equazione stessa.

5.1. Soluzione nell'intorno di un punto ordinario

Consideriamo un cerchio C , tutto contenuto nella regione R di olomorfismo contemporaneo dei coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ dell'equazione [5.1], avente per centro un generico punto $z_0 \in R$; vogliamo mostrare che è sempre possibile determinare, almeno in un opportuno intorno del punto $z = z_0$, l'integrale generale della [5.1] e che questo risulta una funzione certamente olomorfa per ogni $z \in C$. A tal fine cercheremo di ottenere una soluzione della [5.1] che soddisfi le generiche condizioni al contorno

$$u(z_0) = c_0, \quad u'(z_0) = c_1; \quad [5.2]$$

il metodo che utilizzeremo consiste nel trasformare l'equazione differenziale [5.1] in una coppia di equazioni integrali accoppiate, equivalenti all'equazione data e tenenti conto automaticamente delle condizioni [5.2], per cui dimostreremo che esiste una ed una sola soluzione.

Cominciamo col porre

$$u' = v \quad [5.3]$$

e, di conseguenza, riscriviamo la [5.1] sotto la forma

$$v' = -p(z)v - q(z)u. \quad [5.4]$$

Le [5.3] e [5.4] possono ora riguardarsi come una coppia di equazioni differenziali, del primo ordine, accoppiate, da risolversi con le condizioni al contorno

$$u(z_0) = c_0, \quad v(z_0) = c_1. \quad [5.5]$$

Invece di limitarci ad esaminare questo problema particolare, possiamo studiare, senza fare maggior fatica, il problema più generale di due equazioni differenziali, lineari, del primo ordine, accoppiate, del tipo

$$\begin{aligned} u' &= \eta(z)u + \rho v, \\ v' &= \varphi v + \chi(z)u, \end{aligned} \quad [5.6]$$

da risolvere con le condizioni al contorno

$$u(z_0) = \alpha, \quad v(z_0) = \beta, \quad [5.7]$$

dove z_0 è un generico punto interno alla regione R di olomorfismo contemporaneo dei coefficienti $\eta(z)$, ρ , φ e $\chi(z)$. Considerando un cerchio C , tutto contenuto in R , avente per centro il punto z_0 , tali coefficienti risulteranno ivi limitati e potremo pertanto porre

$$M = \text{Max}\{|\eta(z)|, |\rho|, |\varphi|, |\chi(z)|\}, \quad \text{per } z \in C. \quad [5.8]$$

Integrando formalmente le [5.6] tra il punto fisso z_0 ed un generico punto $z \in C$ e tenendo conto delle [5.7], si ha

$$\begin{aligned} u(z) &= \alpha + \int_{z_0}^z [\eta(z')u(z') + \rho(z')v(z')]dz', \\ v(z) &= \beta + \int_{z_0}^z [\varphi(z')v(z') + \chi(z')u(z')]dz'. \end{aligned} \quad [5.9]$$

Il sistema di equazioni differenziali [5.6] è stato così trasformato nel sistema di equazioni integrali [5.9], nelle quali sono già contenute le condizioni al contorno [5.7], sistema che può essere risolto con un metodo ricorrente di approssimazioni successive. A tal fine poniamo

$$u_0(z) = \alpha, \quad v_0(z) = \beta \quad [5.10]$$

e quindi

$$\begin{aligned} u_n(z) &= \alpha + \int_{z_0}^z [\eta(z')u_{n-1}(z') + \rho(z')v_{n-1}(z')]dz', \\ v_n(z) &= \beta + \int_{z_0}^z [\varphi(z')v_{n-1}(z') + \chi(z')u_{n-1}(z')]dz' \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad [5.11]$$

In particolare, per $n = 1$, si ha

$$\begin{aligned} u_1(z) - \alpha &= \int_{z_0}^z [\eta(z')\alpha + \rho(z')\beta]dz', \\ v_1(z) - \beta &= \int_{z_0}^z [\varphi(z')\beta + \chi(z')\alpha]dz' \end{aligned} \quad [5.12]$$

e pertanto, scelto come cammino di integrazione un cammino rettilineo (cosa certo possibile, dato che tutti i cammini tra z_0 e z sono equivalenti, purché contenuti in C), detto m un numero positivo tale che sia

$$m \geq \text{Max}\{|\alpha|, |\beta|\} \quad [5.13]$$

e ricordando la posizione [5.8], si ha

$$\begin{aligned} |u_1 - \alpha| &\equiv |u_1 - u_0| \leq 2mMr, \\ |v_1 - \beta| &\equiv |v_1 - v_0| \leq 2mMr, \end{aligned} \quad [5.14]$$

essendosi posto

$$r = |z - z_0|. \quad [5.15]$$

Considerando poi il caso di $n = 2$, dalla prima delle [5.11] si ha

$$u_2(z) = \alpha + \int_{z_0}^z [\eta(z')u_1(z') + \rho(z')v_1(z')]dz'$$

e sottraendo da questa equazione la prima delle [5.12], si ottiene

$$u_2(z) - u_1(z) = \int_{z_0}^z \{\eta(z')[u_1(z') - u_0(z')] + \rho(z')[v_1(z') - v_0(z')]\}dz'$$

e si vede quindi che è

$$|u_2 - u_1| \leq m \frac{(2Mr)^2}{2!}; \quad [5.16]$$

analogamente si verifica che è pure

$$|v_2 - v_1| \leq m \frac{(2Mr)^2}{2!}. \quad [5.17]$$

Iterando il procedimento si vede che

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &\leq m \frac{(2Mr)^n}{n!}, \\ |v_n - v_{n-1}| &\leq m \frac{(2Mr)^n}{n!} \end{aligned} \quad [5.18]$$

e pertanto entrambe le serie

$$\begin{aligned} u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots &= u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1}), \\ v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}) \end{aligned} \quad [2.19]$$

sono uniformemente ed assolutamente convergenti per ogni $z \in C$, perché, detto r_0 il raggio di C , esse risultano entrambe maggiorate dalla serie di costanti positive

$$m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2Mr_0)^n}{n!}$$

che ovviamente converge alla costante me^{2Mr_0} . Per il teorema di Weierstrass* le due serie [5.19] convergono allora a due ben definite funzioni

$$\begin{aligned} u(z) &= u_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(z) - u_{n-1}(z)] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z), \\ v(z) &= v_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(z) - v_{n-1}(z)] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z), \end{aligned} \quad [5.20]$$

* Vedi capitolo primo, paragrafo 12.1.

olomorfe per ogni $z \in C$.

Ritornando alle equazioni [5.11] e considerando, per esempio, la prima di esse, si ha che la funzione integranda che vi compare tende uniformemente, per $n \rightarrow \infty$, alla funzione analitica $\eta(z')u(z') + \rho(z')v(z')$; ma il limite dell'integrale di una successione di funzioni che sia uniformemente convergente coincide con l'integrale del limite della successione e pertanto nelle [5.11] si può passare al limite per $n \rightarrow \infty$, scambiando nel secondo membro l'operazione di limite con quella di integrale, e si vede così che le due funzioni definite dalla [5.20] sono soluzioni del sistema di equazioni integrali [5.9]. Ponendo poi $z = z_0$ si vede subito che le condizioni al contorno [2.7] sono soddisfatte e, infine, derivando le [5.9] rispetto a z , si verifica immediatamente che le funzioni [5.20] sono soluzioni effettive del sistema di equazioni differenziali [5.6].

Ponendo

$$\eta(z) = 0, \quad \rho = 1, \quad \varphi = -p(z), \quad \chi(z) = -q(z), \quad [5.21]$$

si passa dal caso generale [5.6] al caso particolare delle equazioni accoppiate [5.3] e [5.4] che equivalgono all'equazione del secondo ordine originaria [5.1], la quale pertanto ammette una ben definita soluzione $u(z)$, con derivata prima $u'(z) = v(z)$, che soddisfa alle condizioni al contorno date ed è certo analitica per $z \in C$ e quindi ivi rappresentabile con una serie di Taylor, del tipo

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad [5.22]$$

i cui coefficienti sono

$$c_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k u}{dz^k} \right)_{z=z_0}; \quad [5.23]$$

in particolare

$$c_0 = u(z_0) = \alpha \quad \text{e} \quad c_1 = u'(z_0) = \beta \quad [5.24]$$

rappresentano le due costanti arbitrarie contenute nella soluzione e specificate dalle condizioni al contorno.

Una volta fissate le due costanti α e β , la soluzione $u = u(z)$ della equazione [5.1] è unica. Per dimostrare l'affermazione supponiamo che esistano due soluzioni $u_1(z)$ e $u_2(z)$ soddisfacenti le stesse condizioni al contorno,

$$u_1(z_0) = u_2(z_0) = \alpha, \quad u_1'(z_0) = u_2'(z_0) = \beta,$$

e consideriamo la funzione

$$d(z) = u_1(z) - u_2(z) \quad [5.25]$$

che è a sua volta soluzione dell'equazione [5.1], soddisfacente le condizioni al contorno

$$d(z_0) = 0, \quad d'(z_0) = 0. \quad [5.26]$$

È facile rendersi conto che necessariamente risulta $d(z) \equiv 0$ e che pertanto $u_1(z) \equiv u_2(z)$. Infatti, soddisfacendo $d(z)$ l'equazione

$$d''(z) + p(z)d'(z) + q(z)d(z) = 0, \quad [5.27],$$

le condizioni [5.26] implicano che sia anche $d''(z_0) = 0$. Inoltre, derivando un numero arbitrario k di volte l'equazione [2.27], si vede che deve essere

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^{k+2}d(z)}{dz^{k+2}} \right]_{z=z_0} = \\ & = - \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left[\frac{d^{l+1}d(z)}{dz^{l+1}} \frac{d^{k-l}p(z)}{dz^{k-l}} + \frac{d^l d(z)}{dz^l} \frac{d^{k-l}q(z)}{dz^{k-l}} \right]_{z=z_0} \end{aligned}$$

e che pertanto deve aversi

$$d^{(n)}(z_0) \equiv \left[\frac{d^n d(z)}{dz^n} \right]_{z=z_0} = 0, \quad \forall n,$$

perché $d^{(n)}(z_0)$ è una combinazione lineare, a coefficienti certo finiti perché $p(z)$ e $q(z)$ sono per ipotesi funzioni olomorfe in $z = z_0$, delle precedenti derivate $d^{(k)}(z_0)$ ($k = 0, \dots, n-1$), tutte nulle, per ricorrenza, date le [5.26]. In definitiva si ha dunque che tutti i coefficienti dello sviluppo di $d(z)$ in serie di Taylor, nell'intorno del punto $z = z_0$, sono nulli e di conseguenza è $d(z) \equiv 0$.

Una volta noto che esiste, ed è unica, una soluzione della [5.1] che sia analitica per $z \in C$ e tale che $u(z_0)$ ed $u'(z_0)$ assumano dei valori prefissati arbitrari c_0 e c_1 , il metodo più semplice per ottenere tale soluzione è quello di ricercarne direttamente lo sviluppo in serie di Taylor, ponendo

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad [5.28]$$

sostituendo questo sviluppo nell'equazione originaria [5.1] ed uguagliando poi a zero i coefficienti delle varie potenze di $(z - z_0)$. Si ottengono così delle relazioni che permettono di determinare tutti i coefficienti c_n , con $n \geq 2$, in funzione di c_0 e c_1 . Si noti che la forma dell'equazione più opportuna per questo fine non è, in generale, la forma standard [5.1], ma quella in cui siano stati eliminati eventuali denominatori dei coefficienti, cioè una forma del tipo [3.2].

Ricordando quanto visto a proposito della continuazione analitica di una funzione*, la soluzione ottenuta sarà continuabile analiticamente** per tutti i valori di $z \in R$, cioè, praticamente, per ogni valore di z , fatta eccezione per quei valori di z che coincidono con i punti singolari dell'equazione differenziale [5.1]. È forse opportuno notare esplicitamente che questo non vuole dire che la soluzione trovata sia continuabile *univocamente* in tutta la regione R ; possono infatti presentarsi dei casi in cui la soluzione sia una funzione polidroma e quindi, percorrendo con z una curva chiusa γ , tutta contenuta in R , è possibile che la funzione non ritorni al proprio valore iniziale, se γ circonda dei punti singolari dell'equazione, punti che possono essere punti di diramazione per le soluzioni.

Per finire segnaliamo che la proprietà che le uniche possibili singolarità delle soluzioni di una equazione differenziale coincidano con quelle dei coefficienti dell'equazione, scritta con il coefficiente della derivata di ordine massimo uguale ad uno, è una proprietà di carattere generale, valida per equazioni di qualsiasi ordine.

* Si confronti il paragrafo 20 del primo capitolo.

** Ovviamente, se la serie [5.28] si sa sommare, la cosa risulta automatica.

5.2. Comportamento delle soluzioni nell'intorno di un punto singolare isolato

Consideriamo ora un punto $z = z_0$ che sia un *punto singolare isolato* di uno o di entrambi i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ dell'equazione standard

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0. \quad [5.29]$$

I coefficienti ammetteranno allora, nell'intorno del punto $z = z_0$, uno sviluppo in serie di Laurent del tipo

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k (z - z_0)^k, \\ q(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k (z - z_0)^k, \end{aligned} \quad [5.30]$$

dove le serie a secondo membro saranno certo convergenti, uniformemente ed assolutamente, nella regione R definita da

$$0 < |z - z_0| < r_0, \quad [5.31]$$

dove r_0 rappresenta la distanza di z_0 dal più vicino ulteriore punto singolare di $p(z)$ e/o $q(z)$.

