Onde

ONDA**: *Perturbazione di una grandezza fisica che si propaga nello spazio.***

La propagazione di onde meccaniche avviene attraverso un mezzo materiale che ne determina caratteristiche e velocità.

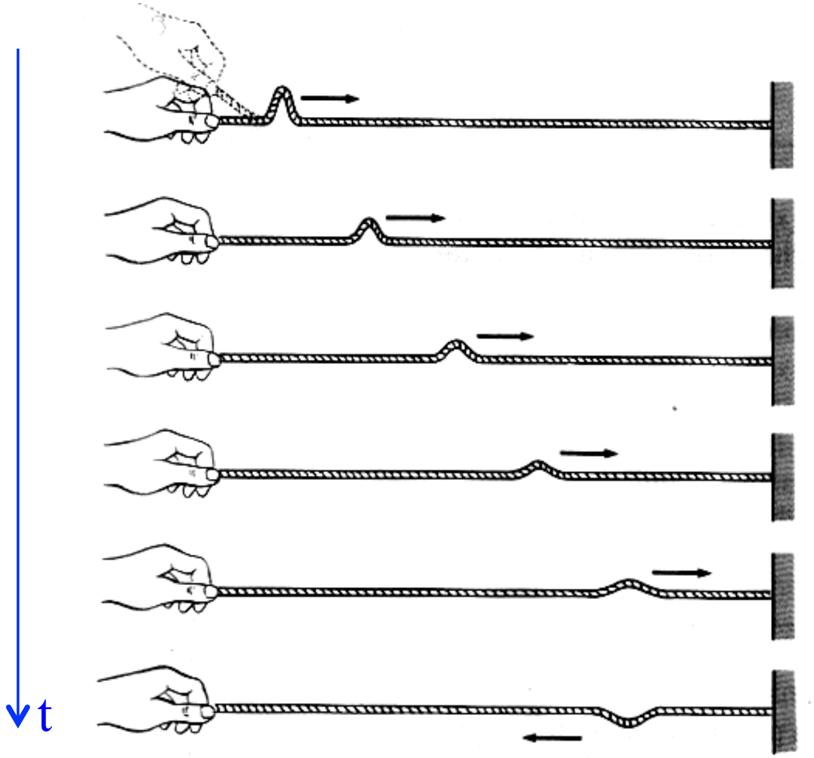
Esempi:

- Onde sulla superficie di un liquido (es. onde marine)
- Onde sonore nell'aria (suono) o in un solido
- Onde in una corda tesa

Le onde elettromagnetiche (es. luce, onde radio), che saranno trattate nei corsi successivi, possono propagarsi anche nel vuoto. Si tratta sempre di perturbazioni, in questo caso del "campo elettrico" e del "campo magnetico"

Esempio: onda impulsiva in una corda tesa

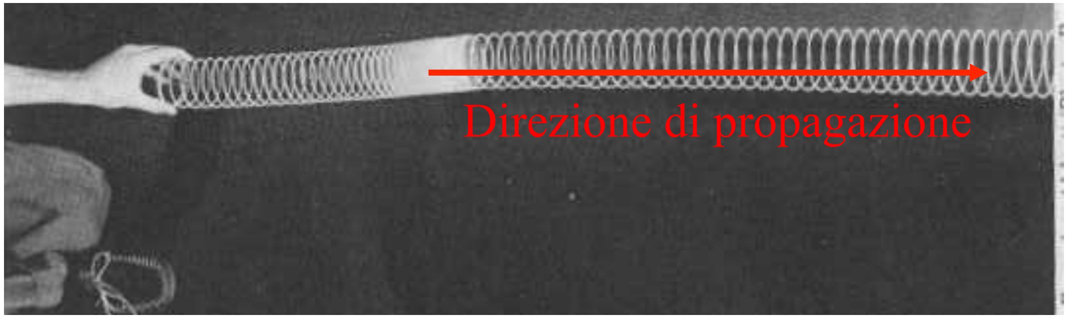
Perturbazione = cambiamento di forma



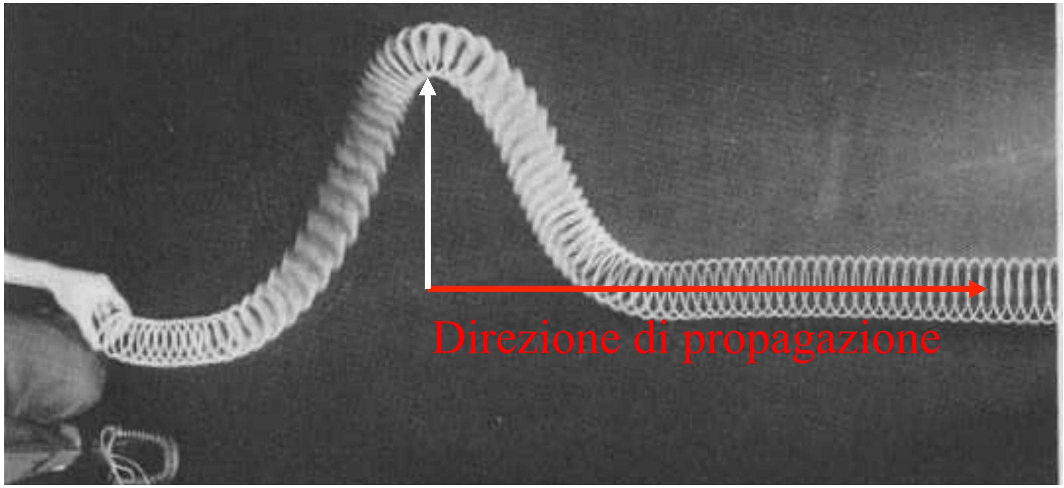
La velocità di propagazione dipende dalle proprietà del mezzo:
in questo caso, dalla tensione della corda e dalla sua densità lineare: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$

Tipi di onde

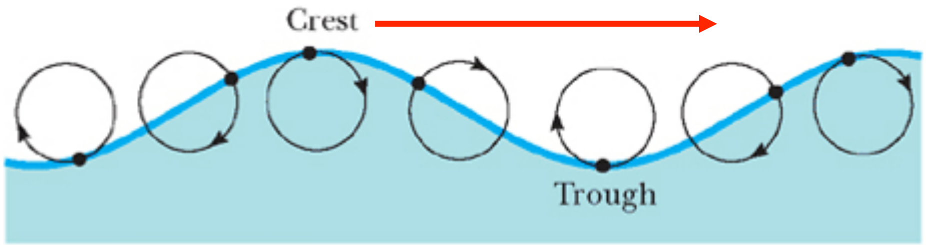
Onda longitudinale:
perturbazione lungo la direzione di propagazione
Esempio: onde sonore



