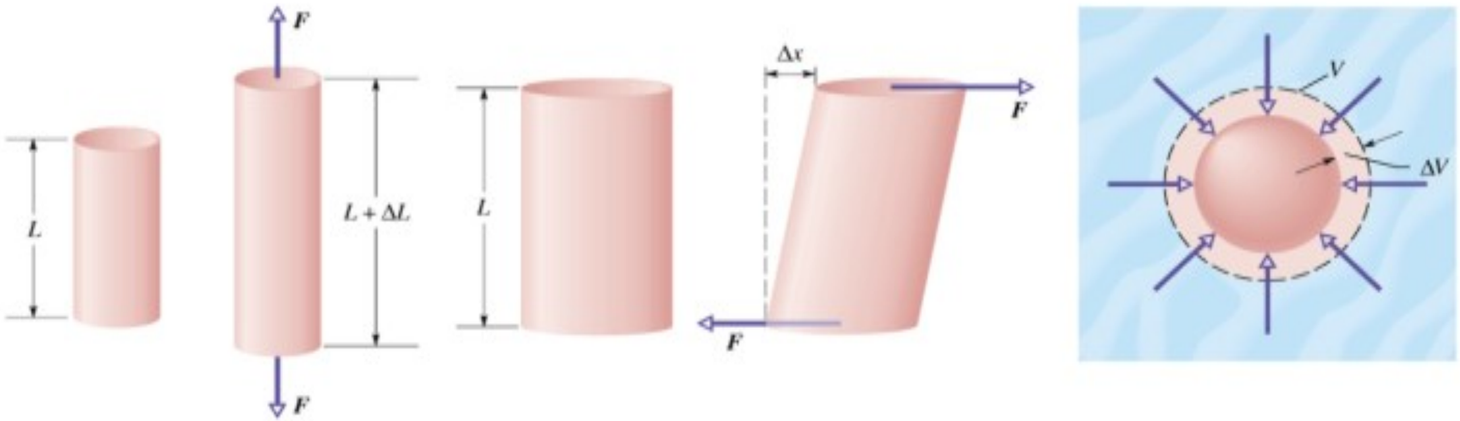
Proprietà elastiche dei corpi

I corpi solidi di norma hanno una forma ed un volume non facilmente modificabili, da qui deriva la nozioni di corpo rigido come corpo ideale non deformabile. In realtà ***tutti i corpi solidi si deformano sotto l'azione di sollecitazioni meccaniche***.

Le deformazioni di cui parleremo sono deformazioni di tipo elastico, ovvero, al cessare della sollecitazione, il corpo ritorna alla sua configurazione originaria



Quando un corpo è soggetto ad una forza di piccola intensità (carico), esso subisce ***una deformazione proporzionale al carico***. Tale deformazione è elastica.

La proporzionalità tra deformazione e carico costituisce la legge di Hooke

Trazione e compressione

Una barra solida omogenea è posata su un tavolo e bloccata ad un'estremità. All'altra estremità viene applicata una forza di modulo F, ad esempio dovuta alla forza peso della massa m. In questo caso ***il carico è di trazione***, si ha una deformazione e si raggiunge un equilibrio in cui la reazione elastica della sbarra eguaglia la forza applicata.

Se la barra subisce l'azione di una forza di verso contrario, si parla di ***compressione***

Carico specifico σ: rapporto tra la forza applicata ortogonalmente ad una superficie e la superficie stessa

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Allungamento lineare unitario ε: allungamento subito da un materiale di lunghezza unitaria, ovvero rapporto tra l'allungamento e la lunghezza

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Trazione e compressione - Modulo di Young

Secondo la legge di Hooke, ***carico specifico e allungamento unitario per piccoli valori del carico sono proporzionali*** ed il loro rapporto è definito come **il modulo di Young o modulo di elasticità**

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

E: Modulo di Young

Un alto valore di E determina, a parità di carico, un allungamento specifico minore

