Esercitazioni per il Corso di Fisica

Elettrostatica, forza di Lorentz, onde elettromagnetiche

Dr. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

11/01/2021

Esercizio 1

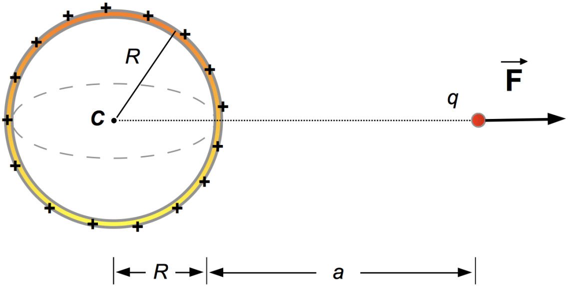
Ancora un esercizio di elettrostatica, sull'utilizzo del **teorema di Gauss** :

Una sfera conduttrice cava (guscio sferico sottile) isolata e posta nel vuoto ha raggio 4.42 cm e una densità superficiale di carica uniforme pari a 12.1 μ*C/m*^{2}. *Questa esercita una forza elettrostatica di modulo 49.9* $\times$ *10*$^{-3}$ *N su una carica puntiforme di 1.95* μ*C posta a distanza incognita. Determinare :*

$a)$ *gli andamenti del campo elettrico e del potenziale elettrico all'interno e all'esterno del guscio sferico*

$b)$ *la capacità del conduttore*

$c)$ *la distanza fra la carica puntiforme e il centro della sfera*



Come al solito, per prima cosa traduciamo in linguaggio matematico il testo del problema aiutandoci con un buon disegno :

– abbiamo un **guscio sferico conduttore** di raggio $R = 4.42$ cm con una **densità superficiale** di carica elettrica $\sigma = 12.1\ \mu\text{C/m}^2$ nota

– ricordiamo anche che una sfera di raggio R ha superficie $S = 4\,\pi\,R^2$

– la **carica totale** depositata sul guscio sferico vale quindi $Q = 4\,\pi\,R^2\,\sigma$

– a distanza a dalla superficie viene posta una carica puntiforme di valore $q = 1.95\ \mu\text{C}$ sulla quale misuriamo una forza di modulo $F = 49.9 \times 10^{-3}$ N

– il sistema è posto **nel vuoto**, quindi $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85$ pF/m

Le prime osservazioni che possiamo fare sono che :

- abbiamo a che fare con una geometria sferica, quindi abbiamo simmetria in tutte le direzioni
- la carica è distribuita in modo **uniforme**, non abbiamo eccessi di carica in zone particolari
- non è presente carica elettrica all'interno della sfera, questo significa che **il campo elettrico all'interno della sfera è NULLO** !
- il sistema è in **equilibrio elettrostatico** (non abbiamo flussi di cariche)

Queste considerazioni ci portano a concludere come primo risultato fondamentale che :

la carica elettrica si distribuisce SOLO sulla superficie esterna del conduttore, non può essere altrimenti !

Questo risultato è valido in realtà **anche nel caso di conduttore sferico pieno**, e più in generale **per un conduttore di forma qualunque** !

Fatte queste premesse iniziali cominciamo a determinare come varia il **campo elettrico** generato dal guscio sferico carico :

– come detto in precedenza abbiamo un sistema **perfettamente simmetrico**, quindi ci aspettiamo che il campo elettrico sia **uguale in tutte le direzioni** con una dipendenza **solo radiale**, del tipo

$$E = E(r)$$

– sicuramente dobbiamo chiederci cosa succede **dentro** il guscio sferico $(r < R)$ e **fuori** dal guscio $(r \geq R)$, quindi l'andamento del campo elettrico sarà **una funzione definita a tratti**,

$$E(r) = \begin{cases} \dots & \text{se } r < R \\ \dots & \text{se invece } r \geq R \end{cases}$$

Per il calcolo effettivo del campo elettrico utilizziamo allora il **teorema di Gauss**, per il quale il **flusso del campo elettrico** attraverso una **qualunque superficie chiusa** dipende solo dalla carica totale contenuta **dentro** la superficie considerata :

$$\boxed{\Phi(E) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}}$$

Utilizzando il teorema di Gauss il calcolo del campo elettrico $E = E(r)$ diventa allora immediato, infatti :

– **dentro** il guscio sferico **non c'è carica elettrica** quindi il flusso è nullo (notare, lo è per qualunque superficie scelta !) e di conseguenza anche il campo elettrico è nullo,

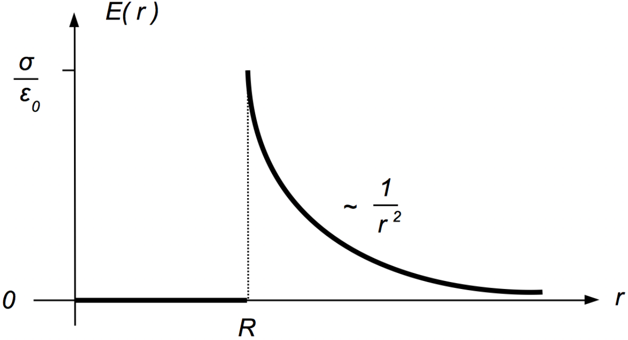
$$\Phi(E) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{E = 0 \quad , \quad r < R}$$

– **fuori** dal guscio possiamo invece considerare come superficie una **superficie sferica** di raggio $r \geq R$ che racchiude al suo interno tutta la carica distribuita sulla superficie del guscio conduttore $Q = \sigma\, 4\, \pi\, R^2$, allora

$$\Phi(E) = E\, 4\, \pi\, r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\, 4\, \pi\, R^2}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\, \pi\, \epsilon_0\, r^2} = \frac{\sigma\, R^2}{\epsilon_0\, r^2} \quad , \quad r \geq R}$$