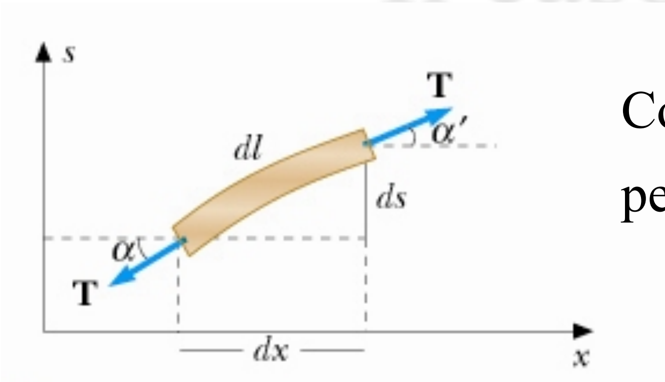
Onda trasversale:
perturbazione perpendicolare alla direzione di propagazione
Esempio: corda tesa



Onda sia longitudinale che trasversale (onda marina):
particelle di acqua hanno traiettoria ellittica con componente trasversale e longitudinale



Il caso della corda tesa



Considero un elemento di corda dl, con tensione T

perturbazione = spostamento $ds \Rightarrow$ forze risultanti:

$$\begin{cases} F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) \\ F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) \end{cases}$$

Per piccoli spostamenti ds:

$\cos\alpha \sim 1$; $\cos\alpha' \sim 1$

$\sin\alpha \sim \alpha \sim \mathrm{tg}\alpha$; $\sin\alpha' \sim \alpha' \sim \mathrm{tg}\alpha'$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = T(\mathrm{tg}\,\alpha' - \mathrm{tg}\,\alpha) = T\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{tg}\,\alpha)dx \end{cases}$$

$\mathrm{tg}\ \alpha \sim ds/dx$ $\Rightarrow$ $F_y = T\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}dx$

F_y è anche legata all'accelerazione di dl dalla legge di Newton.

Massa dell'elemento dl: $dm \sim \rho_l dx$

$\Rightarrow$ $F_y = (dm)a_y = \rho_l dx \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_l}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \Leftarrow \text{uguaglio}$$

Posto $\mathrm{v} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{T}}{\rho_l}}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{s}}{\partial \mathrm{t}^2} - \mathrm{v}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{s}}{\partial \mathrm{x}^2} = 0}$$

Equazione delle onde (di D'Alembert):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0}$$

Equazione valida in generale per tutte le onde piane.

$\xi(x,t)$ rappresenta la perturbazione in un dato punto *x* al tempo *t*. Esempi:

- Spostamento *s* di un punto di una corda tesa dalla posizione di riposo
- Spostamento delle molecole d'aria (o variazione della pressione *p*) nel caso delle onde sonore

Soluzioni: funzioni del tipo:

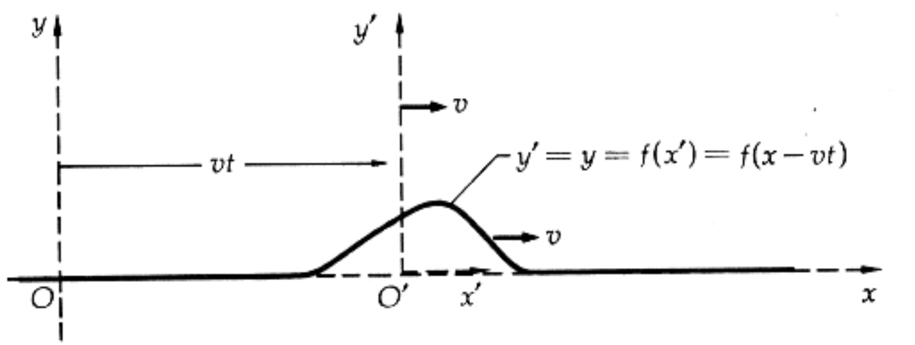
$$\boxed{\begin{aligned} \xi(x,t) &= \xi(x - vt) \\ \xi(x,t) &= \xi(x + vt) \end{aligned}}$$

$\xi(x,t) = \xi(x - vt)$ ⟵ propagazione verso destra

$\xi(x,t) = \xi(x + vt)$ ⟵ propagazione verso sinistra

Queste rappresentano funzioni che traslano nel tempo lungo l'asse *x* con **velocità v**:

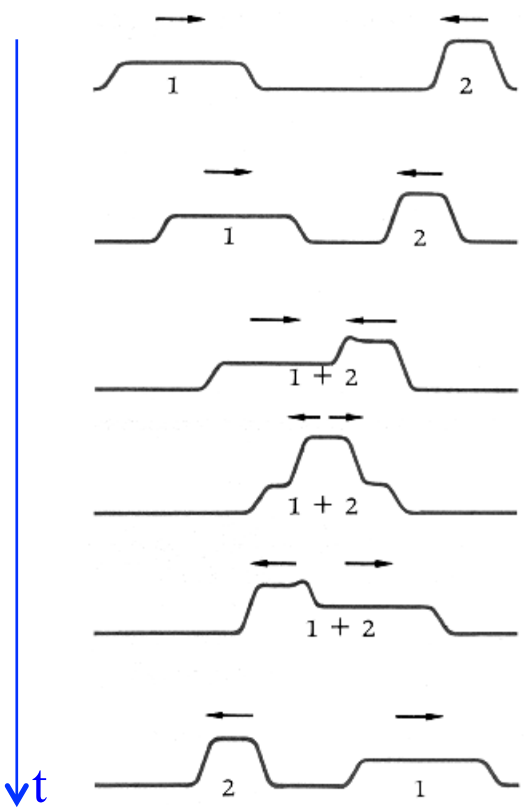
- t=0 ⇨ **y=ξ(x)** (profilo dell'onda)
- tempo *t*: nel S.R. O' : $\begin{cases} y' = y \\ x' = x - vt \end{cases}$ ho: **y'=ξ(x')** ⇨ stessa forma

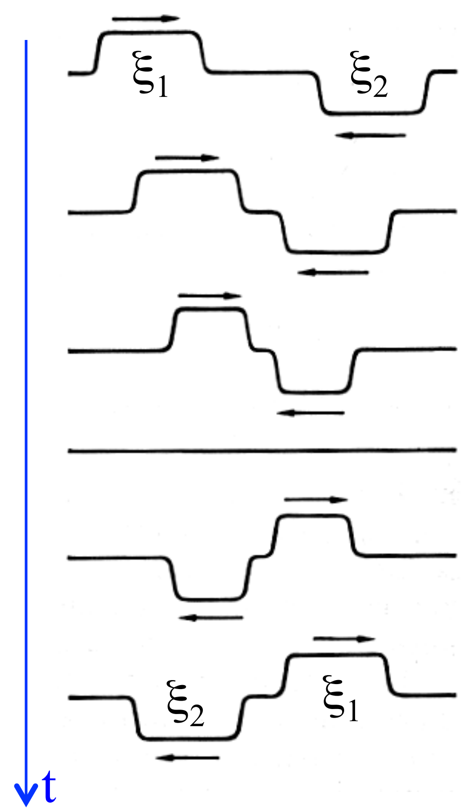


Principio di sovrapposizione

La sovrapposizione di due onde è ancora un' onda che è, in ogni istante, la somma delle singole onde in ogni punto.