Dimensioni $[E] = [F][L]^{-2}$

Unità di misura $\frac{N}{m^2}$

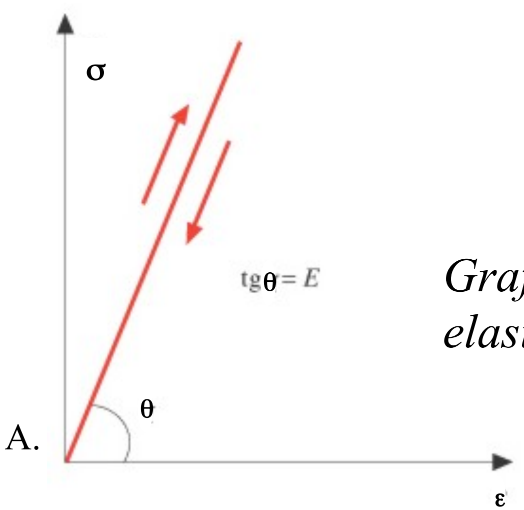
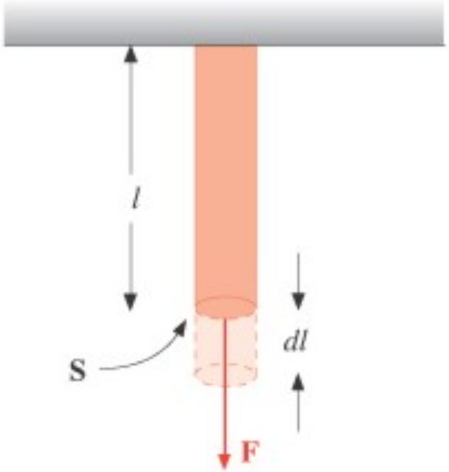


Grafico comunemente usato nello studio delle proprietà elastiche dei corpi

Esercizio - Modulo di Young

Determinare per un filo di alluminio, di diametro d =4mm e lunghezza l=1,2 m, l'allungamento per effetto di una trazione con carico F=120 N, sapendo che il modulo di Young per l'alluminio vale E=7 10^{10}N/m^2



Sol.: Sezione del filo: $S=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\pi\left(2\cdot 10^{-3}\right)^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$

$$\sigma=\frac{F}{S} \Rightarrow \sigma=\frac{120}{12{,}56\cdot 10^{-6}}=9{,}55\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\sigma \Rightarrow \frac{\Delta l}{l}=\frac{1}{E}\sigma \Rightarrow \Delta l=\frac{\sigma l}{E}=1{,}2\,\frac{9{,}55\cdot 10^{6}}{7\cdot 10^{10}}=0{,}16\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

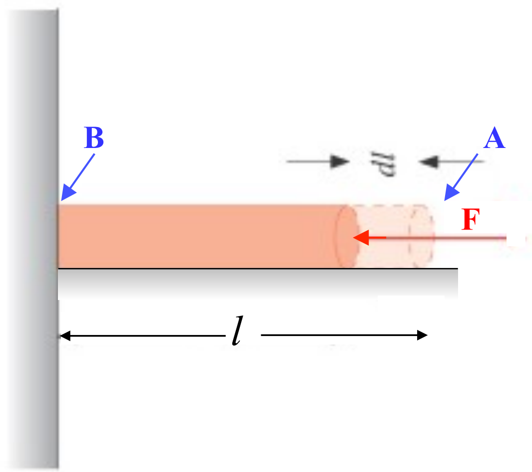
$$\Delta l = 0{,}16\,\mathrm{mm}$$

Se diametro del filo è la metà allungamento è 4 volte

Esercizio 2 - Modulo di Young

Una sbarra, di sezione **S** e lunghezza ***l*** è posta su un piano orizzontale. Viene compressa con una forza costante F distribuita uniformemente su tutta S

Determinare Δl quando **la** sbarra è vincolata in B al muro



Sol.:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\sigma \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{E}\sigma l \qquad \text{con: } \sigma = \frac{F}{S}$$

$$\Delta l_{con\_vincob} = \frac{l}{E} \cdot \frac{F}{S}$$

Legge di Poisson

Per effetto della trazione la sbarra non solo si allunga, ma ***subisce anche una variazione di sezione.***

Se r è una dimensione trasversale, ad esempio, il raggio di una sbarra cilindrica, si trova **la legge di Poisson**:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu\varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

Grandezza adimensionale, ***coefficiente di Poisson***

Legge di Poisson

Nella trazione il **volume della sbarra non diminuisce**.

