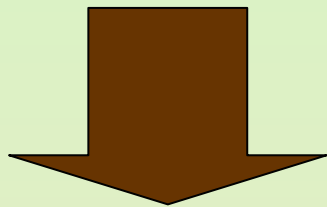


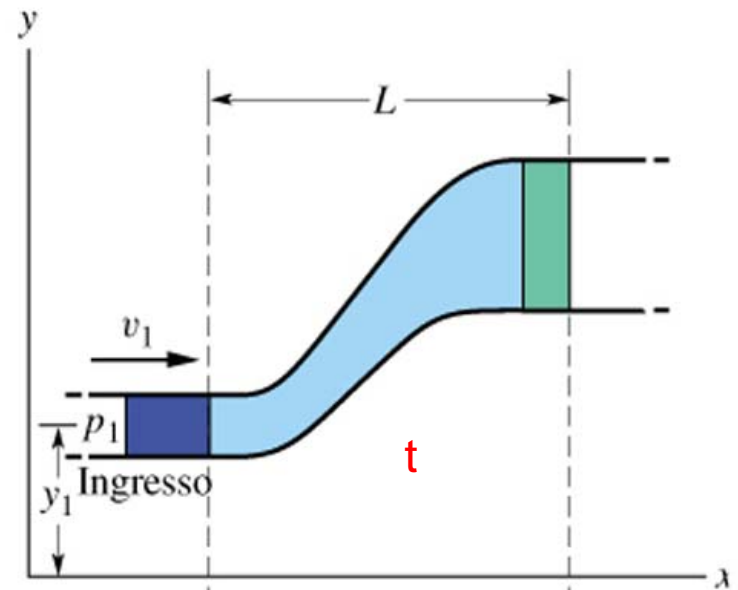
# Equazione di Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g y_1 =$$

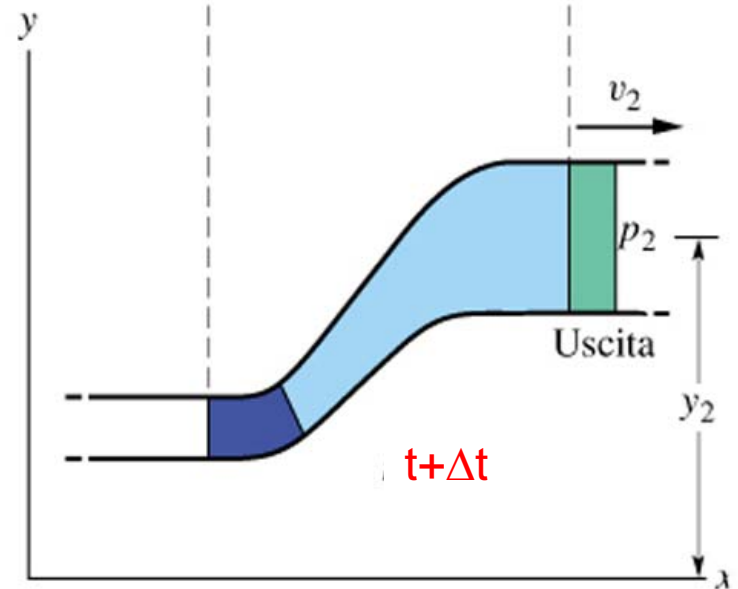
$$= \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g y_2$$



$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \text{costante}$$



(a)

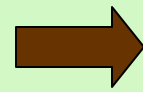


(b)



# Tubo di Venturi

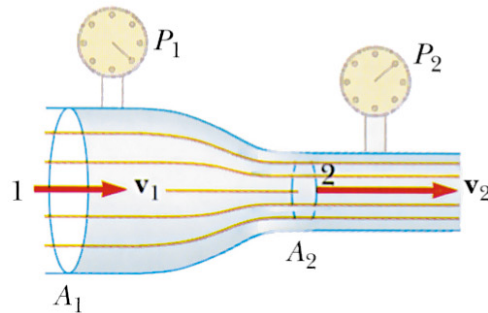
$$\boxed{\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 \end{aligned}}$$



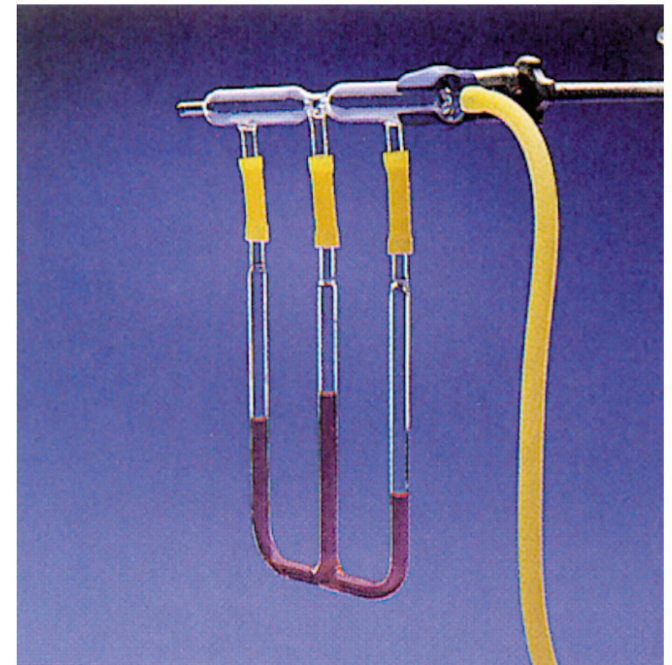
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}$$

Da una misura della differenza di pressione si ricava la velocità e quindi la portata



(a)



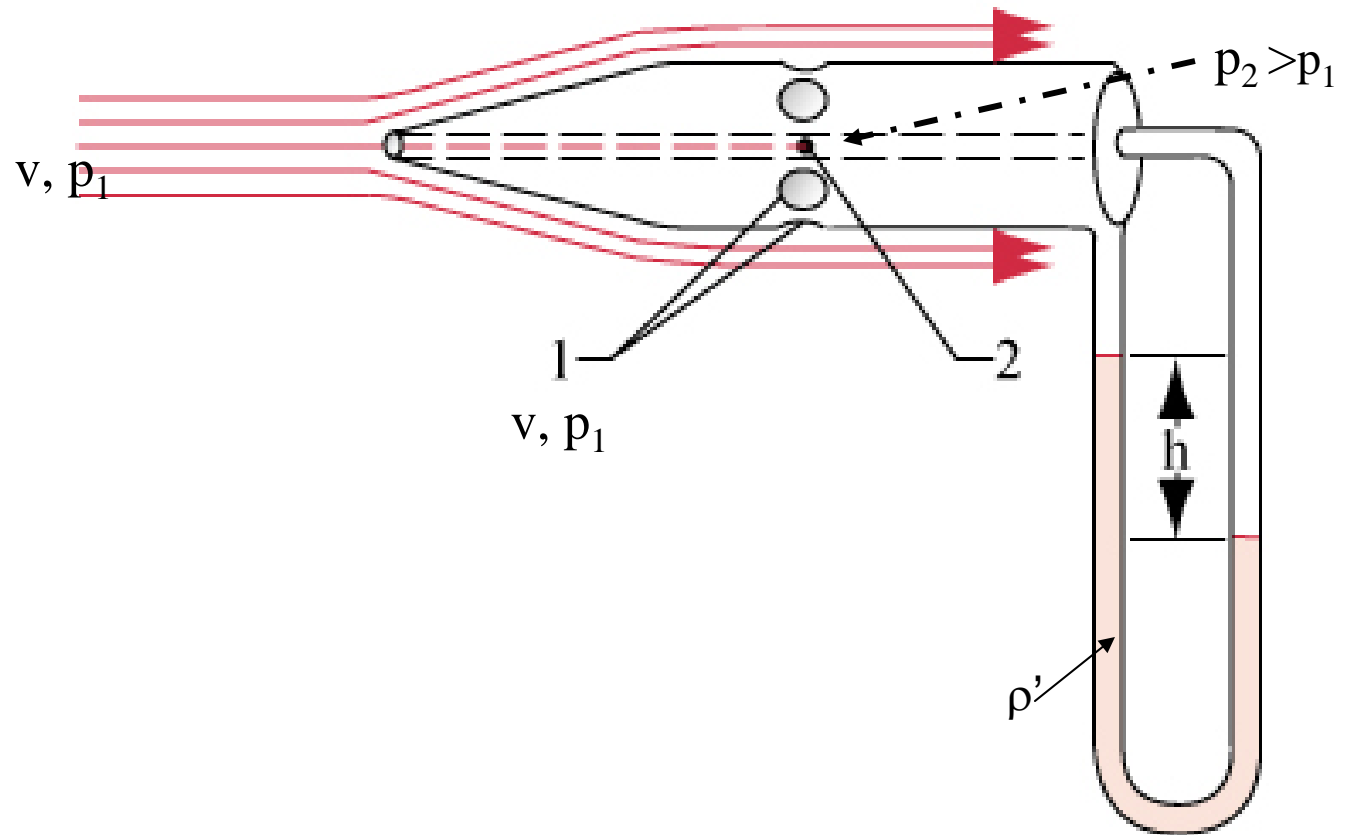
(b)

