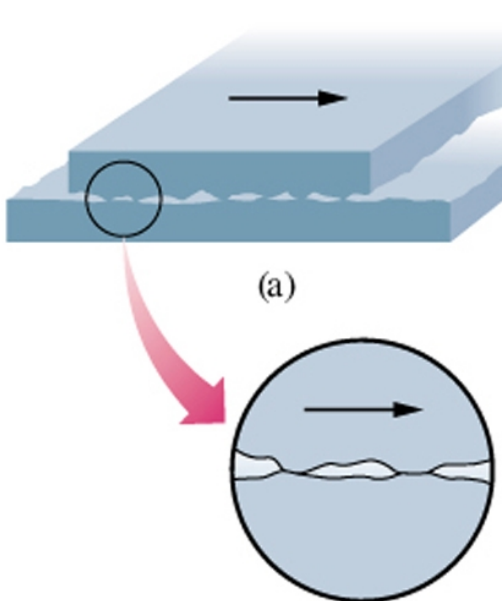


# Attrito radente

Se sul pavimento è appoggiata una grande cassa e la si spinge con una forza orizzontale  $F$ , è possibile che la cassa non si muova affatto. La ragione è che il pavimento esercita una **forza di attrito radente statico**  $f_s$ , che equilibra la forza  $F$ .

Questa forza di attrito è dovuta ai legami che si stabiliscono tra le molecole della cassa e quelle del pavimento nei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto.

**La forza di attrito statico** può variare da zero ad una forza massima  $f_{smax}$ , a seconda della forza con cui si spinge; *se la forza  $F$  è sufficientemente intensa, la cassa striscerà sul pavimento.*



Mentre la cassa striscia si creano e si rompono continuamente legami molecolari e si rompono piccoli frammenti delle superfici:

il risultato è una **forza di attrito radente dinamico** (o attrito cinetico)  $f_d$  che si oppone al moto.

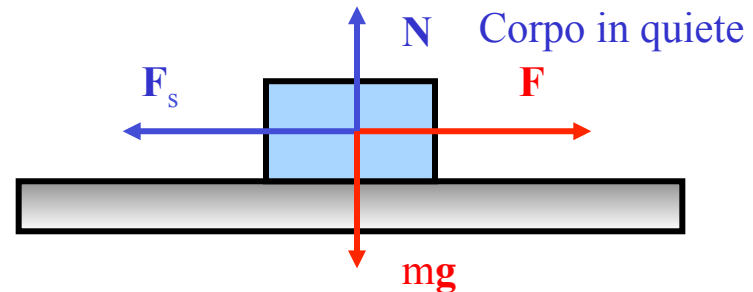
*Perché la cassa continui a strisciare con velocità costante occorre esercitare una forza uguale ed opposta alla forza di attrito dinamico.*

# Attrito radente statico

Se si applica ad un corpo appoggiato su un tavolo, una forza  $F$  parallela al piano di appoggio, si osserva che il corpo entra in movimento per effetto di  $F$  solo se  $F$  è maggiore di  $\mu_s N$

$F \leq \mu_s N$       **Condizione di quiete**

$F > \mu_s N$       **Condizione di moto**



dove:  $\mu_s$  è un **coefficiente** adimensionale detto **coefficiente di attrito radente statico**.

Il vincolo è in grado di sviluppare una forza di attrito statico radente  $F_s$  uguale e contraria alla forza applicata  $F$  fino a quando  $F$  non supera il valore  $\mu_s N$ .

Dunque la forza di attrito statico  $F_s$  può variare fra zero e un valore massimo che è proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui è appoggiato il corpo. E' sempre **tale da opporsi al moto**. Direzione e verso sono indicati in figura.

# Attrito radente dinamico

Quando il corpo **entra in movimento** lungo il piano, si osserva una forza che si oppone al moto, **la forza di attrito dinamico radente**. Questa forza ha sempre **direzione uguale** a quella della **velocità** dell'oggetto, **verso contrario** e modulo **proporzionale** alla **reazione vincolare normale al piano** su cui si muove l'oggetto:

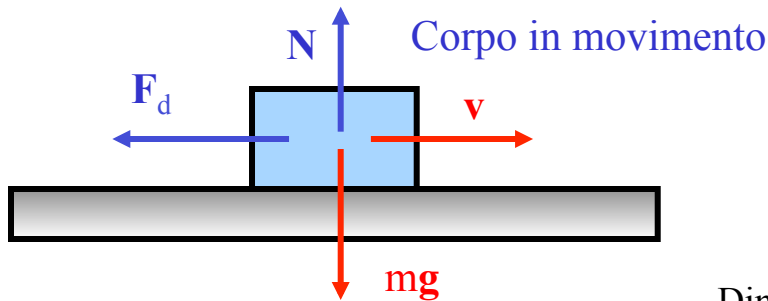
$$\mathbf{F}_d = -\mu_d N \mathbf{u}_v \quad \text{con } \mathbf{u}_v: \text{versore con direzione e verso della velocità}$$

$$|\mathbf{F}_d| = \mu_d N \quad \text{Dove: } \mu_d \text{ e' il coefficiente adimensionale detto}$$

**coefficiente di attrito radente dinamico.**

L'equazione del moto del punto soggetto a forza esterna  $F$  diviene:  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_d = \mathbf{F} - \mu_d N \mathbf{u}_v = m\mathbf{a}$

Lungo la direzione del moto:  $F - \mu_d N = ma$



**Sperimentalmente** si trova che:

- $\mu_d$  è **minore**  $\mu_s$ ;
- per velocità comprese tra circa 1 cm/s e parecchi metri al secondo  $\mu_d$  è **praticamente costante**;
- $\mu_d$  (come  $\mu_s$ ) **dipende dalla natura delle superfici**, **ma è indipendente** dall'area (macroscopica) di contatto.

# Coefficienti di attrito radente

Il coefficiente di **attrito statico** è in generale **maggiore** del coefficiente di **attrito dinamico**. Alcuni esempi:

Superfici	$\mu_s$	$\mu_d$
Legno su pietra	0.7	0.3
Gomma su cemento asciutto	0.65	0.5
Gomma su cemento bagnato	0.4	0.35
Gomma su ghiaccio	0.2	0.15
Acciaio su acciaio asciutto	0.15	0.12

Questi valori sono indicativi, infatti i coefficienti di attrito **dipendono** molto dallo **stato delle superfici**, dalla **temperatura**, dall'**umidità**, ecc..

**Vengono valutati sperimentalmente**

# Gli attriti sono uguali a tutte le altre forze?

Abbiamo visto che gli attriti, se presenti, vanno considerati forze da includere nell'equazione del moto come tutte le altre. Tuttavia c'è una differenza sostanziale tra gli attriti e le altre forze che va sottolineata:

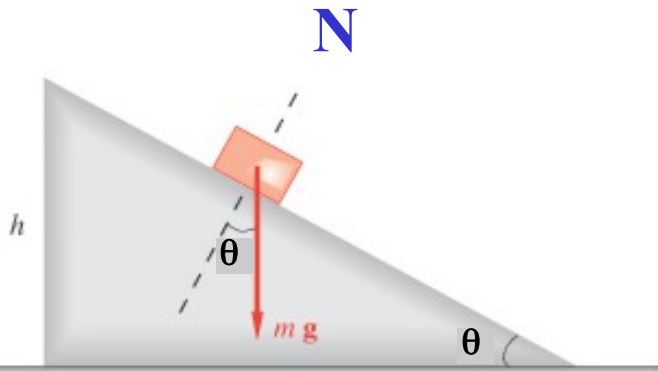
**Gli attriti sono forze che si esercitano solo in presenza di moto (o tentativo di moto)**

Se appoggiamo un blocco su una superficie piana che abbia un certo coefficiente di attrito e non spingo il blocco parallelamente alla superficie, **NON** ho presenza di forza di attrito (mentre, ad esempio, agiscono la forza peso e la reazione vincolare del piano).