Se consideriamo una sbarra cilindrica di volume iniziale $V=\pi r^2 l$. Dopo la trazione, il volume diventa:

$$V_{fin} = V_{in} + \Delta V = \pi(r+\Delta r)^2(l+\Delta l)$$

$$= \pi(r^2+\Delta r^2+2r\Delta r)(l+\Delta l) \quad = \pi\left[r^2 l + r^2\Delta l + \underbrace{l\Delta r^2}_{\cong 0} + \underbrace{\Delta l\Delta r^2}_{\cong 0} + 2rl\Delta r + \underbrace{2r\Delta l\Delta r}_{\cong 0}\right] = \underbrace{\pi r^2 l}_{V_{in}} + \underbrace{\pi r^2\Delta l + 2\pi r l\Delta r}_{\Delta V}$$

Se supponiamo: $\Delta V \geq 0 \Rightarrow \Delta V = \pi(r^2\Delta l + 2rl\Delta r) \geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} \geq -2\frac{\Delta r}{r}$

$= 1/\nu$, *poichè:* $\frac{\Delta r}{r} = -\nu\frac{\Delta l}{l}$

La condizione $\nu \leq 0{,}5$ è la condizione perché sia $\Delta V \geq 0$

Sperimentalmente si trova sempre $\nu \leq 0{,}5$, si conclude pertanto che il volume della sbarra sottoposta a trazione non diminuisce mai

$\nu = 0{,}5 \Rightarrow V_{fin} = V_{in}$

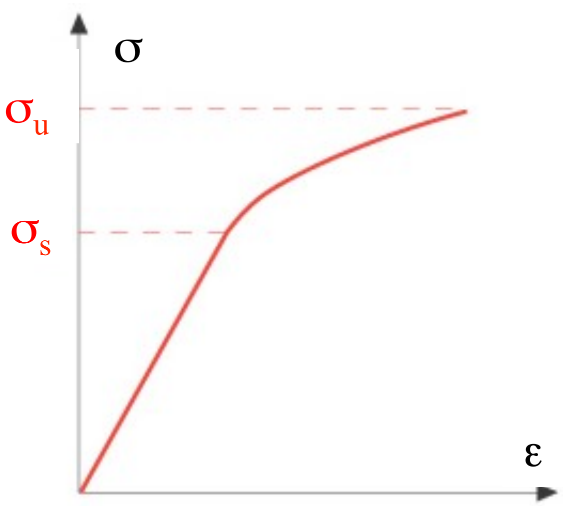
$\nu < 0{,}5 \Rightarrow V_{fin} > V_{in}$

Deformazione plastica

Il comportamento elastico del materiale si manifesta entro certi valori di carico.

Al di sopra di un certo valore critico del carico, che dipende dal tipo di materiale, ***si determina una deformazione permanente, chiamata deformazione plastica, che non è reversibile quando viene rimosso il carico.***

Il carico specifico al di sopra del quale avviene la deformazione plastica è detto **carico specifico di snervamento σ_s**.



$\sigma < \sigma_s$. Deformazione lineare elastica reversibile

$\sigma > \sigma_s$. Deformazione plastica non reversibile

Aumentando ulteriormente il carico, il materiale arriva alla rottura. Il carico specifico a cui avviene la rottura è detto **carico unitario di rottura: σ_u**.

Tenacità e duttilità

Materiale tenace: materiale ad elevata resistenza meccanica, in grado di sopportare elevati carichi

Materiale fragile: materiale nel quale la rottura ha luogo senza un'apprezzabile deformazione plastica

Duttilità di un materiale: indice della deformazione plastica prima della rottura, può essere espressa dall'allungamento specifico, intervenuto sotto carico

