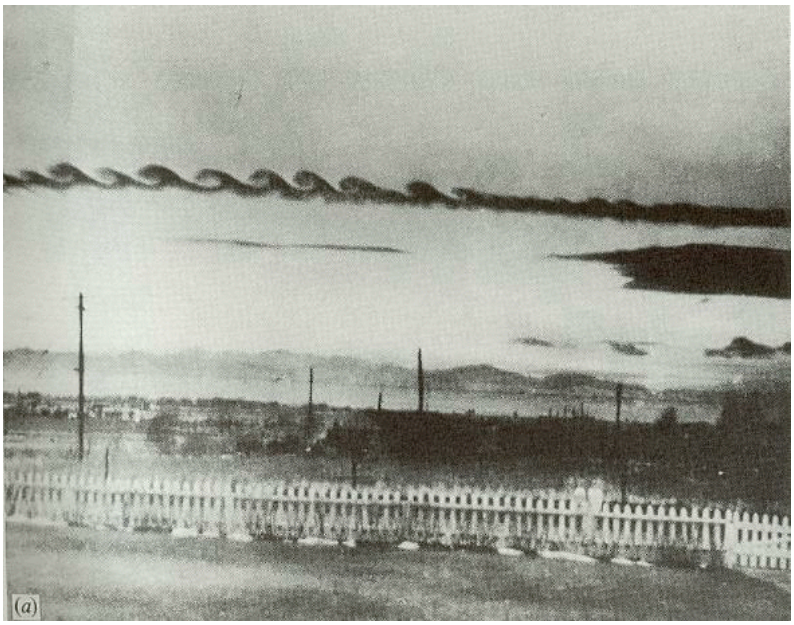

Figure 1: Esempio di instabilità di Kelvin-Helmholtz tra le nuvole.

1 Instabilità di Kelvin-Helmholtz

L'instabilità di Kelvin-Helmholtz si sviluppa all'interfacca tra due fluidi in moto relativo o, più precisamente, tra due fluidi separati da un'interfaccia attraverso la quale la velocità tangenziale presenti una brusca variazione. Tipicamente, l'instabilità causa una deformazione dell'interfaccia creando una struttura ad onde simile a quelle marine, con la presenza di vortici come mostrato in Figura 1. Questo fenomeno favorisce un graduale rimescolamento delle particelle tra le due diverse regioni, andando a formare dei vortici e facendo assumere al sistema delle caratteristiche differenti rispetto a quelle primarie.

In astrofisica, ad esempio, situazioni di questo genere si possono incontrare nel caso dell'interazione tra vento solare e magnetosfere planetarie, nelle magnetosfere delle pulsar, nella propagazione di getti stellari o nelle sorgenti extragalattiche (AGN). L'instabilità produce una modulazione della struttura dissipando l'energia ordinata del moto relativo in energia disordinata e la crescita delle perturbazioni all'interfaccia portano alla generazione di turbolenza, riscaldamento, accelerazione di particelle sopratermiche ed irraggiamento.

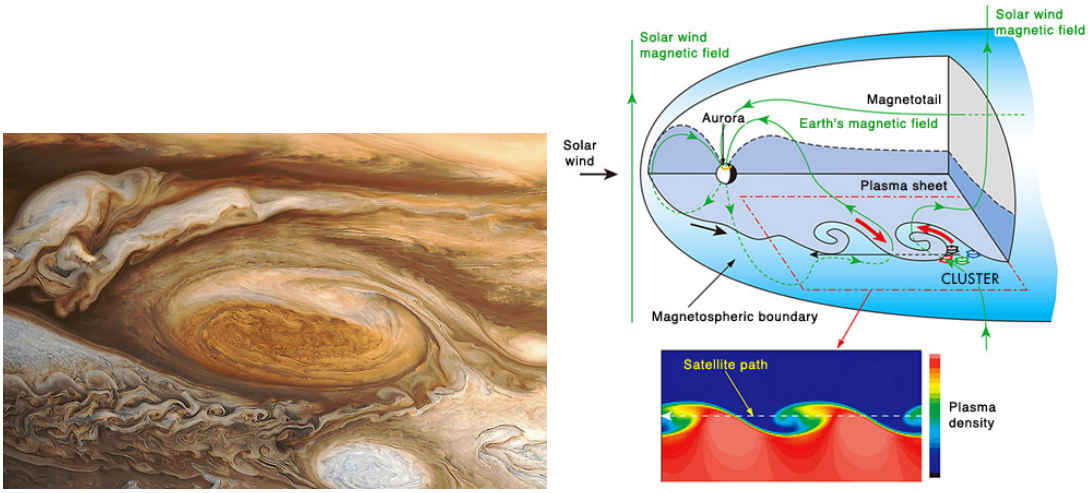

Figure 2: Alcuni esempio di instabilità di Kelvin-Helmholtz in astrofisica: la grande macchia rossa su Giove (sinistra) e uno sketch della magnetopausa terrestre (destra).