Una generica soluzione $u(z)$ della [5.29] potrà essere continuata analiticamente entro R lungo un qualsiasi cammino; se consideriamo un cammino chiuso, tutto contenuto in R , che circonda il punto $z = z_0$, la soluzione continuata analiticamente lungo tale cammino differirà, in generale, da quella originaria, cioè il punto $z = z_0$ sarà, in generale, un punto di polidromia per le soluzioni. Cercheremo ora di studiare in dettaglio la natura di questo punto di diramazione. Supponiamo pertanto di conoscere due soluzioni linearmente indipendenti, $u_1(z)$ e $u_2(z)$, dell'equazione [5.29]; effettuando nel piano di z un giro completo intorno al punto z_0 , effettuando, cioè, la sostituzione

$$(z - z_0) \rightarrow (z - z_0)^+ \equiv (z - z_0)e^{2i\pi}, \quad [5.32]$$

le due soluzioni u_1 e u_2 si trasformeranno in due nuove funzioni u_1^+ e u_2^+ che saranno, in generale, distinte da u_1 e u_2 , ma che saranno comunque ancora soluzioni dell'equazione data e saranno pertanto certamente esprimibili come combinazione lineare delle soluzioni u_1 e u_2 :

$$\begin{aligned} u_1^+(z) &= a_{11}u_1(z) + a_{12}u_2(z), \\ u_2^+(z) &= a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z). \end{aligned} \quad [5.33]$$

Le funzioni $u_1^+(z)$ e $u_2^+(z)$ saranno a loro volta due soluzioni linearmente indipendenti, perché il procedimento di continuazione analitica mantiene il carattere di dipendenza o indipendenza lineare di due soluzioni; infatti il wronskiano

$$W(u_1, u_2) = W_0 e^{-\int p(z) dz} \quad [5.34]$$

rimane certo diverso da zero in ogni continuazione analitica, se tale era inizialmente. Ne segue dunque che, in seguito alla trasformazione [5.32], le due

soluzioni u_1 e u_2 sono assoggettate ad una trasformazione lineare di tipo [5.33] a determinante non nullo,

$$\Delta \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0, \quad [5.35]$$

in quanto, come è banale verificare, le [5.33] implicano che sia

$$W(u_1^+, u_2^+) = \Delta W(u_1, u_2).$$

Il tipo particolare di trasformazione lineare, ovvero i coefficienti a_{ij} della trasformazione, dipenderanno, ovviamente, dal sistema fondamentale di soluzioni considerato. Cerchiamo pertanto di vedere se esistono delle soluzioni della [5.29] che abbiano delle proprietà di diramazione particolarmente semplici, tali da venire semplicemente moltiplicate per una costante λ in seguito alla continuazione [5.32]:

$$u^+(z) = \lambda u(z). \quad [5.36]$$

Se una soluzione u di questo tipo esiste, essa è certo esprimibile come combinazione lineare di due generiche soluzioni linearmente indipendenti u_1 e u_2 ; poniamo pertanto

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad [5.37]$$

dove α_1 e α_2 sono parametri, da determinarsi, dipendenti dalla particolare coppia fondamentale di soluzioni considerata. Introducendo la [5.37] nella [5.36], si vede che si deve avere

$$\alpha_1 u_1^+ + \alpha_2 u_2^+ = \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2);$$

utilizzando ora le proprietà di diramazione [5.33] per esprimere u_1^+ e u_2^+ in termini di u_1 e u_2 , ne segue che deve essere

$$\alpha_1(a_{11}u_1 + a_{12}u_2) + \alpha_2(a_{21}u_1 + a_{22}u_2) = \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$$

e quindi, data l'indipendenza lineare di u_1 e u_2 , si ottiene che α_1 e α_2 devono essere soluzioni del sistema lineare e omogeneo

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_{11} - \lambda) + \alpha_2 a_{21} &= 0, \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2(a_{22} - \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad [5.38]$$

che ammette soluzioni non banali se, e solo se, il determinante dei coefficienti è nullo. Si vede così che il problema considerato ammette soluzione, cioè che esistono soluzioni non banali dell'equazione [5.29] aventi semplici proprietà di diramazione di tipo [5.36], solo se λ è una soluzione dell'equazione algebrica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad [5.39]$$

Questa equazione, quadratica in λ , ammette due soluzioni distinte o coincidenti, a seconda del caso, ma certo entrambe non nulle, in virtù della [5.35].

È da notare che queste due soluzioni sono numeri caratteristici associati all'equazione differenziale data e non dipendono dalla scelta della coppia di soluzioni linearmente indipendenti u_1 e u_2 inizialmente considerata. Per rendersene conto basta pensare che l'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale di tipo [5.29] costituisce uno spazio vettoriale bidimensionale in cui

una qualsiasi coppia di soluzioni u_1 e u_2 linearmente indipendenti può essere assunta come base; una generica soluzione, necessariamente della forma

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,$$

è allora rappresentata, in tale base, tramite le sue componenti α_1 e α_2 , dal vettore

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione che fa passare da u ad u^+ , che è ancora un vettore dello spazio, è quindi identificabile con un operatore A che agendo su u produce u^+ :

$$u^+ = Au \tag{5.40}$$

In termini di rappresentazioni la [5.40] si scrive come

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{A}\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione [5.36] si legge, in termini di rappresentazioni, come l'equazione

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

che è l'equazione agli autovalori per la matrice \mathbf{A} . Ma è noto che gli autovalori di una matrice non dipendono dalla particolare scelta del sistema di riferimento, cioè, nel caso specifico, dalla scelta della particolare coppia di soluzioni indipendenti considerata; ne segue dunque che le soluzioni dell'equazione [5.39] non dipendono dalla scelta di u_1 e u_2 , ma sono numeri caratteristici associati all'equazione data.

Gli zeri $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2$) dell'equazione [5.39] definiscono dunque quei particolari numeri non nulli per i quali l'equazione [5.36] è valida, in corrispondenza dei quali, cioè, esistono soluzioni non banali dell'equazione differenziale considerata che vengono semplicemente moltiplicate per questi numeri λ_i , quando con la variabile z si descrive un cammino chiuso, contenuto nella regione R di analiticità dei coefficienti, circondante il punto singolare $z = z_0$. Per ogni valore $\lambda = \lambda_i$, il sistema [5.38] ammette una soluzione non banale, definendo un particolare rapporto α_1/α_2 che permette, tramite la [5.37], la determinazione (univoca, a meno di una costante moltiplicativa arbitraria) della soluzione $u_i(z)$, avente la semplice proprietà di polidromia

$$u_i^+(z) = \lambda_i u_i(z), \quad i = 1, 2. \tag{5.41}$$

Distinguiamo ora due casi, a seconda che gli zeri dell'equazione [5.39] siano distinti ovvero coincidenti. Nel primo, in corrispondenza ai due zeri distinti λ_1 e λ_2 , si hanno due soluzioni u_1 e u_2 dell'equazione [3.29] aventi un comportamento del tipo [5.41], cioè tali che sia

$$\begin{aligned} u_1^+(z) &= \lambda_1 u_1(z), \\ u_2^+(z) &= \lambda_2 u_2(z); \end{aligned} \tag{5.42}$$

queste due soluzioni sono certo linearmente indipendenti, in quanto hanno proprietà di diramazione diverse. Infatti, se u_1 e u_2 fossero linearmente dipendenti,

il loro rapporto sarebbe una costante e, come tale, non subirebbe variazioni effettuando la continuazione [5.32], mentre la [5.42] mostra che

$$\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^+ = \frac{\lambda_1 u_1}{\lambda_2 u_2} \neq \frac{u_1}{u_2}, \quad [5.43]$$

perché, per ipotesi, è $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e pertanto u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti e possono venire scelte come sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione [5.29].

Osserviamo ora che una funzione che venga moltiplicata per un fattore costante, quando si compia un giro completo intorno al punto $z = z_0$, è la funzione $(z - z_0)^\rho$, per la quale, con la sostituzione [5.32], si ha

$$(z - z_0)^\rho \rightarrow [(z - z_0)^\rho]^+ \equiv (z - z_0)^\rho e^{2i\pi\rho}. \quad [5.44]$$

Ponendo dunque

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_i, \quad i = 1, 2, \quad [5.45]$$

si ha che le due funzioni $(z - z_0)^{\rho_i}$ soddisfano la relazione

$$[(z - z_0)^{\rho_i}]^+ = \lambda_i (z - z_0)^{\rho_i} \quad [5.46]$$

ed hanno quindi le stessa proprietà di polidromia delle soluzioni $u_i(z)$. Ne segue che le due funzioni

$$\frac{u_i(z)}{(z - z_0)^{\rho_i}}, \quad i = 1, 2, \quad [5.47]$$

sono monodrome nel punto $z = z_0$; esse sono poi anche certo analitiche nell'anello R , definito dalla [5.31], in cui sono olomorfi i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ dell'equazione differenziale, e quindi, come tali, ivi sviluppabili in serie di Laurent.

Possiamo dunque asserire, in definitiva, che, nel caso in cui l'equazione [5.39] possieda due soluzioni distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$, esistono per l'equazione differenziale [5.29] due soluzioni linearmente indipendenti, aventi una forma del tipo

$$\begin{aligned} u_1(z) &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \\ u_2(z) &= (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \end{aligned} \quad [5.48]$$

essendo gli esponenti ρ_i definiti dalla [5.45].

A proposito degli esponenti ρ_i , si noti che, nello scrivere la [5.45], non è stata fissata nessuna particolare determinazione del logaritmo e pertanto, essendo il logaritmo di un numero definito solo a meno di un multiplo intero di $2\pi i$ additivo, gli esponenti ρ_i rimangono, a loro volta, definiti solo a meno di un numero intero additivo; detto in altre parole, cambiando la determinazione del logaritmo, gli esponenti muterebbero con un cambiamento del tipo $\rho_i \rightarrow \rho_i + n$, essendo n un numero intero; d'altra parte, moltiplicando una serie di Laurent, del tipo di quelle che compaiono nella [5.48], per un fattore $(z - z_0)^n$, si ottiene ancora una serie di Laurent dello stesso tipo e pertanto gli esponenti ρ_i sono definiti solo a meno di un numero intero additivo anche nella [5.48] e la definizione della determinazione del logaritmo nella [5.45] risulta affatto arbitraria.

Passiamo ora a considerare il caso in cui l'equazione [5.39] abbia due soluzioni coincidenti $\lambda_2 = \lambda_1$. In questo caso esisterà una sola soluzione dell'equazione [5.29] che abbia le semplici proprietà di polidromia [5.36]; per essa continuano chiaramente a valere le considerazioni appena effettuate e possiamo quindi asserire che esiste ancora una soluzione $u_1(z)$ dell'equazione [5.29] per cui si ha

$$u_1^+(z) = \lambda_1 u_1(z) \quad [5.49]$$

e che può pertanto essere posta sotto una forma del tipo della prima delle [5.48]. Per una generica soluzione $u_2(z)$, linearmente indipendente da u_1 , continuerà a valere la seconda delle [5.33], cioè la relazione

$$u_2^+(z) = a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z) \quad [5.50]$$

e l'equazione fondamentale [5.39] diventerà, in questo caso, l'equazione

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & a_{21} \\ 0 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad [5.51]$$

Ma, avendo ora, per ipotesi, tale equazione due soluzioni coincidenti, deve necessariamente essere $a_{22} = \lambda_1$ e quindi la [5.50] va scritta come

$$u_2^+(z) = \lambda_1 u_2(z) + a_{21}u_1(z). \quad [5.52]$$

Dividendo membro a membro la [5.52] per la [5.49], si vede che

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^+ = \frac{u_2}{u_1} + \frac{a_{21}}{\lambda_1}, \quad [5.53]$$

cioè che la funzione u_2/u_1 presenta a sua volta delle proprietà di polidromia particolarmente semplici nel punto $z = z_0$, acquistando soltanto una costante additiva, quando nel piano di z si faccia un giro completo intorno al punto z_0 . Della stessa proprietà gode palesemente la funzione logaritmo, per cui si ha

$$[a \ln(z - z_0)]^+ = a \ln(z - z_0) + 2\pi i a;$$

ponendo dunque

$$a = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{21}}{\lambda_1} \quad [5.54]$$

è immediato rendersi conto che la funzione

$$\frac{u_2}{u_1} - a \ln(z - z_0) \quad [5.55]$$

è monodroma nel punto $z = z_0$ ed analitica nella regione R [5.31] e, come tale, ivi sviluppabile in serie di Laurent:

$$\frac{u_2}{u_1} - a \ln(z - z_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Pertanto, tenuto conto che la forma di u_1 è data dalla prima delle [5.48], avremo, in questo caso, che esiste una seconda soluzione $u_2(z)$, linearmente indipendente da $u_1(z)$, avente una forma del tipo

$$u_2(z) = a u_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k. \quad [5.56]$$

Si noti che nulla esclude a priori che la costante a_{21} che compare nella [5.52] possa essere nulla; il fatto che ciò si verifichi o meno dipende dalla particolare equazione considerata. Nel caso in cui risulti $a_{21} = 0$, e quindi $a = 0$, nella [5.56] scomparirà il termine con il logaritmo e quindi le due soluzioni u_1 e u_2 potranno presentarsi sotto la forma [5.48] anche nel caso in cui le due soluzioni dell'equazione [5.39] siano coincidenti; in questo caso, però, gli esponenti ρ_1 e ρ_2 potranno differire soltanto per un numero intero.

5.3. Punti singolari regolari ed irregolari

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, se un punto $z = z_0$ è un polo o una singolarità essenziale isolata dei coefficienti $p(z)$ e/o $q(z)$ dell'equazione differenziale standard [5.29], allora esiste una coppia di soluzioni linearmente indipendenti di tali equazioni, rappresentabili, nell'intorno del punto $z = z_0$, con forme del tipo [5.48], se le soluzioni dell'equazione fondamentale [5.39] sono distinte, ovvero del tipo della prima delle [5.48] accoppiata con la [5.56], se le soluzioni della [5.39] sono coincidenti. Tuttavia quanto detto fino ad ora è puramente formale, perché dalla precedente discussione non abbiamo nessun suggerimento pratico né per determinare i coefficienti delle serie che compaiono nelle espressioni delle soluzioni formali dianzi richiamate, né per ottenere esplicitamente l'equazione [5.39], ovvero gli esponenti ρ_1 e ρ_2 .

Da un punto di vista pratico si sa trattare in generale solo il caso in cui le serie di Laurent che compaiono nelle soluzioni formali [5.48] e [5.56] contengono solo un numero finito di potenze ad esponente negativo. In tal caso si dice che il punto $z = z_0$ è un *punto singolare regolare* ovvero che esso è una *singolarità di tipo fuchsiano* dell'equazione differenziale [5.29]; in caso contrario il punto $z = z_0$ viene detto essere una *singolarità irregolare* ovvero un *punto singolare non fuchsiano* ed in tal caso non si hanno criteri generali per determinare a priori la forma esplicita delle soluzioni dell'equazione [5.29] nell'intorno del punto considerato.

Ciò premesso, cominciamo a vedere a quali condizioni debbano soddisfare i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ dell'equazione differenziale affinché un punto $z = z_0$ sia una singolarità di tipo fuchsiano, rimandando al prossimo paragrafo per la costruzione esplicita delle soluzioni. Ci limiteremo qui, in particolare, a trattare il caso in cui le soluzioni abbiano entrambe una forma del tipo [5.48] (essendo finito il numero di termini a potenza negativa che ivi compaiono), dato che il caso in cui la seconda soluzione abbia una forma del tipo [5.56] può essere trattato in modo perfettamente analogo.

Consideriamo dunque un punto $z = z_0$ che sia un punto singolare regolare dell'equazione [5.29], nell'intorno del quale due soluzioni linearmente indipendenti possano essere scritte sotto una forma del tipo [5.48], con un numero finito di potenze negative, cioè sotto la forma

$$\begin{aligned} u_1(z) &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \\ u_2(z) &= (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \end{aligned} \quad |z - z_0| < r_0. \quad [5.57]$$

Si noti che l'aver posto uguale a zero il limite inferiore delle serie che compaiono nelle [5.57] non costituisce restrizione alcuna, dato che gli esponenti ρ_1 e ρ_2 sono stati definiti solo a meno di un arbitrario numero intero additivo; per la stessa ragione possiamo assumere che i coefficienti c_0 e d_0 siano diversi da zero.

