

# Formulario di Onde

---

## O.1 Proprietà elastiche dei solidi (per piccole deformazioni)

**Legge di Hooke:**  $F = k|\Delta l|$

Energia potenziale elastica:  $U = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$

Carico specifico o sforzo:  $\sigma = \frac{F}{A}$ , la forza  $F$  è applicata perpendicolarmente alla superficie  $A$

Allungamento lineare o deformazione specifica:  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Modulo di Young o modulo di elasticità:  $Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = k \frac{l_0}{A}$

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = \frac{\sigma}{Y} l_0 \quad l_0 = \text{lunghezza a riposo}$$
$$l = l_0 + \Delta l = l_0 \left(1 + \frac{\sigma}{Y}\right) \quad \Delta l = \text{allungamento sotto l'effetto di } \sigma$$

Un solido che, sottoposto alla forza  $F$ , subisce una deformazione longitudinale  $\Delta l$ , subisce anche una deformazione trasversale  $\Delta r$  tale che:  $\Delta r/r = -\nu(\Delta l/l)$ , dove  $\nu$  è il *coefficiente di Poisson* ( $0 < \nu < 0.5$ , caratteristico di ogni materiale).

Modulo di rigidità o di taglio:  $G = \frac{Y}{2(1 + \nu)}$

Deformazione per scorrimento:

$$\sigma = \frac{F}{A} = G\theta \quad \begin{array}{l} F \text{ è applicata tangenzialmente alla superficie } A \\ \theta = \text{angolo di deformazione} \end{array}$$

Deformazione (di una sbarra cilindrica) per torsione:

$$M = k\theta \quad k = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \quad \begin{array}{l} M = \text{momento torcente} \\ \theta = \text{angolo di torsione} \\ r, l = \text{raggio e lunghezza della sbarra} \end{array}$$

Modulo di compressibilità isoterma:  $\beta_T = \frac{Y}{3(1 - 2\nu)}$

Compressione uniforme (a temperatura costante):  $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{\beta_T}$

---

## O.2 Equazione delle onde (equazione di d'Alembert) in tre dimensioni

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$v$  è la velocità di propagazione.

Vale il principio di sovrapposizione: una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni è, a sua volta, una soluzione dell'equazione delle onde.

**Soluzione generale in una dimensione:**

$$\xi(x, t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt) \quad \begin{array}{l} \xi_1 = \text{onda progressiva} \\ \xi_2 = \text{onda regressiva} \end{array}$$

---

### O.3 Propagazione delle onde nei mezzi materiali

#### Onde elastiche longitudinali in una sbarra solida sottile

$$\text{velocità di propagazione: } v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \begin{array}{l} Y = \text{Modulo di Young} \\ \rho = \text{densità di massa} \end{array}$$

#### Onde elastiche trasversali/torsionali in una sbarra solida

$$\text{velocità di propagazione: } v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \begin{array}{l} G = \text{Modulo di rigidità} \\ \rho = \text{densità di massa} \end{array}$$

#### Onde elastiche in una corda tesa

$$\text{velocità di propagazione: } v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad \begin{array}{l} T = \text{Tensione} \\ \rho_l = \text{densità lineare di massa} \end{array}$$

#### Onde elastiche in una membrana tesa

$$\text{velocità di propagazione: } v = \sqrt{\frac{T}{\rho_\Sigma}} \quad \begin{array}{l} T = \text{Tensione superficiale (forza per} \\ \text{unità di lunghezza)} \\ \rho_\Sigma = \text{densità superficiale di massa} \end{array}$$

---

#### Onde in un gas

$$\begin{array}{ll} p_0 = \text{pressione media} & \rho_0 = \text{densità di massa media} \\ T = \text{temperatura assoluta} & V = \text{volume} \\ R = \text{costante dei gas} & A = \text{massa molare} \\ \gamma = \text{costante adiabatica} & n = \text{numero di moli} \end{array}$$

$$\text{Modulo di compressibilità: } \beta = -V \frac{dp}{dV} = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

Per un gas ideale ( $pV = nRT$ ):

$$\text{Modulo di compressibilità } \begin{cases} \text{isoterma: } \beta_T = p \\ \text{adiabatica: } \beta_S = \gamma p \end{cases}$$

$$\text{velocità di propagazione dell'onda: } v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

Nelle situazioni più comuni la propagazione di un'onda in un gas avviene in condizioni adiabatiche, quindi  $\beta \rightarrow \beta_S$ :

$$v = \sqrt{\frac{\beta_S}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{A}}$$

---

#### Onde sulla superficie di un liquido

velocità di propagazione:

$$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}\right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$$
$$\begin{array}{l} \lambda = \text{lunghezza d'onda} \\ \rho = \text{densità del liquido} \\ h = \text{profondità del liquido} \\ \tau = \text{tensione superficiale} \\ g = \text{accelerazione di gravità} \end{array}$$