# Tubo di Pitot

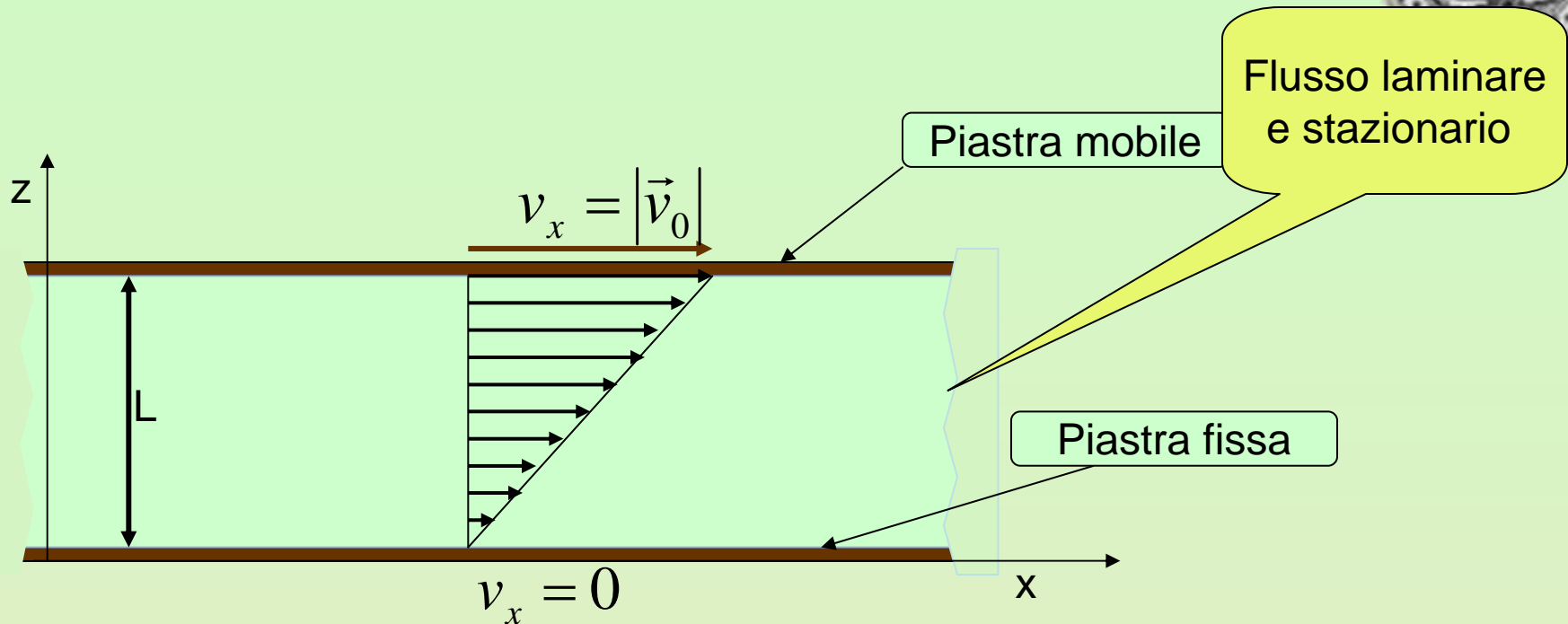


Si tratta di un dispositivo per la misura della velocità di un fluido. Nel punto 2 la velocità è nulla (punto di stagnazione)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_2 \implies v^2 = 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 2 \frac{\rho' h g}{\rho}$$



# Legge di Newton



- ✓ Moto laminare:  $\vec{v}(x, y, z, t) = v_x(z)\hat{i}$
- ✓ Approccio Euleriano → campo di velocità
- ✓ Fenomeno dello strato limite:

# Legge di Newton



La piastra superiore è mantenuta in moto con velocità costante grazie all'applicazione di uno sforzo di taglio (A è l'area della lastra)

$\tau = \frac{F}{A}$  Sperimentalmente si osserva che

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dz}$$

Dove  $\eta$  è una costante detta viscosità assoluta. Dipende dal fluido e dalla temperatura

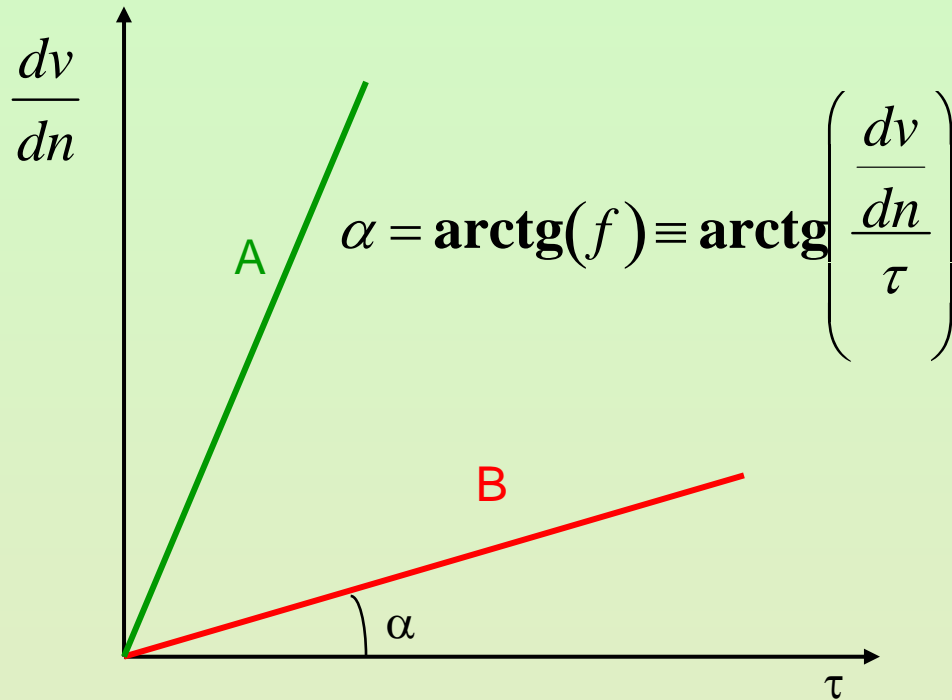
Questa relazione è nota come legge di Newton ed i fluidi per i quali è valida sono detti newtoniani.