**Gli attriti non sono in grado di generare moto, ma solo di opporvisi**

# Il piano inclinato

consideriamo un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa  $m$ , che possa muoversi, sotto l'azione della suo peso e di eventuali altre forze (ad esempio la forza di attrito) lungo una **superficie inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale**



## In assenza di attrito:

Se sul corpo agisce la sola forza peso si ha:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Dove  $\mathbf{N}$  è la reazione vincolare del piano di appoggio che ha una direzione normale al piano. Scomponendo la relazione lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano si ottiene (vedi dettagli e calcoli nell'esempio seguente):

Direzione ortogonale al piano:  $mg \cdot \cos\theta - N = 0$   $\implies$   $N = mg \cdot \cos\theta$

*Reazione vincolare*

Direzione parallela al piano:  $mg \cdot \sin\theta = ma$   $\implies$   $a = g \cdot \sin\theta$

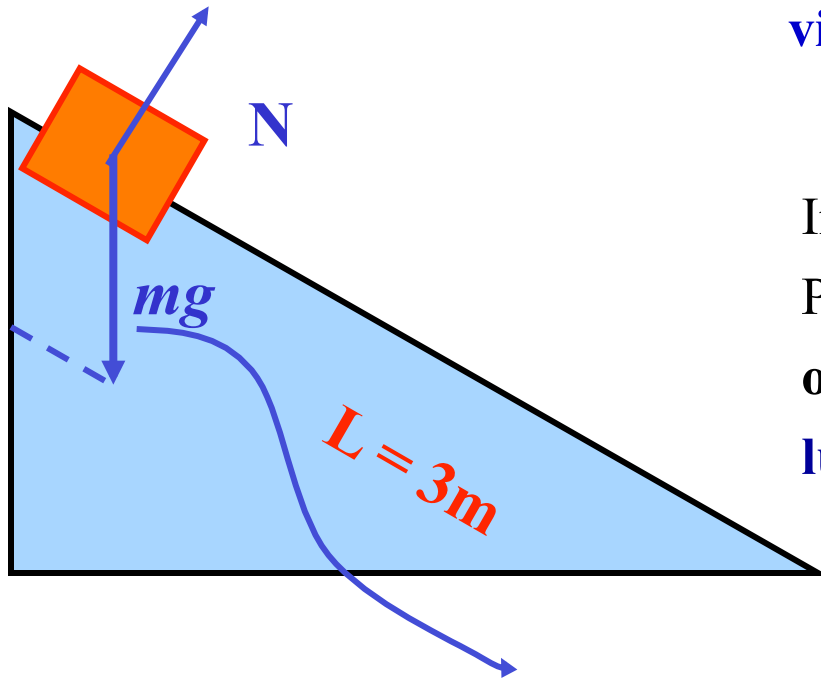
*Il corpo scende lungo il piano con moto uniformemente accelerato e l'accelerazione  $a = g \sin\theta < g$*

# Il piano inclinato: esempio

Una cassa di  $m=30$  kg scivola lungo un pianale inclinato di  $30^\circ$ . Quanto tempo impiega la cassa per raggiungere la base del pianale se questo è lungo  $3$  m? Con quale velocità la cassa raggiunge il suolo, se la velocità iniziale è nulla?

è importante disegnare su un grafico la situazione descritta nel testo e tracciare tutte le forze agenti con direzione e verso corretti :le forza sono il peso  $mg$  e reazione

vincolare  $N$



Forza peso

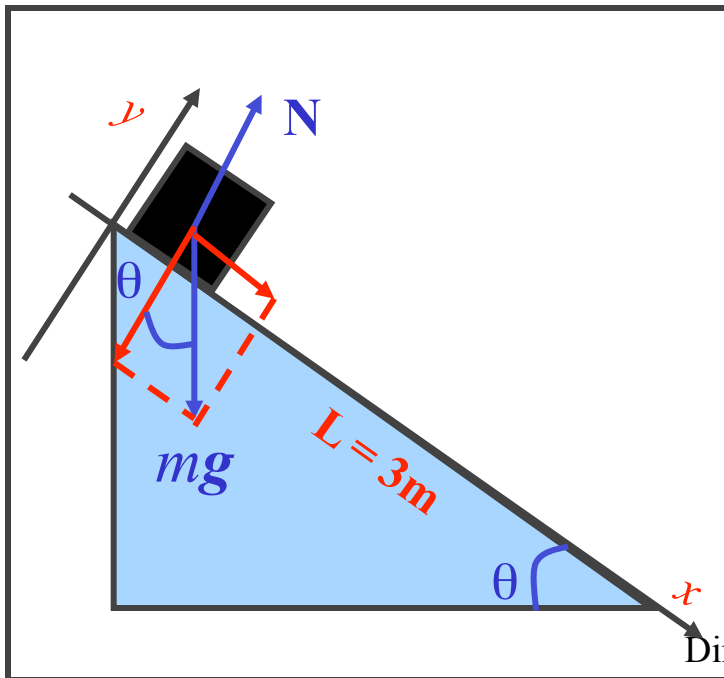
In quale sistema di riferimento mi metto?  
Posso scegliere tra il sistema con  $x$  orizzontale e  $y$  verticale e quello con  $x$  lungo il piano inclinato e  $y$  lungo  $N$

# Equazione del moto

Quale delle due scelte è la migliore? Quella più semplice per la descrizione del moto che avviene lungo una retta

il piano **inclinato agisce da vincolo** → l'accelerazione in direzione **ortogonale** ad esso è **nulla**  
sistema di riferimento con l'asse **x parallelo al piano** inclinato l'equazione del moto è **più semplice**.

Si deve scrivere l'**equazione di Newton** per la cassa. lungo x e y



$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = ma_y \end{cases}$$

L'**accelerazione** lungo l'asse **y** deve essere **nulla** per la presenza del vincolo. Pertanto:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = 0 \end{cases}$$



# Esempio : Legge oraria

ci sono due incognite, il modulo  $N$  della reazione vincolare e l'accelerazione lungo  $x$ ,  $a_x$ ) e due equazioni indipendenti tra loro  $\rightarrow$  problema ha soluzione.

La prima equazione fornisce l'accelerazione:

$$mg \sin \theta = ma_x$$



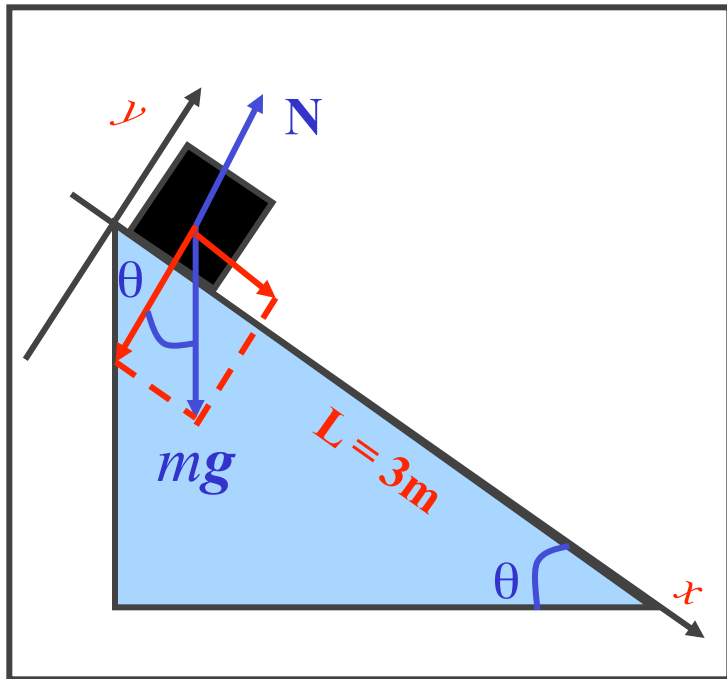
$$a_x = g \sin \theta$$

$$a_x = g \sin 30 = 9,81 \cdot \frac{1}{2} = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La seconda, il modulo della reazione vincolare:

$$N = mg \cos \theta$$

$$N = 30 \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 30 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 254,87 \text{N}$$