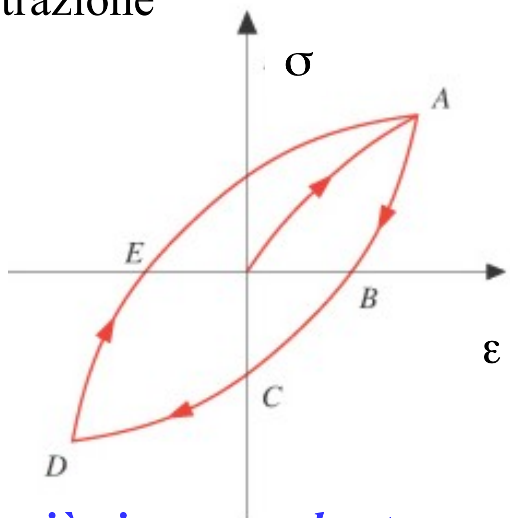
Un materiale duttile è anche tenace

in quanto è in grado di deformarsi in modo elastico prima della rottura

Isteresi elastica

Proprietà caratteristica dei corpi è ***l'isteresi elastica.***

La figura rappresenta il legame tra σ ed ε di una barra sottoposta a trazione



Si inizia dalla situazione di riposo σ=0 e ε=0 per un materiale che non ha ***mai subito una deformazione plastica***.

Aumentando il carico specifico, la deformazione aumenta ***linearmente fino a*** $\sigma=\sigma_s$***, e poi più rapidamente***. Siamo al **punto A**

Quando siamo al punto A riduciamo la forza di trazione: ***non viene più ripercorsa la stessa curva σ(ε)*** ma la sbarra resta più deformata, e per σ=0, si ha ε<0.

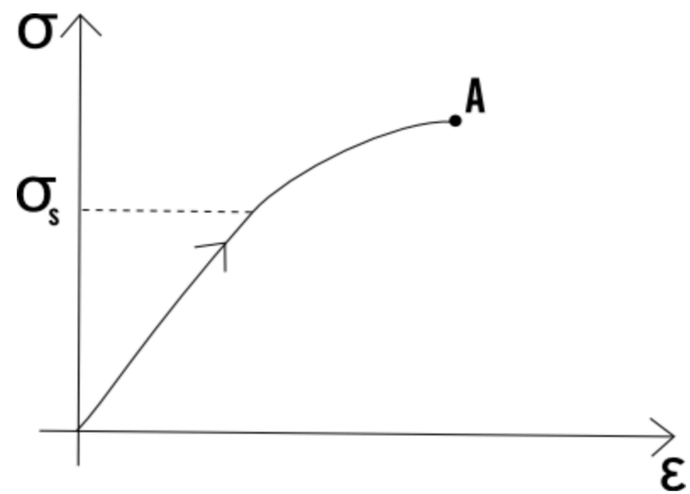
Occorre poi comprimere la barra, ovvero applicare σ<0 per ritrovare ε=0 …

Il ciclo ABCDE nel piano (σ, ε) si chiama **ciclo di isteresi**

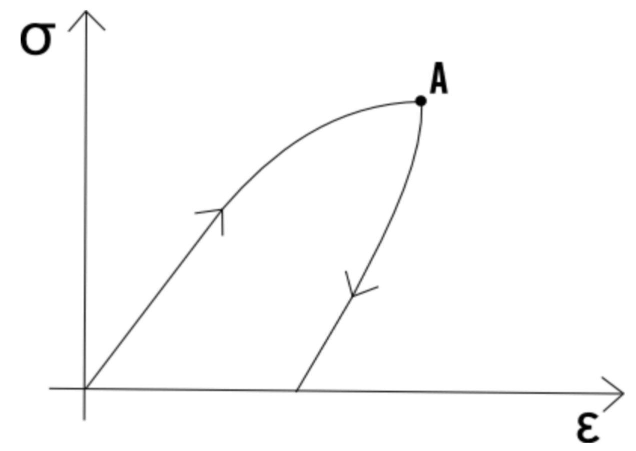
Esso mostra che ***la relazione tra σ ed ε non è univoca*** (come è invece nel comportamento elastico) ***se il corpo ha subito carichi superiori a quello di deformazione plastica.***

Ciclo di Isteresi

Rappresentando carico specifico in funzione della deformazione specifica in un grafico, osserviamo un comportamento lineare fino al raggiungimento del carico di snervamento (σ_s) oltre il quale l'andamento non è più lineare: supponiamo quindi di aver superato il carico di snervamento σ_s ma non quello di rottura σ_u e di essere giunti nel punto A.