L'andamento del **campo elettrico** $E = E(r)$ in funzione della distanza radiale r è allora il seguente :

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2} = \dfrac{\sigma\,R^2}{\epsilon_0\,r^2} & \text{se invece } r \geq R \end{cases}$$



Osservazioni aggiuntive :

- abbiamo trovato che **all'esterno della sfera** il campo elettrico ha **lo stesso andamento** del campo elettrico **generato da una carica puntiforme** !
- in pratica è come se tutta la carica Q distribuita sulla superficie della sfera fosse concentrata in un unico punto al centro della sfera
- la **funzione** $E = E(r)$ fa "*un salto*" per $r = R$ ovvero è **discontinua**
- esattamente **sulla superficie** della sfera $(r = R)$ il campo elettrico vale

$$E(r = R) = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^2} = \frac{\sigma\,\cancel{4\,\pi}\,\cancel{R^2}}{\cancel{4\,\pi}\,\epsilon_0\,\cancel{R^2}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

quindi un risultato *simile* a quello ottenuto per un **piano indefinito uniformemente carico** con densità superficiale di carica σ !

Una volta noto l'andamento del campo elettrico $E = E(r)$ risalire a quello del **potenziale elettrico** $V = V(r)$ è immediato, infatti :

– abbiamo capito che visto "da fuori" il guscio sferico si comporta esattamente **come una carica puntiforme** in cui è concentrata tutta la carica, ma allora per $r \geq R$ il potenziale è quello di una carica puntiforme,

$$V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r} = \frac{\sigma\,\cancel{4\,\pi}\,R^2}{\cancel{4\,\pi}\,\epsilon_0\,r} = \frac{\sigma\,R^2}{\epsilon_0\,r} \quad , \quad r \geq R$$

– all'interno del guscio sferico il campo elettrico è nullo, ma allora questo significa che il potenziale elettrico è **costante all'interno della sfera**, infatti

$$E = -\frac{dV}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad V = \text{cost.} \quad , \quad r < R$$

Per determinare il valore della costante osserviamo che :

– il campo elettrico si ottiene "*derivando*" la funzione potenziale elettrico

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

– questo significa che la funzione potenziale elettrico $V(r)$ **deve essere sempre derivabile**

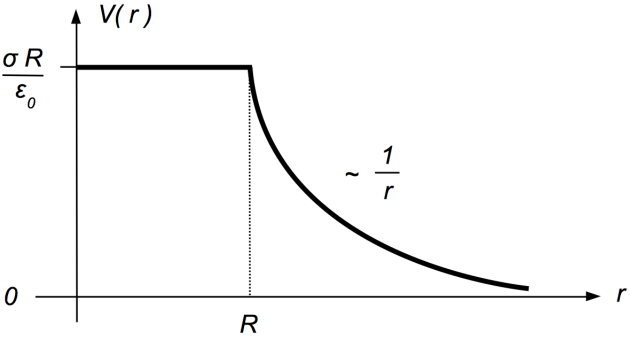
– quindi a differenza del campo elettrico la funzione potenziale elettrico $V(r)$ "*non può fare salti*", ovvero **deve** essere una **funzione continua** !

– il valore del potenziale **all'interno del guscio sferico** è allora lo stesso valore del potenziale calcolato sulla superficie :

$$V(r < R) = V(r = R) = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R} = \frac{\sigma\,\cancel{4\,\pi}\,R^{\cancel{2}}}{\cancel{4\,\pi}\,\epsilon_0\,\cancel{R}} = \frac{\sigma\,R}{\epsilon_0}$$

L'andamento del **potenziale elettrico** $V = V(r)$ in funzione della distanza radiale r è allora il seguente :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R} = \dfrac{\sigma\,R}{\epsilon_0} & \text{se } r \le R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r} = \dfrac{\sigma\,R^2}{\epsilon_0\,r} & \text{se invece } r > R \end{cases}$$



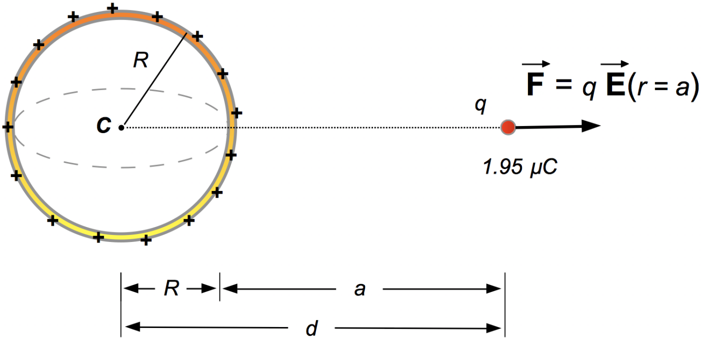
Noto il valore del potenziale elettrico sulla superficie possiamo poi calcolare immediatamente la **capacità** :

$$C = \frac{Q}{V(r=R)} = \frac{\cancel{\sigma}\, 4\,\pi\, R^{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\sigma}\, \cancel{R}}{\epsilon_0}} = \boxed{4\,\pi\,\epsilon_0\, R}$$

Notare come il risultato ottenuto correttamente **NON dipende dalla carica** depositata sulla superficie del guscio conduttore ma **<u>solo</u> dalle sue proprietà geometriche** ! Questo è vero in generale, basti pensare al condensatore a facce piane parallele.