Esempi: $\xi\,(x,t) = \xi_1\,(x - vt) + \xi_2\,(x + vt)$





Corda orizzontale, ma non a riposo!

Velocità di propagazione

Dipende dalle proprietà elastiche ed inerziali del mezzo
NON dipende dalla velocità della sorgente

Corda tesa
(onda trasversale,
esempio precedente)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

Tensione della corda
(proprietà elastica del mezzo)

Massa per unità di lunghezza
(proprietà inerziale del mezzo)

Sbarra metallica
(onda longitudinale,
di compressione)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Modulo di Young $E = \dfrac{F}{S}\dfrac{dL}{L}$
(proprietà elastica)

Densità
(proprietà inerziale)

Gas
(onda longitudinale)

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

Modulo di compressione del gas, $\beta = dp\dfrac{V}{dV}$
(proprietà elastica)

Densità
(proprietà inerziale)

Onde Armoniche

Una funzione d' onda particolarmente importante:

$$\boxed{\xi(x,t) = A \sin k(x - vt)}$$

k si definisce numero d' onda
A si definisce ampiezza

Definita pulsazione $\omega = kv$ si scrive anche:

$$\boxed{\xi(x,t) = A \sin (kx - \omega t)}$$

Funzione periodica sia nel tempo che nello spazio:

- Ha periodicità spaziale $\lambda \equiv$ lunghezza d' onda; cioè $\xi(x,t) = \xi(x+\lambda,t)$

$$\Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow \mathbf{k = 2\pi/\lambda}$$

- Ha periodicità temporale $T \equiv$ periodo; cioè $\xi(x,t) = \xi(x,t+T)$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 2\pi/T \equiv 2\pi\nu}$$

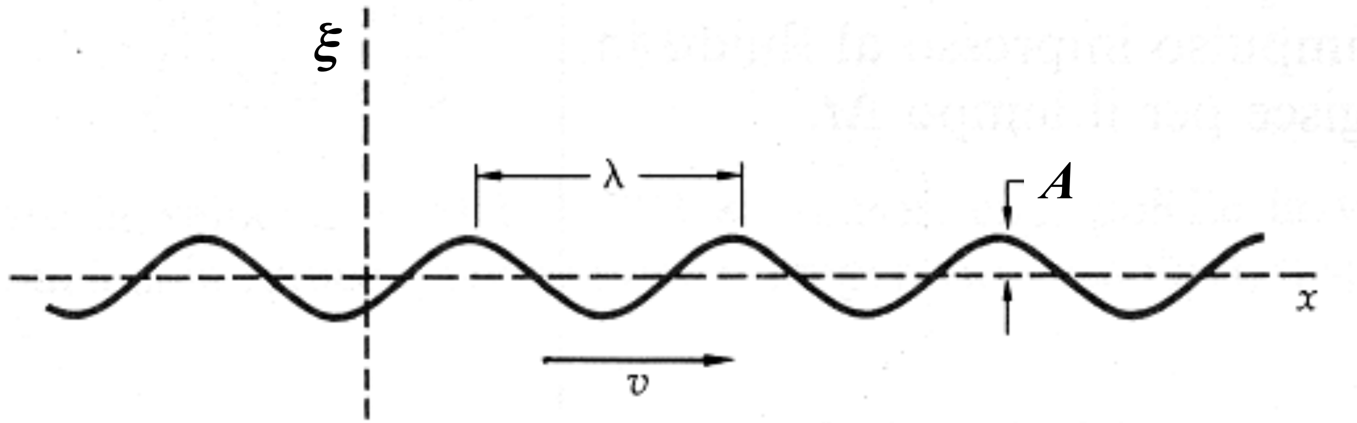
$\nu = 1/T$ si definisce frequenza dell'onda

Relazioni fra λ, ν, T e v: $\boldsymbol{\lambda = vT}$ (λ è il percorso nel tempo T)

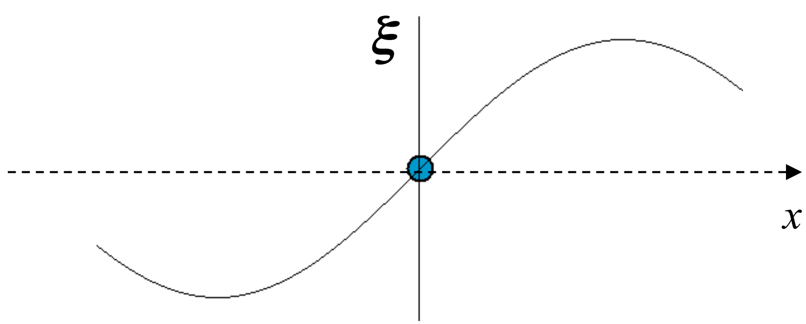
$$\boldsymbol{\lambda\nu = v}$$

Onde Armoniche $\xi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$

- **Fissato t**, $\xi(x) = A \sin(\mathbf{kx} - \text{cost.})$ è il profilo dell' onda nello spazio, in quell' istante t: **sinusoide di ampiezza A e periodo λ**



- **Fissato x**, $\xi(x) = A \sin k(\text{cost.} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{t})$ rappresenta il moto di un singolo punto nel tempo: **moto armonico**

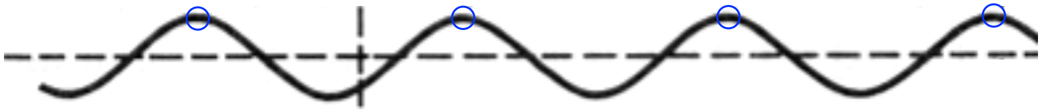


Fronti d' onda

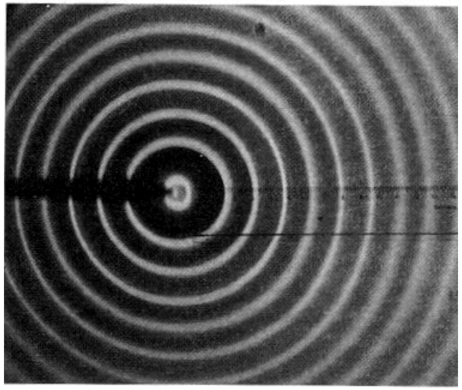
L' argomento della funzione d' onda **$\phi(x,t) = kx - \omega t$** si chiama fase dell' onda.