# Esempio : Soluzione

*L'accelerazione  $a_x$  è costante.*

**Il moto lungo il piano inclinato è quindi uniformemente accelerato.** Abbiamo già analizzato questo moto in cinematica, e quindi conosciamo già la **legge oraria corrispondente**:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_x(t - t_0)^2$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_x(t - t_0)$$

Se scegliamo l'**origine** del **sistema di assi** nel punto di **partenza della cassa** e fissiamo l'origine dei tempi in  $t_0 = 0$ , le espressioni diventano:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_x t^2$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_x t$$

Ricordando la condizione iniziale sulla velocità (il testo del problema dice che la velocità iniziale  **$\mathbf{v}_0$  è nulla**) otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_x t^2 \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}_x t \end{array} \right.$$

# Esempio : Soluzione

Interessa il tempo impiegato dalla cassa a percorrere la lunghezza  $L$  del pianale e la velocità con cui raggiunge il fondo. ( $\Rightarrow x = L = 3\text{m}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2L}{a_x}} = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} \\ v(t) = a_x \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} = g \sin \theta \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} = \sqrt{2gL \sin \theta} \end{array} \right.$$

**Sostituendo i dati numerici:**

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{2L/g \sin \theta} = \sqrt{(2 \cdot 3\text{m}) / (9.8\text{m/s}^2 \cdot 0.5)} = 1.11\text{s} \\ v = \sqrt{2gL \sin \theta} = \sqrt{2 \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 0.5 \cdot 3\text{m}} = 5.4\text{m/s} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 1,1\text{s} \\ v = 5,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} \right.$$
$$v = \sqrt{2gL \sin \theta} = \sqrt{2gh} = 5.4\text{m/s}$$

# Il piano inclinato

## In presenza di attrito:

Da quanto visto in precedenza risulta che la componente della forza peso lungo la direzione del piano inclinato vale

$$mg \cdot \sin\theta$$

Se è presente una forza di attrito, la forza di attrito statico diretta in verso opposto a quella del moto può valere al massimo  $F_s = \mu_s N$ . Il moto lungo il piano può iniziare se

$$mg \cdot \sin\theta > \mu_s N \quad \Rightarrow \quad \cancel{mg} \cdot \sin\theta > \mu_s \cancel{mg} \cdot \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta > \mu_s$$

Per avere **moto** occorre **aumentare l'angolo** in modo da soddisfare la condizione di sopra. Dal **momento in cui inizia il moto**, vale invece la **seguinte equazione** nella direzione del piano:

$$mg \cdot \sin\theta - \underbrace{\mu_d mg \cdot \cos\theta}_{|F_a|} = ma \quad \Rightarrow \quad a = (\sin\theta - \mu_d \cos\theta)g$$

$$|F_a| = \mu_d N$$

$$(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) > 0 \Rightarrow \tan\theta > \mu_d \Rightarrow a > 0 \quad \text{m. uniform. accelerato}$$

$$\tan\theta \leq \mu_d \quad \Rightarrow \quad \text{Non ha accelerazione se è fermo resta fermo}$$

# Forza elastica

Se sottoposti ad una sollecitazione  $\mathbf{F}$ , i corpi **solidi** subiscono una **deformazione**.

Per **conservare la loro forma**, applicano, a chi ha prodotto la deformazione, una **forza di richiamo**  $\mathbf{F}_{el}$  (opposta a  $\mathbf{F}$ ) che, per piccole deformazioni, è proporzionale alla deformazione stessa (**comportamento elastico**).

Una volta rimossa la sollecitazione ritornano allo stato normale.

Si definisce **Forza elastica**: *una forza di direzione costante, con verso sempre rivolto ad un punto  $O$ , chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da  $O$*

$$\mathbf{F}_{el} = -kx\mathbf{u}_x$$

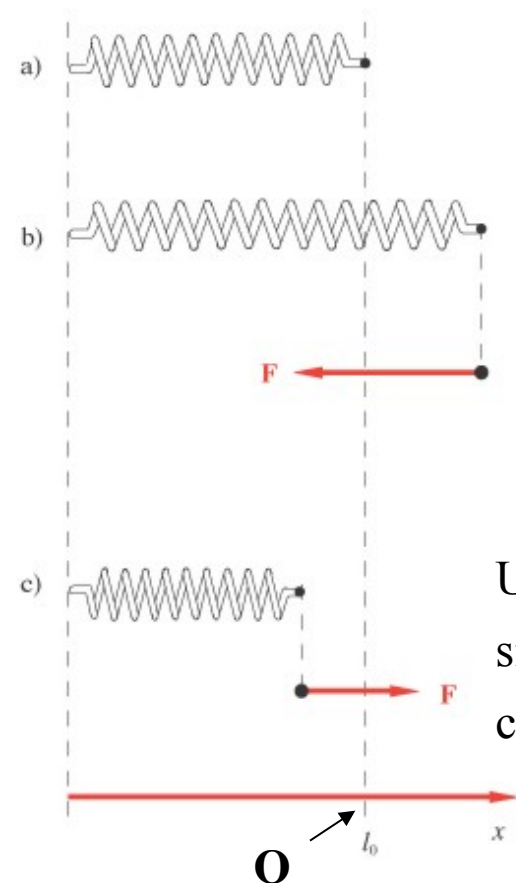
**Legge di Hooke**

Con:  $k$  costante positiva detta costante elastica [N/m]

$\mathbf{u}_x$ : versore dell'asse  $x$ , in cui avviene il moto

Una molla presenta in genere una lunghezza a riposo ( $l_0$ ) quando non si trova in condizione di compressione o di estensione. Identificando con  $l$  la lunghezza della molla compressa o estesa si ha.  $x=l-l_0$

Dinamica (legge di Newton)



# Forza elastica

*Che tipo di moto risulta dall'applicazione di una forza elastica?*

$$F(t) = ma(t) \Rightarrow a(t) = \frac{F(t)}{m} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(t) = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x(t) \\ \text{con } \frac{k}{m} = \omega^2 \\ F(t) = -kx(t) \end{array}$$