Numericamente :

$$C = 4\,\pi\,\left(8.85\ \frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}\right)\cdot\left(4.42\times 10^{-2}\ \mathrm{m}\right) = \boxed{4.9\ \mathrm{pF}}$$



Calcoliamo infine **la distanza <u>dal centro</u> della sfera** alla quale si trova una carica $q = 1.95\ \mu$C sapendo che su di essa agisce una forza elettrostatica di modulo $F = 49.9 \times 10^{-3}$ N, infatti sappiamo che possiamo esprimere la forza a partire dal campo elettrico :

$$F(r = a) = q\,E(r = a) = q\,\frac{\sigma\,R^2}{\epsilon_0\,a^2} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{q\,\sigma\,R^2}{\epsilon_0\,F}}$$

La distanza della carica q dal centro della sfera vale allora :

$$d = R + a = R + \sqrt{\frac{q\,\sigma\,R^2}{\epsilon_0\,F}} = R + R\sqrt{\frac{q\,\sigma}{\epsilon_0\,F}} = R\,\left(1 + \sqrt{\frac{q\,\sigma}{\epsilon_0\,F}}\,\right)$$

Numericamente :

$$d = 4.42\,\text{cm} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\left(1.95 \times 10^{-6}\ \text{C}\right)\,\cdot\,\left(12.1 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2\right)}{\left(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2\right)\,\cdot\,\left(46.9 \times 10^{-3}\ \text{N}\right)}}\,\right) = 37.72\,\text{cm}$$

quindi la carica si trova a 33.3 cm dalla superficie della sfera carica.

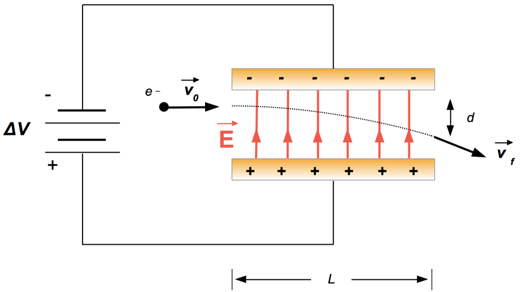
Esercizio 2

Sul moto di particelle cariche in presenza di campo elettrico
(e anche un ripasso di cinematica del punto) :

Un elettrone entra orizzontalmente in un condensatore a facce piane parallele con velocità iniziale 5.45×10^6 *m/s parallela alle armature. La lunghezza delle armature del condensatore è di 2.25 cm. Sapendo che in uscita dal condensatore la traiettoria dell'elettrone ha deviato verso il basso di 0.62 cm determinare :*

– *l'intensità e il verso del campo elettrico tra le armature*

– *la velocità dell'elettrone quando esce dal condensatore*



Si tratta in realtà di un problema di **cinematica del punto** del tutto analogo al **moto parabolico di un proiettile** :

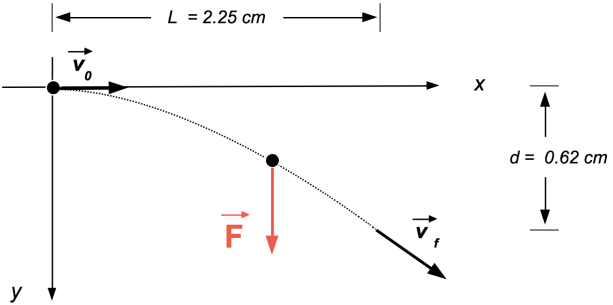
– l'elettrone di carica $q_e = -e$ possiede una velocità iniziale $\mathbf{v_0}$ nota e parallela alle armature del condensatore

– tra le armature del condensatore è presente un **campo elettrostatico uniforme** $\mathbf{E}$ ortogonale alla velocità iniziale dell'elettrone

– sull'elettrone agisce una **forza elettrica** diretta verso il basso

$$\mathbf{F} = q_e\,\mathbf{E} = -e\,\mathbf{E}$$

che **deflette l'elettrone verso il basso** di una quantità $d = 0.62$ cm



Per risolvere il problema dobbiamo allora **scegliere un sistema di riferimento cartesiano** opportuno :

– consideriamo un sistema xy come in figura

– poniamo $x_o = 0$ quando l'elettrone entra nel condensatore, $x = L$ quando esce

– l'elettrone deflette verso il basso, scegliamo y orientato verso il basso (scelta naturale, ma del tutto arbitraria !)

– la deflessione della traiettoria è $y = d$ misurata a partire da $y_o = 0$

– il moto è un **moto parabolico** dovuto alla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo x e un moto uniformemente accelerato lungo y

Come osservato già in precedenza le velocità in gioco **NON sono relativistiche** quindi possiamo risolvere il moto utilizzando i risultati che già conosciamo di Meccanica Classica.

La traiettoria dell'elettrone è allora il risultato della **combinazione di due moti** :

– la velocità iniziale ha componente solo orizzontale :

$$\mathbf{v_o} = (v_{ox}\,,\,0)$$

– moto **rettilineo uniforme** lungo l'asse x :

$$x(t) = \cancel{x_o} + v_{ox}\,t = v_{ox}\,t \quad \text{con} \quad x_o = a_{ox} = 0$$

– moto **uniformemente accelerato** lungo lasse y ad opera della forza elettrica (costante) :

$$y(t) = \cancel{y_0} + \cancel{v_{oy}\,t} + \frac{1}{2}\,a_y\,t^2 = \frac{1}{2}\,a_y\,t^2 \quad \text{con} \quad y_o = v_{oy} = 0$$

Complessivamente le equazioni del moto sono molto semplici :

$$\begin{cases} x(t) = v_{ox}\, t \\ \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\, a_y\, t^{\,2} \end{cases}$$

L'accelerazione è poi data dalla **legge di Newton** :

$$\sum \mathbf{F} = m_e\, \mathbf{a} \quad \rightarrow \qquad \mathbf{F_e} + \cancel{\mathbf{F_P}} = -e\, \mathbf{E} = m_e\, \mathbf{a}$$

Dato il valore estremamente piccolo della massa dell'elettrone possiamo **trascurare** completamente il contributo della **forza peso** sull'elettrone !