Nel seguito di questa discussione indicheremo, per semplicità, con $R_i(z - z_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) ogni funzione regolare e non nulla nel punto $z = z_0$ e pertanto

possiamo riscrivere le [5.57] come

$$\begin{aligned} u_1(z) &= (z - z_0)^{\rho_1} R_1(z - z_0), \\ u_2(z) &= (z - z_0)^{\rho_2} R_2(z - z_0). \end{aligned} \quad [5.58]$$

Osserviamo ora che, essendo per ipotesi u_1 e u_2 soluzioni della [5.29], valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} u_1'' + p(z)u_1' + q(z)u_1 &= 0, \\ u_2'' + p(z)u_2' + q(z)u_2 &= 0 \end{aligned} \quad [5.59]$$

e che, essendo, sempre per ipotesi, u_1 e u_2 linearmente indipendenti il loro wronskiano è certo diverso da zero:

$$W(u_1, u_2) \equiv u_1 u_2' - u_1' u_2 = W_0 e^{-\int p(z) dz} \neq 0; \quad [5.60]$$

da quest'ultima relazione si ottiene facilmente la forma del coefficiente $p(z)$, calcolando la derivata logaritmica di $W(u_1, u_2)$:

$$p(z) = -\frac{d}{dz} \ln W(u_1, u_2) = \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_1' u_2}; \quad [5.61]$$

quella di $q(z)$ si ottiene poi da una delle [5.59], per esempio dalla prima di esse:

$$q(z) = -p(z) \frac{u_1'}{u_1} - \frac{u_1''}{u_1}. \quad [5.62]$$

Utilizzando la notazione formale [5.58], si vede facilmente che il wronskiano [5.60] si può scrivere come

$$W(u_1, u_2) = (z - z_0)^{\rho_1 + \rho_2 - 1} R_3(z - z_0) \quad [5.63]$$

e che pertanto la [5.61] può essere messa sotto la forma

$$p(z) \equiv -\frac{W'}{W} = -\frac{\rho_1 + \rho_2 - 1}{z - z_0} [1 + R_4(z - z_0)]. \quad [5.64]$$

Si vede così che, se $z = z_0$ è un punto singolare fuchsiano dell'equazione [5.29], il coefficiente $p(z)$ deve essere rappresentabile, nell'intorno del punto $z = z_0$, con una forma del tipo

$$p(z) = \frac{P(z - z_0)}{z - z_0}, \quad [5.65]$$

dove $P(z - z_0)$ è una funzione olomorfa nel punto $z = z_0$ e, come tale, sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di tale punto:

$$P(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r_0. \quad [5.66]$$

Dalla [5.62] si vede allora facilmente che il coefficiente $q(z)$ deve essere rappresentabile come

$$q(z) = \frac{Q(z - z_0)}{(z - z_0)^2}, \quad [5.67]$$

essendo $Q(z - z_0)$ una funzione analitica nell'intorno del punto $z = z_0$ che ammette uno sviluppo in serie di Taylor del tipo

$$Q(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r_0. \quad [5.68]$$

Le [5.65] e [5.67] mostrano che *condizione necessaria affinché il punto $z = z_0$ sia un punto singolare di tipo fuchsiano dell'equazione [5.29] è che il coefficiente $p(z)$ presenti al più un polo del primo ordine in $z = z_0$ e che il coefficiente $q(z)$ presenti al più un polo del secondo ordine in tale punto*; detto in altri termini, si ha che l'equazione standard [5.29] deve presentarsi sotto la forma

$$u'' + \frac{P(z - z_0)}{z - z_0} u' + \frac{Q(z - z_0)}{(z - z_0)^2} u = 0, \quad [5.69]$$

essendo $P(z - z_0)$ e $Q(z - z_0)$ funzioni regolari nel punto $z = z_0$.

5.4. Costruzione esplicita delle soluzioni nell'intorno di un punto singolare di tipo fuchsiano

Vogliamo ora mostrare come le condizioni di fuchsianità [5.65] e [5.67] siano effettivamente sufficienti per la determinazione esplicita delle rappresentazioni di due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione [5.29], valide nella regione [5.31].

Considerando dunque un punto singolare regolare $z = z_0$ dell'equazione [5.29], essa si presenterà sotto la forma [5.69] che, ponendo, per brevità,

$$z - z_0 = \xi, \quad [5.70]$$

riscriviamo come

$$u'' + \frac{P(\xi)}{\xi} u' + \frac{Q(\xi)}{\xi^2} u = 0, \quad [5.71]$$

essendo $P(\xi)$ e $Q(\xi)$ funzioni olomorfe nel cerchio $|\xi| < r_0$ e quindi ivi rappresentabili con le serie di Taylor

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \xi^k, \\ Q(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k \xi^k, \end{aligned} \quad |\xi| < r_0, \quad [5.72]$$

i cui coefficienti sono dati da*

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k P(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{P(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi, \\ q_k &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k Q(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{Q(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi, \end{aligned} \quad [5.73]$$

* Si confronti il paragrafo 12.3 del primo capitolo.

dove il cammino di integrazione c può essere scelto come una arbitraria circonferenza di raggio $r < r_0$, centrata nel punto $\xi = 0$. Sappiamo a priori che la [5.71] deve ammettere almeno una soluzione di tipo [5.57]; poniamo pertanto

$$u = \xi^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{\rho+k} \quad [5.74]$$

e vediamo come, sostituendo tale espressione nell'equazione differenziale [5.71], scritta sotto la forma

$$\xi^2 u'' + \xi P(\xi) u' + Q(\xi) u = 0, \quad [5.75]$$

si possano determinare l'esponente ρ e l'insieme dei coefficienti c_k in modo tale che la funzione u [5.74] risulti una soluzione effettiva della [5.75].

Sostituendo la [5.74] nella [5.75], dividendo poi per ξ^ρ e tenendo conto delle [5.72], si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k + \rho)(k + \rho - 1) c_k \xi^k + (k + \rho) c_k \xi^k \sum_{l=0}^{\infty} p_l \xi^l + c_k \xi^k \sum_{l=0}^{\infty} q_l \xi^l \right\} = 0; \quad [5.76]$$

in questa equazione il secondo ed il terzo termine sono serie doppie, del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \xi^l,$$

che, assumendo come nuovi indici di somma $k' = k + l$ ($\rightarrow k$) ed l possono essere rimesse sotto la forma

$$\sum_{k'=0}^{\infty} \xi^{k'} \sum_{l=0}^{k'} \alpha_{k'-l} \beta_l \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{l=0}^k \alpha_{k-l} \beta_l$$

e quindi la [5.76] può essere riscritta come

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \left\{ (k + \rho)(k + \rho - 1) c_k + \sum_{l=0}^k [(k - l + \rho) p_l + q_l] c_{k-l} \right\} = 0. \quad [5.77]$$

Affinché questa uguaglianza sia soddisfatta deve essere nullo il coefficiente di ogni singola potenza di ξ , cioè deve essere

$$(k + \rho)(k + \rho - 1) c_k + \sum_{l=0}^k [(k - l + \rho) p_l + q_l] c_{k-l} = 0, \quad \forall k. \quad [5.78]$$

È questo, dunque, un insieme di infinite equazioni cui devono soddisfare l'esponente ρ e i coefficienti c_k , affinché la [5.74] fornisca, almeno formalmente*, una

* Si è detto *almeno formalmente* perché la serie che compare nella [5.74] è stata trattata come una effettiva serie di Taylor, mentre, per ora, non abbiamo nessuna informazione sulla sua convergenza.

soluzione dell'equazione differenziale data. In particolare, per $k = 0$, si ha la condizione

$$[\rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0]c_0 = 0, \tag{5.79}$$

che è soddisfatta per $c_0 = 0$, il che, come risulterà chiaro tra breve, corrisponde alla scelta della soluzione banale, ovvero con c_0 arbitrario, se ρ è soluzione dell'equazione di secondo grado

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0, \tag{5.80}$$

che prende il nome di *equazione indiciale* o *equazione caratteristica* o, ancora, *equazione determinante* dell'equazione differenziale [5.29], relativa al punto singolare fuchsiano $z = z_0$ (ovvero $\xi = 0$); le sue soluzioni ρ_1 e ρ_2 vengono dette gli *indici* o *esponenti* relativi a tale punto e caratterizzano il comportamento delle soluzioni nell'intorno del punto fuchsiano $z = z_0$.

Riscriviamo ora la [5.78], isolando il termine con $l = 0$ che compare nella sommatoria:

$$[(k + \rho)(k + \rho - 1) + (k + \rho)p_0 + q_0]c_k + \sum_{l=1}^k [(k - l + \rho)p_l + q_l]c_{k-l} = 0; \tag{5.81}$$

poniamo poi, per brevità di scrittura,

$$\begin{aligned} F_0(\rho) &\equiv \rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0, \\ F_l(\rho) &\equiv \rho p_l + q_l, \quad l = 1, 2, \dots ; \end{aligned} \tag{5.82}$$

con tali posizioni la [5.81] diventa la relazione

$$c_k F_0(\rho + k) + \sum_{l=1}^k c_{k-l} F_l(k - l + \rho) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{5.83}$$

che mostra chiaramente che ogni coefficiente c_k risulta determinato, almeno in linea di principio, dai precedenti coefficienti c_0, \dots, c_{k-1} .

Il sistema di equazioni [5.83], scritto esplicitamente è il sistema

$$\begin{aligned} c_0 F_0(\rho) &= 0, \\ c_1 F_0(\rho + 1) + c_0 F_1(\rho) &= 0, \\ c_2 F_0(\rho + 2) + c_1 F_1(\rho + 1) + c_0 F_2(\rho) &= 0, \\ \dots & \tag{5.84} \\ \dots & \\ c_n F_0(\rho + n) + c_{n-1} F_1(\rho + n - 1) + \dots + c_0 F_n(\rho) &= 0, \\ \dots & \end{aligned}$$

Trascurando dunque la soluzione banale, associata alla scelta $c_0 = 0$, la prima di queste equazioni fornisce l'equazione indiciale [5.80] che possiamo riscrivere simbolicamente come

$$F_0(\rho) = 0; \tag{5.85}$$

dette ρ_1 e ρ_2 le sue soluzioni, occorre distinguere due casi, a seconda che esse siano distinte o coincidenti. Nel caso di soluzioni distinte converremo di indicare sempre con ρ_1 quella avente parte reale maggiore;

$$\Re\rho_1 \geq \Re\rho_2. \quad [5.86]$$

Ciò premesso, e posto $\rho = \rho_1$, la [5.83] ci permette di determinare, con metodo ricorrente, un insieme di coefficienti c_k che definiscono una soluzione formale

$$u_1 = \xi^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k. \quad [5.87]$$

Questa risulta l'unica soluzione ottenibile dalla [5.83] nel caso di esponenti coincidenti ($\rho_1 = \rho_2$), mentre, nel caso di esponenti distinti, la [5.83] permette di determinare analogamente anche la soluzione associata al secondo esponente,

$$u_2 = \xi^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k \xi^k \quad [5.88]$$

(essendosi indicate con c'_k le soluzioni del sistema [5.84], quando ivi si ponga $\rho = \rho_2$), ma, in generale, solo nel caso in cui sia $\rho_1 - \rho_2 \neq n$, essendo n un numero intero positivo (o nullo). Infatti, essendo

$$F_0(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2),$$

se fosse

$$\rho_1 = \rho_2 + n,$$

nella $(n+1)$ -ma delle equazioni [5.84], scritte con $\rho = \rho_2$, si avrebbe

$$F_0(\rho_2 + n) = F_0(\rho_1) = 0$$

e quindi il coefficiente di c'_n in tale equazione risulterebbe nullo, precludendo la possibilità della sua determinazione; ora, in generale, la combinazione degli altri termini che compaiono nella $(n+1)$ -ma equazione risulterà diversa da zero e si arriverà così ad un assurdo; quindi la soluzione u_2 non potrà, in generale, essere ottenuta con questo metodo, nel caso in cui risulti $\rho_1 - \rho_2 = n$, intero positivo (come già, d'altronde, per $\rho_1 - \rho_2 = 0$). Se, viceversa, sempre nel caso di $\rho_2 + n = \rho_1$, si verifica la situazione particolare in cui la predetta combinazione risulta nulla, allora il coefficiente c'_n potrà essere fissato in modo arbitrario* e le ulteriori equazioni [5.84] potranno essere utilizzate per determinare i coefficienti successivi.

Riservandoci di tornare, nel prossimo paragrafo, al caso di $\rho_1 - \rho_2 = n$ (intero ≥ 0), vogliamo ora mostrare che, nel caso in cui si abbia

$$\rho_1 - \rho_2 \neq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

le soluzioni formali [5.87] e [5.88] sono in realtà soluzioni effettive, cioè che le serie che compaiono in tali equazioni (essendo i coefficienti c_k e c'_k determinati

* Si noti che l'arbitrarietà di c'_n equivale alla definizione di u_2 solo a meno dell'addizione di un multiplo di u_1 .

dalle [5.84] ove si ponga rispettivamente $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$) hanno raggi di convergenza non nulli e, più precisamente, uguali almeno ad r_0 .

Cominciando a considerare il caso della [5.87], si tratta di mostrare che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k, \quad [5.89]$$

con c_0 arbitrario e i successivi coefficienti determinati dalle [5.83], cioè dalle relazioni

$$c_k F_0(\rho_1 + k) + \sum_{l=1}^k c_{k-l} F_l(k-l+\rho_1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad [5.90]$$

ha raggio di convergenza non nullo. A tal fine cominciamo a procurarci delle opportune maggiorazioni; dall'espressione integrale [5.73] dei coefficienti p_l e q_l risulta praticamente immediato* che si ha

$$|p_l| \leq \frac{\text{Max}|P(\xi)|}{r^l}, \quad |q_l| \leq \frac{\text{Max}|Q(\xi)|}{r^l}, \quad \xi \in C, \quad [5.91]$$

dove con C si è indicato il cerchio avente per contorno il cammino c , di equazione $|\xi| = r < r_0$, ove le funzioni $P(\xi)$ e $Q(\xi)$ sono ovunque olomorfe; analogamente si ha

$$|\rho_1 p_l + q_l| \leq \frac{\text{Max}|\rho_1 P(\xi) + Q(\xi)|}{r^l}, \quad \xi \in C. \quad [5.92]$$

Se ora indichiamo con M un arbitrario numero positivo, tale che sia

$$M \geq \text{Max}\{1, \text{Max}|P(\xi)|, \text{Max}|Q(\xi)|, \text{Max}|\rho_1 P(\xi) + Q(\xi)|\}, \quad \xi \in C, \quad [5.93]$$

in luogo delle [5.91] e [5.92] possiamo scrivere (ricordando la seconda delle equazioni [5.82])

$$\begin{aligned} |p_l| &\leq \frac{M}{r^l}, & |q_l| &\leq \frac{M}{r^l}, \\ |F_l(\rho_1)| &\equiv |\rho_1 p_l + q_l| &\leq \frac{M}{r^l}. \end{aligned} \quad [5.94]$$

Osserviamo ancora preliminarmente che, essendo per definizione

$$F_0(\rho) \equiv (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)$$

e ponendo

$$s = \rho_1 - \rho_2, \quad [5.95]$$

si ha

$$F_0(\rho_1 + k) = k(k + s), \quad [5.96]$$

dove, nel caso specifico, è $s \neq n$.

A questo punto è facile mostrare che il generico coefficiente c_k della serie [5.89] ammette la maggiorazione

$$|c_k| \leq |c_0| \left(\frac{M}{r}\right)^k. \quad [5.97]$$

* Si ricordi la disuguaglianza di Darboux, dedotta nel paragrafo 7 del primo capitolo.