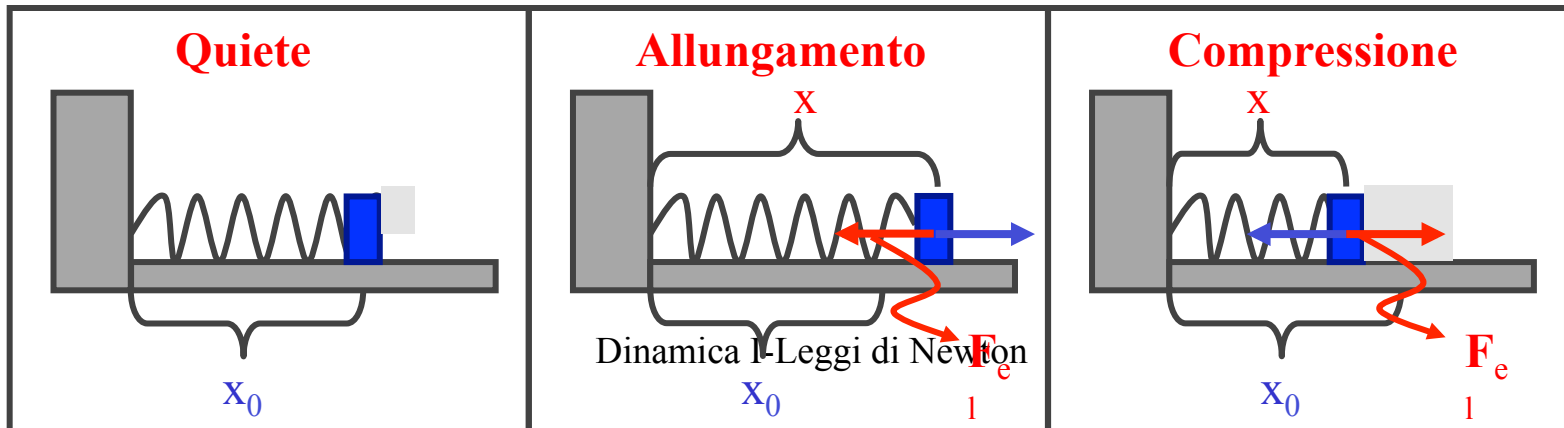
*Dalla cinematica è stato ricavato che:*

se vale la relazione  $a(t) = -\omega^2 x(t)$  allora  $x(t)$  rappresenta un **moto armonico**.  
 seguente tra  $a(t)$  e  $x(t)$ :

Il moto che risulta dall'applicazione di una forza elastica, è un moto armonico con pulsazione e periodo dati da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

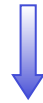
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



# Forza di attrito viscoso

E' una forza che si oppone al moto ed *proporzionale alla velocità* del corpo soggetto a tale forza:

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$$



$$\mathbf{F} = ma \Rightarrow ma = -b\mathbf{v} \Rightarrow a = -\frac{b\mathbf{v}}{m}$$

Le forze di attrito viscoso sono esercitate su un corpo che si muove in un fluido (liquidi o gas)

# Forza di attrito viscoso e il moto

A partire dal valore della forza si può studiare il tipo di moto a cui essa dà origine

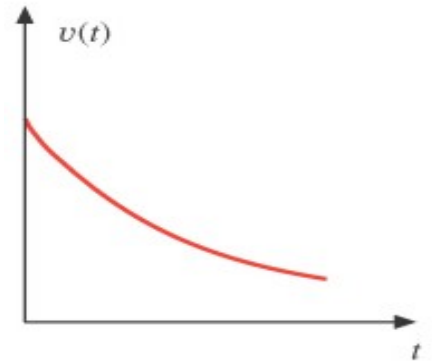
$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = -\frac{b}{m}\mathbf{v}$$

In una dimensione, studiamo il moto con accelerazione non costante:

$$a = -kv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -kv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -k dt$$

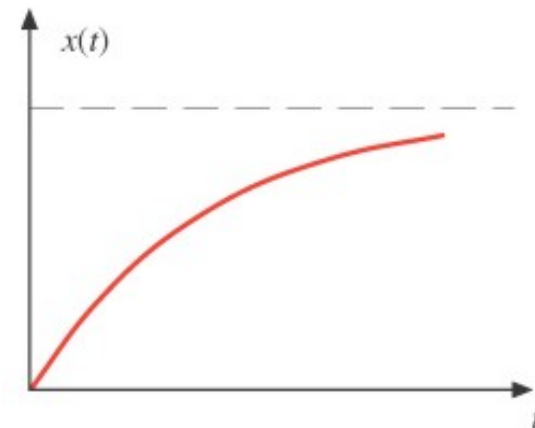
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_{t_0}^t -k dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-kt}$$

*La velocità decresce esponenzialmente nel tempo e quindi il punto si ferma*



$$x(t) = \cancel{x_0} + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0 [e^{-kt}]_0^t}{k}$$

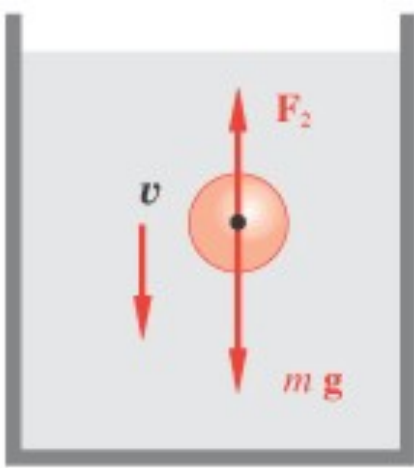
$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$



*Il punto tende asintoticamente alla posizione  $v_0/k$*



# Forza di attrito viscoso e il moto



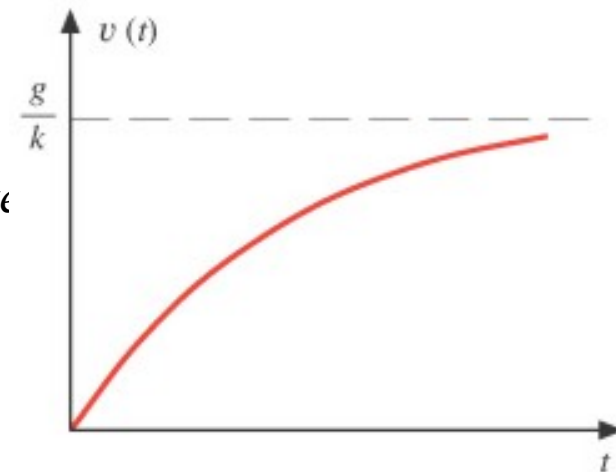
Si consideri un punto materiale di massa  $m$  lasciato cadere in un fluido e si assuma che le uniche forze agenti siano la forza peso  $\mathbf{F}_1 = m\mathbf{g}$  e la forza di attrito viscoso  $\mathbf{F}_2 = -km\mathbf{v}$  (**pongo per comodità  $\mathbf{b} = k\mathbf{m}$** ) Il moto avviene solo sull'asse  $z$ . *Condizioni iniziali:*  $z=0$  e  $v=0$  per  $t=0$ .

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a} \Rightarrow \cancel{mg} - \cancel{kmv} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k} [\ln(g - kv)]_0^v = t$$

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

*Partendo da 0 la velocità cresce, però sempre più lentamente per  $t \gg 1/k$ ,  $v$  assume praticamente un valore costante  $g/k$ .*



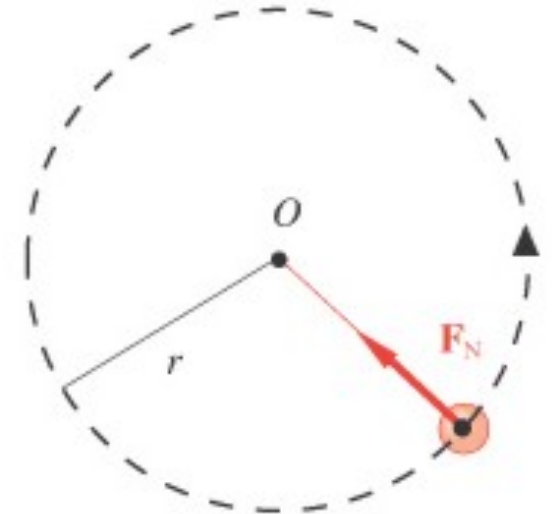
# Forze centripete

Supponiamo che la risultante delle forze agenti  $\mathbf{R}$  su un punto materiale presenti una *componente normale alla traiettoria*, questa componente causa *l'accelerazione centripeta* dell'oggetto:

$$F_N = ma_N = m \frac{v^2}{r} \quad \text{dove } r: \text{ è il raggio di curvatura della traiettoria.}$$