Passando allora alle componenti (ricordando che a questo punto $\mathbf{E}$ ha direzione opposta alla forza elettrica) :

$$e\, E = m_e\, a_y \quad \rightarrow \quad \boxed{a_y = \frac{e\, E}{m_e}}$$

Nota l'accelerazione le equazioni del moto diventano :

$$\begin{cases} x(t) = v_{ox}\, t \\ \\ y(t) = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{e\,E}{m_e} \right) t^{\,2} \end{cases}$$

Possiamo allora **eliminare il tempo** dalla prima equazione e ottenere così l'**equazione parabolica della traiettoria** $y = y(x)$:

$$t = \frac{x}{v_{ox}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{e\,E}{m_e} \right) \left(\frac{x}{v_{ox}} \right)^2$$

Infine ricaviamo il **modulo campo elettrico** E a partire dall'informazione data sulla deflessione :

$$y(x = L) = d \quad \rightarrow \quad d = \frac{1}{2} \left(\frac{e\,E}{m_e} \right) \left(\frac{L}{v_{ox}} \right)^2$$

Risolvendo infine per E :

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{e\,E}{m_e}\right)\left(\frac{L}{v_{ox}}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{E = \frac{2\,m_e\,d}{e}\left(\frac{v_{ox}}{L}\right)^2}$$

Numericamente :

$$E = \frac{2 \cdot (9.11 \times 10^{-31}\ \mathsf{kg}) \cdot (0.62 \times 10^{-2}\ \mathsf{m}) \cdot (5.45 \times 10^{6}\ \mathsf{m/s})^2}{(1.6 \times 10^{-19}\ \mathsf{C}) \cdot (2.25 \times 10^{-2}\ \mathsf{m})^2} = \boxed{4.14\ \mathsf{kV/m}}$$

Osserviamo ancora che correttamente il contributo al moto della forza peso è del tutto trascurabile rispetto a quello della forza elettrica :

$$F_e = e\,E = (1.6 \times 10^{-19}\ \mathsf{C}) \cdot (4.14 \times 10^{3}\ \mathsf{N/C}) = 6.6 \times 10^{-16}\ \mathsf{N}$$

$$F_P = m_e\,g = (9.11 \times 10^{-31}\ \mathsf{kg}) \cdot (9.81 \mathsf{m/s}^2) = 8.9 \times 10^{-30}\ \mathsf{N}$$

Noto il campo elettrico abbiamo l'accelerazione del moto lungo la verticale, quindi possiamo determinare il **vettore velocità** dell'elettrone quando esce dal condensatore usando le **leggi orarie per le velocità** :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{ox} \\ \\ v_y(t) = \cancel{v_{oy}} + a_y\, t = a_y\, t \end{cases}$$

Inoltre essendo il moto lungo l'asse y uniformemente accelerato possiamo anche usare la relazione

$$v_y^2 - \cancel{v_{oy}^2} = 2\, a_y\, d \qquad v_y = \sqrt{2\, a_y\, d} = \sqrt{\frac{2\, e\, E\, d}{m_e}}$$

oppure possiamo usare la definizione di velocità per eliminare il tempo,

$$v_{ox} = \frac{L}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{L}{v_{ox}} \quad \rightarrow \quad v_y = a_y\, \frac{L}{v_{ox}} = \frac{e\, E\, L}{m_e\, v_{ox}}$$

Il **vettore velocità** valutato nel punto (L, d) ha quindi **componenti** :

$$\mathbf{v_{fin}} = v_{ox}\,\mathbf{i} + \frac{e\,E\,L}{m_e\,v_{ox}}\,\mathbf{j} = \left(v_{ox} \ , \ \frac{e\,E\,L}{m_e\,v_{ox}} \right)$$

Numericamente :

$$v_y = \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \mathsf{C}) \cdot (4.14 \times 10^{3}\ \mathsf{V/m}) \cdot (2.25 \times 10^{-2}\ \mathsf{m})}{(9.11 \times 10^{-31}\ \mathsf{kg}) \cdot (5.45 \times 10^{6}\ \mathsf{m/s})} = 3 \times 10^{6}\ \mathsf{m/s}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v_{fin}} = \left(5.45 \times 10^{6}\ \mathsf{m/s}\ ,\ 3 \times 10^{6}\ \mathsf{m/s}\right)}$$

Il **modulo** di questo vettore vale infine :

$$|\mathbf{v_{fin}}| = \sqrt{v_{ox}^2 + v_y^2} = \sqrt{5.45^2 + 3^2} \times 10^{6}\ \mathsf{m/s} = 6.22 \times 10^{6}\ \mathsf{m/s}$$

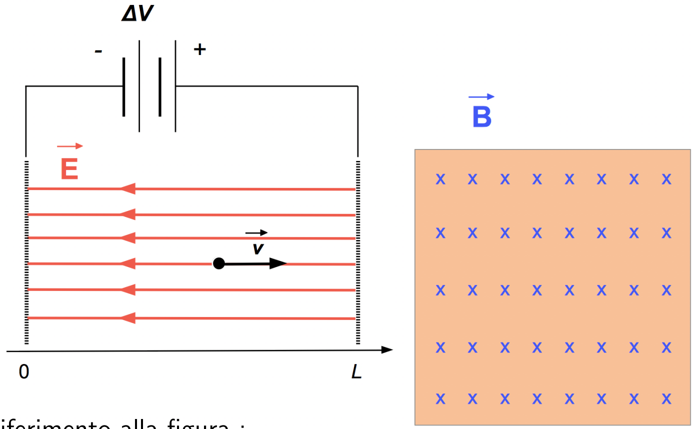
Forza di Lorentz

Esercizio 3

Un semplice esercizio sulla **forza di Lorentz** e sull'utilizzo dell'**elettronvolt** (e anche un ripasso sul moto circolare) :

Un elettrone viene inizialmente accelerato attraverso un campo elettrico uniforme generato da una differenza di potenziale di 91 V. Successivamente la particella entra in una regione nella quale è presente un campo magnetico di intensità 0.5×10^{-4} *T orientato perpendicolarmente alla direzione iniziale del moto e direzione entrante. Determinare :*