---

## O.4 Onde armoniche

### Onda piana armonica progressiva

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(k(x - vt) + \phi) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$\xi_0$  = ampiezza (costante)

$k$  = numero d'onda [unità di mis.: rad/m]

$\omega$  = pulsazione [unità di mis.: rad/s]

$kx - \omega t + \phi$  = fase ( $\phi$  = costante arbitraria)

$$f = \text{frequenza} \quad T = \frac{1}{f} = \text{periodo}$$

$$\omega = kv \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = 2\pi f \quad \lambda = vT = \frac{v}{f} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Altre espressioni equivalenti:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi) = \xi_0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \phi \right] = \\ &= \xi_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right] = \xi_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \left( \frac{x}{v} - t \right) + \phi \right] \end{aligned}$$

Le espressioni per un'onda armonica regressiva si ottengono dalle precedenti con la sostituzione  $(x - vt) \rightarrow (x + vt)$

---

### Onda armonica piana in tre dimensioni

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

---

### Potenza di un'onda armonica

In una corda tesa:

spostamento:  $s = A \sin(kx - \omega t)$

potenza istantanea ( $T$  = tensione):  $P = -T \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} = TA^2 \omega k \cos^2(kx - \omega t)$

densità lineare di energia meccanica:  $w_l = \frac{dU_{\text{mecc}}}{dx} = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2$

potenza media:  $P_m = \frac{1}{2} T \omega k A^2 = \frac{1}{2} v^2 \rho_l \omega k A^2 = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2 v = w_l v$

Intensità:  $I = P_m = w_l v$  [unità di mis.: W]

In una sbarra solida o in un gas ( $\Sigma$  = sezione della sbarra o del tubo di gas)

spostamento:  $s = A \sin(kx - \omega t)$

potenza istantanea:  $P = \rho \omega^2 A^2 v \Sigma \cos^2(kx - \omega t)$

densità (volumica) di energia meccanica:  $w_\tau = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$

potenza media:  $P_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \Sigma = w_\tau v \Sigma$

Intensità:  $I = \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{\Sigma} = w_\tau v$  [unità di mis.:  $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ]

Su una superficie (membrana elastica o superficie di un liquido)

potenza media:  $P_m = w_\Sigma v l$  ( $w_\Sigma$  = densità superficiale di energia meccanica,  $l$  = sezione lineare dell'onda)

Intensità:  $I = \frac{1}{l} \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{l} = w_\Sigma v$  [unità di mis.:  $\frac{\text{W}}{\text{m}}$ ]

---

### Onda sonora in un gas

Onda di spostamento:  $s = A \sin(kx - \omega t)$

potenza media:  $P_m = \frac{1}{2} \beta \omega k A^2 \Sigma = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v \Sigma = w_\tau v \Sigma$

Onda di pressione:

$\Delta p = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} = \rho_0 v \omega A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\rho_0 v \omega A \cos(kx - \omega t)$

$(\Delta p)_{max} = \rho_0 v \omega A = 2\pi \rho_0 f v A$

Intensità:  $I = w_\tau v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v = \frac{(\Delta p)_{max}^2}{2\rho_0 v}$

livello sonoro:  $B = 10 \log \frac{I}{I_0}$   $I_0 =$  soglia di udibilità  
 $\log =$  logaritmo decimale.

Velocità del suono in aria ( $p = 1$  atm,  $T = 20^\circ\text{C}$ ):  $c_s = 343$  m/s

---

### Onde sferiche (armoniche)

$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t)$  (onda progressiva)

Potenza media:  $P_m = I(r) \Sigma(r) = 4\pi C \xi_0^2$   $C =$  costante, dipende dalla natura dell'onda

Intensità:  $I(r) = \frac{P_m}{\Sigma(r)} = \frac{P_m}{4\pi r^2} = \frac{I_0}{r^2}$   $I_0 = \frac{P_m}{4\pi}$

Onda sferica sonora:

$\Delta p = \frac{\rho_0 v \omega A}{r} \cos(kr - \omega t)$   $I(r) = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \frac{A^2}{r^2} v$

---

### Onde cilindriche (armoniche)

$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t)$  (onda progressiva)

Potenza media:  $P_m = I(r) \Sigma(r) = C \xi_0^2 2\pi h$   $C =$  costante, dipende dalla natura dell'onda

Intensità:  $I(r) = \frac{P_m}{\Sigma(r)} = \frac{I_0}{r}$

---

## O.5 Analisi di Fourier

Funzione di una variabile  $f(u)$  periodica con periodo  $U$ :  $f(u + U) = f(u)$ .