Considerando il caso di $k = 1$, si ha infatti, dalla seconda delle [5.84] e tenendo conto delle [5.94] e [5.96],

$$|c_1| = |c_0| \frac{|F_1(\rho_1)|}{|F_0(\rho_1 + 1)|} \leq |c_0| \frac{M/r}{|1 + s|} \leq |c_0| \frac{M}{r} \quad [5.98]$$

e la [5.97] è pertanto verificata per $k = 1$. Supponiamo ora che essa sia valida per ogni indice $k \leq n - 1$ e mostriamo che allora essa è valida anche per l'indice $k = n$. A tal fine osserviamo che, dalla [5.90], scritta con $k = n$, e tenendo conto della [5.96], si ha

$$|c_n| \leq \frac{\sum_{l=1}^n |c_{n-l}| |F_l(n-l+\rho_1)|}{n|n+s|}. \quad [5.99]$$

Ricordiamo ora la seconda delle definizioni [5.82], da cui segue

$$F_l(n-l+\rho_1) = (n-l)p_l + \rho_1 p_l + q_l$$

e quindi, per le [5.94],

$$|F_l(n-l+\rho_1)| \leq (n-l+1) \frac{M}{r^l}$$

ed osserviamo che

$$n|n+s| \geq n^2;$$

dalla [5.99] segue dunque, sotto l'ipotesi che la [5.97] sia valida fino all'indice $k = n - 1$,

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2} |c_0| \sum_{l=1}^n \left(\frac{M}{r}\right)^{n-l} (n-l+1) \frac{M}{r^l}$$

e quindi, ricordando che $M \geq 1$, si ha

$$|c_n| \leq \frac{|c_0|}{n^2} \left(\frac{M}{r}\right)^n \sum_{l=1}^n (n-l+1) = \frac{n+1}{2n} |c_0| \left(\frac{M}{r}\right)^n \leq |c_0| \left(\frac{M}{r}\right)^n$$

e la [5.97] rimane così dimostrata.

Dalla maggiorazione [5.97] segue che la serie [5.89] converge certo, uniformemente ed assolutamente, per ogni ξ tale che sia $|\xi| < r/M$; indicando, infatti, con r' un generico numero minore di r si ha che, per $\xi \leq r'/M$, la serie [5.89] è maggiorata in modulo dalla serie di costanti

$$|c_0| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k$$

che è convergente.

In definitiva, la serie [5.89] ha dunque un raggio di convergenza diverso da zero ed è pertanto una effettiva serie di Taylor e, come tale, converge allora in un cerchio avente come centro il punto $z = z_0$ (ovvero $\xi = 0$) e come raggio la distanza di z_0 dalla singolarità di $u_1(z)$ più vicina a z_0 ; essa converge quindi certamente almeno nel cerchio [5.31], dato che, come abbiamo mostrato, le uniche possibili singolarità delle soluzioni di una equazione differenziale di tipo [5.29] sono quelle dei suoi coefficienti.

Un discorso perfettamente analogo si può poi fare per mostrare che, sempre nel caso in cui sia $\rho_1 - \rho_2 = s \neq n$ (numero intero ≥ 0), anche la [5.88] fornisce non solo una soluzione formale dell'equazione considerata, ma una sua soluzione effettiva, valida certamente almeno nella regione [5.31]. L'unica differenza notevole nella dimostrazione è che, per i coefficienti c'_k , in luogo della [5.97], vale la maggiorazione

$$|c'_k| \leq |c'_0| \left(\frac{M\mu}{r} \right)^k,$$

dove μ è l'estremo superiore della successione

$$\frac{1}{|1-s|}, \frac{1}{|1-s/2|}, \dots, \frac{1}{|1-s/k|}, \dots, \quad [5.100]$$

che esiste certamente se s è diverso da un numero intero positivo*.

5.41. Costruzione di una seconda soluzione nel caso in cui gli esponenti differiscano per un numero intero.

Nel caso particolare in cui le radici dell'equazione indiciale [5.80] differiscano per un numero intero,

$$\rho_1 - \rho_2 = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad [5.101]$$

il metodo descritto nel precedente paragrafo permette la determinazione diretta della sola soluzione $u_1(z)$, associata all'esponente ρ_1 , a parte reale maggiore. Per ottenere una seconda soluzione u_2 , linearmente indipendente da u_1 , si può allora utilizzare il metodo generale descritto in paragrafo 3.41 (equazioni [3.25] e seguenti). Questo metodo ci permetterà di ottenere la soluzione $u_2(z)$ sotto la forma predetta dalla [5.56], con la sommatoria che vi compare estesa solo da zero ad infinito.

Seguendo dunque il metodo esposto in paragrafo 3.41, possiamo asserire che la funzione

$$u_2(z) = u_1(z)\psi(z), \quad [5.102]$$

essendo $u_1(z)$ la soluzione [5.87] dell'equazione [5.71], è a sua volta una soluzione, linearmente indipendente da u_1 , di tale equazione, se $\psi(z)$ è la funzione (vedi equazione [3.29]*)

$$\psi(z) = \int \frac{dz}{u_1^2(z)} e^{-\int p(z)dz}. \quad [5.103]$$

Ponendo, come dianzi,

$$z - z_0 = \xi$$

* Se, viceversa, s fosse un numero intero positivo la successione [5.100] non sarebbe limitata ed il procedimento di maggiorazione cadrebbe in difetto.

* Si noti che l'aver scritto nella [5.103] degli integrali indefiniti, mentre nella [3.29] scrivemmo degli integrali tra limiti fissati, non costituisce in realtà nessuna variazione sostanziale, dato che, come già osservammo a suo tempo, le costanti di integrazione giocano qui un ruolo affatto inessenziale.

ed indicando con $R_i(\xi)$ una generica funzione olomorfa nel punto $\xi = 0$, possiamo, grazie alla [5.65], scrivere il coefficiente $p(z)$ sotto la forma

$$p(z) = \frac{P(\xi)}{\xi} = \frac{p_0}{\xi} + R_1(\xi) \quad [5.104]$$

e porre inoltre (per la [5.87], ricordando che ivi è certo $c_0 \neq 0$)

$$[u_1(z)]^{-2} = \xi^{-2\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k = \xi^{-2\rho_1} R_2(\xi), \quad [5.105]$$

essendo $R_2(0) \equiv a_0 = 1/c_0^2$. La funzione ψ [5.103] ha pertanto la forma

$$\begin{aligned} \psi &= \int d\xi \xi^{-2\rho_1} R_2(\xi) \exp \left[- \int \left(\frac{p_0}{\xi} + R_1(\xi) \right) d\xi \right] = \\ &= \int d\xi \xi^{-2\rho_1} R_2(\xi) \exp[-p_0 \ln \xi + R_3(\xi)] = \\ &= \int d\xi \xi^{-2\rho_1 - p_0} R_4(\xi), \end{aligned} \quad [5.106]$$

dove si è posto

$$R_3(\xi) = - \int R_1(\xi) d\xi, \quad R_4(\xi) = R_2(\xi) \exp[R_3(\xi)].$$

Osserviamo ora che, essendo per definizione

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) = \rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0,$$

si ha

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 - p_0,$$

mentre, per ipotesi, è

$$\rho_1 - \rho_2 = n$$

e pertanto si ha

$$2\rho_1 + p_0 = n + 1; \quad [5.107]$$

consideriamo poi lo sviluppo in serie di Taylor di $R_4(\xi)$,

$$R_4(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k, \quad [5.108]$$

e sostituiamo le [5.107] e [5.108] nella [5.106]; otteniamo così

$$\begin{aligned} \psi &= \int d\xi \xi^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k = \\ &= \alpha_n \ln \xi + \sum_{k \neq n} \alpha_k \frac{\xi^{k-n}}{k-n} = \alpha_n \ln \xi + \xi^{-n} R_5(\xi). \end{aligned} \quad [5.109]$$

Dalla [5.102] si ottiene allora che una soluzione u_2 , linearmente indipendente da u_1 , è data da

$$u_2 = \alpha_n u_1 \ln \xi + u_1 \xi^{-n} R_5(\xi)$$

e quindi, ricordando l'espressione esplicita [5.87] di u_1 ed utilizzando ancora il fatto che $\rho_1 - n = \rho_2$, possiamo in definitiva asserire che la seconda soluzione u_2 ha, in questo caso, la forma

$$u_2 = a u_1 \ln \xi + \xi^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi^k. \quad [5.110]$$

Il procedimento illustrato permette non solo di asserire che la seconda soluzione u_2 ha la forma [5.110], ma, almeno in linea di principio, anche di calcolare esplicitamente i coefficienti $a \equiv \alpha_n$ e d_k che ne danno una definizione completa. Per ottenere questo risultato occorrerebbe, tuttavia, essere sufficientemente pazienti ed abili per invertire, integrare e moltiplicare varie serie, tutte operazioni in teoria affatto lecite e fattibili, ma in pratica estremamente tediose e complesse. Da un punto di vista pratico, pertanto, il metodo più rapido per ottenere la soluzione u_2 , una volta dimostrato che essa ha la forma [5.110], è quello di sostituire tale espressione nell'equazione differenziale data, scritta nella forma [5.75], per ottenere delle relazioni che permettano di determinare il coefficiente a della parte logaritmica ed i coefficienti d_k (tramite relazioni di ricorrenza) in funzione dei coefficienti noti c_k della soluzione u_1 . Si noti, a questo proposito, che, come già osservato, può capitare che a (cioè il coefficiente α_n dello sviluppo di $R_4(\xi)$) risulti nullo; in questo caso la soluzione u_2 avrà una struttura praticamente identica a quella di u_1 (salvo lo scambio di ρ_2 con ρ_1) e i coefficienti d_k saranno allora dati dalla stessa formula di ricorrenza che fornisce i coefficienti c_k (salvo, ancora, lo scambio di ρ_2 con ρ_1). Nel caso, però, in cui i due esponenti caratteristici siano coincidenti, possiamo asserire a priori che deve essere $a \neq 0$, cioè che la soluzione u_2 possiede certamente una singolarità di tipo logaritmico, in quanto, in caso contrario, le relazioni di ricorrenza che forniscono i coefficienti c_k e d_k sarebbero identiche e u_2 non potrebbe quindi essere linearmente indipendente da u_1 .

5.5. Riepilogo sulla determinazione delle soluzioni nell'intorno di un punto fuchsiano

Riassumeremo qui, a fini pratici, i risultati che abbiamo ottenuto nei paragrafi precedenti, relativi al comportamento, nell'intorno di un punto singolare regolare, delle soluzioni di una equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine.

Data un'equazione differenziale, scritta in forma standard come

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0, \quad [5.111]$$

se $z = z_0$ è un suo punto singolare di tipo fuchsiano, per i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ si ha

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{P(z - z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - z_0)^k, \\ q(z) &= \frac{Q(z - z_0)}{(z - z_0)^2} = \frac{1}{(z - z_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k (z - z_0)^k. \end{aligned} \quad [5.112]$$

Per determinare il comportamento delle soluzioni, nell'intorno del punto $z = z_0$, occorre in primo luogo conoscere le soluzioni dell'equazione indiciale. Sapendo a priori che almeno una delle soluzioni della [5.111] ha la forma

$$u(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad [5.113]$$

è facile ricavare rapidamente l'equazione indiciale, sostituendo in tale equazione, scritta sotto la forma

$$(z - z_0)^2 u'' + (z - z_0)P(z - z_0)u' + Q(z - z_0)u = 0, \quad [5.114]$$

i soli termini dominanti, nell'intorno del punto $z = z_0$, degli sviluppi [5.112] e [5.113]; osservando dunque che, per $z \rightarrow z_0$, si ha*

$$\begin{aligned} P(z - z_0) &\sim p_0, & Q(z - z_0) &\sim q_0, \\ u(z) &\sim (z - z_0)^\rho, & u'(z) &\sim \rho(z - z_0)^{\rho-1}, \\ u''(z) &\sim \rho(\rho - 1)(z - z_0)^{\rho-2}, \end{aligned}$$

la [5.114] può leggersi come

$$\rho(\rho - 1)(z - z_0)^\rho + \rho p_0 (z - z_0)^\rho + q_0 (z - z_0)^\rho + O[(z - z_0)^{\rho+1}] = 0$$

e pertanto, uguagliando a zero il coefficiente della potenza dominante, si ottiene l'equazione indiciale

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0. \quad [5.115]$$

In termini dei coefficienti $p(z)$ e $q(z)$, che compaiono nella forma standard dell'equazione in esame, i parametri p_0 e q_0 sono dati semplicemente dalle relazioni

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)p(z), \\ q_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 q(z), \end{aligned} \quad [5.116]$$

come si vede immediatamente dalle [5.112].

Una volta ottenuta l'equazione indiciale e trovatene le soluzioni ρ_1 e ρ_2 , si indichi con ρ_1 quella a parte reale maggiore:

$$\Re \rho_1 \geq \Re \rho_2. \quad [5.117]$$

In ogni caso, associata a ρ_1 , si ha una soluzione

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad [5.118]$$

i cui coefficienti c_k si determinano, con metodo ricorrente, sostituendo direttamente la [5.118] nella [5.114] ed uguagliando a zero i coefficienti di tutte le potenze di $(z - z_0)$.

* Per semplicità di scrittura, poniamo $c_0 = 1$, cosa che non comporta perdita di generalità, dato che il coefficiente c_0 viene fattorizzato.

Per quanto riguarda la seconda soluzione, occorre distinguere due casi, a seconda che si abbia

$$\rho_1 - \rho_2 \neq 0, 1, 2, \dots$$

ovvero

$$\rho_1 - \rho_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Nel primo caso la soluzione u_2 ha la stessa struttura di u_1 ,

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k (z - z_0)^k, \quad [5.119]$$

ed i coefficienti c'_k si determinano nello stesso modo. Nel caso, invece, in cui gli esponenti differiscono per un numero intero positivo o nullo, la seconda soluzione contiene, in generale, un termine logaritmico ed ha la forma

$$u_2(z) = au_1 \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d^k (z - z_0)^k; \quad [5.120]$$

la sostituzione diretta della [5.120] nell'equazione differenziale [5.114] fornisce la determinazione del coefficiente a del termine logaritmico e dei coefficienti d_k , che saranno legati tra loro ed ai coefficienti c_k della prima soluzione da una nuova relazione di ricorrenza. In particolare il coefficiente a può risultare nullo ed in tal caso la seconda soluzione si presenterà ancora con una struttura del tipo [5.119] anche se gli indici differiscono per un intero; si noti che questa situazione non può presentarsi se i due indici sono coincidenti.

Per finire, si osservi che, da un punto di vista pratico, è assai comodo, per effettuare i calcoli, portare la singolarità fuchsiana in esame nell'origine, cosa che si ottiene banalmente con una posizione del tipo $(z - z_0) = \xi$.