- *l'energia cinetica acquistata dall'elettrone appena prima di entrare nel campo magnetico*
- *la velocità dell'elettrone alla fine del processo di accelerazione*
- *la curvatura della traiettoria dell'elettrone all'interno del campo magnetico e il valore del raggio di curvatura*



Facendo riferimento alla figura :

– l'elettrone viene **accelerato** da un campo elettrico uniforme generato da una differenza di potenziale $\Delta V = 91$ V

– alla fine del processo di accelerazione l'elettrone avrà acquistato una certa **energia cinetica** $E_{k,max}$ e una **velocità** v_{max} da determinare

– il **campo magnetico** di modulo $B = 0.5 \times 10^{-4}$ T è perpendicolare alla direzione del moto, con verso entrante

Per prima cosa calcoliamo l'**energia cinetica** acquistata dall'elettrone, allo scopo ragioniamo come sempre in termini energetici :

- il campo elettrico **compie lavoro** per accelerare la particella

$$W = -q_e\,\Delta V = -(-e)\,\Delta V = e\,\Delta V$$

- il lavoro è anche dato dal **teorema dell'energia cinetica** (teorema delle forze vive), quindi

$$W = \Delta E_k = E_{k,fin} - \cancel{E_{k,in}}$$

Se ragioniamo in termini di **elettronvolt** otteniamo quindi immediatamente l'energia cinetica acquistata dall'elettrone :

$$E_{k,fin} = e\,\Delta V = e \cdot 91\ \mathrm{V} = \boxed{91\ \mathrm{eV}}$$

dove

$$\mathbf{1}\ \mathrm{eV} = e \cdot 1\ \mathrm{V} = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{V} = \mathbf{1.6 \times 10^{-19}}\ \mathrm{J}$$

La definizione di **elettronvolt** risulta essere estremamente utile anche per esprimere le **masse delle particelle subatomiche** in termini energetici utilizzando la famosa **relazione massa-energia di Einstein** :

$$\boxed{E_o = m\,c^2} \qquad \textbf{energia a riposo}$$

Utilizzando per la massa dell'elettrone il valore SI in kg :

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \ \rightarrow \quad E_o = 9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$

$$= 8.199 \times 10^{-14}\ \text{J} = \frac{8.199 \times 10^{-14}\ \text{J} \cdot 1\ \text{eV}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$

$$= 512.4\ \text{keV}$$

Ovvero diciamo che la massa **a riposo** dell'elettrone vale :

$$\boxed{m_e = 0.5\ \text{MeV/c}^2}$$

Osserviamo per questo problema che

$$m_e\, c^2 \gg E_{k,max}$$

quindi concludiamo che anche in questo caso abbiamo a che fare con **elettroni NON relativistici** ! Questo significa che l'**espressione classica dell'energia cinetica**

$$E_k = \frac{1}{2}\, m_e\, v^2$$

approssima molto bene l'espressione (più complessa) che fornisce la teoria della **Relatività Speciale** di Einstein per il calcolo di questa quantità.

Possiamo allora ricavare anche la **velocità massima** raggiunta dall'elettrone prima di entrare nel campo magnetico :

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\, E_{k,max}}{m_e}} \; = \; \sqrt{\frac{2\, \cdot 91 \text{ eV}}{0.5 \times 10^6 \text{ eV/c}^2}} \; = \; 0.02\, c \; = \; \boxed{6 \times 10^6 \text{ m/s}}$$

Dopo essere stato accelerato l'elettrone entra in una regione dove è presente un campo magnetico $\mathbf{B}$ uniforme e perpendicolare alla direzione del moto, quindi la particella è sottoposta alla **forza magnetica** di espressione **vettoriale**

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$ **forza di Lorentz**

ovvero l'elettrone subisce una **forza** :

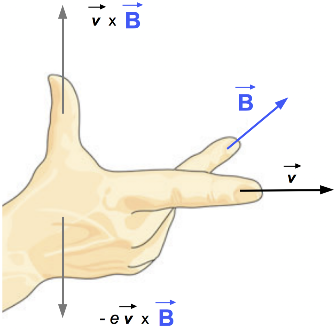
– di **modulo** pari a

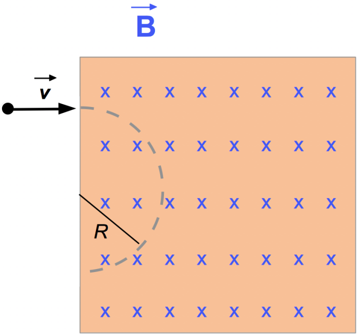
$$|\mathbf{F}| = q\,v\,B\,\sin\theta$$

essendo θ l'angolo tra il vettore velocità $\mathbf{v}$ e il vettore campo magnetico $\mathbf{B}$

– di **direzione** dato dalla **regola della mano destra**

– infine **verso** opportunamente determinato dal **segno della carica** (in questo caso negativa trattandosi di un elettrone)





- l'effetto della forza di Lorentz è allora quello di **curvare la traiettoria** dell'elettrone con una forza di modulo :

$$\theta = 90^\circ \quad \rightarrow \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{F}| = q\,v\,B = e\,v\,B$$

- essendo il campo **entrante** e la carica dell'elettrone **negativa** la forza è inizialmente rivolta verso il basso, quindi la traiettoria **devia verso il basso** percorrendo un **moto circolare uniforme**.