$$f(u) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos(mwu) + b_m \sin(mwu) \right) \quad w = \frac{2\pi}{U}$$

$$a_0 = \frac{1}{U} \int_0^U f(u) du \quad a_m = \frac{2}{U} \int_0^U f(u) \cos(mwu) du$$

$$b_m = \frac{2}{U} \int_0^U f(u) \sin(mwu) du$$

Funzione non periodica:  $f(u) = \int_0^{\infty} \left[ a(w) \cos(wu) + b(w) \sin(wu) \right] dw$

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(wu) du \quad b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(wu) du$$

---

## O.6 Battimenti:

Sovrapposizione di due onde armoniche con diversa frequenza (stessa ampiezza)

$$s_1 = A \sin(\omega_1 t) \qquad s_2 = A \sin(\omega_2 t)$$

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = 2A \cos(\Omega t) \sin(\omega t)$$

Frequenza di battimento (modulazione di ampiezza percepita da un osservatore quando le frequenze sono molto simili tra loro):

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi}$$

---

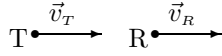
## O.7 Effetto Doppler

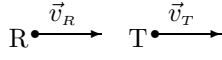
$c_s$ : velocità del suono nel mezzo

$v_T$  velocità del trasmettitore (sorgente), diretta verso destra

$v_R$  velocità del ricevitore (osservatore), diretta verso destra

Per  $v_T < c_s$ ,  $v_R < c_s$ :

Se il ricevitore precede il trasmettitore:  $f_R = f_T \frac{c_s - v_R}{c_s - v_T}$  

Se il trasmettitore precede il ricevitore:  $f_R = f_T \frac{c_s + v_R}{c_s + v_T}$  

Per velocità dirette verso sinistra basta cambiare il segno nelle formule precedenti.

Se le velocità  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_T$  non sono dirette lungo la congiungente trasmettitore-ricevitore, nelle formule precedenti bisogna usare le componenti delle velocità lungo la congiungente stessa.

---

## O.8 Onda d'urto

Per  $v_T > c_s$ , angolo di semiapertura del cono sonico:  $\sin \theta = \frac{c_s}{v_T}$

numero di Mach =  $\frac{v_T}{c_s}$

---

## O.9 Pacchetti d'onda

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi$$

$$\Delta \omega \Delta t \geq 2\pi$$

$$\Delta f \Delta t \geq 1$$

Si definisce la **relazione di dispersione** (relazione tra la frequenza angolare e la lunghezza d'onda:  $\omega(k) = v_f(k)k$

Velocità di fase:  $v_f = \omega/k$ .

Se  $v_f$  è costante (cioè indipendente da  $k$ ), il mezzo è **non dispersivo**: tutte le onde, indipendentemente da  $\lambda$ , hanno la stessa velocità di propagazione.

Se  $v_f$  dipende da  $k$  il mezzo è **dispersivo**. Il pacchetto si deforma e avanza con la velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} = v_f + f \frac{dv_f}{df}$$

In un mezzo non dispersivo  $v_g = v_f$ .

---

## O.10 Interferenza

Nel punto  $P$  giungono due onde emesse (stessa frequenza e lunghezza d'onda), rispettivamente, da una sorgente a distanza  $x_1$  e da un'altra a distanza  $x_2$  da  $P$ ,

$$\xi_1(P, t) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$\xi_2(P, t) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$\xi(P, t) = \xi_1(P, t) + \xi_2(P, t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta}$$

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

Interferenza costruttiva:  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Interferenza distruttiva:  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = (2n + 1)\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Intensità:**

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Nel caso particolare di due onde di uguale ampiezza  $A_1 = A_2 = A_0$ :

$$A = 2A_0 \cos \frac{\delta}{2} \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

## O.11 Onde stazionarie

### Onde stazionarie unidimensionali

$$s(x, t) = A \sin kx \cos \omega t$$

**Corda tesa** di lunghezza  $L$  con gli estremi entrambi fissi, **colonna di gas** chiusa ad entrambe le estremità (o aperta ad entrambe le estremità):

Serie armonica:  $f_m = m \frac{v}{2L} = m f_1, \quad \lambda_m = \frac{2L}{m}, \quad k_m = m \frac{\pi}{L} \quad m = 1, 2, \dots$

Se la corda (o colonna di gas) ha gli estremi in  $x = 0$  e  $x = L$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{posizione dei ventri: } x = (2m' + 1) \frac{\lambda}{4} = (2m' + 1) \frac{\pi}{2k} \\ \text{posizione dei nodi: } x = m' \frac{\lambda}{2} = m' \frac{\pi}{k} \end{array} \right\} m' = 0, 1, 2, \dots$$

**Corda tesa** di lunghezza  $L$  con un'estremità libera ed una fissa, **colonna di gas** con un'estremità chiusa ed una aperta:

Serie armonica:

$$f_m = (2m + 1) \frac{v}{4L} = (2m + 1) f_1, \quad \lambda_m = \frac{4L}{2m + 1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

### Onde stazionarie in due dimensioni

Membrana rettangolare tesa, tensione  $T$  (forza per unità di lunghezza, [N/m]), densità superficiale di massa  $\sigma$ . All'equilibrio la membrana è ferma sul piano  $xy$  ( $z = 0$ ), investita da un'onda vibra in direzione  $z$ .