5.6. Soluzioni nell'intorno del punto all'infinito

Fino ad ora le nostre considerazioni sono state riferite ad un generico punto $z = z_0$ al finito. Vogliamo ora occuparci della determinazione del comportamento delle soluzioni dell'equazione differenziale standard

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0 \quad [5.121]$$

nell'intorno del punto all'infinito. Il modo più semplice per fare ciò è cambiare variabile in tale equazione, ponendo

$$z = \frac{1}{\eta}$$

e studiare poi l'equazione differenziale che così si ottiene nell'intorno del punto $\eta = 0$. Osservando preliminarmente che si ha

$$\frac{d}{dz} = \frac{d\eta}{dz} \frac{d}{d\eta} = -\eta^2 \frac{d}{d\eta}$$

e quindi

$$\frac{d^2}{dz^2} = \eta^2 \frac{d}{d\eta} \eta^2 \frac{d}{d\eta} = \eta^4 \frac{d^2}{d\eta^2} + 2\eta^3 \frac{d}{d\eta},$$

si ottiene subito che la [5.121] è equivalente all'equazione in η

$$\eta^4 \frac{d^2 u}{d\eta^2} + [2\eta^3 - \eta^2 p(1/\eta)] \frac{du}{d\eta} + q(1/\eta)u = 0, \quad [5.122]$$

che, scritta in forma standard, diventa

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \left[\frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p(1/\eta) \right] \frac{du}{d\eta} + \frac{1}{\eta^4} q(1/\eta)u = 0. \quad [5.123]$$

Il punto $\eta = 0$ sarà un punto ordinario di tale equazione se i suoi coefficienti, ovvero le funzioni

$$\frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p(1/\eta) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\eta^4} q(1/\eta), \quad [5.124]$$

sono funzioni regolari nel punto $\eta = 0$. Ritornando alla variabile $z = 1/\eta$, si vede così che il punto $z = \infty$ è un punto ordinario dell'equazione originaria [5.121] se le due funzioni

$$2z - z^2 p(z) \quad \text{e} \quad z^4 q(z)$$

sono olomorfe nel punto $z = \infty$, cioè se $p(z)$ e $q(z)$ hanno, per $z \rightarrow \infty$, i comportamenti asintotici

$$p(z) = \frac{2}{z} + O(1/z^2), \quad q(z) = O(1/z^4)$$

che implicano che si abbia

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = 2, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = \text{costante}. \quad [5.125]$$

Sono queste le condizioni necessarie e sufficienti affinché il punto all'infinito sia un punto ordinario dell'equazione standard [5.121].

Se le condizioni [5.125] non sono soddisfatte, il punto $z = \infty$ è un punto singolare dell'equazione considerata. Vediamo ora di determinare sotto quali condizioni esso sia un punto singolare di tipo fuchsiano. A tal fine consideriamo di nuovo l'equazione [5.123]; da essa si vede che il punto $\eta = 0$ è un punto singolare regolare se, e solo se, si ha

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \left[\frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p(1/\eta) \right] = \text{costante},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^2 \left[\frac{1}{\eta^4} q(1/\eta) \right] = \text{costante},$$

cioè se, per $\eta \rightarrow 0$, si ha

$$p(1/\eta) = O(\eta), \quad q(1/\eta) = O(\eta^2).$$

Ne segue che, affinché il punto $z = \infty$ sia un punto singolare di tipo fuchsiano dell'equazione [5.121] occorre e basta che, per $z \rightarrow \infty$, si abbia

$$p(z) = O(1/z), \quad q(z) = O(1/z^2),$$

cioè che esistano i due limiti

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z), \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 q(z). \quad [5.126]$$

I metodi descritti nei paragrafi precedenti permettono una facile determinazione delle soluzioni dell'equazione [5.121], valide nell'intorno del punto all'infinito, nel caso in cui questo sia un punto ordinario ovvero un punto singolare regolare.

Nel caso in cui il punto $z = \infty$ sia punto ordinario della [5.121], e quindi il punto $\eta = 0$ punto ordinario della [5.123], sappiamo, dal paragrafo 5.1, che quest'ultima equazione ammette una soluzione generale, del tipo

$$u(z) \equiv u(1/\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k,$$

dove i coefficienti c_0 e c_1 sono arbitrari ed i rimanenti coefficienti si possono ricavare con metodo ricorrente. Pertanto la soluzione generale della [5.121], valida nell'intorno del punto all'infinito, nel caso in cui questo sia un punto ordinario, è data semplicemente da una serie a potenze negative,

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad [5.127]$$

che rappresenta una funzione olomorfa nel punto $z = \infty$. Da un punto di vista pratico, una volta stabilito che la soluzione ha la forma [5.127], i coefficienti c_k si determineranno sostituendo direttamente tale espressione nell'equazione originaria [5.121]; si otterrà così una relazione di ricorrenza che permetterà di calcolare tutti i coefficienti in funzione di c_0 e c_1 .

Nel caso, particolarmente interessante, in cui il punto $z = \infty$ sia un punto singolare fuchsiano dell'equazione [5.121], e quindi il punto $\eta = 0$ punto singolare regolare dell'equazione [5.123], i risultati prima ottenuti, riassunti nel precedente paragrafo, ci permettono di asserire che le soluzioni di quest'ultima equazione hanno la forma

$$u_1(z) \equiv u_1(1/\eta) = \eta^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k,$$

$$u_2(z) \equiv u_2(1/\eta) = \eta^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k \eta^k, \quad \text{se } \rho_1 - \rho_2 \neq 0, 1, \dots$$

$$u_2(z) \equiv u_2(1/\eta) = a u_1(1/\eta) \ln \eta + \eta^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \eta^k, \quad \text{se } \rho_1 - \rho_2 = 0, 1, \dots,$$

essendo ρ_1 e ρ_2 le soluzioni dell'equazione caratteristica, relativa al punto $\eta = 0$ dell'equazione differenziale [5.123]. Pertanto, in termini di $z = 1/\eta$, le soluzioni dell'equazione [5.121] nell'intorno del punto $z = \infty$, nel caso in cui esso sia un punto fuchsiano, hanno la forma

$$u_1(z) = z^{-\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k},$$

$$u_2(z) = z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k z^{-k}, \quad \text{se } \rho_1 - \rho_2 \neq 0, 1, \dots, \quad [5.128]$$

$$u_2(z) = a u_1(z) \ln z + z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}, \quad \text{se } \rho_1 - \rho_2 = 0, 1, \dots$$

(nell'ultima equazione si è ribattezzata con a la costante $-a$).

Gli esponenti ρ_1 e ρ_2 si possono, ovviamente, determinare scrivendo l'equazione indiciale, relativa al punto $\eta = 0$, per l'equazione [5.123], ma, una volta noto che le soluzioni in esame hanno la forma [5.128], è più rapido dedurre l'equazione indiciale, relativa al punto all'infinito, direttamente dall'equazione originaria [5.121]; ponendo, infatti,

$$u(z) = z^{-\rho}[1 + O(1/z)] \quad [5.129]$$

ed osservando che le [5.126] implicano che si abbia

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + O(1/z^2), \quad q(z) = \frac{q_0}{z^2} + O(1/z^3), \quad [5.130]$$

la sostituzione delle [5.129] e [5.130] nella [5.121] fornisce la relazione

$$[\rho(\rho + 1) - p_0\rho + q_0]z^{-\rho-2} + O(z^{-\rho-3}) = 0$$

che può essere soddisfatta solo se ρ è soluzione dell'equazione

$$\rho^2 - (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0, \quad [5.131]$$

che è appunto l'equazione indiciale relativa al punto all'infinito. Si noti che le costanti p_0 e q_0 sono definite come

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} zp(z), \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2q(z) \quad [5.132]$$

e che, da un punto di vista formale, l'equazione indiciale relativa al punto all'infinito differisce da quella relativa ad un punto al finito solo per il cambiamento di segno del coefficiente del termine lineare in ρ .

Una volta noti gli esponenti relativi al punto all'infinito, i coefficienti delle serie che compaiono nelle [5.128] si otterranno, al solito, da relazioni di ricorrenza ricavate sostituendo direttamente le [5.128] nell'equazione differenziale [5.121].

Per finire, è forse opportuno notare esplicitamente che se ρ_1 e ρ_2 sono le soluzioni dell'equazione indiciale [5.131] (e sono questi numeri quelli che vengono detti gli esponenti del punto all'infinito), le soluzioni nell'intorno del punto all'infinito *non* si comportano, nel caso di $\rho_1 - \rho_2 \neq$ intero, come z^{ρ_1} e z^{ρ_2} , ma bensì come $(1/z)^{\rho_1} \equiv z^{-\rho_1}$ e $(1/z)^{\rho_2} \equiv z^{-\rho_2}$.

5.7. Cenni sui punti singolari non fuchsiani

Non è possibile dare un metodo generale per studiare il comportamento delle soluzioni dell'equazione standard [5.121] nell'intorno di un suo punto singolare irregolare, cosa che, invece, come visto, è sempre possibile nel caso di punti singolari fuchsiani. Per toccare con mano la cosa, consideriamo il caso di un punto singolare $z = z_0$ in cui le condizioni di fuchsianità non siano soddisfatte perché i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ hanno la forma

$$p(z) = \frac{P(z - z_0)}{(z - z_0)^2}, \quad q(z) = \frac{Q(z - z_0)}{(z - z_0)^3}, \quad [5.133]$$

con P e Q funzioni regolari in $z = z_0$, cioè il caso della più semplice singolarità non fuchsiana. Ponendo al solito, per semplicità, $(z - z_0) = \xi$, l'equazione differenziale standard potrà essere riscritta sotto la forma

$$\xi^3 u'' + \xi P u' + Q u = 0, \quad [5.134]$$

essendo

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \xi^k, \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \xi^k. \quad [5.135]$$

Supposto di postulare per u una forma del tipo

$$u = \xi^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k \quad [5.136]$$

ed introducendo le [5.135] e [5.136] nella [5.134] si vede facilmente che deve aversi

$$(p_0 \rho + q_0) \xi^\rho + O(\xi^{\rho+1}) = 0$$

e che pertanto il ruolo dell'equazione indiciale è giocato, in questo caso, dall'equazione lineare

$$p_0 \rho + q_0 = 0. \quad [5.137]$$

In altre parole, si ha che ad un punto singolare irregolare può essere associato al massimo un solo esponente. Ciò non vuole ancora dire che esista una soluzione effettiva di una equazione del tipo [5.134] che abbia la forma [5.136], perché non è affatto detto che il solito metodo di sostituzione diretta, per la determinazione dei coefficienti, porti ad una serie convergente; tuttavia, in generale, nel caso in cui una posizione di tipo [5.136] permetta la determinazione di un indice ρ , tramite una equazione di tipo [5.137], si otterrà che la [5.136] ha senso se interpretata come serie asintotica*.

Non ci soffermeremo qui su una più approfondita analisi dei punti non fuchsiani. Ci limiteremo solo ad osservare ancora che, in taluni casi, capita che un punto singolare non fuchsiano si possa considerare come generato dalla *confluenza* di singolarità fuchsiane; in altre parole, capita a volte che una certa equazione differenziale possa essere derivata da un'altra equazione differenziale con un opportuno processo di limite che faccia tendere ad un unico punto due o più singolarità di quest'ultima. L'equazione così ottenuta si dirà allora una *forma confluyente* dell'equazione originaria. È chiaro che le singolarità di una equazione confluyente avranno, in generale, una natura più complicata di quelle dell'equazione originaria; le soluzioni dell'equazione confluyente potranno, tuttavia, essere legate a quelle dell'equazione originaria da opportuni processi di limite.

6. Equazione di Papperitz–Riemann

Tra tutte le possibili equazioni differenziali, lineari e omogenee del secondo ordine, un ruolo estremamente importante è giocato dall'*equazione di Papperitz–Riemann* che è la più generale equazione totalmente fuchsiana con tre, e solo tre, punti singolari, tutti regolari. La ragione di ciò è dovuta al fatto che moltissime delle equazioni differenziali ordinarie che si incontrano nella fisica matematica sono equazioni di questo tipo od una loro forma confluyente

* Si confronti, a questo proposito, quanto diremo nel prossimo capitolo, in occasione dello studio della soluzione Ψ dell'equazione ipergeometrica confluyente.

e che gran parte delle funzioni speciali che matematici e fisici sono abituati a maneggiare sono soluzioni di queste equazioni.

Viceversa le equazioni con solo due ovvero solo una singolarità di tipo fuchsiano, presentano uno scarso interesse, in quanto equazioni banali, esattamente risolubili in termini di trascendenti elementari*.

Le equazioni, poi, con quattro o più punti singolari regolari si incontrano piuttosto raramente e non esiste per le loro soluzioni uno studio di tipo generale, mentre, al contrario, le equazioni totalmente fuchsiane con tre punti singolari sono state studiate estremamente a fondo e le loro soluzioni costituiscono, sostanzialmente, la vastissima classe delle cosiddette funzioni ipergeometriche; l'accennata forma confluyente, studiata altrettanto a fondo, dà poi origine alla classe delle funzioni ipergeometriche confluenti.

In questo paragrafo esamineremo pertanto la più generale equazione differenziale, lineare ed omogenea, del secondo ordine che abbia tre e solo tre punti singolari, tutti fuchsiani; supponiamo che ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 siano i tre punti fuchsiani e che i corrispondenti esponenti caratteristici, cioè le radici delle relative equazioni indiciali, siano dati dalle coppie (α_1, β_1) , (α_2, β_2) e (α_3, β_3) . Scrivendo, come al solito, l'equazione sotto la forma standard

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0, \quad [6.1]$$

i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ devono avere necessariamente la forma

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{P(z)}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)}, \\ q(z) &= \frac{Q(z)}{(z - \xi_1)^2(z - \xi_2)^2(z - \xi_3)^2}, \end{aligned} \quad [6.2]$$

con $P(z)$ e $Q(z)$ funzioni intere (cioè ovunque regolari al finito). Il fatto poi che l'equazione debba avere solo tre punti singolari, se supponiamo, come supporremo per ora, che i tre punti ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 siano tutti al finito, implica che il punto all'infinito sia un punto ordinario dell'equazione considerata e quindi che valgano le [5.125], che impongono che, per $z \rightarrow \infty$, si abbia

$$p(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{z}, \quad q(z) = O(1/z^4); \quad [6.3]$$

di conseguenza sia P che Q devono essere polinomi di secondo grado, che possiamo scrivere sotto la forma

$$\begin{aligned} P(z) &= A_1(z - \xi_2)(z - \xi_3) + A_2(z - \xi_3)(z - \xi_1) + A_3(z - \xi_1)(z - \xi_2), \\ Q(z) &= B_1(z - \xi_2)(z - \xi_3) + B_2(z - \xi_3)(z - \xi_1) + B_3(z - \xi_1)(z - \xi_2), \end{aligned} \quad [6.4]$$

con la condizione, dettata dalla prima delle [6.3], che sia

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2. \quad [6.5]$$

Dalle [6.2] segue allora

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{A_1}{(z - \xi_1)} + \frac{A_2}{(z - \xi_2)} + \frac{A_3}{(z - \xi_3)}, \\ q(z) &= \frac{1}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)} \left(\frac{B_1}{(z - \xi_1)} + \frac{B_2}{(z - \xi_2)} + \frac{B_3}{(z - \xi_3)} \right). \end{aligned} \quad [6.6]$$

* Di esse ci occuperemo, per completezza, alla fine di questo capitolo.