Lo sforzo di taglio è proporzionale al gradiente della velocità nella direzione normale al flusso

Nel caso rappresentato nella slide precedente il gradiente di velocità è costante:

$$F = \eta A \frac{v_0}{L}$$

# Reogrammi



Sono presentati due reogrammi di fluidi newtoniani (il reogramma è una retta).

La fluidità  $f$  è il reciproco della viscosità

# Viscosità



La viscosità si misura in Pa·s anche se è ancora spesso utilizzata l'unità del sistema CGS, il poise (in onore di J.R. Poiseuille):  $10 \text{ poise} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

**Tabella 1 Viscosità per alcuni fluidi a temperature diverse**

Fluido	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	Viscosità (Pa·s)
Acqua	0	$1,79 \cdot 10^{-3}$
Acqua	20	$1,00 \cdot 10^{-3}$
Acqua	100	$0,30 \cdot 10^{-3}$
Alcool etilico	20	$1,20 \cdot 10^{-3}$
Mercurio	20	$1,55 \cdot 10^{-3}$
Olio di oliva	20	$8,1 \cdot 10^{-2}$
Sangue	37	0,23
Pece	20	$2,3 \cdot 10^8$
Aria	0	$1,70 \cdot 10^{-5}$
Aria	10	$1,75 \cdot 10^{-5}$
Aria	20	$1,80 \cdot 10^{-5}$

# Legge di Hagen Poiseuille / 1

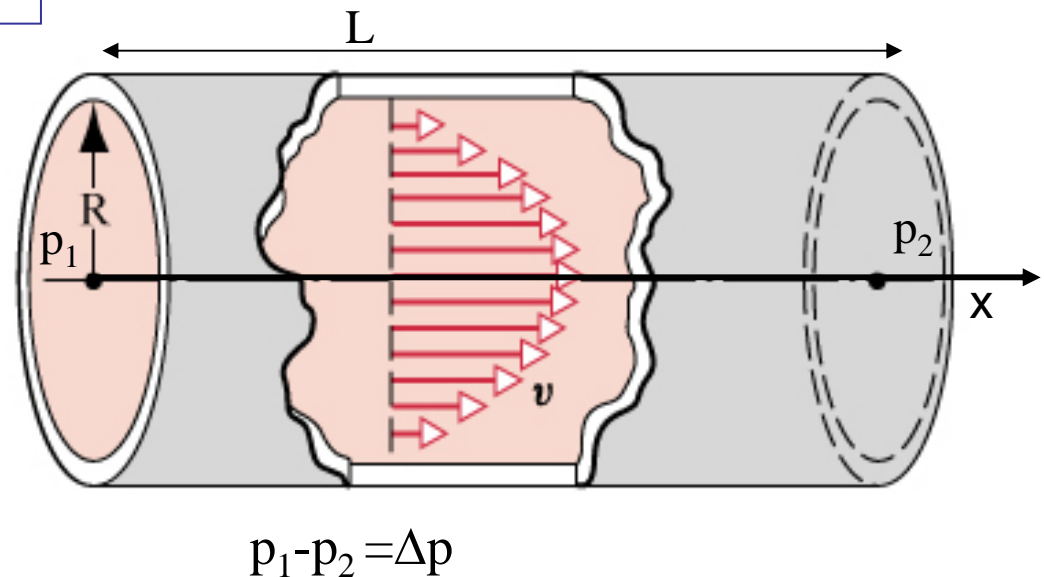


Flusso laminare, stazionario, viscoso di un fluido incomprimibile attraverso un condotto cilindrico orizzontale a sezione costante.

Obiettivo: determinare il profilo di velocità e la portata

$$Q = \int_0^R v(r) dS = \iint v(r) r d\varphi dr = \int_0^R 2\pi r v(r) dr$$

Le forze di attrito viscoso sono bilanciate dalla differenza di pressione ai capi del condotto, A differenza di quanto avviene nel caso di flusso non viscoso, per il quale non c'è differenza di pressione (dal teorema di Bernoulli)





# Legge di Hagen Poiseuille / 2



Si consideri una corona cilindrica definita da  $r \leq r' \leq r + dr$

Il fluido che scorre all'interno della corona tende a trascinare con sé lo strato liquido contenuto nella corona stessa, mentre il fluido che sta all'esterno della medesima tende a frenarlo.

Agiscono 3 forze, con componenti nella direzione x date da:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p dS &= \Delta p 2\pi r dr > 0 \\ -\eta 2\pi L \left( r \frac{dv}{dr} \right)_r &> 0 \\ \eta 2\pi L \left( r \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} &< 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} F_{ris} &= \Delta p 2\pi r dr + \eta 2\pi L \left[ \left( r \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} - \left( r \frac{dv}{dr} \right)_r \right] \\ &= \Delta p 2\pi r dr + \eta 2\pi L \frac{d \left( r \frac{dv}{dr} \right)}{dr} dr = 0 \end{aligned}$$

# Legge di Hagen Poiseuille / 3



$$d\left(r \frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta L} r dr \Rightarrow \int d\left(r \frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \int r dr \Rightarrow r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r^2 + K_1$$

Una seconda integrazione consente di trovare la velocità in funzione di r

$$\int dv = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \int r dr + K_1 \int \frac{dr}{r} \Rightarrow v = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + K_1 \ln r + K_2$$

Le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni al contorno.  $K_1=0$  in quanto la velocità non diverge per  $r=0$ .  $K_2$  si determina ponendo  $v(R)=0$ :

$$v(R) = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2$$

Quindi:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p_L R^2}{4\eta} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Dove  $\Delta p_L = \Delta p/L$  è la caduta di pressione per unità di lunghezza

# Legge di Hagen Poiseuille / 4



La portata è quindi data da una relazione nota come legge di Hagen-Poiseuille

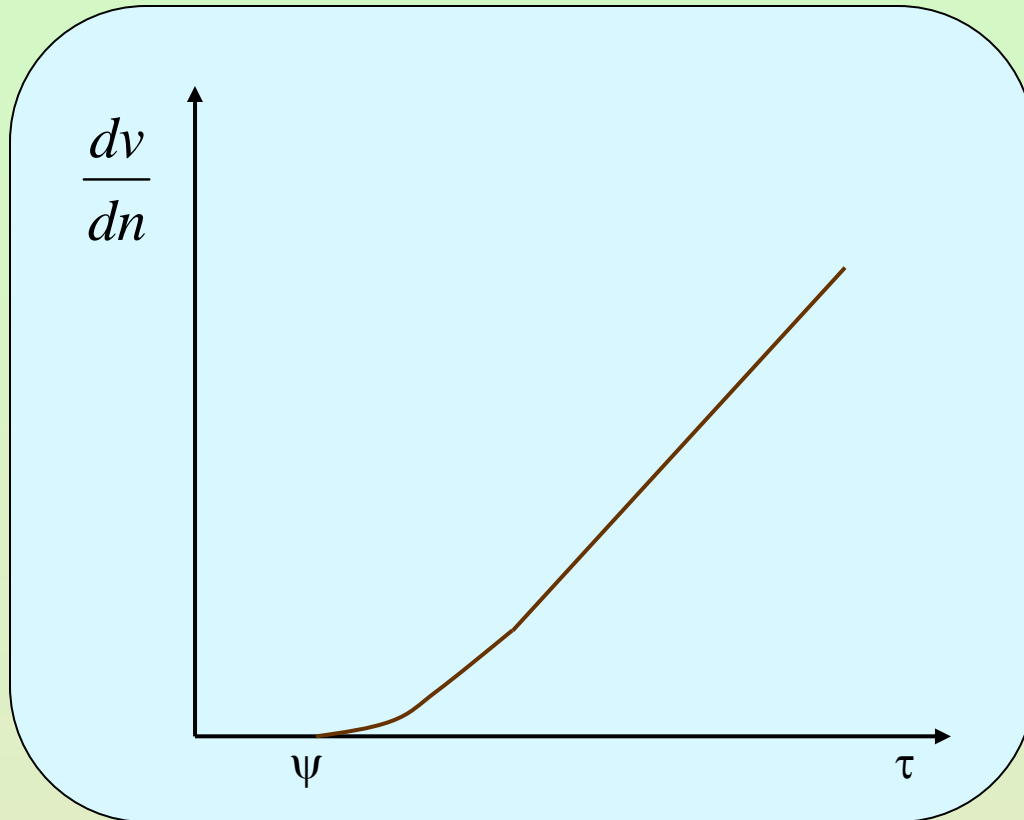
$$Q = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta p_L}{4\eta} (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta p_L R^4}{8\eta}$$