La velocità di propagazione è  $v = \sqrt{T/\sigma}$

Onde stazionarie:

$$z(x, y, t) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t) \quad \begin{array}{l} k_x = n_x \frac{\pi}{L_x}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L_y} \\ n_x, n_y = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

( $L_x$  e  $L_y$  sono le lunghezze della membrana in direzione  $x$  e  $y$ )

Vettori d'onda:  $k_{n_x, n_y} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_{n_x, n_y}}$

Frequenze di vibrazione:  $f_{n_x, n_y} = \frac{v}{2\pi} k_{n_x, n_y} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}}$

# Formulario di Fluidi

---

## F.1 Pressione

$$p = \frac{F}{S} \quad F = \text{forza perpendicolare alla superficie } S.$$

$$\text{Lavoro della pressione: } W = \int p \, dV \quad V = \text{Volume}$$

$$\text{Equilibrio statico di un fluido: } \vec{\nabla} p = \rho \vec{f} \quad \begin{array}{l} \rho = \text{densità di massa del fluido} \\ \vec{f} = \text{forza sull'unità di massa} \end{array}$$

$$\text{Se la forza è conservativa: } \vec{f} = -\vec{\nabla} U_1 \quad U_1 = \text{en. pot. dell'unità di massa}$$

---

## F.2 Legge di Stevino

Equilibrio in presenza della forza peso per un fluido incompressibile:

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

dove:  $h$  = profondità (misurata dalla superficie,  $h$  crescente verso il basso)

$p_0$  = pressione sulla superficie (pressione esterna)

$\rho$  = densità di massa del fluido, costante

$g$  = accelerazione di gravità, costante

Pressione atmosferica isoterma ( $p/\rho$  = costante,  $g$  = costante):

$$p(z) = p_0 e^{-z/\alpha} \quad \alpha = \frac{p_0}{g\rho_0} \quad \begin{array}{l} z = \text{altezza, crescente verso l'alto} \\ p_0, \rho_0 = \text{pressione e densità a } z = 0 \end{array}$$

Unità di misura: 1 atm = 101325 Pa = 760 Torr = 760 mmHg, 1 bar = 10<sup>5</sup> Pa

---

## F.3 Spinta di Archimede o spinta idrostatica

$$\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluido}} V_{\text{corpo}} \vec{g}$$

---

## F.4 Liquido in rotazione

$$\text{Superficie di equilibrio: } z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h \quad \begin{array}{l} \omega = \text{velocità angolare} \\ r = \text{distanza dall'asse di rotazione} \\ h = \text{profondità del liquido a } r = 0 \end{array}$$

$$\text{Gradienti di pressione: } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$$

---

## F.5 Forza di attrito interno

$$F = \eta S \frac{dv}{dn} \quad \begin{array}{l} \eta = \text{viscosità [unità di mis.: 1 poise} = 0.1 \frac{\text{kg}}{\text{ms}} = 0.1 \text{ decapoise]} \\ S = \text{superficie di contatto} \\ \frac{dv}{dn} = \text{gradiente di velocità in direzione ortogonale a } S \end{array}$$

Fluido ideale:  $\eta = 0$

---

## F.6 Portata

$$\text{Portata in volume: } Q = vS \quad \begin{array}{l} v = \text{velocità del fluido} \\ S = \text{sezione del tubo di flusso} \end{array}$$

$$\text{Portata in massa: } Q_m = \rho vS$$

Regime stazionario per un fluido ideale:  $Q = vS = \text{costante}$

---

## F.7 Legge di Bernoulli (fluido ideale, incompressibile)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

$p, v$  = pressione e velocità del liquido  
 $\rho$  = densità del liquido (uniforme)  
 $z$  = altezza, crescente verso l'alto

---

## F.8 Fluido reale ( $\eta \neq 0$ )

Moto laminare in regime stazionario:

Profilo di velocità del fluido in un condotto cilindrico di lunghezza  $L$  e raggio  $R$ :

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

$p_1$  = pressione del fluido in entrata  
 $p_2$  = pressione del fluido in uscita  
 $r$  = distanza dall'asse del cilindro