L'equazione indiciale relativa al punto $z = \xi_1$ è

$$\rho^2 + (A_1 - 1)\rho + \frac{B_1}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = 0; \quad [6.7]$$

poiché, per ipotesi, gli esponenti relativi al punto ξ_1 sono α_1 e β_1 , ne segue che deve essere

$$\rho^2 + (A_1 - 1)\rho + \frac{B_1}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = (\rho - \alpha_1)(\rho - \beta_1). \quad [6.8]$$

Pertanto deve aversi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 1 - A_1, \\ \alpha_1\beta_1 &= \frac{B_1}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}. \end{aligned}$$

Considerando analogamente le equazioni indiciali relative agli altri due punti singolari, si vede dunque che le costanti A_i e B_i che compaiono nelle [6.6] sono legate agli esponenti caratteristici dei tre punti singolari dalle relazioni

$$\begin{aligned} A_i &= 1 - \alpha_i - \beta_i, \\ B_i &= \alpha_i\beta_i(\xi_i - \xi_k)(\xi_i - \xi_l); \quad i, k, l = 1, 2, 3; \quad i \neq k \neq l \neq i. \end{aligned} \quad [6.9]$$

La condizione [6.5], che assicura la regolarità del punto all'infinito, impone una restrizione sui possibili valori degli esponenti che devono soddisfare la relazione

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 \equiv \sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \beta_i) = 1. \quad [6.10]$$

Tenendo conto delle [6.6] e [6.9] si vede che la forma esplicita dell'equazione [6.1] è

$$\begin{aligned} u'' + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - \xi_i} \right) u' \\ - \frac{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)} \times \\ \times \left[\frac{\alpha_1\beta_1}{(z - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} + \frac{\alpha_2\beta_2}{(z - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)} + \frac{\alpha_3\beta_3}{(z - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2)} \right] u = 0. \end{aligned} \quad [6.11]$$

Questa è la *equazione di Papperitz–Riemann*, equazione totalmente fuchsiana con tre punti singolari regolari, situati nei punti generici ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , messi chiaramente in evidenza insieme con i loro esponenti caratteristici, vincolati a soddisfare la condizione [6.10].

Per dire che u è soluzione dell'equazione di Papperitz–Riemann, si definisce il *simbolo P di Riemann* e si scrive

$$u = P \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \quad z \right\}; \quad [6.12]$$

in tale simbolo i punti singolari sono scritti nella prima linea e i corrispondenti indici compaiono al di sotto di essi; nella quarta colonna compare la variabile

che si considera come indipendente. È opportuno notare che esso indica *una qualsiasi soluzione* dell'equazione differenziale considerata. Dalla [6.12] è immediato dedurre l'aspetto di sei soluzioni particolari dell'equazione [6.11] e cioè le rappresentazioni di una coppia di soluzioni, linearmente indipendenti, valide nell'intorno di ognuno dei tre punti singolari, secondo la discussione generale fatta a proposito delle soluzioni di una equazione differenziale di tipo [6.1], nell'intorno di un suo punto singolare fuchsiano.

Per esempio, per dire che u è una soluzione dell'equazione (di Legendre)

$$(z^2 - 1)u'' + 2zu' + \lambda(\lambda + 1)u = 0$$

che ha tre punti singolari fuchsiani in $-1, 1, \infty$, con esponenti rispettivamente $(0, 0), (0, 0), (-\lambda, \lambda + 1)$, si scrive

$$u = P \left\{ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\lambda & z \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & \end{array} \right\}. \quad [6.13]$$

È immediato verificare che la somma degli esponenti dei tre punti singolari è effettivamente uguale ad uno, come imposto dalla restrizione [6.10] che assicura che i punti singolari siano realmente solo tre.

Non deve disturbare il fatto che, nell'esempio citato, uno dei punti fuchsiani sia il punto all'infinito; nelle considerazioni precedenti si sono infatti considerati tre punti fuchsiani tutti al finito, solo per maggior semplicità formale e maggiore simmetria; è ovvio, comunque, che, con una semplice trasformazione conforme, è possibile portare una delle tre singolarità all'infinito o, viceversa, trasformare una equazione con un punto fuchsiano all'infinito in una con tutte le singolarità al finito. È anzi sovente opportuno portare le tre singolarità, dai punti generici ξ_1, ξ_2, ξ_3 , nei tre punti $0, 1, \infty$. Ciò si ottiene semplicemente assumendo, in luogo della variabile z , una nuova variabile ζ , definita come

$$\zeta = \frac{(z - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}{(z - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1)}. \quad [6.14]$$

Si otterrà così una nuova funzione u , equivalente a quella definita dalla [6.12], della forma

$$u = P \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \zeta \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\}, \quad [6.15]$$

perché la trasformazione [6.14] muta la posizione delle singolarità, ma lascia invariati gli esponenti ed esse associati, come discuteremo nel prossimo paragrafo.

6.1. Proprietà del simbolo P di Riemann

Il simbolo P di Riemann gode di un certo numero di proprietà di carattere fondamentale che si rivelano assai utili per la ricerca pratica delle soluzioni di una equazione di Papperitz-Riemann.

Banale è la proprietà che nel simbolo P si possano permutare arbitrariamente le prime tre colonne, lasciandone invariato il significato, dato che i tre punti singolari considerati sono tutti dello stesso tipo; così, per esempio, si ha

$$P \left\{ \begin{array}{ccc|c} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{ccc|c} \xi_2 & \xi_1 & \xi_3 & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & z \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_3 & \end{array} \right\}. \quad [6.16]$$

Altra proprietà ovvia è che nel simbolo P gli esponenti α_i e β_i associati al punto ξ_i possono essere scambiati tra loro, poiché non abbiamo dato nessuna caratterizzazione particolare per distinguere α_i da β_i ; così, per esempio,

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\}. \quad [6.17]$$

Importante, ma sempre banale, è il fatto che il simbolo P rimane invariato se lo si moltiplica per una costante arbitraria K , dato che P rappresenta una generica soluzione dell'equazione differenziale [6.11] e che se u è una soluzione di tale equazione, anche Ku lo è, essendo l'equazione omogenea:

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = KP \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\}. \quad [6.18]$$

Estremamente importante è poi la proprietà del simbolo P di rimanere invariato qualora si sottopongano la variabile z ed i tre punti singolari ξ_i ad una stessa trasformazione omografica* del tipo

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0. \quad [6.19]$$

Vale infatti la relazione

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & z' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} \quad [6.20]$$

che asserisce che il cambiamento di variabile [6.19] trasforma l'equazione [6.11] in una analoga equazione in cui le posizioni dei punti singolari sono mutate in accordo con la [6.19], ma gli esponenti ad essi relativi rimangono invariati. La [6.20] è, ovviamente, suscettibile di verifica diretta, effettuando, nella [6.11], il cambiamento di variabile [6.19], ma i calcoli relativi sono lunghi e noiosi; essa può essere, tuttavia, giustificata intuitivamente senza fare praticamente calcoli, osservando che, in sostanza, le soluzioni di una equazione differenziale sono definite dal loro comportamento nell'intorno di un punto singolare; ora, supposto, per semplicità, che sia, per esempio, $\alpha_1 - \beta_1 \neq$ intero, il simbolo a secondo membro della [6.20] è associato ad una equazione di tipo [6.11] di cui due soluzioni particolari linearmente indipendenti, valide nell'intorno del punto $z' = \xi'_1$, sono tali che si abbia

$$\begin{aligned} u_1 & \underset{z' \rightarrow \xi'_1}{\sim} c'_0 (z' - \xi'_1)^{\alpha_1}, \\ u_2 & \underset{z' \rightarrow \xi'_1}{\sim} d'_0 (z' - \xi'_1)^{\beta_1}; \end{aligned} \quad [6.21]$$

* Ricordiamo che una omografia è una trasformazione proiettiva tra due piani, tale che a rette e punti che si appartengono nell'uno corrispondono rette e punti che di appartengono nell'altro. La forma più generale di una trasformazione omografica di un piano z in un piano z' è data appunto dalla [6.19], dove i parametri a , b , c e d sono numeri arbitrari, soggetti alla sola condizione $ad - bc \neq 0$ che assicura l'invertibilità della trasformazione. Si noti che, se fosse $ad - bc = 0$, la [6.19] diventerebbe l'uguaglianza $z = b/d$ e non definirebbe, pertanto, nessuna trasformazione.

ma, poiché $z' \rightarrow \xi_1'$ implica $z \rightarrow \xi_1$ e dato che

$$(z' - \xi_1') = (z - \xi_1) \frac{ad - bc}{(cz + d)(c\xi_1 + d)}, \quad [6.22]$$

dire che valgono le [6.21] equivale a dire che, nell'intorno di $z = \xi_1$, si ha

$$\begin{aligned} u_1 &\underset{z \rightarrow \xi_1}{\sim} c_0(z - \xi_1)^{\alpha_1}, \\ u_2 &\underset{z \rightarrow \xi_1}{\sim} d_0(z - \xi_1)^{\beta_1}; \end{aligned} \quad [6.23]$$

le [6.21] implicano quindi proprio, nell'intorno del punto $z = \xi_1$, gli andamenti di u_1 ed u_2 predetti dal simbolo P di Riemann che compare a primo membro della [6.20].

Così, come la [6.20] permette, in sostanza, di spostare i punti singolari di una equazione di tipo [6.11], lasciandone invariati gli esponenti, esistono anche delle proprietà del simbolo P che lasciano invariate le posizioni dei punti singolari, mutando, invece, il valore degli esponenti ad essi associati. La più generale di esse può scriversi sotto la forma

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = \\ = (z - \xi_1)^{\gamma_1} (z - \xi_2)^{\gamma_2} (z - \xi_3)^{\gamma_3} P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \alpha_3 - \gamma_3 & z \\ \beta_1 - \gamma_1 & \beta_2 - \gamma_2 & \beta_3 - \gamma_3 & \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad [6.24]$$

dove γ_1 , γ_2 e γ_3 sono numeri arbitrari, vincolati dalla sola condizione

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \quad [6.25]$$

che garantisce che la somma di tutti gli esponenti che compaiono nel simbolo P a secondo membro sia ancora uguale ad uno. Anche la [6.24] si potrebbe dimostrare rigorosamente partendo dall'equazione differenziale [6.11] e cambiando in essa la funzione incognita, con la posizione

$$u(z) = (z - \xi_1)^{\gamma_1} (z - \xi_2)^{\gamma_2} (z - \xi_3)^{\gamma_3} v(z), \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0. \quad [6.26]$$

Si otterrebbe così, per la nuova funzione incognita v , una nuova equazione di Papperitz–Riemann la cui soluzione è identificata appunto dal simbolo P che compare a secondo membro della [6.24]. Tuttavia, di nuovo, si possono evitare calcoli noiosi ed ottenerne una giustificazione intuitiva, considerando gli andamenti asintotici dei due membri della [6.24] nell'intorno dei vari punti fuchsiani; così, per esempio, se consideriamo due soluzioni v_1 e v_2 , linearmente indipendenti, valide nell'intorno del punto $z = \xi_1$, dell'equazione associata al simbolo P che compare nel secondo membro della [6.24] e di nuovo supponiamo, per semplicità, che sia $\alpha_1 - \beta_1 \neq$ intero, esse saranno tali che si abbia

$$\begin{aligned} v_1 &\underset{z \rightarrow \xi_1}{\sim} \text{costante}(z - \xi_1)^{\alpha_1 - \gamma_1}, \\ v_2 &\underset{z \rightarrow \xi_1}{\sim} \text{costante}(z - \xi_1)^{\beta_1 - \gamma_1}; \end{aligned} \quad [6.27]$$

ora, la [6.24] ci dice che due soluzioni dell'equazione associata al simbolo P che compare a primo membro devono essere date da

$$u_i = (z - \xi_1)^{\gamma_1} (z - \xi_2)^{\gamma_2} (z - \xi_3)^{\gamma_3} v_i, \quad i = 1, 2, \quad [6.28]$$

e, pertanto, le [6.27] implicano che, nell'intorno del punto $z = \xi_1$, si abbia

$$\begin{aligned} u_1 & \underset{z \rightarrow \xi_1}{\sim} \text{costante}(z - \xi_1)^{\alpha_1}, \\ u_2 & \underset{z \rightarrow \xi_1}{\sim} \text{costante}(z - \xi_1)^{\beta_1}, \end{aligned} \quad [6.29]$$

cioè appunto i comportamenti predetti dal simbolo P che compare a primo membro della [6.24].

Per finire, vogliamo osservare esplicitamente che, come caso particolare della [6.24], si ha, per esempio,

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_3} \right)^\gamma P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 - \gamma & \alpha_2 & \alpha_3 + \gamma & z \\ \beta_1 - \gamma & \beta_2 & \beta_3 + \gamma & \end{array} \right\}; \quad [6.30]$$

inoltre, nel caso in cui uno dei punti considerati, per esempio ξ_3 , sia il punto all'infinito, allora si ha semplicemente

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = (z - \xi_1)^\gamma P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \infty & \\ \alpha_1 - \gamma & \alpha_2 & \alpha_3 + \gamma & z \\ \beta_1 - \gamma & \beta_2 & \beta_3 + \gamma & \end{array} \right\} \quad [6.31]$$

come conseguenza del fatto che

$$(z - \xi_1)^\gamma \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{1}{z} \right)^{-\gamma}.$$

Le proprietà [6.20] e [6.24] si rivelano estremamente utili nelle applicazioni pratiche, in quanto esse ci permettono di ricondurre rapidamente le soluzioni di una qualsiasi equazione totalmente fuchsiana con tre punti singolari a quelle di una particolare equazione di questo tipo, in cui possiamo fissare ad arbitrio la posizione dei tre punti singolari (grazie alla [6.20]) nonché, per due di essi, il valore di uno degli esponenti relativi (in virtù della [6.24]).

6.2. Trasformazione dell'equazione di Papperitz–Riemann nell'equazione ipergeometrica

Sfruttando le proprietà del simbolo P descritte nel paragrafo precedente, è facile connettere le soluzioni di una qualsiasi equazione di Papperitz–Riemann di tipo [6.11] con quelle della più nota equazione di questo tipo che è la cosiddetta *equazione ipergeometrica*. Si tratta della più generale equazione differenziale, lineare ed omogenea, del secondo ordine, avente tre punti singolari regolari situati nei punti 0, 1 ed ∞ e per la quale uno degli esponenti dello zero ed uno degli esponenti del punto $z = 1$ sono nulli.

Effettuando successivamente una trasformazione di tipo [6.20], con*

$$z' = \frac{z - \xi_1}{z - \xi_3} \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_1}, \quad [6.32]$$

* Che è la trasformazione [6.14], già citata alla fine del paragrafo 6, per la quale $(z = \xi_1) \rightarrow (z' = 0)$, $(z = \xi_2) \rightarrow (z' = 1)$ e $(z = \xi_3) \rightarrow (z' = \infty)$.

ed una di tipo [6.24], si vede facilmente che

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} &= P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & z' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = \\ &= z'^{\alpha_1} (z' - 1)^{\alpha_2} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & z' \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 & \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_2 & \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad [6.33]$$

Ponendo, come consuetudine,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= a, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_3 &= b, \\ \beta_1 - \alpha_1 &= 1 - c, \end{aligned} \quad [6.34]$$

e, di conseguenza**,

$$\beta_2 - \alpha_2 = c - a - b, \quad [6.34']$$

si vede così che la conoscenza delle soluzioni di una generica equazione di Papperitz–Riemann può essere sempre ricondotta a quella delle soluzioni della particolare equazione associata al simbolo

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1 - c & c - a - b & b & \end{array} \right\} \quad [6.35]$$

che è l'equazione*

$$z(1 - z)u'' + [c - (a + b + 1)z]u' - abu = 0. \quad [6.36]$$

La [6.36] è una delle più classiche equazioni differenziali ed è nota come *equazione ipergeometrica*. Di essa e delle sue soluzioni ci occuperemo nel prossimo capitolo.

7. Equazioni con meno di tre singolarità regolari

7.1. Equazioni con due soli punti singolari fuchsiani

La più generale equazione, della forma

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0, \quad [7.1]$$

con due, e solo due, punti singolari, entambi di tipo fuchsiano, è sempre risolvibile in termini di funzioni elementari. Detti infatti ξ_1 e ξ_2 i due punti singolari e α_1, β_1 ed α_2, β_2 i corrispondenti esponenti, ripetendo il tipo di ragionamento

** Ricordando che gli esponenti non sono tutti indipendenti perché la loro somma è uguale all'unità (vedi equazione [6.10]).