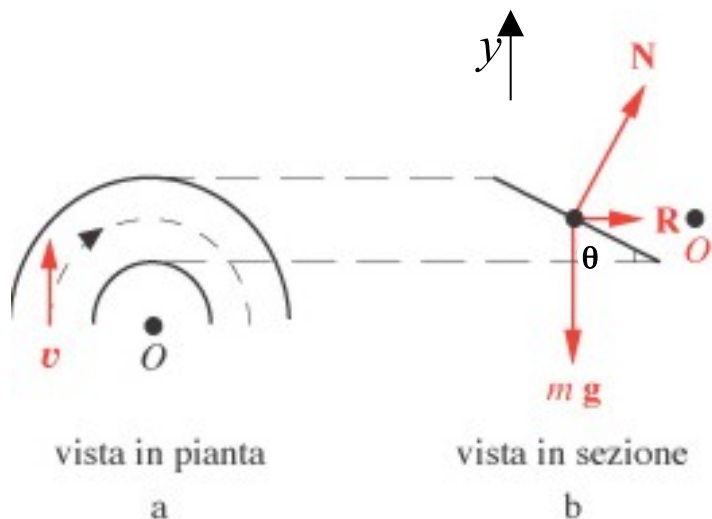
In genere  $\mathbf{R}$  ha anche una componente tangenziale alla traiettoria  $F_T$  non nulla responsabile della variazione del modulo della velocità. Se  $F_T=0$ , il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è  $a_N \rightarrow$  *moto circolare uniforme*

In generale forze centripete sono prodotte da rotaie, pneumatici, fili... ossia vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da forze gravitazionali



# Forze centripete

Si vuole determinare la condizione per cui un corpo lanciato con velocità  $v$  percorre con velocità costante un arco di circonferenza come in figura. La curva è sopraelevata (come quelle presenti in un velodromo) come si può vedere dalla curva vista in sezione.



Occorre che la risultante  $R$  delle forze applicate sia ortogonale alla traiettoria e diretta verso il centro. Le forze agenti sono:

- peso  $P$
- reazione vincolare ortogonale alla pista  $N$

$$N \cos \theta = mg$$

*Equilibrio nella direzione verticale (y)*

$$R = N \sin \theta \Rightarrow R = F_N$$

*Rivolta verso il centro della traiettoria*

$$N \sin \theta = F_N = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{N} \cos \theta}{\cancel{N} \sin \theta} = \frac{\cancel{m} g}{\cancel{m} \frac{v^2}{r}} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{v^2}{gr}$$

# Forze centripete

*Determinare la velocità massima con cui un'auto può affrontare in una strada piana una curva di raggio  $r$*

La **forza centripeta** necessaria è fornita **dall'attrito tra pneumatici e terreno**. Poiché la traiettoria è circolare, non c'è spostamento lungo la direzione di  $r$  e dunque il coefficiente di **attrito** rilevante in questa direzione è quello **statico**:

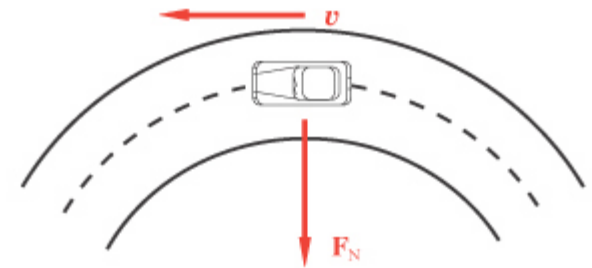
$$F_N = \mu_s N = \mu_s mg$$

*Forza di attrito statico massimo*

$$\cancel{\mu_s mg} = \frac{\cancel{mv^2}}{r}$$

$$v = \sqrt{\mu_s gr}$$

*Velocità massima con cui può essere affrontata la curva*



# Funi e carrucole

**Funi e carrucole** sono dispositivi che permettono di **trasmettere l'azione di una forza applicata** in un dato **punto ad un punto diverso**.

In generale questi dispositivi hanno caratteristiche e limiti fisici ben definiti.

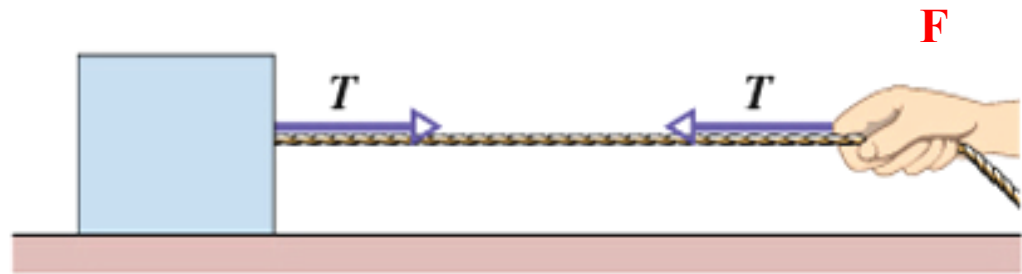
Tuttavia, in molti casi, possiamo descrivere con buona approssimazione il loro funzionamento facendo alcune ipotesi:

## Funi:

✓ *massa trascurabile* ( $m = 0$ )

✓ *inestensibili* ( $L = \text{costante}$ ).

Quest'ultima caratteristica implica che **se applico una forza  $F$**  a un estremo di una fune tesa, questa **risponde con una forza** (chiamata **tensione  $T$** ) che si trasmette lungo la fune in modo tale che ogni punto della corda abbia accelerazione nulla relativamente a tutti gli altri



⇒ **l'accelerazione degli estremi della corda è la stessa.**

# Funi e carrucole

Consideriamo un corpo di massa  $m$  attaccato ad una corda.

- La *corda* è tirata con una forza  $\mathbf{F}$ .
- Si chiami  $\mathbf{F}_1$  la forza che il corpo di massa  $m$  esercita sulla *corda*.
- Per la terza legge di Newton, la forza che la corda esercita *sul corpo* sarà  $-\mathbf{T} = -\mathbf{F}_1$ .



Applichiamo la seconda legge di Newton *alla corda*:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

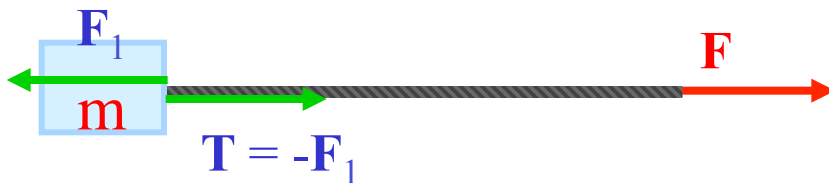
In condizioni statiche:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

In condizioni dinamiche si arriva allo stesso risultato se la massa della corda è nulla

$$m = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

**Corda ideale:**  $m = 0$ ,  $L = \text{costante}$

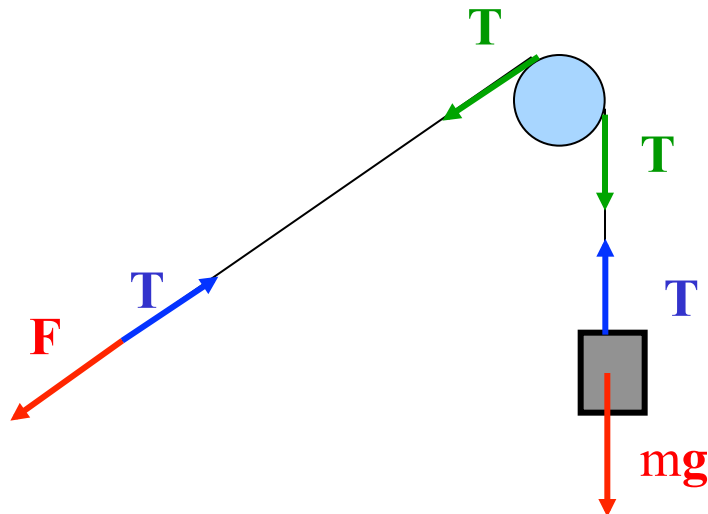
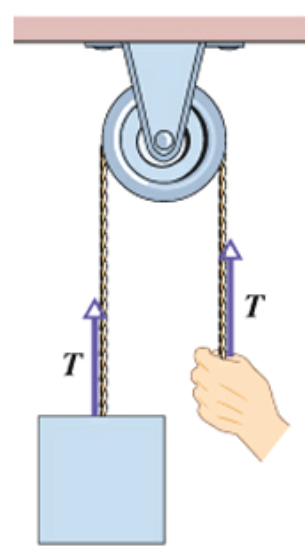