Fronti d' onda : insieme di tutti i punti dello spazio in cui l' onda ha la stessa fase

In 1D sono punti



In 2D sono circonferenze



Onde sulla superficie di un liquido

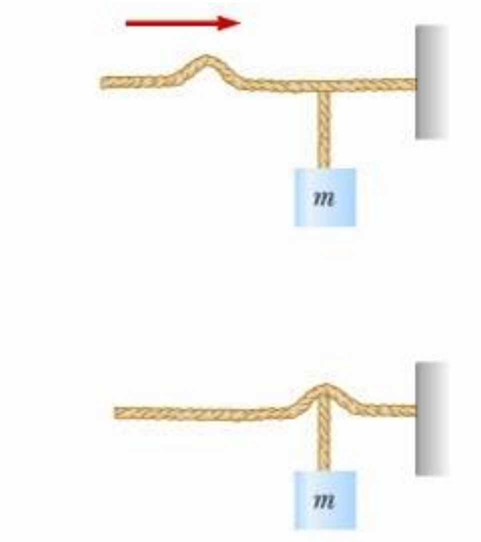
In 3D sono superfici sferiche

A grande distanza:

Fronti d' onda lineari

Fronti d' onda piani

Propagazione dell'energia



Un'onda trasporta **ENERGIA** senza trasportare materia
Si hanno solo oscillazioni locali intorno alla posizione di equilibrio

La potenza media trasportata (energia che fluisce per unità di tempo) è proporzionale al quadrato della pulsazione ω e dell'ampiezza A:

$$P_m \propto \omega^2 A^2 v$$

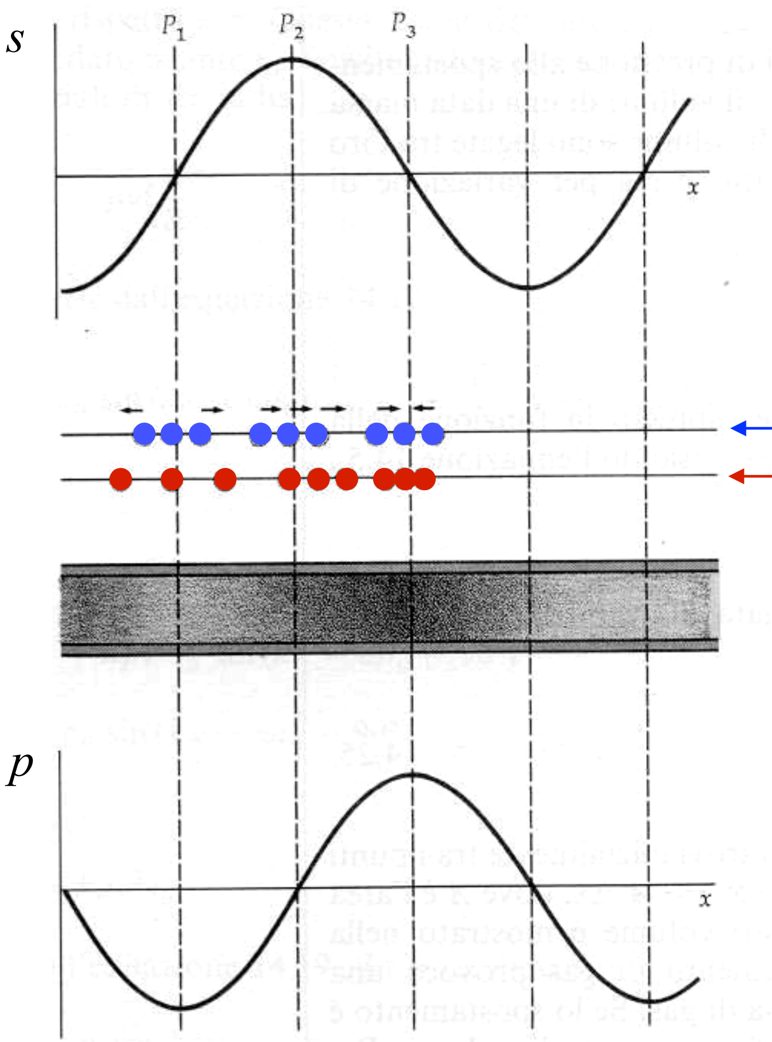
Intensità dell' onda: energia media trasportata nell' unità di tempo attraverso l' unità di area normale alla direzione di propagazione

$$I = \frac{(\Delta E / \Delta t)_{media}}{\Sigma} = \frac{P_m}{\Sigma} \quad (\mathrm{W/m^2})$$

Sorgente puntiforme di potenza P, che emette onde sferiche in 3D:
ad una distanza r, la potenza è distribuita sulla superficie $\Sigma = 4\pi r^2$ $\Rightarrow$ $I \propto 1/r^2$

Onde sonore armoniche

Vibrazione di un diaframma con moto armonico:



s = spostamento (longitudinale cioè sull’asse x) delle molecole d’aria dalla posizione d’e

$$s(x, t) = s_0 \sin(kx - \omega t)$$

Schematizzazione:

Posizione a riposo

Effetto dello spostamento

Densità risultante

Onda di pressione sfasata di 90°

$$p = p_0 \sin(kx - \omega t - 90°)$$

Intensità del suono

Intensità del suono: $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v$ $\Rightarrow$ $I \propto s_0^2$

Caratteristiche dell'orecchio umano

Soglia di udibilità: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 ($p_0 = 2.9 \times 10^{-12}$ Pa)

Soglia del dolore: $I = 1$ W/m^2 ($p_0 = 2.9$ Pa) (1 atm= $1,01 \times 10^5$ Pa)

$\Downarrow$

Livello sonoro in decibel (dB): $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$

Intensità delle onde sonore

Tabella 14.1. Intensità e livello d'intensità di alcuni suoni comuni ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2)

Sorgente	I/I_0	dB	Descrizione
	10^0	0	Soglia di udibilità
Respirazione normale	10^1	10	Appena udibile
Stormire di foglie	10^2	20	
Bisbiglio sommesso (a 5 m)	10^3	30	Molto silenzioso
Biblioteca	10^4	40	
Ufficio silenzioso	10^5	50	Silenzioso
Conversazione normale (a 1 m)	10^6	60	
Traffico intenso	10^7	70	
Ufficio rumoroso con macchine; fabbrica media	10^8	80	
Autocarro pesante (a 15 m); Cascate del Niagara	10^9	90	L'esposizione costante mette in pericolo l'udito
Metropolitana (vecchio modello)	10^{10}	100	
Rumore di cantiere	10^{11}	110	
Concerto rock con amplificatori (a 2 m); decollo di aviogetto (a 60 m)	10^{12}	120	Soglia del dolore
Ribaditrice pneumatica; mitragliatrice	10^{13}	130	
Decollo di un aviogetto (nelle vicinanze)	10^{15}	150	
Grande motore a razzo (nelle vicinanze)	10^{18}	180	

Esempio

Un cane abbaia con potenza sonora $P = 1$ mW. Supponendo una distribuzione uniforme di potenza, quale livello di intensità sonora ho a 5 m di distanza?