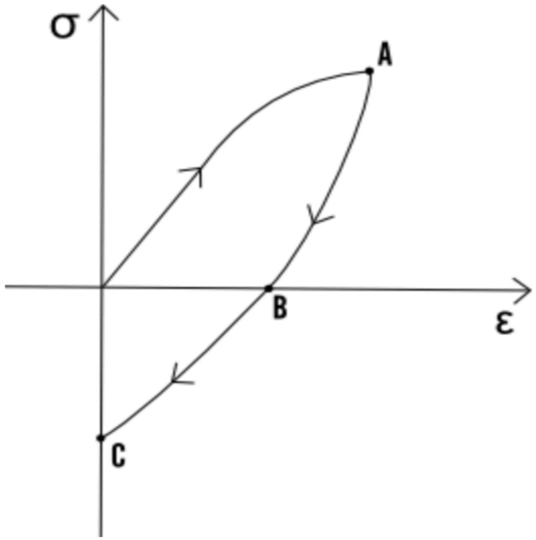


Da qui in poi, riducendo progressivamente il carico, non si ripercorre più il tratto precedente al contrario ma si segue, invece, un altro percorso. Quando il carico si annulla, il corpo si ritrova ad essere deformato rispetto all'inizio ($\varepsilon > 0$), e non passa per l'origine del sistema dove $\varepsilon=0$.

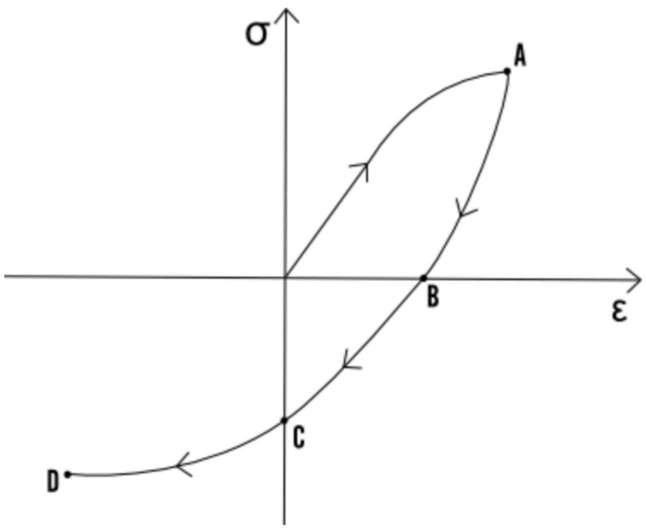


Ciclo di Isteresi

Affinché la sbarra torni ad avere la lunghezza originario, è necessario comprimerla sottoponendola ad un carico specifico σ < 0. Si arriva così al punto C nel quale, per un dato valore del carico di compressione, la deformazione specifica si annulla (ε=0) e la sbarra torna ad avere la lunghezza originaria.

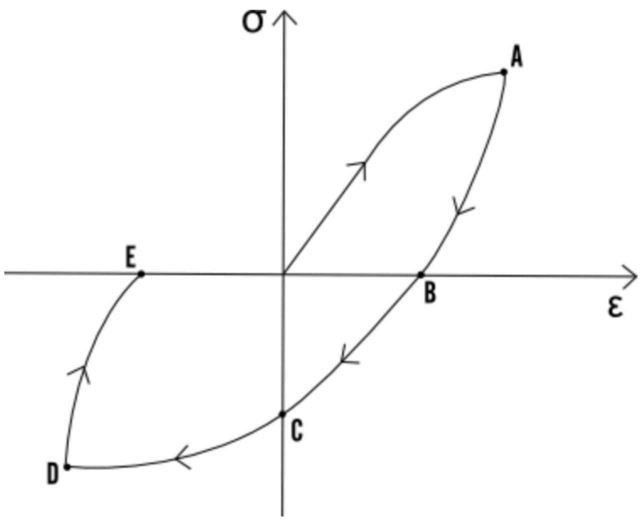


Aumentando ulteriormente il carico di compressione, si provoca un accorciamento della sbarra e così la sua deformazione specifica ε diventa negativa. Arriviamo così al punto D, simmetrico rispetto ad A.