# Funi e carrucole

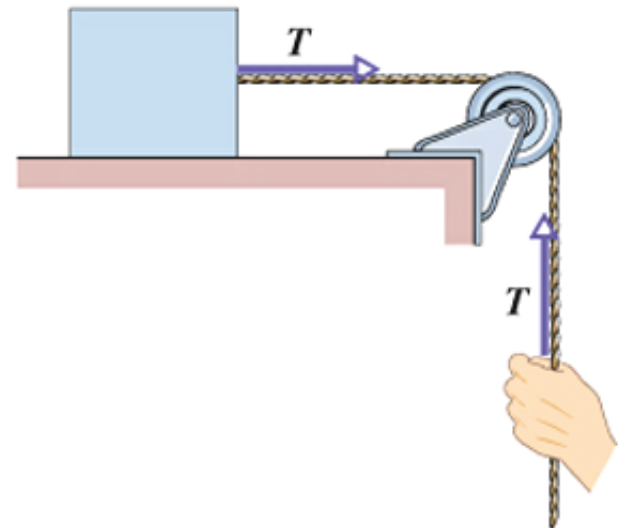
## Carrucole

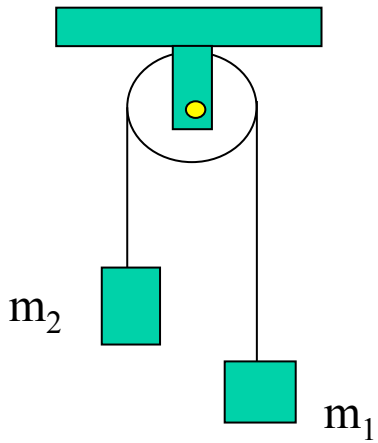
L'effetto di una carrucola ideale è quello di fare **cambiare direzione a una forza che viene trasmessa**, per esempio, per mezzo di una **fune**. L'approssimazione che faremo è che:

- la carrucola sia priva di massa
- le sue dimensioni siano trascurabili (per non includere gli effetti dovuti alla rotazione).

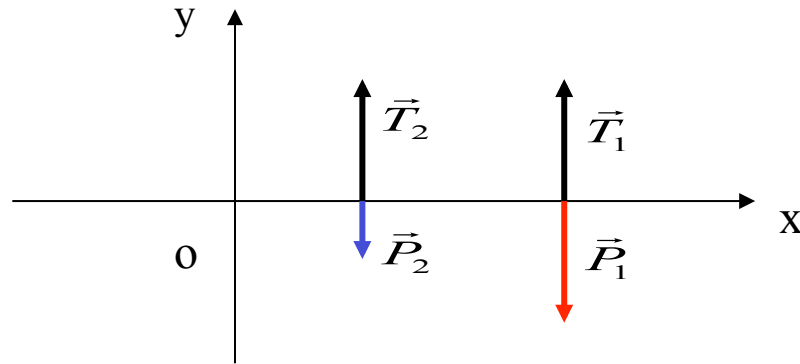


Dinamica I-Leggi di Newton





**Esempio:** Facendo riferimento al disegno ricavare il valore dell'accelerazione delle due masse ed il valore delle tensioni dei fili



$$\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$

Ma  $a_1 = -a_2$  e  $T_1 = T_2 = T$   
 Suppongo  $a_1$  rivolta verso l'alto

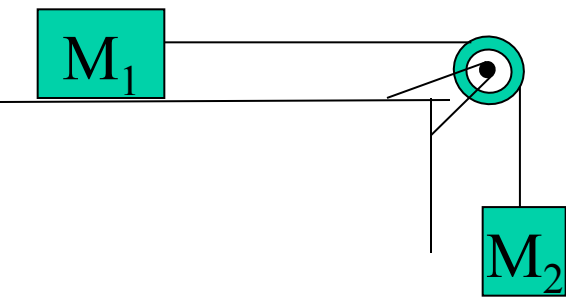
$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = -m_1 a_2 \end{cases}$$

Sottraggo la seconda equazione dalla prima e ottengo

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

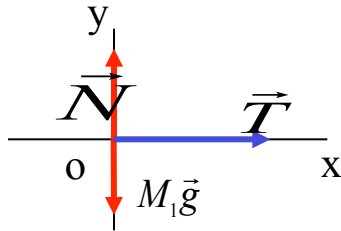
$$T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



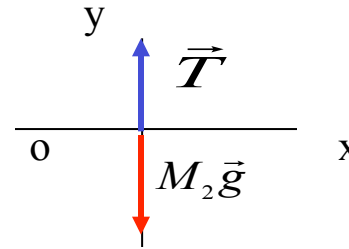


**Esempio:** Facendo riferimento al disegno ricavare il valore dell'accelerazione delle due masse ed il valore delle tensioni del filo

*Schema delle forze per  $M_1$*



*Schema delle forze per  $M_2$*



Per la massa  $M_1$ :  $\vec{T} + \vec{N} + M_1\vec{g} = M_1\vec{a} \implies \begin{cases} N - M_1g = M_1a_{1y} \\ T = M_1a_{1x} \end{cases}$

Per la massa  $M_2$ :  $M_2\vec{g} + \vec{T} = M_2\vec{a} \implies M_2g - T = M_2a_{2y}$

Con la condizione:  $a_{1x} = a_{2y} = a$

Da cui:  $a = \frac{M_2}{M_1 + M_2} g \quad T = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} g$

# Il pendolo semplice

Il pendolo semplice è costituito da un **punto materiale** (massa= $m$ ) appeso tramite un filo inestensibile (lunghezza= $L$ ) e di massa trascurabile.

La posizione di **equilibrio statico** è quella verticale. La forza esercitata dal filo (la tensione del filo) vale in modulo quanto la forza peso del punto materiale  $T_F=mg$

Spostando il punto materiale dalla verticale, **esso inizia ad oscillare** attorno alla posizione di equilibrio lungo un arco di circonferenza di lunghezza  $L$ .