La velocità media di scorrimento è:

$$v_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p_L}{8\eta}$$

La dipendenza quadratica da R implica che la velocità sia particolarmente bassa nei tubi capillari

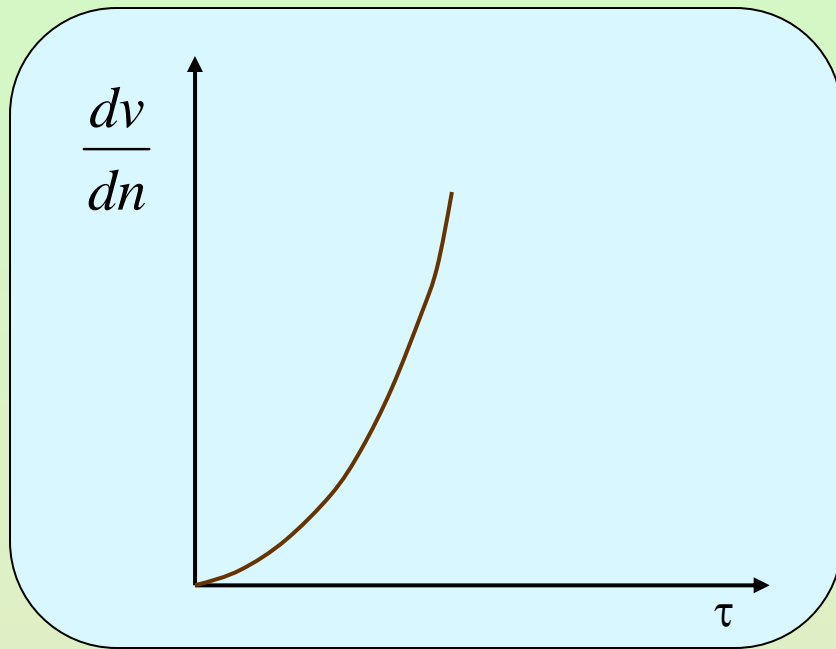
# Fluidi non newtoniani: flusso plastico



## FLUSSO PLASTICO

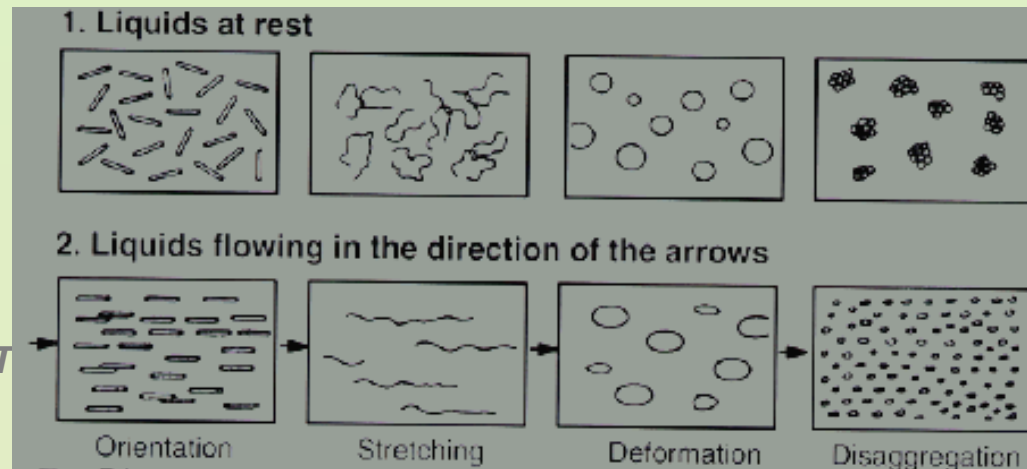
- ✓ Capacità di sostenere sforzi di taglio fino al valore limite di scorrimento  $\psi$
- ✓ Per sforzi più grandi mostrano un comportamento newtoniano
- ✓ Sospensioni concentrate, nelle quali il materiale in sospensione dà una certa coesione al sistema

# Flusso pseudoplastico

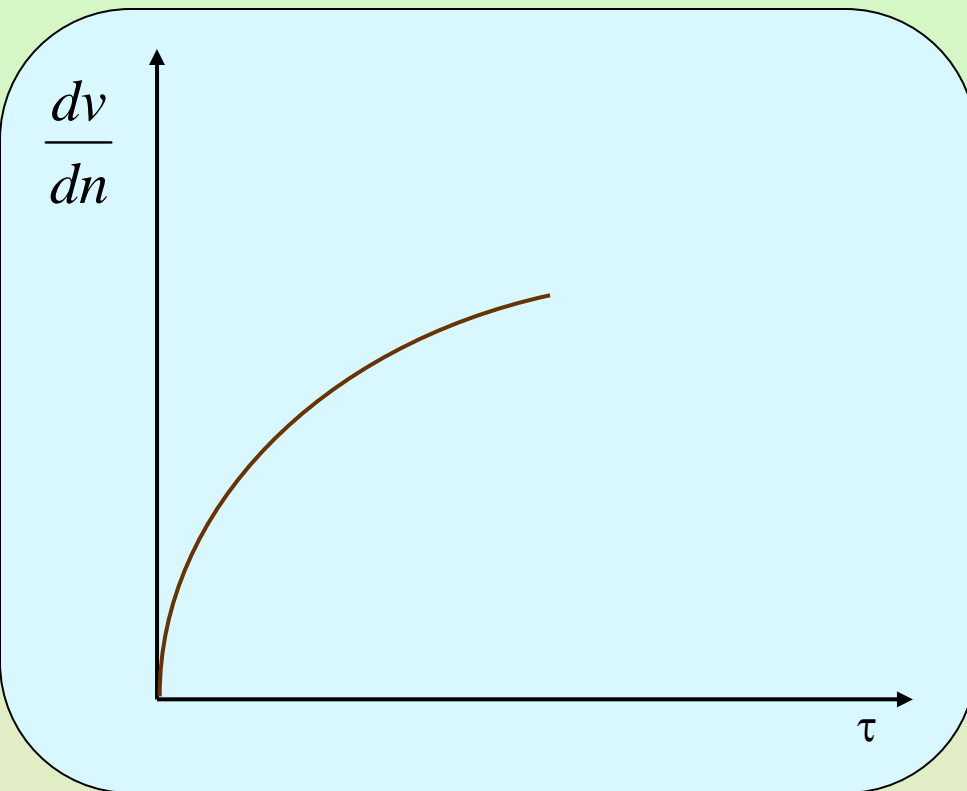


- ✓ Si ha scorrimento anche per piccoli sforzi applicati
- ✓ La viscosità diminuisce al crescere dello sforzo (shear thinning)
- ✓ Argilla
- ✓ Sistemi colloidali
- ✓ Cemento liquido
- ✓ Polimeri in sospensione

