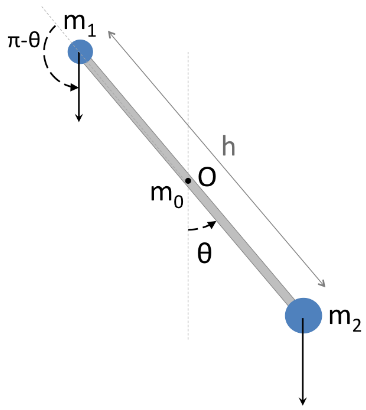
Pendolo Composto (o Pendolo Fisico)

A. Mignone

May 14, 2019



Le masse m_1 e m_2 ($m_2 > m_1$) sono unite da un'asta di lunghezza h e di massa m_0 libera di ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse orizzontale passante per il suo punto medio O. Il sistema viene lasciato libero da una posizione iniziale nella quale m_2 si trova a una quota inferiore rispetto a m_1 e l'asta forma un angolo θ_0 con la verticale. Trovare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema. [$T = 2\pi\sqrt{2h/g}$]

<u>*Soluzione.*</u>
L'equazione che governa il moto del sistema è data dalla legge fondamentale della dinamica rotazionale che afferma che il momento della forza agente sul pendolo composto è uguale al momento di inerzia calcolato rispetto all'asse di rotazione (il punto O) per l'accelerazione angolare $\alpha = d\dot{\theta}/dt$:

$$\boxed{M = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}} \tag{1}$$

dove abbiamo indicato con $\omega = d\theta/dt$. Il momento di inerzia I è dato dalla somma dei tre contributi dati dalla massa m_1, la massa m_2 e infine l'asta:

$$I = m_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + I_{\rm asta} \qquad \text{dove} \qquad I_{\rm asta} = \frac{m_0}{12}h^2 \tag{2}$$

Per il calcolo del momento possiamo seguire due metodi diversi: 1) calcolare i momenti di tutte le forze agenti e sommarli, 2) calcolare il momento della forza risultante applicata il baricentro del sistema. I due metodi sono ovviamente equivalenti.

Metodo 1. Rispetto al perno O, assumendo come positivo l'asse uscente dal disegno (il che equivale ad assumere come verso positivo di rotazione quello antiorario) gli unici due momenti non nulli sono quelli delle forze peso applicate alle masse m_1 e m_2. Dal disegno si evince che il momento M_1 sará uscente mentre il momento M_2 sarà entrante, per cui:

$$M_1 = +m_1 g\frac{h}{2}\sin(\pi-\theta) = m_1 g\frac{h}{2}\sin\theta\,, \qquad M_2 = -m_2 g\frac{h}{2}\sin\theta$$

Il momento della forza peso dell'asta non conta, dal momento che ha braccio nullo. Sommando i due momenti si ottiene il totale:

$$M = M_1 + M_2 = g\frac{h}{2}(m_1 - m_2)\sin\theta$$

L'equazione del moto (1) diventa

$$\boxed{I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\frac{h}{2}(m_2 - m_1)\sin\theta} \tag{3}$$

Per piccole oscillazione $\sin\theta \approx \theta$ e la precedente diventa

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\frac{h}{2}(m_2 - m_1)\theta = -k^2\theta\,. \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k^2\theta\,,$$

dove

$$k^2 = g\frac{h}{2I}(m_2 - m_1) > 0\,.$$

Ritroviamo così l'equazione del moto armonico la cui soluzione è:

$$\theta(t) = A\sin(kt + \phi_0) \tag{4}$$

dove A (ampiezza) e ϕ_0 (fase) sono due costanti di integrazione legate alle condizioni iniziali dalla seguente relazione:

$$\begin{cases} \theta(0) \equiv \theta_0 = A\sin\phi_0 \\ \dot\theta(0) \equiv \dot\theta_0 = Ak\cos\phi_0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tan\phi_0 = \dfrac{k\theta_0}{\dot\theta_0} \\ A^2 = \theta_0^2 + \dfrac{\dot\theta_0^2}{k^2} \end{cases} \tag{5}$$

Nel nostro caso avremo $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot\theta_0 = 0$ per cui $A = \theta_0$ e $\phi_0 = \pi/2$ per cui la soluzione si scrive

$$\theta(t) = \theta_0\cos(kt) \tag{6}$$

Il periodo delle (piccole) oscillazioni sarà dato da

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{gh(m_2 - m_1)}}} \tag{7}$$

Metodo 2. In alternativa, possiamo calcolare solo il momento della forza risultante, applicata al centro di massa del sistema (asta + massa m_1 + massa m_2). Misurando le distanze dal punto medio O, il centro di massa si trova dalla formula

$$x_{cm} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{(h/2)m_2 - (h/2)m_1}{m_1 + m_2 + m_0} \tag{8}$$

dove si assunto come positivo il verso che da O punta verso la massa m_2. Si noti che la massa dell'asta va pensata riposta nel suo punto medio O per cui $x_{\text{asta}} = 0$. La forza complessiva sarà data dalla somma delle tre forze peso:

$$F_{\text{tot}} = m_1 g + m_2 g + m_0 g = (m_1 + m_2 + m_0)g \tag{9}$$

L'equazione cardinale si scriverà pertanto

$$M = I\alpha \quad \rightarrow \quad -x_{cm}F_{\text{tot}}\sin\theta = I\alpha$$

dove il segno meno deriva dal fatto che il momento è entrante. L'equazione precedente è identica alla (3). Usando la (8) e la (9) si ha, infatti:

$$-x_{cm}F_{\text{tot}}\sin\theta = -\frac{h}{2}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_0}(m_1 + m_2 + m_0)g\sin\theta = -g\frac{h}{2}(m_2 - m_1)\sin\theta$$