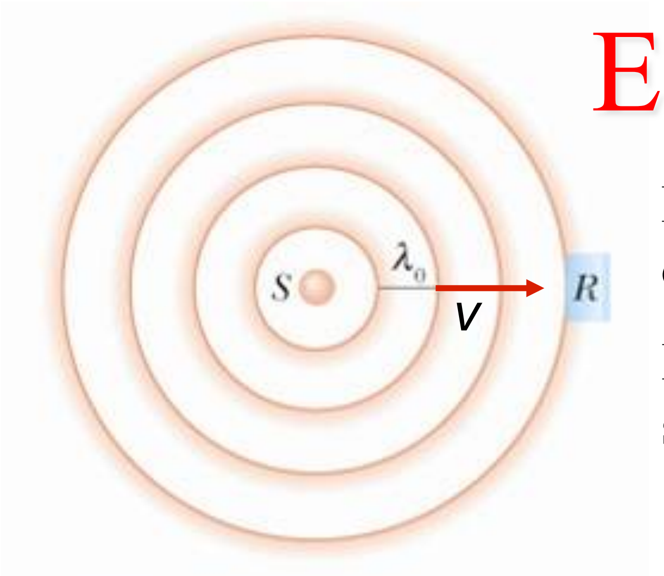
Soluzione:

Alla distanza $r = 5$ m, $\Sigma = 4\pi r^2$

$\Rightarrow I = P/4\pi r^2 = 10^{-3}$ W/(4π 25 m²) = $3{,}18\ 10^{-6}$ W/m²

$\beta = 10 \log(3{,}18 \times 10^{-6}\ /10^{-12}) = 65$ dB

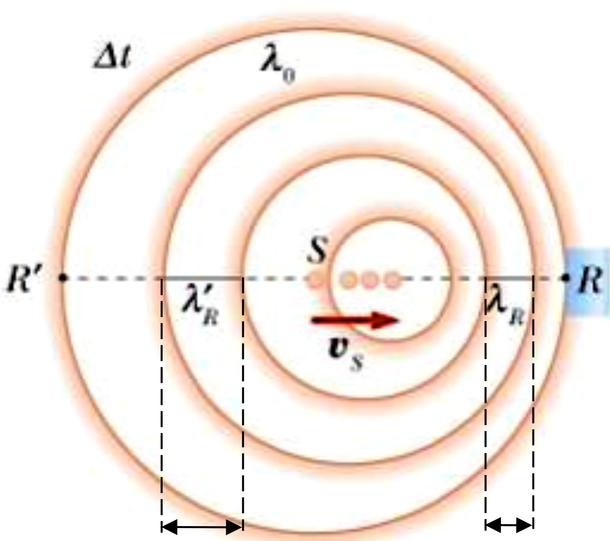
Effetto Doppler



La sorgente ferma emette un'onda di lunghezza d'onda λ_0 che si propaga a velocità v

Il rivelatore fermo vede le onde arrivare con le stesse λ_0 e v, quindi rileva la frequenza:

$$\nu_R = \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0$$



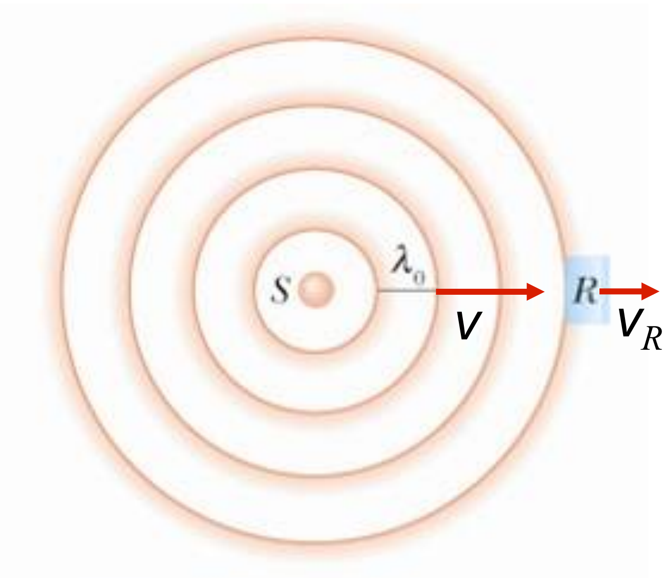
Sorgente in moto verso il ricevitore con velocità v_S
La velocità dell'onda continua ad essere v.

In un periodo T, la sorgente si sposta di $v_S T$
$\Rightarrow$ la lunghezza d'onda diventa $\lambda_R = \lambda_0 - v_S T$

Il rivelatore fermo vede le onde arrivare con λ_R e v, quindi rileva la frequenza:

$$\nu_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{\lambda_0 - v_S T} = \frac{v}{v - v_S}\nu_0$$

Effetto Doppler



Sorgente ferma, ricevitore in moto con velocità v_R

La velocità dell'onda continua ad essere v ; ma nel S.R. dell'osservatore in moto è $v - v_R$

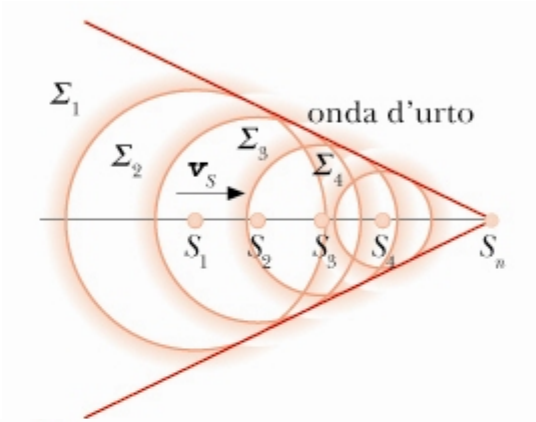
Il rivelatore in moto vede le onde arrivare con λ_0 e $v - v_R$, quindi rileva la frequenza:

$$\nu_R = \frac{v - v_R}{\lambda_0} = \frac{v - v_R}{v}\nu_0$$

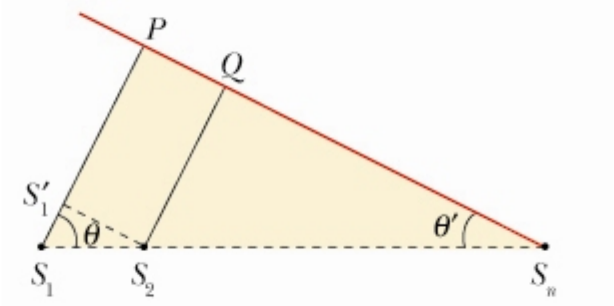
Formula generale: $$\boxed{\nu_R = \frac{v - v_R}{v - v_S}\nu_0}$$