1.1 Analisi lineare dell'instabilità

Per lo studio dell'instabilità si parte dallo teoria lineare considerando, qundi, l'evoluzione di perturbazioni di piccola ampiezza. In un sistema di coordinate Cartesiano (x, y, z) consideriamo dunque due fluidi di uguale densità ρ_0 e pressione p_0 (entrambi uniformi e costanti) separati da un'interfaccia piana coincidente con il piano xz a $y = 0$. Per semplicità della trattazione assumeremo una transizione discontinua, chiamata "*vortex sheet*", in cui il fluido nel semipiano $y > 0$ (fluido A) abbia velocità non nulla $\boldsymbol{u}_0 = (U_0, 0, 0)$ mentre il fluido nel semipiano $y < 0$ (fluido B) sia a riposo, $\boldsymbol{u}_0 = (0, 0, 0)$ (si veda la figura 3). Tale configurazione rappresenta, come è facile verificare, una soluzione di equilibrio delle equazioni della gasdinamica,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) & = & 0 \\ \rho \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \right) + \nabla p & = & 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{u} & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

L'equilibrio viene così perturbato assumendo piccole deviazioni che scriveremo come

$$\rho = \rho_0 + \rho' \,, \qquad p = p_0 + p' \,, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}' \tag{2}$$

in cui ρ', p', $\boldsymbol{u}' \propto f(y) e^{i(k_x x - \omega t)}$ dove k_x è reale mentre ω potrà essere, in generale, una quantità complessa. In questo modo considereremo solo perturbazioni che si propagano parallelamente alla velocità ($k_z = 0$). Se il fluido fosse omogeneo (in assenza di interfaccia) il processo di linearizzazione porterebbe alla relazione di dispersione precedentemente ottenuta per le onde acustiche. In questo caso, tuttavia, è necessario considerare separatamente le equazioni nei due fluidi A e B e poi accordare le soluzioni.

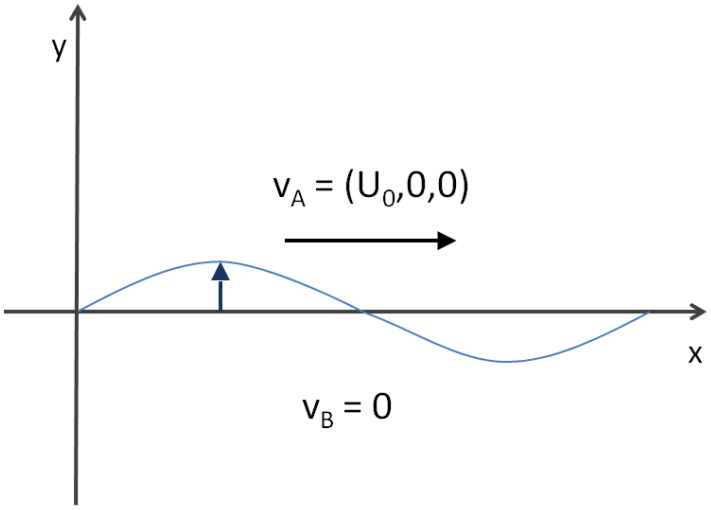

Figure 3: Configurazione iniziale per lo studio dell'analisi lineare delle instabilità di Kelvin-Helmholtz.

Fluido A. Per il fluido A si ha che $\boldsymbol{u}_0 = U_0\hat{\boldsymbol{e}}_x$. Sostituendo le espressioni (2) nelle equazioni di Eulero (1) e trascurando termini di ordine superiore al primo otterremo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho'_A}{\partial t} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla \rho'_A + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}'_A & = & 0 \\ \rho_0 \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}'_A}{\partial t} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}'_A \right) + \nabla p'_A & = & 0 \\ \dfrac{\partial p'_A}{\partial t} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla p'_A + \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}'_A & = & 0 \end{cases} \tag{3}$$