Forze agenti su P:

- Tensione del filo  $T_F$
- Forza peso  $mg$

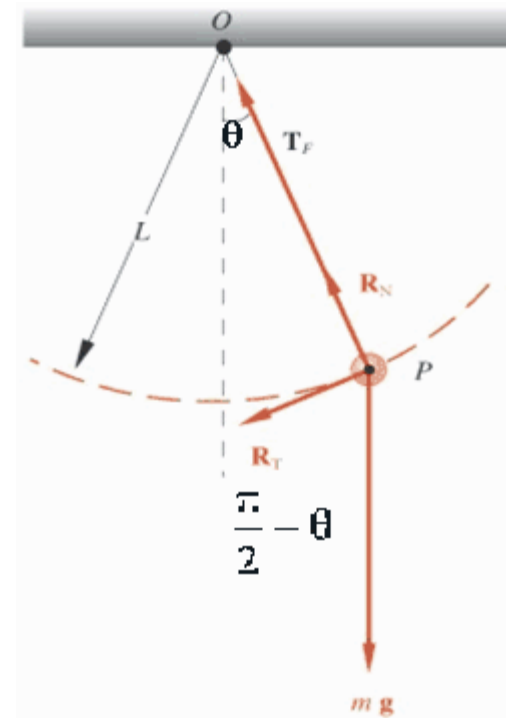
$\Rightarrow mg + T_F = ma$

Consideriamo le componenti dell'equazione rispetto all'asse tangente alla traiettoria e rispetto all'asse ortogonale ad esso:

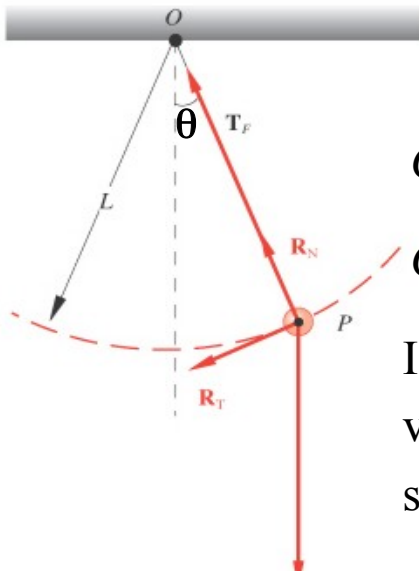
*Componente tangenziale:*  $R_T = -mg \sin\theta = ma_T$

*Componente ortogonale:*  $R_N = ma_N \rightarrow T_F - mg \cos\theta = ma_N$

Dinamica I-Leggi di Newton



# Il pendolo semplice



Componente tangenziale:  $R_T = -mg \sin\theta = ma_T \implies a_T = -g \sin\theta$

Componente ortogonale:  $R_N = T_F - mg \cos\theta = ma_N \implies a_N = T_F/m - g \cos\theta$

Il punto P può essere considerato come un punto che si muove con velocità variabile lungo una circonferenza di raggio  $r=L$ . In cinematica è stato ricavato per l'accelerazione tangenziale e normale:

$$\alpha = \frac{a_T}{r} \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a_T}{r} \implies a_T = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin\theta$$

$$a_N = \frac{v^2}{L} \implies m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos\theta$$

Dall'equazione  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin\theta$  si ricava l'equazione differenziale del moto del pendolo  $\theta$

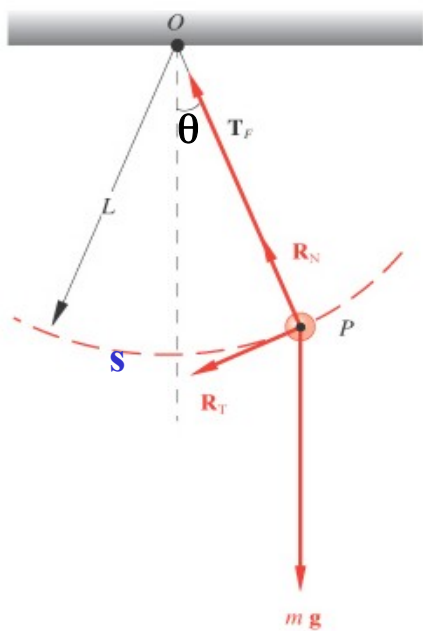
(t). Per piccole oscillazioni si può approssimare  $\sin\theta(t) \sim \theta(t)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin\theta \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{Con:} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\implies \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

*E' l'equazione del moto armonico semplice*

# Il pendolo semplice



$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad \text{Periodo dell'oscillazione:} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è:

$$s(t) = L\theta(t) = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{Velocità angolare:} \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{Velocità lineare:} \quad v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta(t)}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

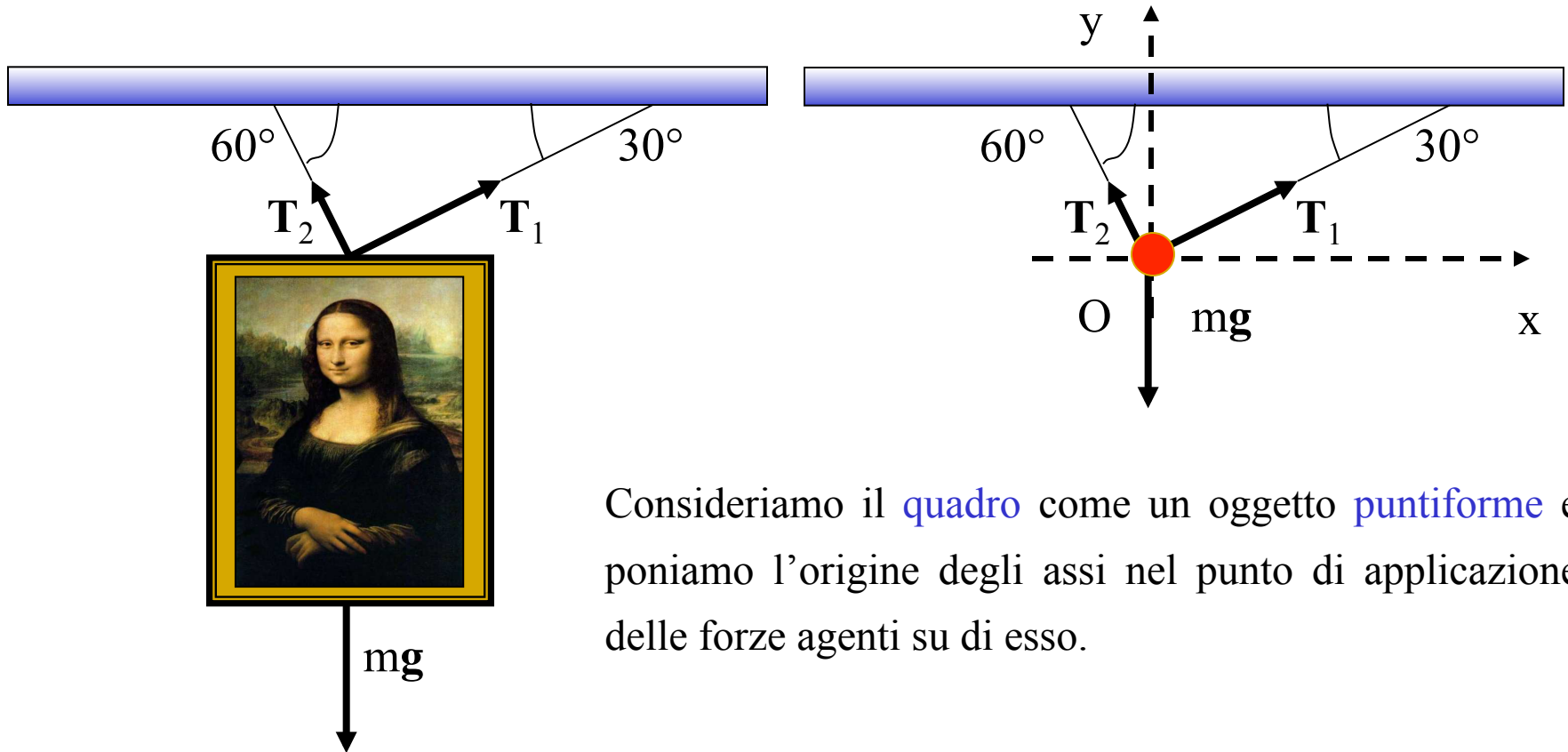
## *Tensione del filo*

Dall'equazione del moto lungo la direzione ortogonale alla traiettoria è possibile ricavare il valore della tensione del filo:

$$R_N = T_F - mg \cos\theta = ma_N \quad \Rightarrow \quad m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos\theta \quad \Rightarrow \quad T_F = m \left[ g \cos\theta(t) + \frac{v^2}{L} \right]$$

# Esercizio

Un quadro la cui forza peso è pari a  $8\text{ N}$  è sostenuto da due fili aventi tensioni  $T_1$  e  $T_2$ . Conoscendo gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (vedi figura), si trovi la tensione dei fili.