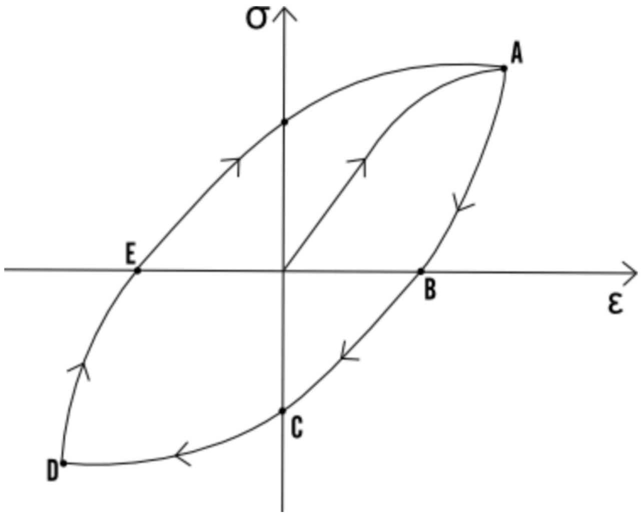


Ciclo di Isteresi

Diminuendo la compressione della sbarra fino ad annullare il carico, la sbarra non riassume più la sua sua lunghezza originaria ma rimane compressa ($\varepsilon<0$). Siamo nel punto E



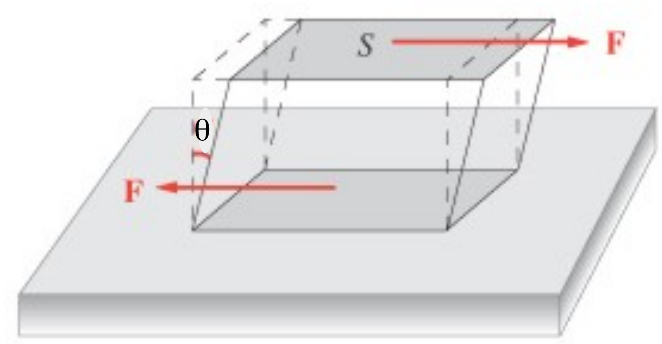
Tirando la sbarra si aumenta il carico provocando così un allungamento fino a che questa non ritorna nella condizioni del punto A



Scorrimento

Consideriamo un parallelepipedo solido incollato su due facce opposte a due lastre rigide, una mobile ed una mobile parallelamente all'altra. Applicando una forza F come quella mostrata in figura, si osserva ***uno scorrimento*** della faccia superiore rispetto a quella inferiore, che si può misurare tramite l'angolo θ.

Si trova che **tra il carico specifico e l'angolo θ esiste una relazione lineare.**

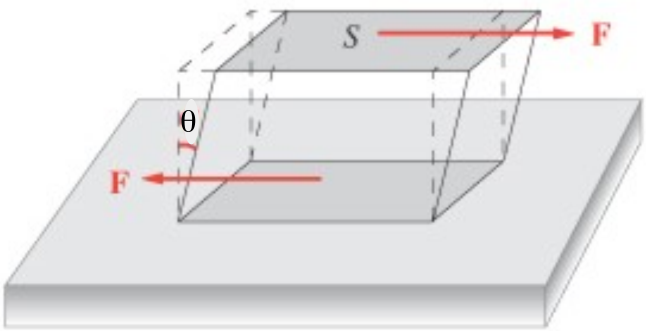


$$\frac{F}{S} = G\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma = G\theta$$

Il parametro G che caratterizza questo tipo di deformazione si chiama **modulo di rigidità o di taglio.** Per piccole deformazioni, ovvero per carichi non troppo elevati, si dimostra che fra le costanti viste esiste la relazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Scorrimento - Esercizio



Un cubetto di ferro di 1 cm di lato è soggetto a un processo di scorrimento per effetto di un carico specifico σ, raggiungendo una situazione di equilibrio con $\theta=10^{-3}$ rad. Determinare il valore della forza di taglio sapendo che il valore di G per il ferro è $G=8\cdot10^{10} N/m^2\cdot rad$