Trattandosi di un moto circolare sappiamo che è presente una **forza centripeta** di modulo

$$F = m_e \, \frac{v_{max}^2}{R} = \frac{2 \, E_{k,max}}{R}$$

pertanto **eguagliando forza centripeta e forza di Lorentz** otteniamo il **raggio di curvatura** richiesto :

$$F = m_e \, \frac{v_{max}^2}{R} = e \, v_{max} \, B \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{m_e \, v_{max}}{e \, B}}$$

Numericamente (torniamo anche ad utilizzare solo unità di misura del SI) :

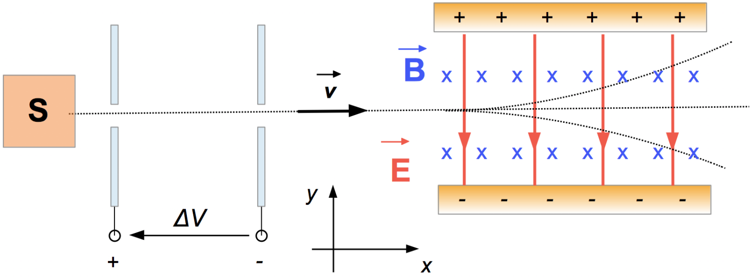
$$R = \sqrt{\frac{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 6 \times 10^{6} \text{ m/s}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 0.5 \times 10^{-4} \text{ T}}} = \boxed{0.8 \text{ m}}$$

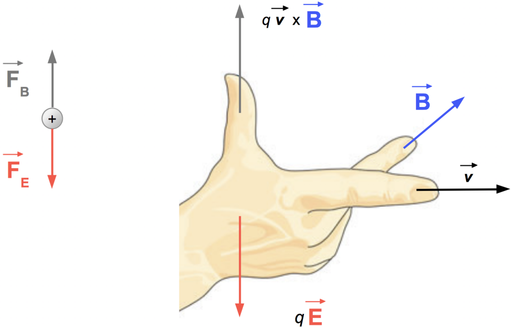
La tipica applicazione pratica di quanto visto in questo esercizio è quello che prende il nome di **spettrometro di massa**.

Esercizio 4

Un altro grande classico, il **selettore di velocità** :

Una sorgente genera un fascio di ioni positivi. La velocità iniziale degli ioni, dovuta ad agitazione termica, non è uniforme e non è nota a priori. Il fascio viene inizialmente **collimato** *per selezionare solo ioni con direzione della velocità parallela all'asse* x *e ulteriormente accelerato attraverso una differenza di potenziale. Il fascio viene poi fatto passare all'interno di un condensatore a facce piane parallele che genera un campo elettrico uniforme* $\mathbf{E}$*. Tra le armature del condensatore è anche presente un campo magnetico* $\mathbf{B}$ *ortogonale al campo elettrico. Determinare sotto quale condizione le particelle attraversano* **indeflesse** *il sistema*





La soluzione al problema è in realtà immediata, infatti si tratta solo di imporre una **condizione di equilibrio** tra le forze in gioco :

- gli ioni positivi ($q > 0$) entrano nel selettore con velocità $\mathbf{v}$ incognita (possiamo solo dire che avendo **collimato il fascio** la direzione è quella dell'asse x in figura, ma il **modulo** della velocità varia da ione a ione)

- su ciascuno ione di carica q agisce quindi sia la **forza elettrostatica** dovuta al campo elettrico sia la **forza magnetica** :

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

forza di Lorentz generalizzata

Dalla Meccanica sappiamo infine che un corpo **non cambia il suo stato di moto** se **la risultante delle forze è <u>nulla</u>** :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{cost.} \qquad \text{(I principio della dinamica)}$$

Come già discusso in precedenza possiamo del tutto **trascurare l'effetto della forza peso**. Gli ioni che attraversano **<u>indeflessi</u>** il selettore sono allora quelli per cui è nulla la forza di Lorentz :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \rightarrow \quad q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0}$$

Passando ai **moduli** e osservando che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ sono tra loro ortogonali ricaviamo infine la condizione :

$$\boxed{v = \frac{E}{B}} \qquad \underline{\textbf{selettore di velocità}}$$

Notare che questa condizione è del tutto **indipendente dal segno della carica** !

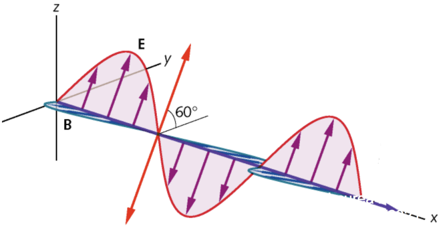
Onde elettromagnetiche

Esercizio 5

Un esercizio per rivedere tutte le proprietà delle onde elettromagnetiche :

Un'onda elettromagnetica **piana** *di frequenza* 7.5×10^{14} *Hz si propaga nel vuoto lungo l'asse* x. *Essa è* **polarizzata linearmente** *e il vettore campo elettrico* $\mathbf{E}$ *forma un angolo di* 60° *gradi rispetto al piano* xy *e ha ampiezza pari a 1 kV/m.*

- *calcolare la lunghezza d'onda*
- *calcolare velocità, frequenza e lunghezza d'onda in acqua (indice di rifrazione 1.333)*
- *calcolare le componenti e il modulo del campo magnetico associato all'onda*
- *determinare l'energia dei fotoni corrispondenti*



Cominciamo a rivedere passo passo cosa intendiamo "matematicamente" e "fisicamente" per *onda elettromagnetica*.