**Legge di Hagen-Poiseuille:**  $Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{L}$

Velocità media sulla sezione del condotto:  $v_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2(p_1 - p_2)}{8\eta L}$

Caduta di pressione per unità di lunghezza:  $\frac{\Delta p}{L} = \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{8\eta}{R^2} v_m$

---

### Moto vorticoso

Numero di Reynolds:  $\mathcal{R} = \frac{vd\rho}{\eta}$

Transizione da regime laminare a vorticoso: in generale dipende dalla geometria;  
per condutture cilindriche:  $\mathcal{R}_c \sim 2000$

Caduta di pressione per unità di lunghezza (conduttura cilindrica, regime turbolento):

$$\frac{\Delta p}{L} = k \frac{\rho}{2R} v_m^2 \quad (k = \text{coeff. di resistenza})$$

---

### Moto di un corpo in un fluido

Resistenza del mezzo per un oggetto sferico (raggio  $R$ ), in regime laminare:

Legge di Stokes:  $F_{res} = 6\pi\eta Rv$

Portanza:  $F = 2A\rho v\Delta v$

$A$  = superficie alare (parallela al moto)  
 $v$  = velocità relativa media  
 $v + \Delta v$  = velocità del fluido sopra l'ala  
 $v - \Delta v$  = velocità del fluido sotto l'ala

---

## F.9 Fenomeni di superficie (liquidi)

Tensione superficiale (energia per unità di superficie libera):  $\tau$ , caratteristica del liquido  
[unità: N/m]

Lavoro per modificare superficie libera di un liquido:  $dW = \tau dS$

Pressione di una superficie sferica (raggio  $R$ ):  $p_\tau = \frac{2\tau}{R}$

Bolla di sapone:  $\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{est}} = \frac{4\tau}{R}$

Altezza del liquido in un tubo capillare:

$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g R}$$

$R$  = raggio del tubo  
 $\alpha$  = angolo di contatto  
( $\alpha = 0$  se il liquido bagna le pareti)



# Formulario di Termodinamica

---

Punto triplo dell'acqua:  $T_{\text{triplo}} = 273.16 \text{ K}$ .

Conversione tra gradi Celsius e gradi Kelvin (temperatura assoluta):  $t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15$

Conversione tra Caloria e Joule:  $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$

---

## T.1 Calorimetria

Capacità termica di un corpo:  $C = \frac{dQ}{dT}$

Calore specifico:  $c_m = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$  (capacità termica dell'unità di massa)

Calore specifico molare:  $c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$  (capacità termica di una mole di sostanza)

Cambiamenti di fase:  $Q = m\lambda$   $m =$  massa che cambia fase  
 $\lambda =$  calore latente

NB: il simbolo  $d$  indica un differenziale non esatto, infatti la quantità di calore scambiato ed i calori specifici dipendono dal tipo di trasformazione.

---

## T.2 Conduzione del calore

Legge di Fourier:  $\Delta Q = -k \frac{dT}{dx} S \Delta t$   $k =$  conducibilità termica  
 $dT/dx =$  gradiente di temperatura  
 $S =$  superficie attraversata dal calore  
 $\Delta t =$  intervallo di tempo

### Passaggio di calore da un solido ad un fluido

(Solido a temperatura  $T$ , fluido a temperatura  $T_0$ )

Legge di Newton:  $\Delta Q = h(T - T_0) S \Delta t$   $h =$  conducib. termica esterna  
 $S =$  superficie di contatto  
 $\Delta t =$  intervallo di tempo

### Irraggiamento

Potere emissivo  $\varepsilon$ : energia emessa dall'unità di superficie nell'unità di tempo.

Legge di Stefan-Boltzmann:  $\varepsilon = \sigma e T^4$   $e =$  emissività ( $0 < e < 1$ )  
 $(e = 1: \text{superficie nera})$   
 $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{m}^2 \text{ sK}^4)$   
 $T =$  temperatura assoluta

---

## T.3 Dilatazione termica di solidi e liquidi

Coefficiente di dilatazione lineare:  $\lambda = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}$

$$\Delta l = \lambda l \Delta T \qquad l = l_0 (1 + \lambda (T - T_0))$$

Coefficiente di dilatazione volumica:  $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T}$

$$\Delta V = \alpha V \Delta T \qquad V = V_0 (1 + \alpha (T - T_0))$$

Per materiali isotropi:  $\alpha = 3\lambda$ .