Onda d'urto

Se la sorgente è più veloce della velocità dell'onda ($v_S > v$), "supera" le onde che produce. Non c'è effetto Doppler ma:



Inviluppo dei fronti = onda d'urto



In un tempo Δt si ha che:

- la sorgente si è spostata di $S_1S_2 = v_S \Delta t$
- il fronte d'onda prodotto in S_1 ha percorso il tratto $S_1S_1' = v\Delta t = S_1S_2 \cos\theta$

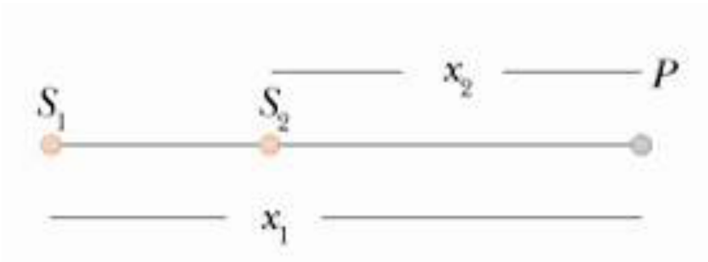
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{v}{v_s}$$

Esempi:

- Aerei supersonici (v=343 m/s =1235 km/h)
- Scia a "V" generata da un motoscafo

Interferenza di Onde Armoniche

Due sorgenti ***identiche*** *S_1 ed S_2 emettono onde armoniche.*



in un punto *P* le due onde sono:

$$s_1(x,t) = A \sin(kx_1 - \omega t)$$

$$s_2(x,t) = A \sin(kx_2 - \omega t)$$

L'onda risultante è, per il principio di sovrapposizione:

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_1(x,t) = A[\sin(kx_1 - \omega t) + \sin(kx_2 - \omega t)]$$

Dalle formule di prostaferesi: $$s(x,t) = 2A\cos\frac{k(x_1 - x_2)}{2} \sin\left[k\frac{x_1 + x_2}{2} - \omega t\right]$$

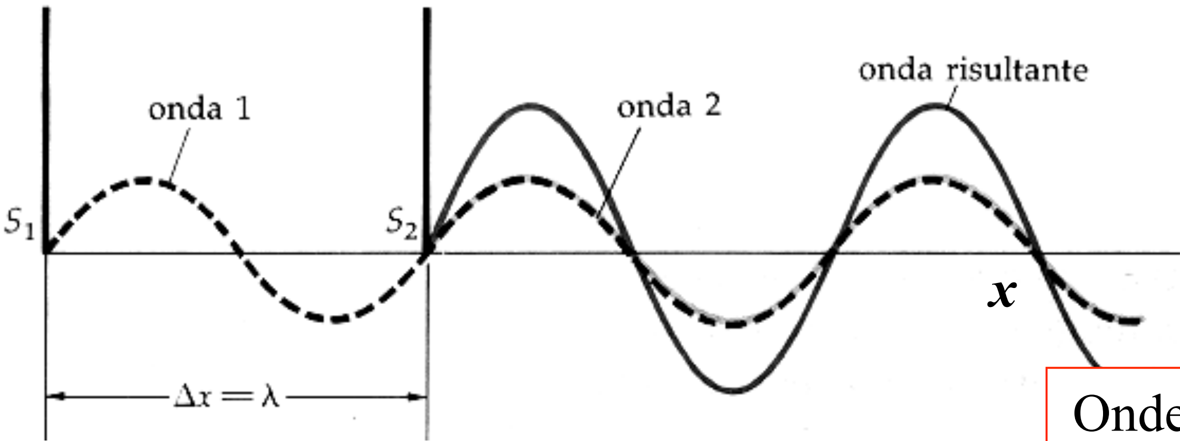
Ampiezza risultante nel punto *P* dipende dalla differenza delle fasi di s_1 ed s_2 :

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t) = k(x_1 - x_2)$$

$$s_0 = 2A\cos\frac{k(x_1 - x_2)}{2} = 2A\cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Interferenza di Onde Armoniche

Ampiezza risultante $s_0 = 2A\cos\frac{k(x_1 - x_2)}{2} = 2A\cos\frac{\Delta\phi}{2}$