- sappiamo già che campo elettrico e campo magnetico sono **grandezze vettoriali** :

$$\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B}$$

- questi vettori sono definiti punto per punto nello spazio 3D, quindi in generale sono **campi vettoriali** :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$$

- fino ad ora il caso più semplice che abbiamo affrontato è stato quello di campi elettrici e magnetici **STATICI**, ovvero **costanti nel tempo** (esempio: campo elettrico presente tra le armature di un condensatore)

- nel caso più generale possibile però i vettori campo elettrico e campo magnetico possono <u>**anche variare nel tempo**</u>, quindi :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t) \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$$

In realtà campo elettrico e campo magnetico non sono "entità" fisiche indipendenti, infatti le **equazioni di Maxwell** ci dicono che

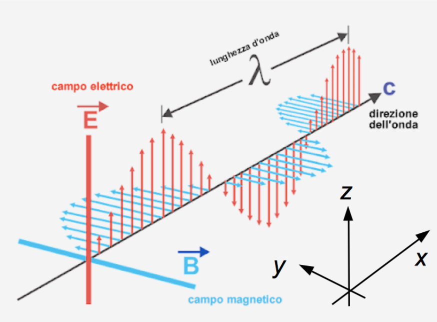
Un campo elettrico <u>variabile nel tempo</u> genera un campo magnetico...
e un campo magnetico <u>variabile nel tempo</u> genera un campo elettrico !

Esempio : un filo percorso da corrente elettrica (quindi carica elettrica in movimento) genera attorno a sè un campo magnetico ! (esperimento della bussola di Oersted)

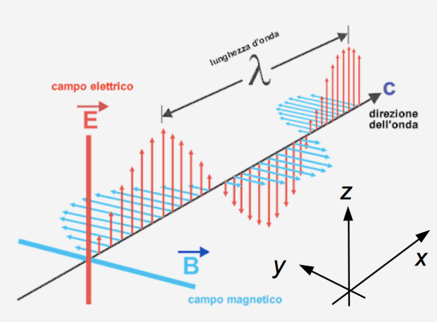
Il risultato più sorprendente è che questo è vero **anche in assenza di sorgenti** infatti

le equazioni di Maxwell, scritte in assenza di sorgenti, prevedono come soluzione l'esistenza di campi elettrici e magnetici che si **propagano** come **ONDE**, questo **ANCHE NEL VUOTO**

Campo elettrico e campo magnetico diventano allora due manifestazioni della stessa cosa, ovvero di un'**ONDA ELETTRO-MAGNETICA** appunto.



Dal punto di vista vettoriale questo significa che i vettori campo elettrico $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ e campo magnetico $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ **oscillano** punto per punto nello spazio con lo scorrere del tempo.



Da qui l'introduzione dei due **parametri fondamentali** di un'onda elettromagnetica :

– preso un punto (x, y, x) nello spazio, il modulo del vettore $\mathbf{E}$ (e a sua volta quello del vettore $\mathbf{B}$) oscilla nel tempo con una certa **frequenza** ν

– punto per punto quindi il vettore $\mathbf{E}$ è diverso, ma dopo una certa "distanza" tutto si ripete, questa è la **lunghezza d'onda** λ

– la **velocità** con cui l'onda avanza è il prodotto tra frequenza e lunghezza d'onda,

$$\boxed{v = \lambda\nu}$$

Tuttavia **direzione** e **modulo** del campo elettrico $\mathbf{E}$ e di quello magnetico $\mathbf{B}$ non sono tra loro scorrelati , infatti

1) il vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ e il vettore campo magnetico $\mathbf{B}$ sono **SEMPRE PERPENDICOLARI** (ortogonali) tra loro

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0}$$

2) il **rapporto** tra modulo del vettore campo elettrico e modulo del vettore campo magnetico è proprio la **velocità di propagazione** dell'onda elettromagnetica

$$\boxed{\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = v}$$

In assenza di materia (il vuoto) la soluzione delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti ci porta a ricavare che la velocità di propagazione di queste onde elettromagnetiche è proprio la **velocità della luce** :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}} = 2.9939245 \times 10^8 \ \text{m/s} \approx 3 \times 10^8 \ \text{m/s}}$$

Se l'onda attraversa **un mezzo** la velocità risulta invece essere più piccola :

$$\boxed{v = \frac{c}{n} \quad n \geq 1} \qquad n = \text{"indice di rifrazione"}$$

IMPORTANTE !

La presenza di un mezzo "altera" la capacità dell'onda di propagarsi **nello spazio**, **NON NEL TEMPO** ! Tradotto... dal vuoto ad un mezzo **cambia la lunghezza d'onda** λ, **NON CAMBIA LA FREQUENZA** ν ! (infatti la frequenza è determinata dal "generatore" che emette l'onda elettromagnetica)

Ultimo passo per la comprensione del fenomeno il concetto di **POLARIZZAZIONE**. Cosa possiamo ancora dire sulle variazioni nel tempo della **direzione** del vettore campo elettrico $\mathbf{E}$? (quello magnetico sarà poi sempre ortogonale)

– abbiamo detto che il **modulo** del vettore $\mathbf{E}$ oscilla con frequenza ν, ma...
– nel caso più generale possibile anche la **direzione** di questo vettore può cambiare nel tempo !

Dal momento che la "direzione" di un vettore è identificata dal **versore** di quel dato vettore, allora

$$\frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} = \hat{\mathbf{E}} = \text{"versore" del campo elettrico}$$

> la variazione nel tempo della **direzione** del vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ prende il nome di **POLARIZZAZIONE**

$$\boxed{\text{"polarizzazione"} = \hat{\mathbf{E}}(t)}$$

Introdotta questa definizione rigorosa capiamo subito che i casi possibili sono in realtà piuttosto limitati :

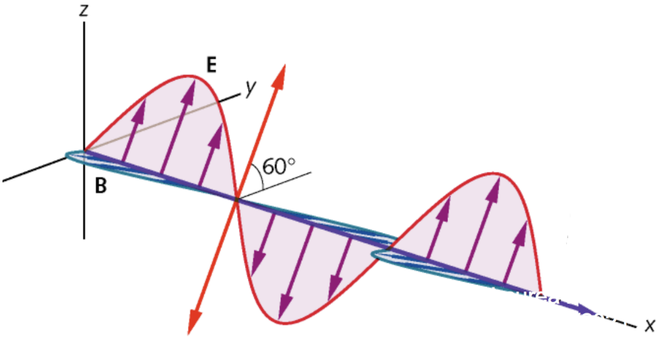
- la **direzione** del vettore campo elettrico **cambia <u>casualmente</u> nel tempo**, allora parliamo di onda **NON POLARIZZATA**