* Lasciamo al lettore, come esercizio, la facile verifica che l'equazione di tipo [6.11] corrispondente al simbolo [6.35] è proprio la [6.36].

fatto a proposito dell'equazione con tre punti fuchsiani, si vede in primo luogo che i coefficienti devono avere la forma

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{P(z)}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)}, \\ q(z) &= \frac{Q(z)}{(z - \xi_1)^2(z - \xi_2)^2}, \end{aligned} \quad [7.2]$$

essendo P e Q funzioni intere. La richiesta che il punto all'infinito sia un punto ordinario impone poi (vedi equazione [5.125]) che si abbia

$$P(z) = A_1(z - \xi_2) + A_2(z - \xi_1), \quad [7.3]$$

con la condizione

$$A_1 + A_2 = 2, \quad [7.4]$$

e

$$Q(z) = B. \quad [7.5]$$

Pertanto i coefficienti sono del tipo

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{A_1}{z - \xi_1} + \frac{A_2}{z - \xi_2}, \\ q(z) &= \frac{B}{(z - \xi_1)^2(z - \xi_2)^2}. \end{aligned} \quad [7.6]$$

L'equazione indiciale relativa al punto $z = \xi_1$,

$$\rho^2 + (A_1 - 1)\rho + \frac{B}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \equiv (\rho - \alpha_1)(\rho - \beta_1) = 0, \quad [7.7]$$

richiede che sia

$$A_1 - 1 = -\alpha_1 - \beta_1, \quad \frac{B}{(\xi_1 - \xi_2)^2} = \alpha_1\beta_1. \quad [7.8]$$

Analogamente, l'equazione indiciale relativa al punto $z = \xi_2$ impone

$$A_2 - 1 = -\alpha_2 - \beta_2, \quad \frac{B}{(\xi_1 - \xi_2)^2} = \alpha_2\beta_2. \quad [7.9]$$

Tenendo conto della [7.4], ne segue

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha, \quad \beta_1 = -\beta_2 \equiv \beta \quad [7.10]$$

e quindi

$$A_1 = 1 - \alpha - \beta, \quad A_2 = 1 + \alpha + \beta, \quad B = \alpha\beta(\xi_1 - \xi_2)^2. \quad [7.11]$$

L'equazione differenziale in esame è pertanto l'equazione

$$u'' + \left(\frac{1 - \alpha - \beta}{z - \xi_1} + \frac{1 + \alpha + \beta}{z - \xi_2} \right) u' + \frac{\alpha\beta(\xi_1 - \xi_2)^2}{(z - \xi_1)^2(z - \xi_2)^2} u = 0. \quad [7.12]$$

La sua soluzione è elementare e risulta

$$u = c_1 \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \right)^\alpha + c_2 \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \right)^\beta, \quad [7.13]$$

se $\alpha \neq \beta$, mentre è

$$u = c_1 \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \right)^\alpha + c_2 \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \right)^\alpha \ln \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}, \quad [7.14]$$

se $\alpha = \beta$. Un metodo elegante e semplice per ottenere questi risultati consiste nell'introdurre, per caratterizzare la soluzione generale della [7.12], il simbolo

$$u = P \left\{ \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta \end{array} \quad z \right\}, \quad [7.15]$$

analogo al simbolo P di Riemann e che gode, ovviamente, di analoghe proprietà. Tenendo conto di queste, si ha

$$\begin{aligned} u(z) &= P \left\{ \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta \end{array} \quad z \right\} = \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \right)^\alpha P \left\{ \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{array} \quad z \right\} = \\ &= \zeta^\alpha P \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \infty \\ 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{array} \quad \zeta \right\}, \end{aligned} \quad [7.16]$$

essendosi posto

$$\zeta = \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}. \quad [7.17]$$

L'ultimo simbolo P che compare nella [7.16] rappresenta la soluzione generale dell'equazione

$$\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + \frac{1 - (\beta - \alpha)}{\zeta} \frac{dv}{d\zeta} = 0, \quad [7.18]$$

come è immediato verificare dalla [7.12], scritta nel caso specifico, cioè con le sostituzioni

$$z \rightarrow \zeta, \quad u \rightarrow v, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow \beta - \alpha, \quad \xi_1 \rightarrow 0, \quad \xi_2 \rightarrow \infty.$$

La [7.18] è di integrazione immediata, fornendo

$$\ln v' = -[1 - (\beta - \alpha)] \ln \zeta + \ln c$$

e quindi

$$v' = c\zeta^{-1+\beta-\alpha};$$

ne segue

$$\begin{aligned} v &= c_1 + c_2 \zeta^{\beta-\alpha}, & \text{se } \beta \neq \alpha, \\ v &= c_1 + c_2 \ln \zeta, & \text{se } \beta = \alpha \end{aligned} \quad [7.19]$$

e quindi, siccome, per la [7.16], è

$$u = \zeta^\alpha v \equiv \left(\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \right)^\alpha v, \quad [7.20]$$

si ottengono appunto le [7.13] e [7.14] per le soluzioni u dell'equazione originaria.

7.2. Equazione con un solo punto singolare fuchsiano

Se una equazione di tipo [7.1] possiede, come unica singolarità, un punto singolare regolare $z = \xi$, i suoi coefficienti hanno necessariamente la forma

$$p(z) = \frac{P(z)}{z - \xi}, \quad q(z) = \frac{Q(z)}{(z - \xi)^2},$$

con P e Q funzioni intere. La condizione [5.125], che assicura la regolarità del punto all'infinito, impone poi che P e Q siano costanti, e precisamente che siano

$$P = 2, \quad Q = 0.$$

L'equazione differenziale di cui si tratta è dunque la semplicissima equazione

$$u'' + \frac{2}{z - \xi} u' = 0$$

che è di integrazione immediata e la cui soluzione generale risulta

$$u = c_1 + c_2(z - \xi)^{-1}.$$

Si può notare ancora che l'equazione indiciale relativa al punto $z = \xi$,

$$\rho^2 + \rho \equiv (\rho - \alpha)(\rho - \beta) = 0,$$

essendosi indicati con α e β gli esponenti del punto $z = \xi$, implica che si abbia

$$1 = -\alpha - \beta, \quad 0 = \alpha\beta$$

e che quindi il valore degli esponenti sia fissato a priori, come

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1,$$

come risulta manifesto dall'integrale generale precedentemente scritto.

CAPITOLO IX

CENNI SU ALCUNE FUNZIONI SPECIALI

1. Equazione e funzioni ipergeometriche

Nel paragrafo 6.2 del precedente capitolo abbiamo visto che lo studio di una equazione totalmente fuchsiana con tre punti singolari può sempre essere ricondotto a quello della *equazione ipergeometrica*

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0, \quad [1.1]$$

i cui punti singolari sono $z = 0$, $z = 1$ e $z = \infty$, e che le sue soluzioni sono caratterizzate dal simbolo P di Riemann

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right. z \Big\} = u(z). \quad [1.2]$$

Nella equazione [1.1] a , b e c sono arbitrari numeri complessi cui ci si riferisce come ai *parametri dell'equazione*. Si noti, in particolare, che questa è simmetrica rispetto allo scambio di a con b e che pertanto questi due parametri giocano esattamente lo stesso ruolo, mentre quello di c è diverso.

Sapendo che una generica soluzione della [1.1] è esprimibile tramite la [1.2], possiamo subito dire quale è la forma di sei integrali particolari della equazione ipergeometrica, cioè di una coppia di soluzioni linearmente indipendenti in corrispondenza di ognuno dei tre punti fuchsiani; indicando con $S_i(\zeta)$ ($i = 1, \dots, 6$) una opportuna funzione analitica nell'intorno del punto $\zeta = 0$, i sei integrali citati sono

$$\begin{aligned} u_1 &= S_1(z), \\ u_2 &= z^{1-c} S_2(z), & \text{se } 1-c \neq n; \\ u_3 &= S_3(z-1), \\ u_4 &= (z-1)^{c-a-b} S_4(z-1), & \text{se } c-a-b \neq n; \\ u_5 &= z^{-a} S_5(1/z), \\ u_6 &= z^{-b} S_6(1/z), & \text{se } a-b \neq n. \end{aligned} \quad [1.3]$$

Nella [1.3] abbiamo indicato genericamente con n un arbitrario numero intero; se, poi, una o più delle disuguaglianze che compaiono nelle [1.3] non fossero soddisfatte, sappiamo, dallo studio generale del comportamento delle soluzioni di una equazione differenziale lineare ed omogenea del secondo ordine nell'intorno di un punto fuchsiano, che le corrispondenti seconde soluzioni presenterebbero un termine additivo contenente una singolarità logaritmica*.

Poiché le funzioni S_i sono funzioni analitiche nell'intorno dei punti in cui si annullano i loro argomenti, esse sono esprimibili come serie di potenze, nei

* Nel seguito eviteremo sistematicamente di ripetere questa osservazione.

corrispondenti argomenti, i cui raggi di convergenza coincidono, in generale, con la distanza tra il punto nell'intorno del quale si sta effettuando lo sviluppo e la più vicina ulteriore singolarità dell'equazione e sono pertanto tutti uguali ad uno.

L'espressione esplicita della prima delle soluzioni [1.3] è facilmente determinabile. Posto infatti

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad [1.4]$$

ed introducendo questa posizione nella [1.1] si vede che deve essere

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \{z(1-z)k(k-1)c_k z^{k-2} + [c - (a+b+1)z]kc_k z^{k-1} - abc_k z^k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{z^k[-k(k-1) - k(a+b+1) - ab]c_k + z^{k-1}[k(k-1) + ck]c_k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{-[k(k+a+b) + ab]c_k + (k+1)(k+c)c_{k+1}\} z^k; \end{aligned}$$

perché questa uguaglianza sia soddisfatta deve essere nullo il coefficiente della generica potenza z^k ed imponendo ciò si ottiene la relazione di ricorrenza

$$c_{k+1} = \frac{k(k+a+b) + ab}{(k+c)(k+1)} c_k \equiv \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)} c_k \quad [1.5]$$

che permette di determinare tutti i coefficienti c_k in funzione di c_0 che risulta, correttamente, indeterminato^{**}. Seguendo una convenzione standard, porremo

$$c_0 = 1; \quad [1.6]$$

dalla [1.5] si vede che, con tale scelta, i primi coefficienti risultano

$$c_1 = \frac{ab}{c \cdot 1}, \quad c_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1) 2!}$$

e quindi, con metodo ricorrente, si ricava che il generico coefficiente è

$$c_n = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)b(b+1) \cdots (b+n-1)}{c(c+1) \cdots (c+n-1) n!}$$

Introducendo la notazione convenzionale*

$$(a)_n \equiv a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1, \quad [1.7]$$

il generico coefficiente c_n viene scritto in forma compatta, come

$$c_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{1}{n!}. \quad [1.8]$$

^{**} Ponendo nelle [1.5] $k = -1$, essa dà infatti per c_0 una forma indeterminata del tipo $0/0$, in quanto, per definizione di serie di Taylor, deve essere $c_{-1} = 0$.

* Per la seconda uguaglianza si è moltiplicato e diviso il prodotto precedente per $\Gamma(a)$, ricordando la proprietà fondamentale $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ della funzione gamma di Euler.

La prima soluzione u_1 dell'equazione ipergeometrica [1.1] è dunque data dalla funzione definita, entro il cerchio di raggio uno, dalla serie [1.4], essendo i coefficienti dati dalla [1.8]; tale funzione viene abitualmente indicata col simbolo $F(a, b; c; z)$:

$$u_1 = F(a, b; c; z), \quad [1.9]$$

dove

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1. \quad [1.10]$$

La funzione $F(a, b; c; z)$ viene detta *funzione ipergeometrica* (di parametri a , b e c e di argomento z) e la serie a secondo membro della [1.10] viene indicata, a sua volta, come *serie ipergeometrica*. Si noti che tale serie definisce una ben determinata funzione olomorfa all'interno del cerchio di raggio uno e che, con opportuni procedimenti di continuazione analitica, la funzione $F(a, b; c; z)$ potrà essere definita anche all'esterno di tale cerchio, dato che le sue uniche possibili singolarità sono i punti $z = 1$ e $z = \infty$. La [1.10] deve quindi considerarsi come una particolare rappresentazione della funzione ipergeometrica $F(a, b; c; z)$, valida per $|z| < 1$.

Nel caso particolare in cui il parametro c sia un numero intero negativo o nullo,

$$c = -N, \quad N = 0, 1, \dots,$$

la definizione [1.9] della soluzione u_1 perde significato perché tutti i coefficienti c_n , con $n > N$, risultano infiniti; infatti si ha

$$(-N)_n = (-N)(-N+1) \cdots (-N+n-1)$$

e quindi nel prodotto che definisce $(-N)_n$ esiste sempre un fattore nullo, se $n > N$. Per introdurre una soluzione che abbia senso anche per c intero negativo o nullo, è però sufficiente normalizzare la soluzione u_1 in modo diverso, cioè fare per il coefficiente c_0 una scelta diversa da quella fatta con la posizione [1.6]. Se infatti fissiamo il primo coefficiente come

$$c_0 = \frac{1}{\Gamma(c)} \quad [1.11]$$

la soluzione u_1 risulta definita, invece che dalla [1.9], dalla relazione

$$u_1 = \overline{F}(a, b; c; z) \quad [1.12]$$

essendosi posto

$$\overline{F}(a, b; c; z) = \frac{1}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1; \quad [1.13]$$

la soluzione u_1 data dalla [1.12] risulta quindi definita per ogni valore di c , dato che la funzione di gamma è una funzione senza zeri. Si noti infine che, se $c = -N$, tenendo presente che $[\Gamma(-N+n)]^{-1} = 0$, per $n \leq N$, dalla [1.13] segue che

$$\overline{F}(a, b; -N; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_{N+k} (b)_{N+k}}{\Gamma(k)} \frac{z^{N+k}}{(N+k)!} \quad [1.13']$$

e quindi che

$$\overline{F}(a, b; -N; z) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \text{costante } z^{N+1} \equiv \text{costante } z^{1-c},$$

cioè che la soluzione $u = \overline{F}$ è in realtà, nel caso specifico di $c = -N$, una soluzione di tipo u_2 .

Il nome di funzione ipergeometrica, dato alla $F(a, b; c; z)$, deriva dal fatto che la serie ipergeometrica si può riguardare come una estensione della serie geometrica che, a sua volta, può essere considerata un caso particolare della prima. Ponendo infatti $c = a$ e $b = 1$ ed osservando che $(1)_n = n!$ dalla [1.10] si ottiene

$$F(a, 1; a; z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad [1.14]$$

e quindi, in questo caso, la serie ipergeometrica si riduce alla serie geometrica e la funzione ipergeometrica corrispondente coincide con la funzione elementare $(1-z)^{-1}$.