FISICA – CT



# Flusso dilatante



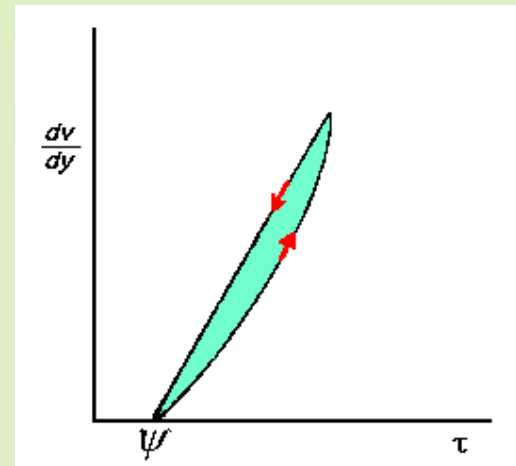
- ✓ La viscosità aumenta con lo sforzo applicato (shear thickening)
- ✓ Sospensioni di particelle solide ad elevata concentrazione
  - ✓ Amido in acqua
  - ✓ Paste all'ossido di zinco
- ✓ Lo scarso veicolo liquido presente è in grado di garantire modesti scorrimenti
- ✓ Al crescere del moto di flusso, l'agitazione delle particelle in sospensione fa aumentare gli spazi interstiziali che non possono essere facilmente colmati dal liquido → aumento della viscosità

# Tissotropia



- Spesso la curva del reogramma percorsa per sforzi crescenti non coincide con quella percorsa per sforzi decrescenti → tissotropia
- E' importante anche il tempo per il quale è applicato lo sforzo
- Si tratta si materiali che hanno una struttura non molto stabile
  - Quiete: consistenza di un gel
  - Sforzi: la struttura si disgrega → fluidità
  - La struttura si ricostituisce lentamente al cessare della sollecitazione

FISICS - CTF





# Moto turbolento – Numero di Reynolds

Se il raggio è grande, c'è un valore critico della velocità, al di sopra del quale il moto cessa di essere laminare.

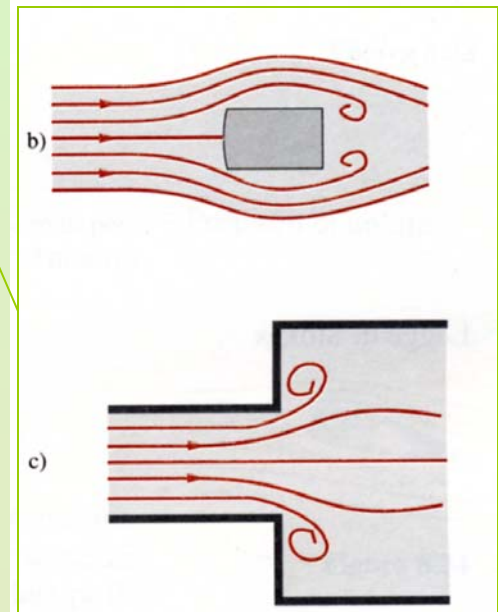
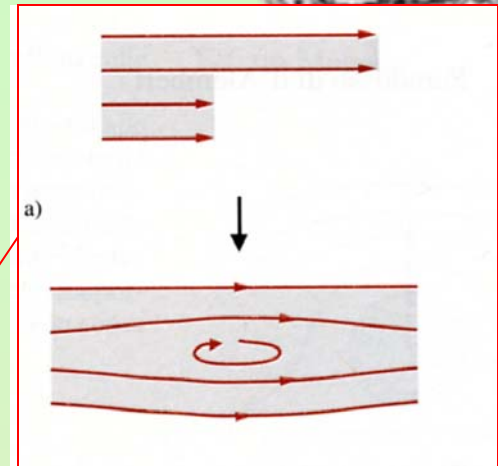
Grandi variazioni di velocità ortogonalmente alla direzione di flusso → consistenti forze di attrito viscoso → creazione di vortici

Si instaurano vortici anche in presenza di ostacoli o variazioni brusche della forma del condotto

Il regime di flusso è laminare quando il parametro adimensionale (numero di Reynolds):

$$\mathcal{R} = \frac{2\rho v R}{\eta}$$

è inferiore a circa 2300. Il moto è turbolento sopra il valore di 4000. Determinazione sperimentale → Osborne Reynolds 1883