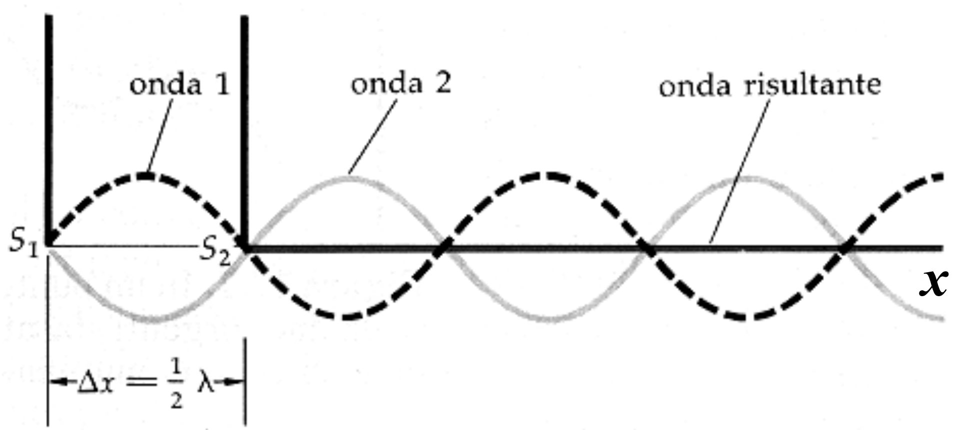


Onde in fase si sommano: $s_0 = 2A$

Interferenza costruttiva

$\Delta\phi = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2\ldots$

Ovvero: $\Delta x = n\lambda$



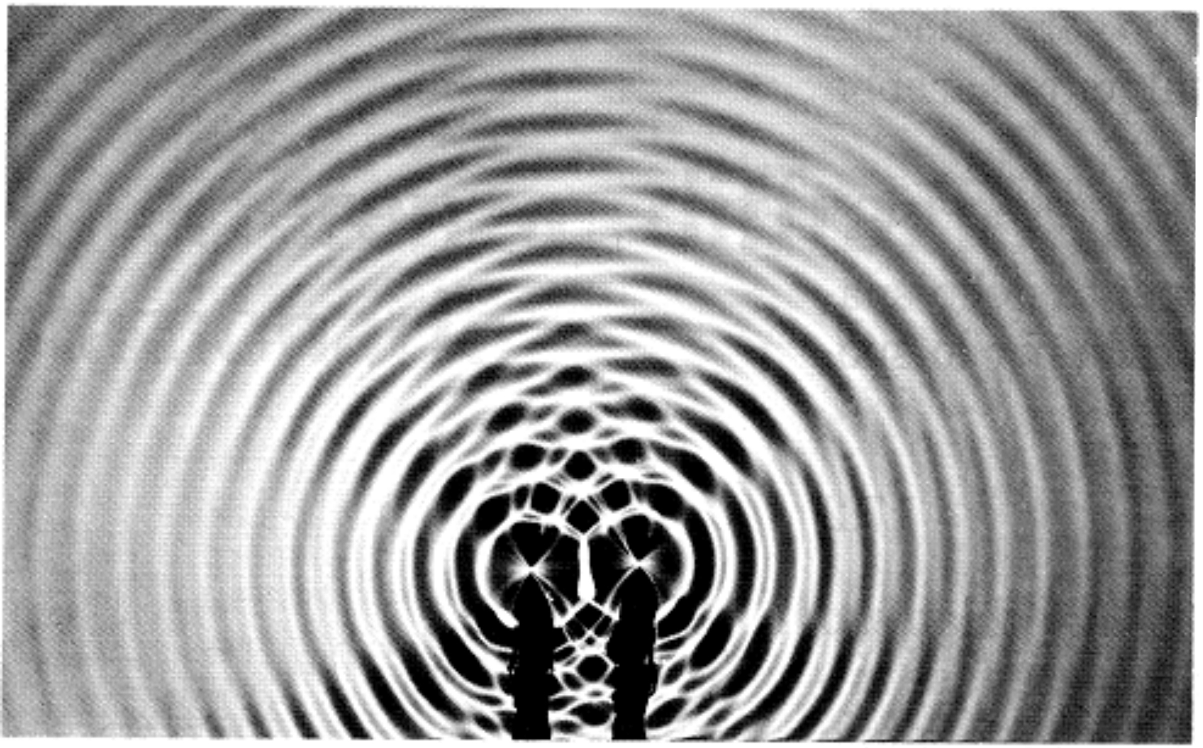
Onde in opposizione di fase: $s_0 = 0$

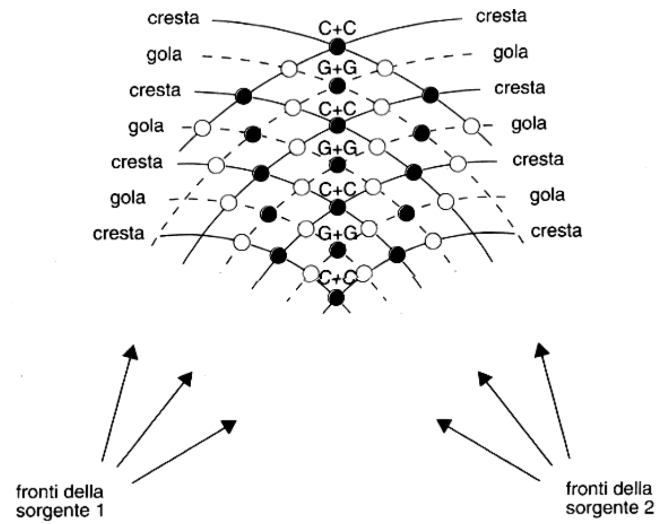
Interferenza distruttiva

$\Delta\phi = (2m+1)\pi$, $m = 0, 1, 2\ldots$

Ovvero: $\Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$

Interferenza di onde bidimensionali





Onde stazionarie

Considero la somma di 2 onde con la stessa ω che si propagano in direzione opposta.

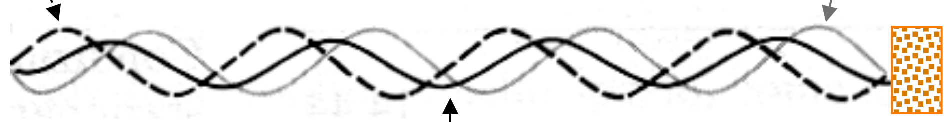
Esempio: onda riflessa all'estremo fisso di una corda tesa

ONDA INCIDENTE

$s_I(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$

ONDA RIFLESSA

$s_R(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$



ONDA RISULTANTE

$$s(x,t) = s_I(x,t) + s_R(x,t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Oscillazioni armoniche di ampiezza $2A \sin kx$. ***Non ho più propagazione***

Nodi: $\sin kx = 0$

$$kx = n\pi \quad \Rightarrow \quad x = n\frac{\lambda}{2}$$

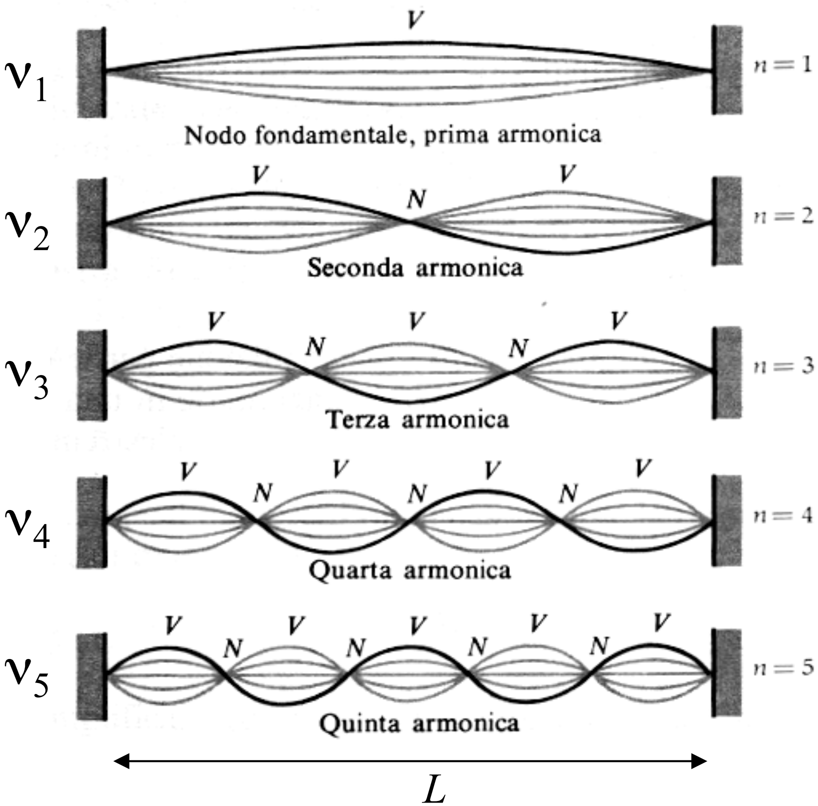
$n = 0, 1, 2, \ldots$

Ventri: $\sin kx = 1$

$$kx = 2(m+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$

Corda con estremi fissi



Entrambi gli estremi devono essere nodi:

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{v}{2\nu} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\nu_n = n\frac{v}{2L}$$

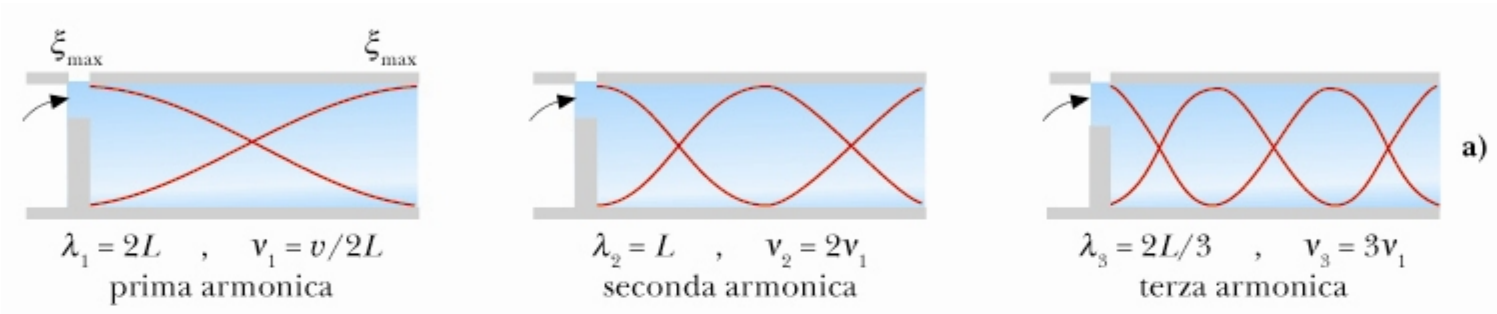
Solo alcune frequenze sono possibili:
Serie armonica

Onda stazionaria:

- effetto di riflessioni multiple + interferenza
- è confinata in regione di spazio limitata
- Energia localizzata, non si propaga ma "staziona" in regioni ben definite

Onde stazionarie in una colonna di gas

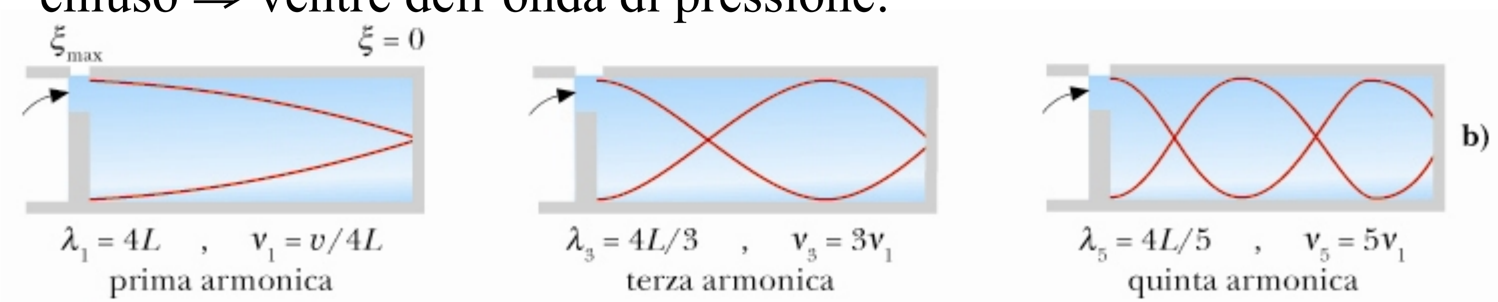
Canna d'organo aperta: devo avere ventri dell'onda di spostamento ai 2 estremi $\Rightarrow$ Nodi dell'onda di pressione (sfasata di $\pi/2$) : analogo della corda



$$\nu_n = n\frac{v}{2L}$$

$n = 1, 2, \ldots$

Canna d'organo chiusa: devo avere nodo dell'onda di spostamento all'estremo chiuso $\Rightarrow$ ventre dell'onda di pressione:



$$kL = 2(m+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu_m = (2m+1)\frac{v}{4L} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Battimenti

Interferenza di due onde con frequenze vicine:
fissato un punto dello spazio, ho composizione di oscillazioni armoniche
(vedi lezione su Oscillazioni)

$$s_1(t) = A\sin(\omega_1 t) \qquad s_2(t) = A\sin(\omega_2 t)$$

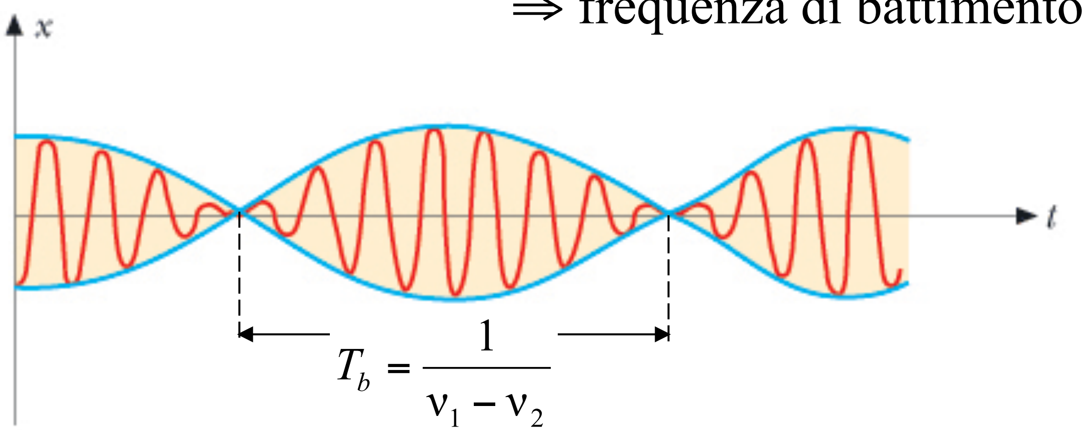
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A(t)\, sen\,\omega t = 2A\cos\Omega t\; sen\,\omega t$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Risultato: suono di frequenza $\nu = (\nu_1+\nu_2)/2$ di intensità che varia nel tempo:

$$I = I_{max} \cos^2\Omega t$$

$\Rightarrow$ frequenza di battimento $\nu = \nu_1 - \nu_2$



Esempio: accordatura di una chitarra con il diapason