---

## T.4 I principio della Termodinamica

In un sistema che compie una trasformazione vale la relazione seguente tra: variazione di energia interna  $\Delta U$ , calore scambiato  $Q$  e lavoro scambiato  $W$ :

$$Q = \Delta U + W \qquad \begin{array}{ll} Q > 0 & \text{se ceduto dall'esterno al sistema} \\ W > 0 & \text{se compiuto dal sistema sull'esterno} \end{array}$$

---

## T.5 Energia interna U

- In una trasformazione  $A \rightarrow B$ :  $\Delta U$  non dipende dal tipo di trasformazione ma solo dagli stati  $A$  e  $B$ :  $\Delta U = U_B - U_A$  (funzione di stato).
  - In una trasformazione in cui il sistema torna nello stato iniziale:  $\Delta U = 0$
  - Trasformazione infinitesima:  $dQ = dU + dW$
  - Trasformazione adiabatica:  $dQ = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $\Rightarrow W = -\Delta U$
  - Trasformazione reversibile: in ogni stato intermedio il sistema è in equilibrio termico e meccanico con l'esterno.
  - Trasformazione irreversibile: il sistema passa attraverso stati di non equilibrio.
- 

## T.6 Gas ideali

Numero di Avogadro:  $N_A = 6.02214 \cdot 10^{23}$  molecole/mol

Costante dei gas:  $R = 8.314$  J/mol K

Costante di Boltzmann:  $k_B = \frac{R}{N_A} = 1.3807 \cdot 10^{-23}$  J/K

$p$  = pressione del gas     $V$  = volume     $T$  = temperatura assoluta  
 $n$  = numero di moli     $N$  = numero di molecole     $m$  = massa di una molecola  
 $A$  = massa molare     $M$  = massa del gas     $\rho$  = densità del gas  
 $A = mN_A$      $N = nN_A$      $M = mN$      $\rho = \frac{mN}{V} = \frac{M}{V}$

**Equazione di stato dei gas ideali:**

$$pV = nRT \qquad pV = Nk_B T \qquad pA = \rho RT$$

---

**Lavoro compiuto dal gas in una trasformazione**

$$W = \int p_{\text{est}} dV \qquad p_{\text{est}} = \text{pressione esterna, cioè la forza per unità di superficie che si oppone dall'esterno al gas}$$

Se la trasformazione è reversibile:  $p_{\text{est}} = p(V) = p_{\text{gas}}$

$$W_{\text{rev}} = \int p(V) dV = \int \frac{nRT}{V} dV$$

Se la trasformazione è irreversibile ma la pressione esterna è nota e costante:

$$W = p_{\text{est}} \Delta V$$

---

**Calore specifico molare di un gas ideale**

volume costante (trasf. isocora):  $c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V$

pressione costante (trasf. isobara):  $c_p = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{1}{n} \left( \frac{dH}{dT} \right)_p$

gas ideali monoatomici:  $c_v = \frac{3}{2}R = 12.47 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ ,  $c_p = \frac{5}{2}R = 20.79 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$

gas ideali biatomici:  $c_v = \frac{5}{2}R = 20.79 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ ,  $c_p = \frac{7}{2}R = 29.10 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$

Relazione di Mayer:  $R = c_p - c_v$

**Costante adiabatica:**  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$      $\gamma > 1$      $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$      $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

gas ideali monoatomici:  $\gamma = \frac{5}{3}$       gas ideali biatomici:  $\gamma = \frac{7}{5}$

Coefficiente di compressibilità  $\beta$ :  $\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$

Compressibilità isoterma di un gas ideale:  $\beta_T = p$

Compressibilità adiabatica di un gas ideale:  $\beta_S = \gamma p$

### Energia interna di un gas ideale

$$dU = nc_V dT \qquad c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \qquad U = nc_V T + \text{cost.}$$

### Trasformazioni

- Trasformazione adiabatica dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad W = -\Delta U = -nc_V \Delta T = -nc_V (T_B - T_A) = \frac{p_A V_A - p_B V_B}{\gamma - 1}$$

Trasformazione adiabatica reversibile:

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost.} \qquad pV^\gamma = \text{cost.} \qquad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost.}$$

- Trasformazione isoterma dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$T_A = T_B \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 0 \qquad Q = W \qquad p_A V_A = p_B V_B = nRT$$

Trasformazione isoterma reversibile:

$$W = \int_A^B p dV = nRT \log \frac{V_B}{V_A}$$

- Trasformazione isocora dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$V_A = V_B \quad \Rightarrow \quad W = 0 \qquad Q = \Delta U = nc_V (T_B - T_A) \qquad \frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} = \frac{nR}{V}$$

- Trasformazione isobara dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$p_A = p_B \quad \Rightarrow \quad Q = nc_p (T_B - T_A) \qquad W = p_A (V_B - V_A) = nR (T_B - T_A)$$

$$\Delta U = Q - W = nc_V (T_B - T_A) \qquad \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} = \frac{nR}{p}$$

Entalpia:  $H = U + pV$        $dH = nc_p dT$        $H = \text{funzione di stato.}$