Tenendo conto della forma delle perturbazioni, avremo che $\partial_t \to -i\omega$, $\partial_x \to ik_x$ e il sistema precedente può essere riscritto come

$$\begin{cases} i\left(k_x U_0 - \omega\right) \rho'_A & = & -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}'_A \\ i\rho_0 \left(k_x U_0 - \omega\right) \boldsymbol{u}'_A & = & -\nabla p'_A \\ p'_A & = & c_s^2 \rho'_A \end{cases} \tag{4}$$

dove $c_s^2 = \gamma p_0/\rho_0$ è la velocità del suono adiabatica. Combinando la prima e la terza equazione del sistema (4) si ottiene

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}'_A = -i \frac{(k_x U_0 - \omega)}{\gamma p_0} p'_A \,, \tag{5}$$

mentre prendendo la divergenza della seconda equazione in (4) e tenendo conto che $\nabla^2 = d^2/dy^2 - k_x^2$ avremo

$$\frac{d^2 p'_A}{dy^2} = \left[k_x^2 - \frac{(k_x U_0 - \omega)^2}{c_s^2} \right] p'_A \,. \tag{6}$$

L'equazione precedente ha soluzione generale

$$p'_A = C_A e^{q_A y}\,, \quad \text{dove} \quad q_A = \pm\left[k_x^2 - \frac{(k_x U_0 - \omega)^2}{c_s^2}\right]^{1/2} \tag{7}$$

dove C_A è una costante e q_A potrà essere reale o puramente immaginario. Sia C_A che il segno di q_A devono ancora essere determinati.

Fluido B. Per il fluido nel semipiano $y < 0$, si possono ripetere gli stessi passi seguiti precedentemente per il fluido A tenendo conto che $\boldsymbol{u}_0 = (0, 0, 0)$. Otteniamo perciò,

$$p'_B = C_B e^{q_B y}\,, \quad \text{dove} \quad q_B = \pm\left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}\right)^{1/2}\,. \tag{8}$$

Le costanti C_A e C_B possono essere eliminate considerando la componente y dell'equazione del moto,

$$i\,(k_x U_0 - \omega)\,\rho_0 u'_{y,A} = -q_A p'_A\,, \qquad i\omega\rho_0 u'_{y,B} = q_B p'_B \tag{9}$$

e assumendo equilibrio di pressione ($p'_A = p'_B$) attraverso l'interfaccia ($y = 0$). In questo modo, dividendo tra loro le due espressioni nell'equazione (9) si ottiene:

$$\frac{(k_x U_0 - \omega) u'_{y,A}}{\omega u'_{y,B}} = -\frac{q_A}{q_B}\,. \tag{10}$$

Introducendo il vettore spostamento $\boldsymbol{\xi}$ definito da

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{u}' \tag{11}$$

notiamo che, attraverso l'interfaccia, ξ_y dovrà essere lo stesso per entrambe i fluidi, e.g., $\xi_{y,A} = \xi_{y,B} = \xi_y$. Per questo motivo avremo che $u'_{yA} = i(k_x U_0 - \omega)\xi_y$ e, analogamente, $u'_{yB} = -i\omega\xi_y$. La relazione precendente permette di eliminare u'_y e di di scrivere

$$(k_x U_0 - \omega)^2\, q_B = \omega^2 q_A \tag{12}$$

I segni di q_A e q_B dipendono dalla soluzione stessa e dalle condizioni al contorno:

- se ω è reale, il sistema è stabile: il segno deve essere scelto in modo che le perturbazioni corrispondano a onde che si propagano verso l'esterno per evitare una sorgente di energia all'infinito. Questa condizione è nota come condizione di *Sommerfeld*.

- se ω è complesso o immaginario, il sistema è instabile: i segni devono essere scelti in modo che l'ampiezza delle perturbazioni si annulli per $y \to \pm\infty$.

Per questo motivo scegliamo il segno $-$ per q_A e il segno $+$ per q_B.