Sol.: $S=1\ cm^2=10^{-4}\ m^2$

$\theta=10^{-3}$ rad

$$\frac{F}{S}=G\theta \Rightarrow F=G\theta S \Rightarrow F=8\cdot10^{10}\cdot10^{-3}\cdot10^{-4}$$

$$F=8\cdot10^{3}\,N$$

Torsione

Consideriamo una sbarra cilindrica di raggio r e lunghezza l, bloccata su una base e applichiamo all'altra base una coppia di forze con ***momento M, parallelo all'asse della sbarra che risulta così sottoposta a* torsione.** Il valore di M per far ruotare la base inferiore di una angolo θ rispetto a quella superiore si ricava dall'espressione:

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta \quad \Rightarrow \quad M = k\theta \qquad \text{Con:} \quad k = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l}$$

L'effetto di torsione dipende fortemente dalle dimensioni trasversali: con una sbarra molto sottile, ad esempio un filo, si ottiene un deviazione misurabile anche con l'applicazione di un momento molto piccolo

La reazione elastica della sbarra si manifesta con un momento –M, il cui modulo vale quindi –kθ, cioè proporzionale all'angolo di torsione

Per effettuare la torsione il momento esterno compie lavoro: $W = \int_0^\theta M(\theta) \cdot d\theta = k \int_0^\theta \theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} k\theta^2$

Il lavoro viene immagazzinato nel sistema come ***energia potenziale elastica***

Torsione - Esercizio

Determinare il momento necessario per provocare la torsione di $\theta=1°$ di una sbarra cilindrica di ferro ($G=8\cdot 10^{10} N/m^2 \cdot rad$) con $r = 1$ cm e $l = 1$ m

Sol.:

$\theta=1° = 1,7 \cdot 10^{-2}$rad

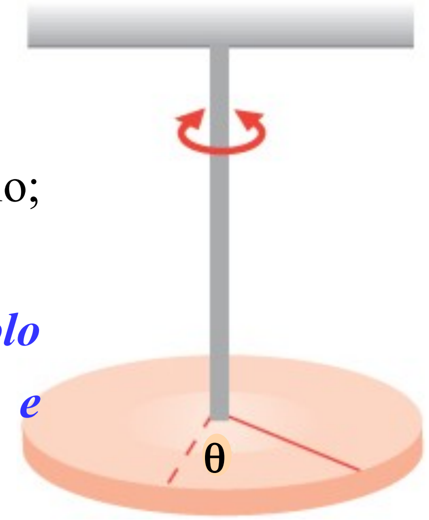
$r = 1cm = 10^{-2}m$

$$M = k\theta \qquad \text{Con:} \quad k = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} = \frac{\pi}{2} 8 \cdot 10^{10} \frac{10^{-8}}{1} = 1,26 \cdot 10^3\ Nm/rad$$

$$\Downarrow$$

$$M = k\theta = 1,26 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} \Rightarrow M = 21,4\ N \cdot m$$

Pendolo di torsione



Un pendolo di torsione si realizza sospendendo un corpo solido ad un filo; generalmente il punto di aggancio coincide con il centro di massa.

Si consideri il pendolo di torsione in figura: ***se ruotiamo il disco di un angolo θ, mantenendolo orizzontale, il filo di sospensione subisce una torsione e sviluppa un momento elastico : -kθ*.**

Se lasciamo il corpo, esso si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico, secondo l'equazione:

$$-k\theta = I\alpha \quad = I\frac{d\theta^2}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

con I: momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione, coincidente con il filo

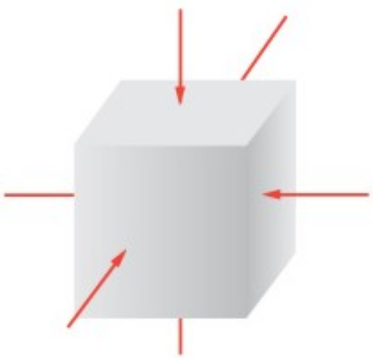
Soluzione: $\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ Con: $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$