- Trasformazione ciclica:

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = 0 \qquad Q_{\text{ciclo}} = W_{\text{ciclo}}$$

$$Q_{\text{ciclo}} = Q_{\text{assorbito}} + Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}} - |Q_{\text{ceduto}}|$$

$$W_{\text{ciclo}} = W_{\text{compiuto}} + W_{\text{subito}} = W_{\text{compiuto}} - |W_{\text{subito}}|$$

Rendimento di una macchina termica:  $\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{assorb}}} = \frac{Q_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{assorb}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{assorb}}} \quad 0 < \eta < 1$

Efficienza (o coefficiente di prestazione) di un ciclo frigorifero:  $\xi = \frac{Q_{\text{assorb}}}{|W_{\text{ciclo}}|}$

NB: l'efficienza di un ciclo frigorifero è anche detta "coefficiente frigogeno" e indicata, oltre che con la lettera  $\xi$ , anche con  $\varepsilon$  o  $K$ .

- Ciclo di Carnot  $ABCD A$  ( $T_2 > T_1$ ):

$AB$ : espansione isoterma reversibile a  $T = T_2$ :  $Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} = Q_{\text{assorb}}$

BC: espansione adiabatica reversibile:  $Q_{BC} = 0$ ,  $T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$   
 CD: compressione isoterma reversibile a  $T = T_1$ :  $Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \log \frac{V_D}{V_C} = Q_{ced}$   
 DA: compressione adiabatica reversibile:  $Q_{DA} = 0$ ,  $T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$   
 Rendimento:  $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$   
 Efficienza a funzionamento inverso (frigorifero):  $\xi_{Carnot} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$

---

### Teoria cinetica dei gas ideali

pressione:  $p = \frac{Nm \overline{v^2}}{V} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{E_k}$

Energia cinetica media di una molecola:  $\overline{E_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$

Equipartizione dell'energia: ogni grado di libertà ha energia media =  $\frac{1}{2} k_B T$

Legge di Dalton per le miscele di gas:  $p = \sum_i p_i = \frac{RT}{V} \sum_i n_i$

### Distribuzione delle velocità di Maxwell

$N_0$  = numero di molecole di gas,  $T$  = temperatura assoluta

Distribuzione di una componente della velocità:

$$dN(v_x) = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-mv_x^2/2k_B T} dv_x$$

Distribuzione del modulo della velocità:

$$dN(v) = N_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv$$

Velocità più probabile:  $v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

Velocità media:  $v_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$

Velocità quadratica media:  $v_q = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_p = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

### Libero cammino medio:

( $d$  = diametro delle molecole,  $n = \frac{N_0}{V}$  = num. di molec. nell'unità di volume)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi p d^2}$$

Viscosità:  $\eta = \frac{1}{3} n m v_q \lambda = \frac{m v_q}{3\sqrt{2}\pi d^2}$

## T.7 Gas reali

### Equazione di stato dei gas reali (Van der Waals)

$$\left( p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

$$\left( p + \frac{a}{\nu^2} \right) (\nu - b) = RT$$

$n$  = numero di moli

$a, b$  = parametri tipici del gas

$\nu = \frac{V}{n}$  = volume specifico molare

$T_c, p_c, \nu_c$  = coordinate termodinamiche del punto critico

$$p_c \nu_c = \frac{3}{8} RT_c$$

$$a = 3 \nu_c^2 p_c$$

$$b = \nu_c / 3$$

Formula di Clapeyron :

(trasform. da stato 1 a stato 2,  $\nu_i$  = vol. spec. mol.,  $\lambda$  = calore latente)

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(\nu_2 - \nu_1)}{\lambda} \qquad \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(\nu_2 - \nu_1)}$$

### Teoria cinetica dei gas reali

$a = \alpha N_A^2$ ,  $\alpha$  = coeff. dipendente da forze intermolecolari

$b = 4\sqrt{2}\pi N_A r^3$   $r$  = raggio delle molecole

### Energia interna di un gas reale:

$$dU = nc_v dT + \frac{na}{V^2} dV \qquad U = nc_v T - \frac{na}{V} + \text{cost.}$$

## T.8 II principio della Termodinamica

**Teorema di Carnot:** data una macchina termica che lavora scambiando calore con due sorgenti termiche a temperatura  $T_1$  e  $T_2 > T_1$ :

$$\eta_{\text{rev}} = \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad \eta_{\text{irrev}} < \eta_{\text{Carnot}}$$

**Teorema di Clausius:** data una macchina termica che lavora scambiando calore con  $n$  sorgenti termiche (sia  $Q_i$  il calore scambiato con l' $i$ -esima sorgente a temperatura  $T_i$ ):

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \qquad (\text{l'uguaglianza vale per cicli reversibili})$$

Nel limite in cui il numero di sorgenti diventa infinito:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (\text{rev.}) \qquad \oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad (\text{irrev.})$$

## T.9 Entropia S

$S$  = funzione di stato. In una trasformazione dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

NB: qualunque sia la trasformazione tra lo stato  $A$  e lo stato  $B$ , l'integrale nella formula precedente va calcolato lungo una **trasformazione reversibile qualsiasi che lega i due stati**.