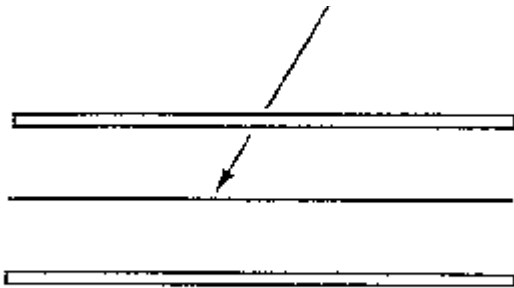




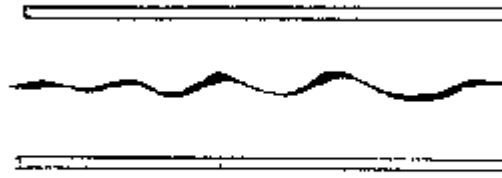
# Turbolenza



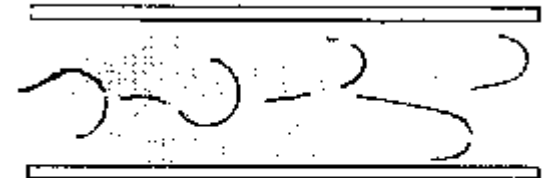
Filamento di colorante



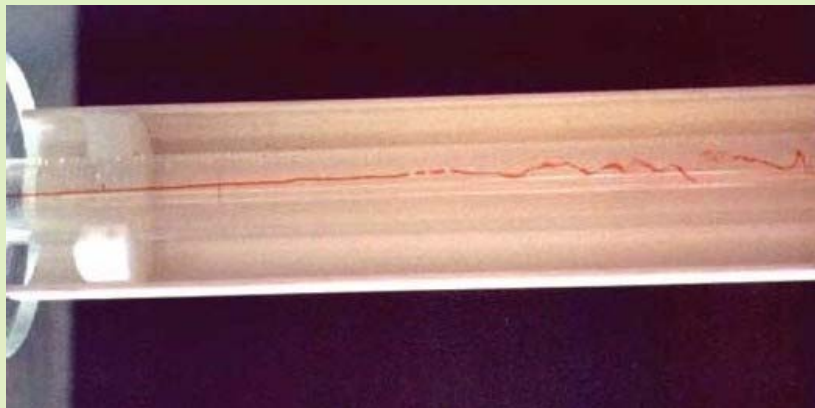
Regime laminare



Regime di transizione



Regime turbolento

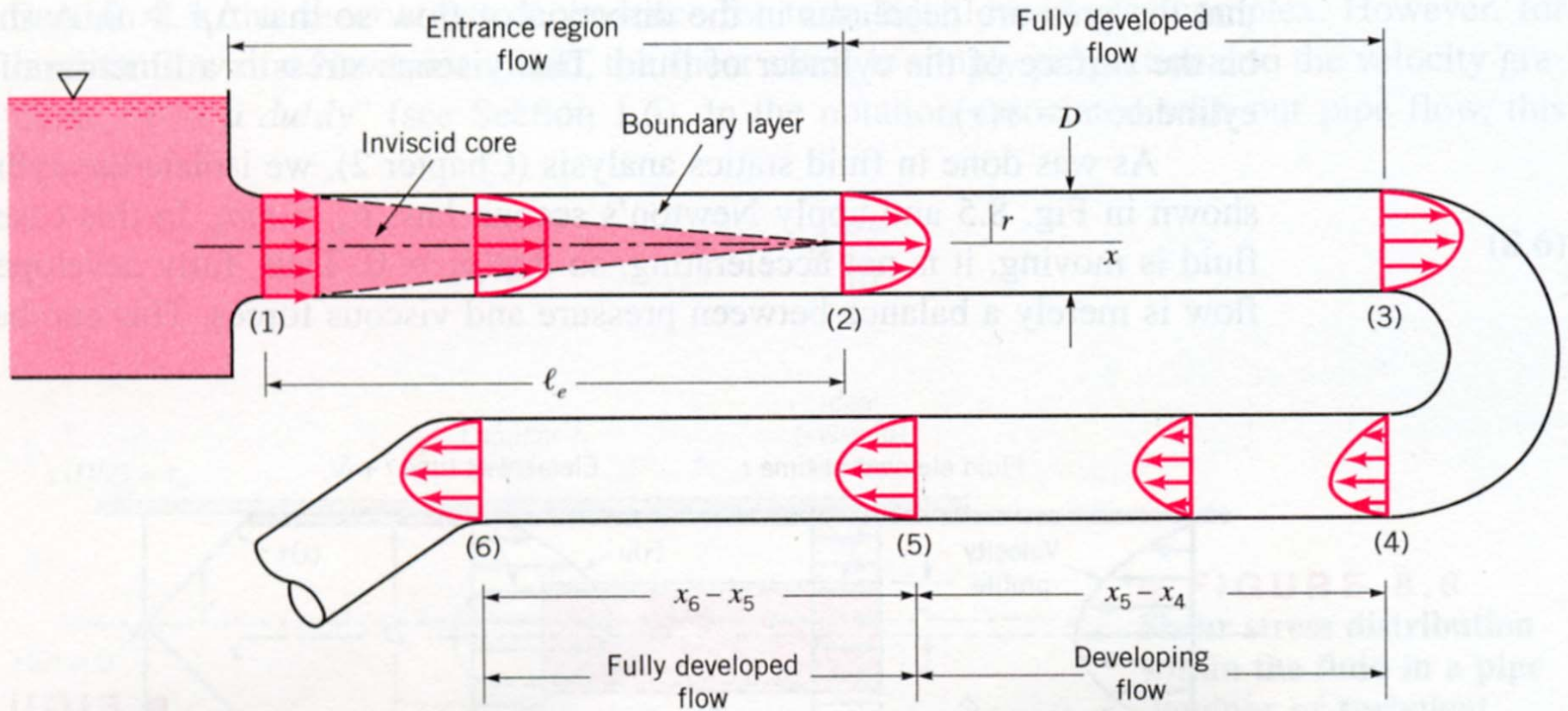


# Regione di ingresso



$$\frac{l_e}{D} = 0.06 \mathcal{R} \text{ per flusso laminare}$$

$$\frac{l_e}{D} = 4.4 \mathcal{R}^{1/6} \text{ per flusso turbolento}$$



■ **FIGURE 8.3** Entrance region, developing flow, and fully developed flow in a pipe system.



# Moto turbolento

Al crescere della velocità, si supera un valore critico che segna il termine del regime laminare.

$$v_c = \frac{\mathcal{R}_c \eta}{\rho 2R} = \frac{2300 \eta}{\rho 2R}$$

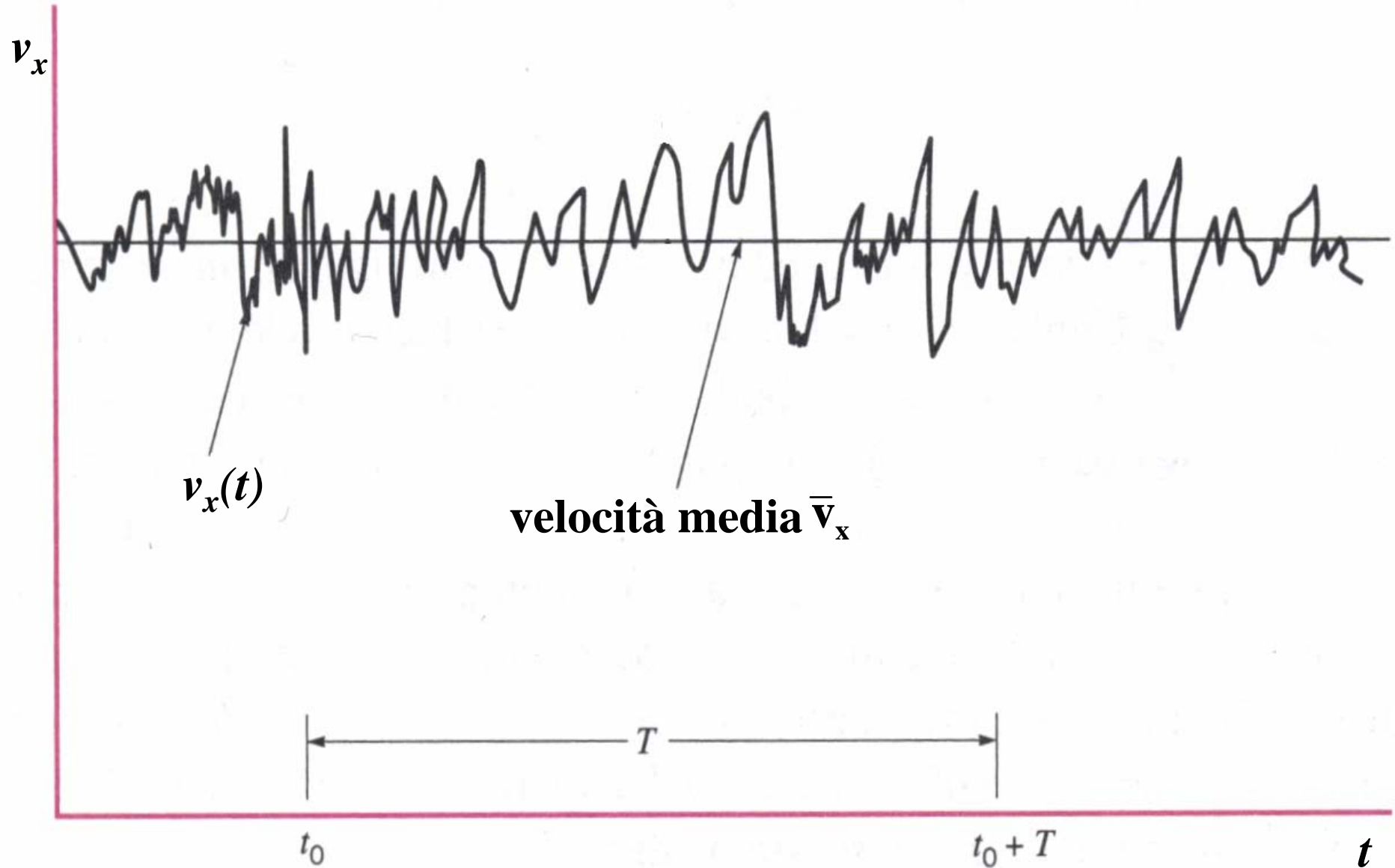
Si ha inizialmente una marcata diminuzione di portata (a pari  $\Delta p$ ) e un regime di moto instabile. Aumentando la differenza di pressione si raggiunge un flusso stabile in regime turbolento. La relazione tra velocità e differenza di pressione non è più quella prevista dalla legge di Hagen-Poiseuille, ma:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\eta v_m}{R^2}$$