Il sistema descrive una oscillazione armonica

Pressione
Compressione uniforme

$$p = \frac{F}{S}$$ ***Pressione***: rapporto tra la forza agente e la superficie su cui tale forza è applicata

Compressione uniforme: consiste nell'applicare alla superficie del corpo una pressione ovunque costante



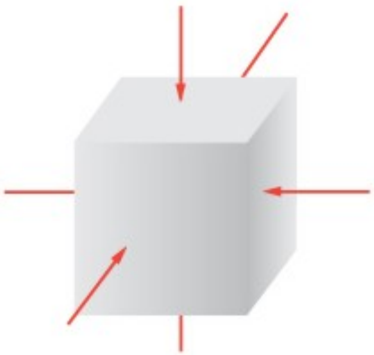
Sia **V** il volume del corpo sottoposto ad una certa pressione esterna **p**, ad una **variazione Δp** di pressione corrisponde una **variazione Δv** di volume data da:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\Delta p$$

β: modulo di compressione isoterma

Unità di misura di β: $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Modulo di Compressione



Si dimostra che fra le costanti elastiche esiste la relazione:

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Dunque si può vedere che **solo 2 costanti elastiche sono indipendenti**. Con **esperimenti di trazione e di torsione si possono determinare E e G** per un dato materiale e poi calcolare β e ν attraverso le relazioni viste

Compressione - Esercizio

Determinare la variazione percentuale di volume di una sbarra di ferro sottoposta a compressione uniforme, a temperatura costante, con una pressione $p_0=1{,}5\cdot 10^9 N/m^2$

Sapendo che per il ferro $E=2\cdot 10^{11} N/m^2$ e $\nu=0{,}3$.

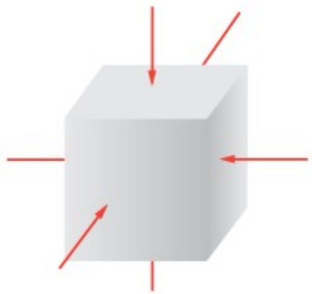
Sol.:

$$\beta=\frac{E}{3(1-2\nu)} \Rightarrow \beta=\frac{2\cdot 10^{11}}{3(1-2\cdot 0{,}3)}=1{,}7\cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$$

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{1}{\beta}\Delta p \Rightarrow \frac{\Delta V}{V}=-\frac{1{,}5\cdot 10^9}{1{,}7\cdot 10^{11}}=-0{,}88\cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta V}{V}=-0{,}88\%$$

NOTA: Δp è la variazione di pressione rispetto alla pressione atmosferica (p_a) a cui è normalmente soggetto il corpo $\Rightarrow$ $\Delta p=p_0-p_a$. Tuttavia essendo $p_a \sim 10^5 N/m^2 << p_0$, allora $\Delta p \sim p_0$



Modulo di Compressione

I solidi ed i liquidi hanno un valore del modulo di compressione isoterma molto elevato, cioè **sono poco compressibili**.

Nei gas In condizioni isoterme un gas segue con buona approssimazione la legge di Boyle:

$$pV = costante$$

Differenziando: $$pdV + Vdp = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \beta = p$$

Il **modulo di compressibilità isoterma per un gas è pari alla pressione stessa**. I gas sono dunque comprimibili assai facilmente.

Ad esempio partendo da 1 m^3 di gas alla pressione di $10^5 N/m^2$, il volume si riduce alla metà semplicemente raddoppiando la pressione, si riduce ad un decimo, decuplicando la pressione

NOTE:

Il modulo di compressibilità isoterma è l'unica grandezza caratteristica di una deformazione elastica che possiamo definire per un fluido. La compressione in un fluido è sempre reversibile.

Costanti elastiche di alcuni materiali

	E ($10^{10}N/m^2$) modulo di YOUNG	G($10^{10}N/m^2$.rad) modulo di rigidità	Modulo di compressibilità isoterma (10^{10} N/m^2)
Ferro	20	8	17
Acciaio	21	8.5	16
Alluminio	7	2.5	7
Rame	11	4	14
Tungsteno	35	14	20
Piombo	1.4	0.5	0.5÷1
Vetro	7	2.5	5
caucciù	$\sim 10^{-4}$	---	$\sim 10^{-1}$