In una trasformazione adiabatica reversibile:  $\Delta S = 0$  (per l'universo od un sistema isolato).

In una trasformazione ciclica il sistema torna nello stato iniziale:  $\Delta S_{\text{sis}}^{(\text{ciclo})} = 0$ , mentre l'ambiente esterno può avere  $\Delta S_{\text{amb}}^{(\text{ciclo})} = 0$  (trasf. rev.) oppure  $\Delta S_{\text{amb}}^{(\text{ciclo})} > 0$  (trasf. irrev.), quindi

$$\Delta S_{\text{universo}}^{(\text{ciclo})} = \Delta S_{\text{sis}}^{(\text{ciclo})} + \Delta S_{\text{amb}}^{(\text{ciclo})} = \Delta S_{\text{amb}}^{(\text{ciclo})} \quad \begin{cases} = 0 & \text{trasf. rev.} \\ > 0 & \text{trasf. irrev.} \end{cases}$$

Scambio di calore  $Q$  tra due sorgenti a temperature  $T_1$  e  $T_2 > T_1$ :

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} \qquad \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2} \qquad \Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$$

Corpo di massa  $m$  e calore specifico  $c_m$  a temperatura iniziale  $T_1$  messo a contatto con sorgente di calore a temperatura  $T_2$ :

$$\Delta S_{\text{corpo}} = mc_m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc_m \log \frac{T_2}{T_1} \qquad \Delta S_{\text{sorgente}} = -\frac{mc_m(T_2 - T_1)}{T_2}$$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{corpo}} + \Delta S_{\text{sorgente}} > 0$$

Cambiamento di fase:  $\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$  ( $\lambda$  = calore latente)

---

**Entropia di un gas ideale:**  $S = nc_V \log T + nR \log V + \text{cost.}$

Variatione di  $S$  in una trasformazione tra lo stato  $A$  e lo stato  $B$  (tutte le espressioni seguenti sono equivalenti):

$$\begin{aligned} \Delta S = S_B - S_A &= \int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = nc_V \log \frac{T_B}{T_A} + nR \log \frac{V_B}{V_A} = nc_V \log \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} \\ &= nc_V \log \frac{p_B}{p_A} + nc_p \log \frac{V_B}{V_A} = nc_V \log \frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma} \\ &= nc_p \log \frac{T_B}{T_A} - nR \log \frac{p_B}{p_A} = nc_p \log \frac{T_B p_B^{(1-\gamma)/\gamma}}{T_A p_A^{(1-\gamma)/\gamma}} \end{aligned}$$

In particolare, per una trasformazione

$$\begin{aligned} \text{isoterma:} \quad S_B - S_A &= nR \log \frac{V_B}{V_A} = -nR \log \frac{p_B}{p_A} \\ \text{isocora:} \quad S_B - S_A &= nc_V \log \frac{T_B}{T_A} = nc_V \log \frac{p_B}{p_A} \\ \text{isobara:} \quad S_B - S_A &= nc_p \log \frac{T_B}{T_A} = nc_p \log \frac{V_B}{V_A} \end{aligned}$$


---

**Entropia di un gas reale:**

( $b$  = parametro dell'eq. di Van der Waals)

$$S = nc_V \log T + nR \log(V - b) + \text{cost.}$$


---

**Energia inutilizzabile**

$$E_{\text{inut}} = T_{\text{min}} \Delta S_{\text{universo}} \quad T_{\text{min}} = \begin{array}{l} \text{Temperatura minima delle sorgenti} \\ \text{coinvolte nel processo} \end{array}$$


---

**Formula di Boltzmann**

$$S = k_B \log N + \text{cost.} \quad N = \text{numero di configurazioni del sistema}$$


---

## T.10 III principio della Termodinamica

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S_{\text{rev}} = 0 \quad S(T = 0) = 0$$

Calore specifico molare ( $c_X = c_V$  o  $c_p$ ):  $c_X = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_X = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial S}{\partial \log T} \right)_X$

$$\lim_{T \rightarrow 0} c_X(T) = 0$$


---

## T.11 Potenziali termodinamici

Entalpia libera:  $G = U + pV - TS$  (equilibrio: G minima)

Energia libera:  $F = U - TS$  (equilibrio: F minima)

Entalpia:  $H = U + pV$  (equilibrio: H minima)