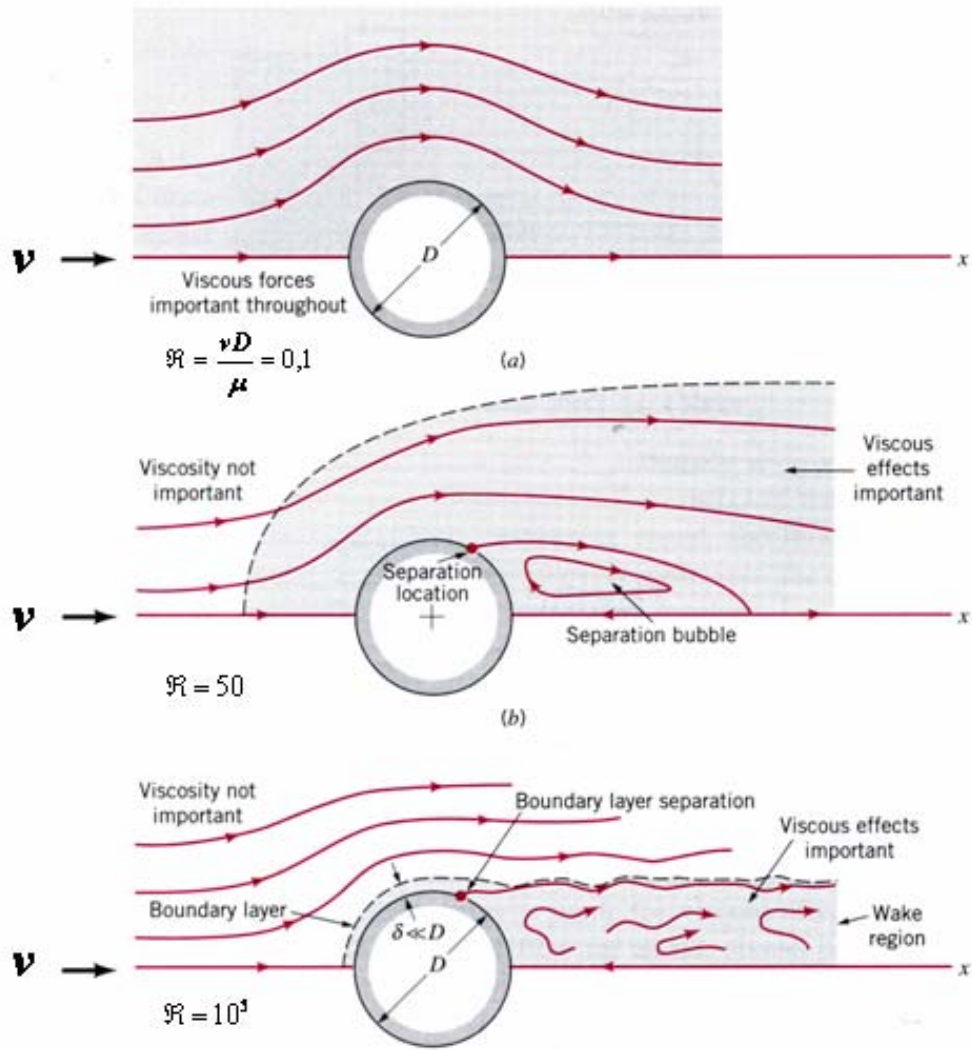
$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{k \rho v_m^2}{2R}$$

In regime turbolento il gradiente di pressione necessario per mantenere una data portata è proporzionale al **quadrato della velocità** di efflusso. La costante  $k$  è detta **coefficiente di resistenza**

# Fluttuazioni della velocità in flusso turbolento



# Flusso attorno ad un oggetto

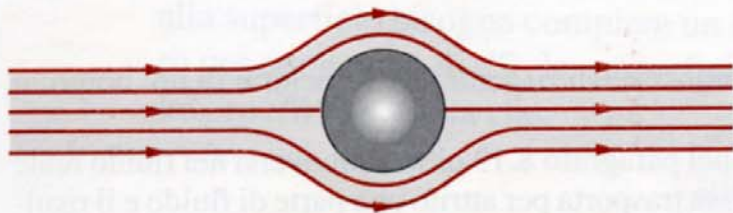




# Moto in un fluido



- ✓ Si consideri una sfera in un fluido in movimento.
- ✓ Fluido ideale → simmetria delle linee di flusso → non c'è differenza di pressione a monte e a valle della sfera
- ✓ La sfera non subisce alcuna forza (paradosso di d'Alembert)



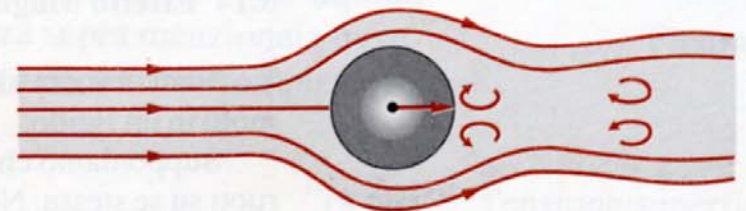
a)

- ✓ Se il fluido è reale si perde la simmetria delle linee di flusso
- ✓ Se la velocità è alta si forma una scia vorticoso
- ✓ La pressione a valle è minore di quella a monte → **forza sulla sfera**
- ✓ L'entità della resistenza del mezzo dipende dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto:

$$F_{res} = \frac{1}{2} c S r v^2$$

- ✓ **c** e' costante in regime **vorticoso** e  $\propto 1/v$  in regime **laminare**
- ✓ Sfere con piccola velocità: legge di Stokes

$$F_{res} = 6\pi\eta Rv$$

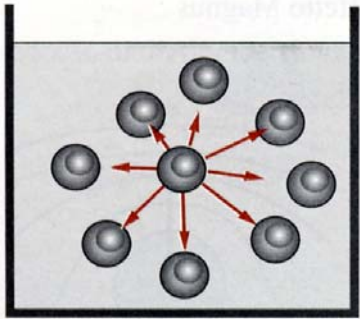


b)

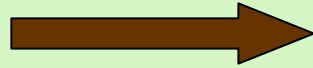


# Tensione superficiale / 1

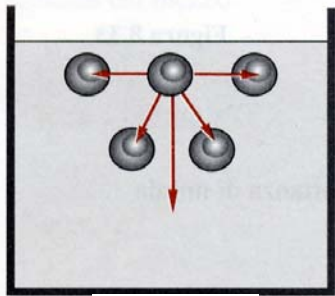
La tensione superficiale è dovuta alle forze di **coesione** nel liquido