Anche in altri casi particolari, cioè per speciali valori dei parametri, le funzioni ipergeometriche si riducono a funzioni elementari. Per esempio, se $b = c$ e a è arbitrario, dalla [1.10] si ha

$$F(a, b; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n, \quad |z| < 1;$$

osservando che

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n}{n!} &= \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{n!} = \\ &= (-1)^n \frac{(-a)(-a-1) \cdots (-a-n+1)}{n!} = \binom{-a}{n} (-1)^n, \end{aligned}$$

ne segue la relazione

$$F(a, b; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} (-z)^n = (1-z)^{-a} \quad [1.15]$$

di cui la [1.14] è un caso particolare (data la possibilità di scambiare tra loro i parametri a e b).

Nel caso, poi, in cui il parametro a (ovvero b) sia un numero intero negativo o nullo la serie che definisce la funzione ipergeometrica si tronca e questa si riduce quindi a un polinomio. Posto, infatti,

$$a = -N, \quad N = 0, 1, \dots,$$

ed osservando che, essendo, per definizione,

$$(-N)_n = (-N)(-N+1) \cdots (-N+n-1),$$

si ha $(-N)_N = (-1)^N N!$ e $(-N)_{N+k} = 0 \quad \forall k > 0$, si ottiene

$$F(-N, b; c; z) = \sum_{n=0}^N \frac{(-N)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \frac{(b)_n}{(c)_n} (-z)^n; \quad [1.16]$$

la funzione ipergeometrica $F(-N, b; c; z)$ è quindi un polinomio in z di grado N . In particolare, per $N = 0$, si ha

$$F(0, b; c; z) = 1. \quad [1.17]$$

Un altro esempio di una funzione ipergeometrica che coincide con una funzione elementare è dato dalla relazione

$$F(1, 1; 2; z) = -\frac{1}{z} \ln(1 - z); \quad [1.18]$$

infatti si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n z^n}{(2)_n n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(n+1)! n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{z} \ln(1 - z). \end{aligned}$$

Come ulteriori esempi di funzioni ipergeometriche esprimibili in termini di funzioni elementari, citiamo le relazioni

$$\begin{aligned} F(1/2, 1; 3/2; -z^2) &= \frac{1}{z} \arctan z; \\ F(1/2, 1/2; 3/2; z^2) &= \frac{1}{z} \arcsin z; \\ F(1/2, 1; 3/2; z^2) &= \frac{1}{2z} \ln \frac{1+z}{1-z}; \\ F(1, 2; 3; z) &= -\frac{2}{z^2} [z + \ln(1 - z)]; \\ F(1, 3; 2; z) &= \frac{2-z}{2(1-z)^2} \end{aligned} \quad [1.19]$$

che il lettore può verificare, come utile esercizio. Altri esempi di relazioni tra funzioni ipergeometriche e funzioni elementari si possono trovare, per esempio, sul primo dei volumi dedicati alle funzioni speciali del *Bateman Manuscript Project*.

Dai precedenti esempi particolari, si può intuire* che, in generale, i punti $z = 1$ e $z = \infty$ saranno punti di ploidromia per la funzione ipergeometrica [1.10] e che quindi, se si vuole avere a che fare con una funzione ad un sol valore, occorrerà considerare il piano di z tagliato tra 1 ed ∞ .

Per trovare una seconda soluzione della equazione ipergeometrica, valida nell'intorno del punto $z = 0$, cioè del tipo u_2 citato nella [1.3], osserviamo che, per le proprietà generali del simbolo P di Riemann (discusse in paragrafo VIII.6.1), si ha

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array} \right\} = z^{1-c} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ c-1 & 0 & a-c+1 & z \\ 0 & c-a-b & b-c+1 & \end{array} \right\}. \quad [1.20]$$

* Si osservino, in particolare, gli esempi [1.15] e [1.18].

Una soluzione particolare dell'equazione associata al simbolo P che sta a secondo membro è la funzione ipergeometrica

$$F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$$

(ammesso che sia $2 - c \neq 0, -1, -2, \dots$) e la soluzione di tipo u_2 è quindi esprimibile come

$$u_2(z) = z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z). \quad [1.21]$$

Se c è diverso da un numero intero gli integrali u_1 e u_2 sono certo linearmente indipendenti, perché

$$u_1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1, \quad u_2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} z^{1-c},$$

e pertanto essi costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione ipergeometrica [1.1], il cui integrale generale può dunque scriversi, se c non è un numero intero, come

$$u(z) = AF(a, b; c; z) + Bz^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z), \quad [1.22]$$

con A e B costanti arbitrarie.

Nel caso in cui il parametro c sia un numero intero positivo,

$$c = 1 + m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

le due soluzioni u_1 e u_2 risultano proporzionali, come si vede facilmente confrontando i loro comportamenti nell'intorno del punto $z = 0$. Per la soluzione u_1 [1.9] si ha semplicemente

$$u_1(z) = F(a, b; 1 + m; z) = 1 + O(z); \quad [1.23]$$

La soluzione u_2 , definita, in generale, dalla [1.21], a meno di una costante moltiplicativa, scriviamola come

$$\begin{aligned} u_2(z) &= \frac{A}{\Gamma(1 - m)} z^{-m} F(a - m, b - m; 1 - m; z) = \\ &= Az^{-m} \overline{F}(a - m, b - m; 1 - m; z), \end{aligned} \quad [1.24]$$

dove è stato introdotto il fattore costante $[\Gamma(1 - m)]^{-1}$ per dare immediato significato alla soluzione u_2 . Utilizzando ora la [1.13'] per esprimere \overline{F} , si ha

$$\begin{aligned} u_2(z) &= Az^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a - m)_{m+k-1} (b - m)_{m+k-1}}{\Gamma(k)} \frac{z^{m+k-1}}{(m + k - 1)!} = \\ &= A \frac{(a - m)_m (b - m)_m}{m!} [1 + O(z)] \equiv \\ &\equiv \frac{A}{m!} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a - m)\Gamma(b - m)} [1 + O(z)] \end{aligned}$$

e pertanto u_1 e u_2 hanno essenzialmente lo stesso comportamento. Se fissiamo

$$A = m! \frac{\Gamma(a - m)\Gamma(b - m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad [1.25]$$

allora risulta $u_1 \equiv u_2$. Uguagliando le due soluzioni [1.23] ed [1.24], con A dato dalla [1.25], otteniamo l'interessante relazione

$$F(a, b; 1 + m; z) = \frac{\Gamma(1 + m) \Gamma(a - m) \Gamma(b - m)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(1 - m)} z^{-m} F(a - m, b - m; 1 - m; z), \quad [1.26]$$

dove abbiamo scritto $\Gamma(1 + m)$ in luogo di $m!$ per dare maggiore simmetria alla formula ottenuta; questa, dedotta sotto l'ipotesi che fosse $m \geq 0$, è in realtà valida per m intero arbitrario, come si verifica facilmente scambiando tra loro le terne di parametri $(a, b; 1 + m)$ e $(a - m, b - m; 1 - m)$.

1.1. Relazioni tra funzioni ipergeometriche

Per ottenere l'integrale u_2 [1.21] dell'equazione ipergeometrica ci si è serviti delle proprietà di trasformazione del simbolo P , utilizzando una trasformazione che mutava i valori degli esponenti relativi ai punti 0 e ∞ , lasciando inalterati quelli relativi al punto 1. In modo analogo, utilizzando una trasformazione che lasci invariati gli esponenti relativi al punto 0, si vede che vale la relazione

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{array} \right\} z = (1 - z)^{c-a-b} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a + b - c & c - b \\ 1 - c & 0 & c - a \end{array} \right\} z \quad [1.27]$$

che mostra che un integrale particolare dell'equazione ipergeometrica [1.1] è (sempre che sia $c \neq$ numero intero)

$$(1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z).$$

Ma, nel caso considerato, l'integrale generale della [1.1] è dato dalla [1.22] e quindi devono necessariamente esistere due costanti A_1 ed A_2 tali che si abbia

$$(1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z) = A_1 F(a, b; c; z) + A_2 z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z).$$

Considerando il comportamento dei due membri di questa uguaglianza nell'intorno del punto $z = 0$, si vede subito che deve essere $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ e si ottiene così l'importante identità

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z) \quad [1.28]$$

che viene sovente indicata come la *relazione di autotrasformazione* delle funzioni ipergeometriche.

Ovviamente la [1.28], pur essendo stata dedotta sotto l'ipotesi che c non fosse un numero intero, continua a valere, per ragioni di continuità, anche se c è un intero positivo. Nel caso, poi, di c intero negativo o nullo la [1.28] perde significato solo perché entrambi i membri non sono definiti (diventano infiniti); per rendere la [1.28] valida per qualsiasi valore di c è tuttavia sufficiente

moltiplicarla per $1/\Gamma(c)$, cioè scriverla, anziché per le funzioni ipergeometriche F , per le funzioni \overline{F} [1.13] che sono definite per ogni valore di c .

Nel paragrafo VIII.6.1 si è visto che il simbolo P di Riemann ha carattere covariante rispetto alle trasformazioni omografiche

$$z \rightarrow z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad [1.29]$$

cioè che vale la relazione generale

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & z' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array} \right\}. \quad [1.30]$$

In particolare si può utilizzare questa proprietà per il simbolo

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array} \right\}, \quad [1.31]$$

associato all'equazione ipergeometrica [1.1], permutando tra loro in tutti i modi possibili i punti 0, 1 ed ∞ . Si possono così ottenere delle relazioni di tipo [1.30] che permettono di connettere tra di loro delle funzioni ipergeometriche di argomenti diversi. Più precisamente, consideriamo le cinque trasformazioni omografiche

$$\begin{aligned} z' &= T_1 z = 1 - z, \\ z' &= T_2 z = 1/z, \\ z' &= T_3 z = T_2 T_1 z = 1/(1 - z), \\ z' &= T_4 z = T_1 T_2 z = (z - 1)/z, \\ z' &= T_5 z = T_1 T_2 T_1 z = T_1 T_3 z = T_4 T_1 z = z/(z - 1) \end{aligned} \quad [1.32]$$

che, appunto, permutano tra di loro, nei vari modi possibili, i punti* 0, 1 ed ∞ ; per ognuna di esse il simbolo [1.31] si trasformerà in un nuovo simbolo P , a sua volta o direttamente associato ad una equazione ipergeometrica o ad essa immediatamente riconducibile con una trasformazione del tipo [VIII.6.31]. Per esempio, usando la trasformazione T_5 , per la quale $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow \infty$, $\infty \rightarrow 1$, si ha

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array} \right\} &= P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & a & \frac{z}{z-1} \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array} \right\} = \\ &= \left(\frac{z}{z-1} - 1 \right)^a P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & \frac{z}{z-1} \\ 1-c & b-a & c-b & \end{array} \right\} \end{aligned}$$

* È facile verificare che le cinque trasformazioni T_i , insieme alla trasformazione identica $T_0 z = z$, formano un gruppo; esso è il cosiddetto gruppo anarmonico che risulta isomorfo al gruppo delle permutazioni di tre oggetti.

e ne segue che una soluzione dell'equazione ipergeometrica deve essere

$$u(z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right);$$

essa deve dunque essere esprimibile come caso particolare dell'integrale generale [1.22], cioè devono esistere due costanti opportune A e B tali che si abbia

$$\begin{aligned} (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) &= \\ &= AF(a, b; c; z) + Bz^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z). \end{aligned}$$

Supponendo, per semplicità, che sia $c \neq$ intero, tali costanti si determinano immediatamente, considerando i comportamenti dei due membri nell'intorno del punto $z = 0$ e risultano $A = 1$ e $B = 0$. Vale pertanto la relazione

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right). \quad [1.33]$$

Essa è la prima, e la più semplice, delle cinque *formule di Bolza* che permettono di esprimere la funzione $F(a, b; c; z)$ mediante funzioni ipergeometriche di uno dei cinque argomenti

$$1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{z}{z-1};$$

le altre si possono ottenere con un procedimento analogo a quello ora seguito, ma la determinazione delle costanti è meno facile.

La prima formula di Bolza [1.33] fornisce il prolungamento analitico di $F(a, b; c; z)$, dalla regione di definizione originaria $|z| < 1$, tramite la rappresentazione per serie [1.10], alla regione $|z/(z-1)| < 1$, cioè a tutto il semipiano $\Re z < 1/2$.

1.2. Formula per la derivata ennesima

La derivata ennesima di una funzione ipergeometrica è legata ad un'altra funzione ipergeometrica dalla relazione

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z). \quad [1.34]$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} F(a, b; c; z) &= \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} k(k-1) \cdots (k-n+1) z^{k-n} \end{aligned}$$

e quindi, ponendo $k-n = l$,

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, b; c; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_{l+n} (b)_{l+n}}{(c)_{l+n}} \frac{(l+n)(l+n-1) \cdots (l+1)}{l!(l+1) \cdots (l+n)} z^l;$$

ma si ha

$$(a)_{l+n} = a(a+1) \cdots (a+n-1) \cdot (a+n) \cdots (a+n+l-1) = (a)_n (a+n)_l$$

e, analogamente,

$$(b)_{n+l} = (b)_n (b+n)_l, \quad (c)_{n+l} = (c)_n (c+n)_l$$

e pertanto

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a+n)_l (b+n)_l}{(c+n)_l} \frac{z^l}{l!}$$

e la [1.34] rimane così giustificata.

1.3. La rappresentazione integrale fondamentale

Le funzioni ipergeometriche possono anche essere espresse tramite diverse rappresentazioni integrali. Ci limiteremo qui a dedurne la più nota. A tal fine partiamo dalla considerazione dell'*integrale ipergeometrico*

$$I(z) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-zt)^{-b} dt \quad [1.35]$$

che è convergente per

$$\Re a > 0, \quad \Re(c-a) > 0. \quad [1.36]$$

Supposto $|z| < 1$, si ha

$$(1-zt)^{-b} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-b}{k} (-1)^k (zt)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{k!} z^k t^k. \quad [1.37]$$

La serie a secondo membro della [1.37] è, per $|z| < 1$, uniformemente convergente e pertanto integrabile termine a termine; sostituendo dunque la [1.37] nella [1.35] si ottiene

$$I(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{k!} z^k \int_0^1 t^{a+k-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad [1.38]$$

Ricordando* che

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \Re\alpha > 0, \quad \Re\beta > 0,$$

* Si veda il paragrafo 29 del primo capitolo, con riferimento, in particolare, alle equazioni [29.10] e [29.11].

dalla [1.38] segue che

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+k)} z^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)} z^k \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} = \\
 &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z).
 \end{aligned}$$

Si vede così che la funzione ipergeometrica ammette la rappresentazione integrale (di Euler)

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tz)^{-b} dt, \quad [1.39]$$

valida per $\Re c > \Re a > 0$.

La [1.39], ottenuta sotto l'ipotesi che fosse $|z| < 1$, è in realtà valida, per continuazione analitica, per tutti i valori di z per cui l'integrale che vi compare risulta convergente. Nella [1.39] è quindi lecito porre $z = 1$, con il che l'integrale a secondo membro si riduce ad una funzione beta di Euler, purché sia $\Re(c-a-b) > 0$, e si ricava così il valore di una generica funzione ipergeometrica nel punto $z = 1$;

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad [1.40]$$

Questa relazione, dedotta sotto le ipotesi $\Re c > \Re a > 0$, $\Re(c-a-b) > 0$, è in realtà valida con le sole restrizioni* $\Re(c-a-b) > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$.

* Per la dimostrazione di questa affermazione e per molte altre nozioni sulle funzioni ipergeometriche, il lettore potrà consultare utilmente il primo dei volumi dedicati alle funzioni speciali del *Bateman Manuscript Project*.