Consideriamo il **quadro** come un oggetto **puntiforme** e poniamo l'origine degli assi nel punto di applicazione delle forze agenti su di esso.

Poiché il quadro non accelera, deve essere **nulla la risultante delle forze agenti** su di esso: il peso  $mg$  e le tensioni  $T_1$  e  $T_2$ .

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \text{Le componenti orizzontali delle forze devono equilibrarsi tra loro, così come le componenti verticali.}$$

**N.B.** La componente x di  $T_2$  è nel verso negativo dell'asse x e la forza peso è diretta verso il basso.

**x**  $\mathbf{T}_{1x} + \mathbf{T}_{2x} = 0 \Rightarrow T_{1x} - T_{2x} = T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0$

**y**  $\mathbf{T}_{1y} + \mathbf{T}_{2y} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - mg = T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ - mg = 0$

dove  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 = \sin 60^\circ$ ,  $\sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ$

$$\left. \begin{aligned} T_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= \frac{T_2}{2} \Rightarrow T_2 = \sqrt{3} T_1 \\ T_1 \left( \frac{1}{2} \right) + T_2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= mg \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_1 \left( \frac{1}{2} \right) + T_1 \left( \frac{3}{2} \right) = mg \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} mg = 4\text{N}$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg = 6.93\text{N}$$

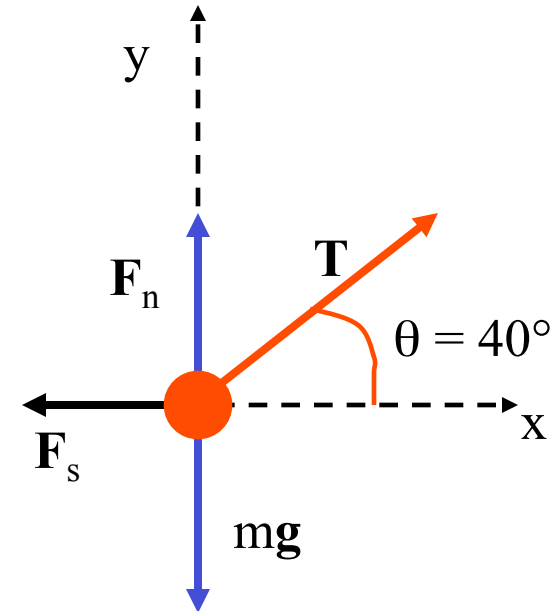
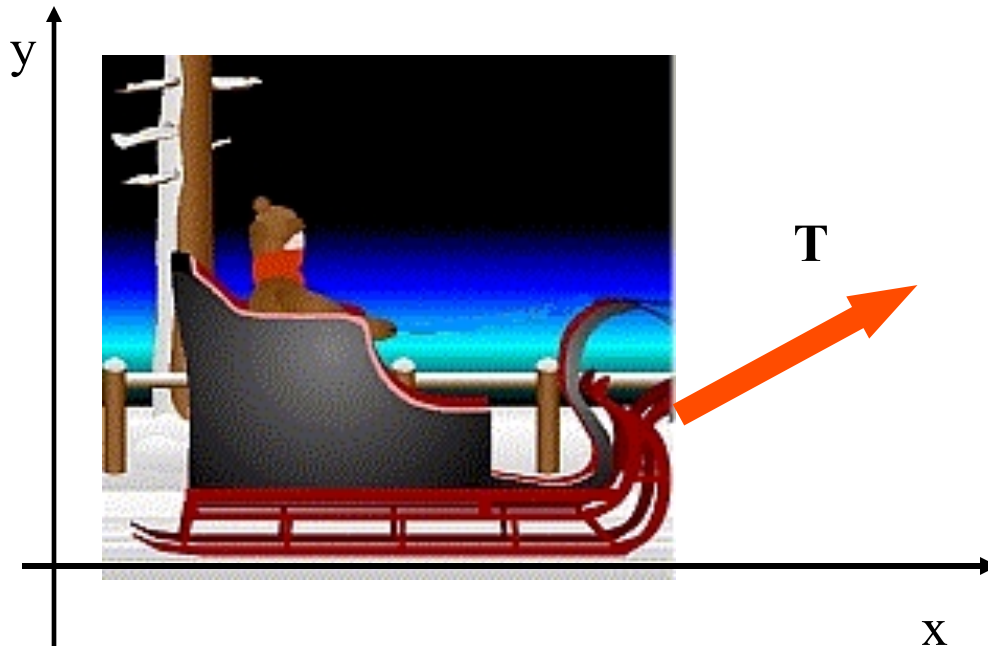
# Esercizio

Un uomo tira una slitta su cui sono seduti i suoi bambini. La massa totale della slitta e dei bambini è 60 kg.

I coefficienti di attrito statico e cinetico sono  $\mu_s = 0.2$  e  $\mu_c = 0.15$ .

La slitta è tirata con una corda che forma un angolo di  $40^\circ$  con l'orizzontale.

Si trovi la forza di attrito e l'accelerazione dei bambini e della slitta se la **tensione nella corda è: (a) 100 N; (b) 160 N.**



$F_n$  è la reazione vincolare.  
 $F_s$  è la forza di attrito statico.

La tensione  $T$  può essere scomposta nelle sue **componenti cartesiane**, di modulo

$T_x$  e  $T_y$ :

$$T_x = |T| \cos\theta = (100 \cdot \cos 40^\circ) \text{ N} = 77 \text{ N}$$

$$T_y = |T| \sin\theta = (100 \cdot \sin 40^\circ) \text{ N} = 64 \text{ N}$$

Non c'è accelerazione verticale, quindi la somma delle forze nella direzione  $y$  agenti sul sistema slitta + bambini deve essere nulla.

$$F_n - mg + T_y = 0 \rightarrow F_n = mg - T_y = (60 \cdot 9.8 - 64) \text{ N} = 524 \text{ N}$$

La massima forza di attrito statico è pertanto:

$$f_{s,\max} = \mu_s F_n = (0.2 \cdot 524) \text{ N} = 104.8 \text{ N}$$

Tale valore va confrontato con la componente orizzontale  $T_x$  della tensione:

$$f_{s,\max} > T_x$$

**quindi la slitta non si muove.**



Se  $T$  vale 160 vale sempre la condizione che somma delle forze nella direzione  $y$  agenti sul sistema slitta + bambini deve essere nulla. Sostituendo ho che

$$F_n - mg + T_y = 0 \rightarrow F_n = mg - T_y = (60 \cdot 9.8 - 102) \text{ N} = 486 \text{ N}$$

La **massima forza di attrito statico** è pertanto:

$$f_{s,\max} = \mu_s F_n = (0.2 \cdot 486) \text{ N} = 97.2 \text{ N}$$

Tale valore va confrontato con la componente orizzontale  $T_x$  della tensione:

$$f_{s,\max} < T_x$$

quindi **la slitta si muove**. Una volta che la slitta si muove, la forza d'attrito sarà dovuta all'attrito dinamico:

$$f_d = \mu_d F_n = (0.15 \cdot 486) \text{ N} = 73 \text{ N}$$

La **forza risultante nella direzione  $x$  è quindi**:  $T_x - f_d = (123 - 73) \text{ N} = 50 \text{ N}$

e l'accelerazione:

$$a = \frac{50 \text{ N}}{60 \text{ kg}} = 0.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$