1.2 Soluzione della relazione di dispersione

Al fine di risolvere l'equazione (12) introduciamo le seguenti quantità adimensionali

$$\Phi = \frac{\omega}{k_x c_s}\,, \qquad M = \frac{U_0}{c_s}\,, \tag{13}$$

dove M è il numero di Mach. In questo modo, il tempo scala dell'instabilità risulta essere $t_{KH} \sim 2\pi/(k_x c_s \mathrm{Im}\Phi)$ e l'equazione (12) può essere riscritta come

$$(M-\Phi)^2\left[1-\Phi^2\right]^{1/2} = -\Phi^2\left[1-(M-\Phi)^2\right]^{1/2} \tag{14}$$

Prendendo il quadrato dell'equazione precedente, la relazione di dispersione si riduce ad un equazione di sesto grado che può essere risolta analiticamente. Tralasciando le radici spurie così generate, si può verificare che solo 3 delle 6 radici sono fisicamente ammissibili:

$$\Phi = \frac{M}{2} \pm i\left[\sqrt{M^2+1} - \left(\frac{M^2}{4}+1\right)\right]^{1/2}\,, \tag{15}$$

$$\Phi = \frac{M}{2}\,, \quad \text{per} \quad M > 2 \tag{16}$$

Chiaramente, l'unica soluzione instabile è data dall'equazione (15) con il segno positivo (+) e le sue proprietà, in funzione del numero di Mach, sono le seguenti:

- $M \ll 1$: fluido subsonico (regime incomprimibile). In questo caso, espandendo con Taylor l'equazione (15) si ottiene

  $$\Phi \approx \frac{M}{2}\,(1 \pm i) \tag{17}$$

  che dimostra come la configurazione di *vortex sheet* è sempre instabile e il tasso di crescita (*growth rate*) è direttamente proporzionale alla velocità. Si noti che la relazione precedente si può anche scrivere come $\omega = k_x U_0(1 \pm i)/2$ e che quindi non dipende dalla velocità del suono.

- $M \gtrsim 1$: fluido transonico. In questo caso la configurazione risulta essere instabile anche se il trasso di crescita è inferiore al caso precedente e raggiunge un massimo per $M \approx 1.7$ per poi decrescere.

- $M \gg 1$: caso supersonico. Per $M > \sqrt{8}$ le due radici dell'equazione (15) diventano reali ($\mathrm{Im}\,\Phi = 0$) e le perturbazioni si trasformano in onde sonore. In tal senso flussi altamente supersonici sono stabili nella configurazione di *vortex sheet*. In realtà si può dimostrare che i coefficienti di riflessione e trasmissione di queste onde attraverso l'interfaccia possono divergere in particolari condizioni. Per questo motivo, la configurazione è marginamente stabile.

L'andamento di $\mathrm{Im}\,\Phi(M)$ in funzione del numero di Mach è mostrato in Fig. 4.

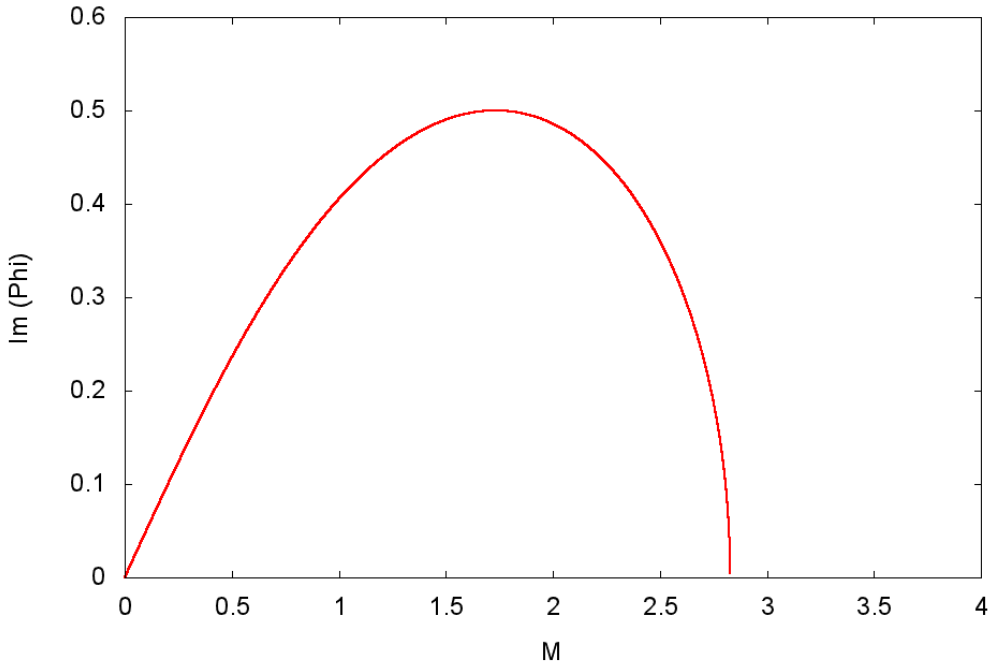

Figure 4: Andamento della parte immaginaria di $\Phi(M)$. Il growth rate raggiunge un massimo intorno a $M \approx 1.7$ e si annulla per $M = \sqrt{8}$.