$F=0$



Su di una molecola all'interno del liquido, la forza netta è nulla



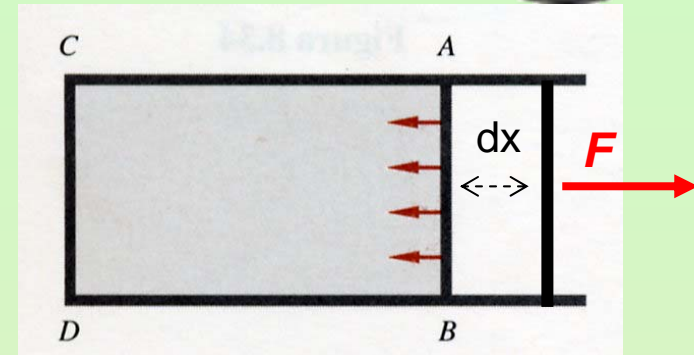
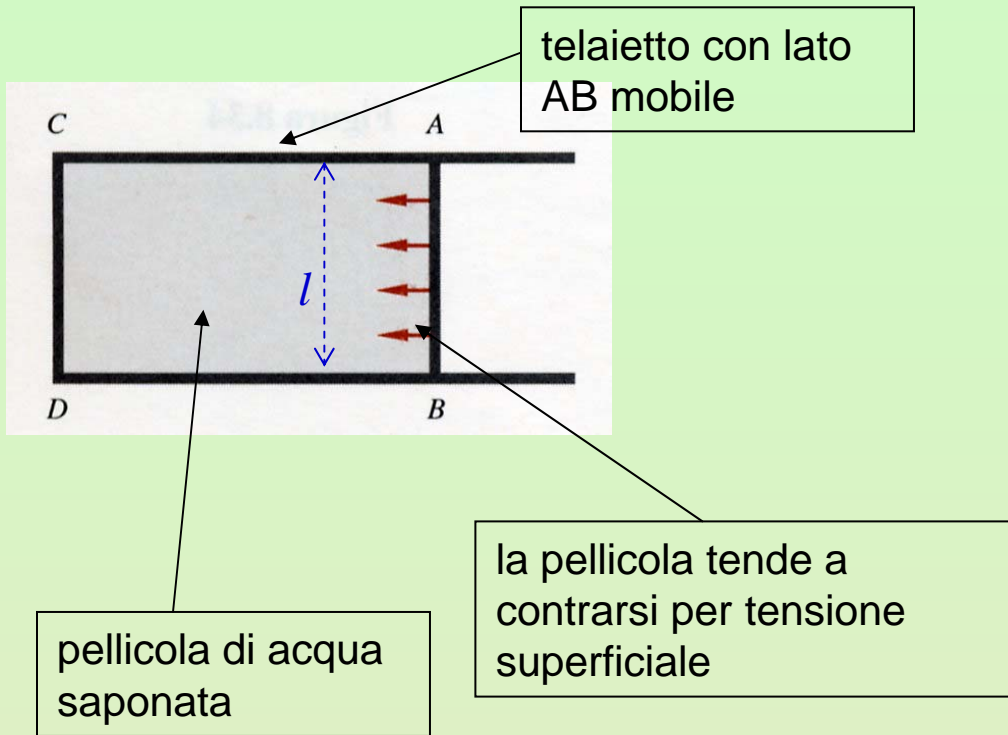
$F \neq 0$



Su di una molecola sulla superficie c'è una forza netta diretta verso l'interno

L'aumento della superficie libera di un liquido non può avvenire spontaneamente

# Tensione superficiale / 2



Lavoro fatto contro la tensione superficiale:

$$dL = F dx = \tau l dx = \tau dS$$

$$\tau = \frac{dL}{dS}$$

La tensione superficiale  $\tau$  è definita come

$$\tau \equiv \frac{F}{2l}$$



# Tensione superficiale / 3



Tabella 8.2 Tensione superficiale

Liquido	Mezzo a contatto	T (°C)	$\tau$ (N/m)
alcool etilico	aria	0	$23.5 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	20	$22.3 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	70	$17.3 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	20	$75.6 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	90	$62.9 \cdot 10^{-3}$
acqua	benzene	20	$35.0 \cdot 10^{-3}$
acqua	etere etilico	20	$20.7 \cdot 10^{-3}$
benzene	aria	20	$28.9 \cdot 10^{-3}$
etere etilico	aria	20	$16.8 \cdot 10^{-3}$
glicerina	aria	20	$65.0 \cdot 10^{-3}$
mercurio	aria	20	$52.0 \cdot 10^{-2}$
mercurio	acqua	20	$37.5 \cdot 10^{-2}$
mercurio	benzene	20	$35.7 \cdot 10^{-2}$
olio d'oliva	aria	20	$34.0 \cdot 10^{-3}$

# Tensione superficiale / 4



Si consideri una bolla di sapone di raggio  $R$ . Per un aumento  $dR$  del raggio il lavoro delle forze di pressione è:

$$dW = (p_i - p_e)SdR = 4\pi(p_i - p_e)R^2dR$$

A questo aumento si oppone la tensione superficiale con un lavoro

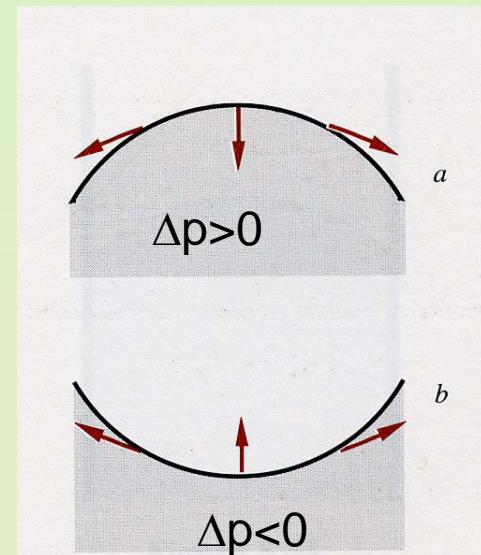
$$dW_\tau = -2\tau dS = -2\tau d(4\pi R^2) = -16\pi\tau R dR$$

Il fattore 2 è dovuto al fatto che la bolla ha 2 facce. La condizione di equilibrio corrisponde a lavoro totale nullo:

$$(p_i - p_e) = \frac{4\tau}{R}$$

Nel caso di una superficie sferica che delimita una massa liquida, l'eccesso di pressione che c'è nella parte interna rispetto a quella esterna è (c'è una sola superficie e non 2):

$$\Delta p = \frac{2\tau}{R}$$



# Capillarità / 1



L'adesione con il recipiente predomina sulla coesione: Menischi concavi.

Il liquido "bagna" il recipiente

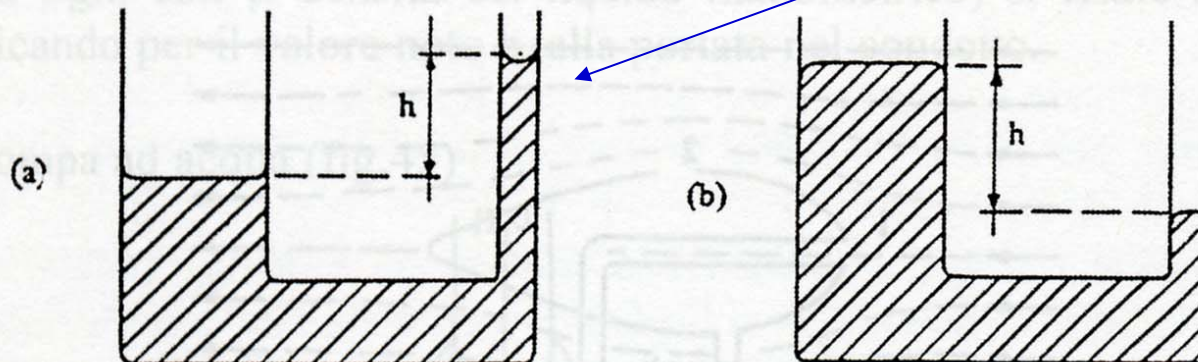
La coesione predomina sull'adesione con il recipiente: Menischi convessi.

Il liquido non "bagna" il recipiente

Il dislivello  $h$  è legato alla pressione creata dalla tensione superficiale. Si applica Stevino alla fig. a

$$p_0 = p_0 + \rho gh - \frac{2\tau}{R}$$

$$\frac{2\tau}{R} = \rho gh$$



dove  $R$  è il raggio di curvatura del menisco, supposto sferico

# Capillarità / 2



Il raggio di curvatura  $R$  è legato al raggio  $R'$  del capillare dalla relazione  $R' = R \cos \alpha$  dove  $\alpha$  è l'angolo di attacco

$$\frac{2\tau}{R} = \rho g h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g R'}$$

Questa espressione è nota come **Legge di Jurin**

Angolo di attacco