- la **direzione** del vettore campo elettrico resta invece **<u>costante</u> nel tempo**, allora parliamo di onda **POLARIZZATA LINEARMENTE**

$$\frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} = \text{cost.}$$

- esiste poi un caso più complicato in cui la direzione del vettore campo elettrico cambia nel tempo, ma lo fa in modo predicibile descrivendo un'ellisse oppure una circonferenza nel tempo, si parla allora di **POLARIZZAZIONE ELLITTICA** oppure **CIRCOLARE**

Nel caso particolare di onda polarizzata linearmente avremo allora che i vettori campo elettrico **oscillano sempre sullo stesso piano** !



Fatte queste premesse possiamo cominciare a rispondere ai quesiti dell'esercizio.

Lunghezza d'onda nel vuoto

Sappiamo che l'onda si propaga **nel vuoto** con frequenza nota $\nu = 7.5 \times 10^{14}$ Hz quindi :

$$c = \lambda_o \nu \quad \rightarrow \quad \lambda_o = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 4 \times 10^{-7} = 400 \text{ nm}$$

Si tratta di una radiazione **nel visibile**, in particolare corrispondente al colore **violetto** (estremo inferiore dello spettro visibile).

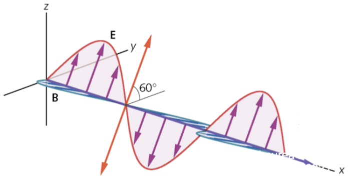
Parametri dell'onda in acqua

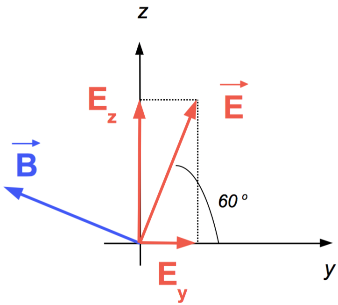
Nel passaggio dal vuoto ad un mezzo quale l'acqua dobbiamo tenere in conto dell'indice di rifrazione, in questo caso $n = 1.333$, allora :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1.333} = 0.75\, c = 2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$$

A questo punto **ATTENZIONE !** Perchè **LA FREQUENZA** dell'onda **NON CAMBIA** ! Quella che cambia è la lunghezza d'onda :

$$v = \lambda\, \nu = \frac{c}{n} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\, \nu} = \frac{\lambda_o}{n} = \frac{400 \text{ nm}}{1.333} = 300 \text{ nm}$$





Componenti del campo magnetico (nel vuoto)

In questo caso dobbiamo ricorrere al calcolo vettoriale, infatti sappiamo che il **vettore** campo magnetico $\mathbf{B}$ è perpendicolare a quello campo elettrico $\mathbf{E}$.
Ma sappiamo anche che l'onda è **polarizzata linearmente** con angolo $\theta = 60^\circ$ rispetto al piano xy, quindi il vettore campo elettrico ha sempre la stessa direzione nel tempo.

Ovviamente il **modulo** dei vettori campo elettrico e campo magnetico variano nel tempo (oscillano), quindi ragioniamo in termini di ampiezza massima :

- indichiamo con $|\mathbf{E_o}| = 1$ kV/m l'ampiezza del vettore campo elettrico quando raggiunge il suo valore massimo
- scomponiamo il vettore $\mathbf{E_o}$ rispetto agli assi y e z :

$$E_{oy} = E_o \cos 60° = \frac{E_o}{2} = 0.5 \text{ kV/m}$$
$$E_{oz} = E_o \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} E_o = 0.87 \text{ kV/m}$$

- sappiamo poi che il vettore campo magnetico è sempre **perpendicolare** a quello campo elettrico, quindi sarà anche

$$\mathbf{B_o} \cdot \mathbf{E_o} = 0$$

- sappiamo infine che il rapporto tra i moduli è proprio la velocità di propagazione, quindi

$$\frac{|\mathbf{E_o}|}{|\mathbf{B_o}|} = c$$

Possiamo allora determinare immediatamente il **modulo** del vettore campo magnetico :

$$|\mathbf{B_o}| = \frac{|\mathbf{E_o}|}{c} = \frac{10^3 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.3 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Per le componenti invece usiamo la condizione di ortogonalità, questo significa che

$$\mathbf{B_o} \cdot \mathbf{E_o} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{oy} B_{oy} + E_{oz} B_{oz} = 0$$

Si tratta allora solo di **scambiare opportunamente le componenti** :

$$B_{oy} = -\frac{E_{oz}}{c} = -\frac{\sqrt{3}\, E_o}{2\, c} = -2.9 \times 10^{-6} \text{ T}$$
$$B_{oz} = \frac{E_{oy}}{c} = \frac{E_o}{2c} = 1.7 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Osserviamo ancora che il risultato ottenuto per le componenti è coerente con il calcolo del modulo precedente, infatti :

$$|\mathbf{B_o}| = \sqrt{B_{oy}^2 + B_{oz}^2} = \sqrt{2.9^2 + 1.7^2} \times 10^{-6} \text{ T} = 3.3 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Energia dei fotoni

Per il calcolo dell'energia dei fotoni ricorriamo infine alla **formula di Plank** :

$$\boxed{E = h\,\nu = \frac{h\,c}{\lambda}}$$

Anche in questo caso risulta estremanente più comodo lavorare in termini di **elettronvolt**, in particolare è molto utile ricordare che

$$\boxed{h\,c \approx 1240 \text{ eV nm}}$$

Numericamente :

$$E = \frac{1240 \text{ eV nm}}{400 \text{ nm}} = 3.1 \text{ eV}$$