1.2.1 Evoluzione non-lineare

L'evoluzione lineare è correttamente descritta dalle simulazioni numeriche che permettono, inoltre, di seguire il sistema durante la fase non-lineare successiva in cui le perturbazioni non possono più essere considerate di piccola ampiezza. Tali fasi sono caratterizzate dalla formazione di vortici e dalla loro mutua interazione che tipicamente porta ad una situazione di mescolamento e all'unione degli stessi. Un esempio che mostra l'evoluzione di un'interfaccia piana con $M = 0.8$ è raffigurato in Fig 1.2.1.

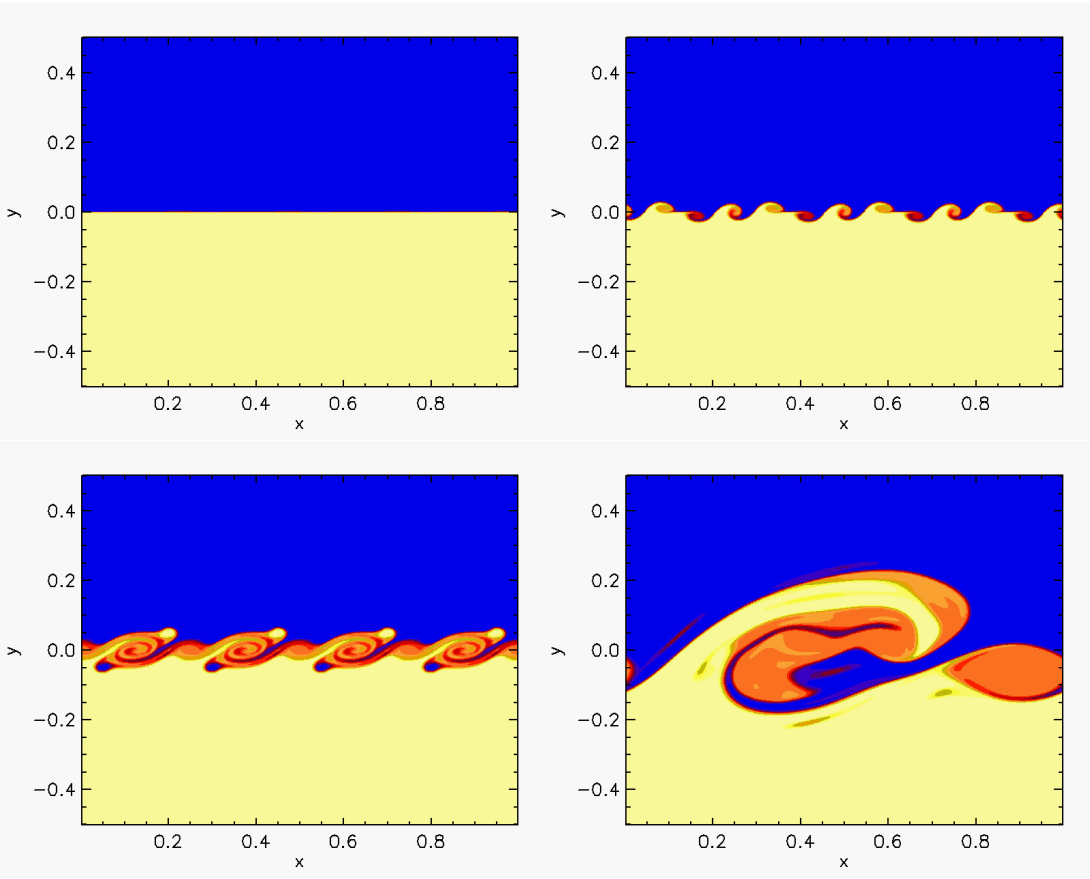

Figure 5: Evoluzione di un'interfaccia piana soggetta ad instabilità di Kelvin-Helmholtz. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso: condizione iniziale, fase lineare, formazione ed interazione di vortici (non-lineare), fase finale con unione in un'unico vortice.

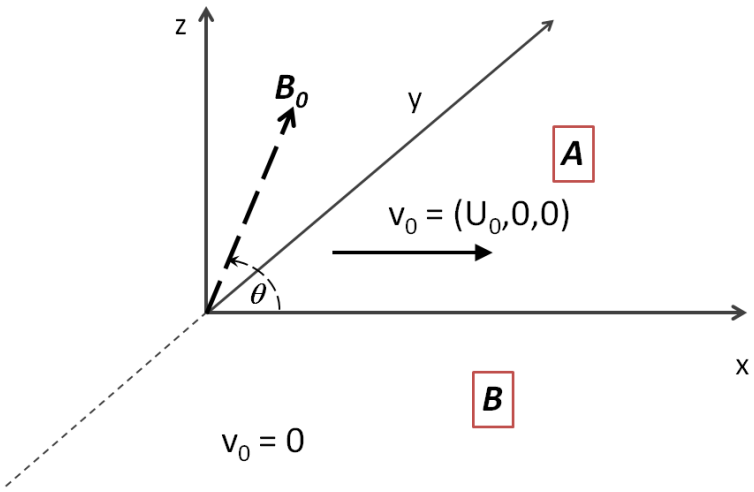

Figure 6: Configurazione iniziale per lo studio dell'analisi lineare delle instabilità di Kelvin-Helmholtz in presenza di un campo magnetico.

1.3 Estensione al caso MHD

Quando un campo magnetico viene introdotto ($\boldsymbol{B} \neq 0$) il processo di linearizzazione deve essere fatto a partire dalle equazioni MHD complete. La procedura per ottenere la relazione di dispersione è sostanzialmente la stessa e il polinomio finale è di decimo grado. L'effetto del campo magnetico sullo sviluppo dell'instabilità dipende strettamente dalla geometria o, più esattamente, dall'orientamento del campo magnetico rispetto alla velocità.

Per semplicità si considera un campo magnetico costante inizialmente nel piano xz, ossia, $\boldsymbol{B}_0 = B_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ come in Fig 6. Quando il campo magnetico è perpendicolare alla velocità ($\theta = \pi/2$) le caratteristiche dell'instabilità rimangono sostanzialmente invariate, a patto di ridefinire il numero di Mach come $M = U_0/\sqrt{c_s^2 + v_a^2}$ dove $v_a = B_0/(4\pi\sqrt{\rho_0})$ è la velocità di Alfven. Contrariamente, quando il campo ha una componente parallela alla velocità ($\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0 \neq 0$), si ha un effetto stabilizzante e si può dimostrare che (sempre per $k_z = 0$) il flusso viene stabilizzato quando $M \leq 2v_a/c_s$, cioè, flussi subsonici magnetizzati sono stabili. Inoltre, il limite di stabilità superiore, che nel caso non magnetizzato si ha per $M = \sqrt{8}$, decresce verso $M \to 2$ e, per $v_a/c_s \geq 1$ i due limiti coincidono (si veda la figura 7). In altre parole, flussi molto magnetizzati vengono stabilizzati.

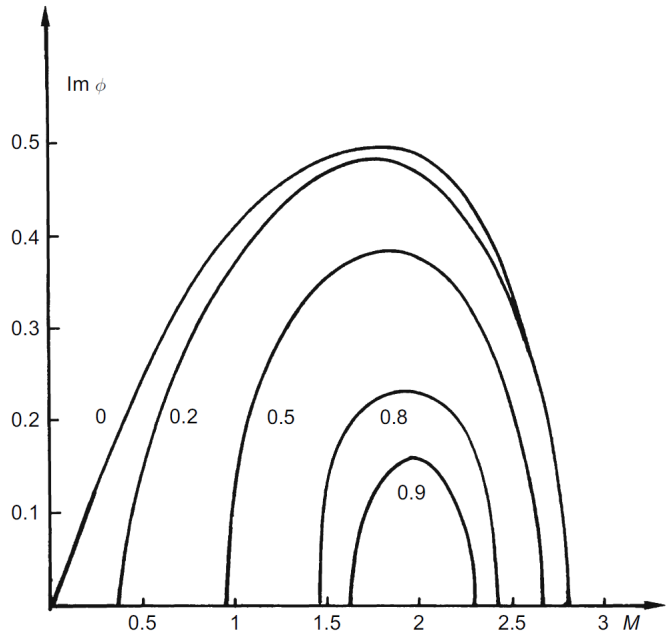

Figure 7: Andamento del growth rate adimensionale $\mathrm{Im}\,\Phi$ in funzione del numero di Mach M per una perturbazione che si propaga lungo la velocità del fluido in una configurazione di tipo *vortex sheet*. Il valore in prossimità di ogni curva denota il numero di Mach Alfvenico, $M_a = v_a/c_s$. Il caso puramente idrodinamico corrisponde a $M_a = 0$.