Esercitazioni per il Corso di Fisica

Polarizzazione della luce, onde sonore, ottica, raggi X

Dr. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

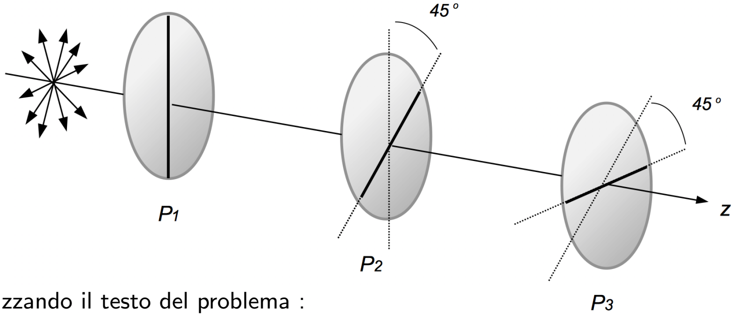
A.A. 2020/2021

15/01/2021

Esercizio 1

Sulla **polarizzazione** delle onde elettromagnetiche e la **legge di Malus** :

Un fascio di luce naturale attraversa una successione di tre polarizzatori, ciascuno dei quali ha asse di polarizzazione ruotato di $45°$ *rispetto al precedente. Determinare quale frazione dell'energia del fascio incidente è presente nel fascio uscente dal terzo polarizzatore*



Schematizzando il testo del problema :

– abbiamo tre **polarizzatori** che indichiamo con P_1, P_2 e P_3

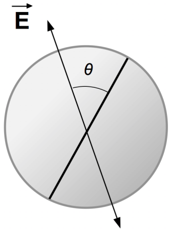
– sappiamo che ogni polarizzatore ha **asse di polarizzazione ruotato** di 45° rispetto al precedente

– osserviamo che non viene specificata la direzione dell'asse di polarizzazione del primo polarizzatore, quindi il risultato non dipenderà da come è ruotato il primo polarizzatore (senza perdere di generalità supponiamo ad esempio che P_1 abbia asse di polarizzazione orientato verticalmente)

– ricordiamo infine che la luce naturale **NON è polarizzata**, quindi il vettore campo elettrico che oscilla (in modulo) cambia continuamente nel tempo la sua **direzione di oscillazione** e lo fa **casualmente**

Si tratta ovviamente di applicare in successione la **legge di Malus** sulla polarizzazione :

$$\boxed{I = I_0 \ \cos^2 \theta}$$



con

- I_0 intensità dell'onda elettromagnetica incidente sul polarizzatore
- I intensità dell'onda elettromagnetica uscente dal polarizzatore
- θ angolo presente tra l'asse del polarizzatore e la direzione del campo elettrico che oscilla

Ricordiamo anche che quella chiamata **intensità** è semplicemente un'energia (J oppure eV) per unità di tempo (s) e unità di superficie (m^2).

Supponendo I_0 l'intensità dell'onda incidente (non specificata) calcoliamo allora in successione le intensità uscenti dai singoli polarizzatori :

- la luce che incide sul primo polarizzatore P_1 **non è polarizzata**, quindi in uscita da esso l'intensità è semplicemente **dimezzata** :

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

- dopo il secondo polarizzatore P_2 :

$$I_2 = I_1 \left(\cos 45^\circ\right)^2 = \frac{I_0}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{I_0}{2} \frac{2}{4} = \frac{I_0}{4}$$

- dopo il terzo polarizzatore P_3 infine :

$$I_3 = I_2 \left(\cos 45^\circ\right)^2 = \frac{I_0}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{I_0}{4} \frac{2}{4} = \frac{I_0}{8}$$

Ecco allora che la **frazione di energia** (che poi è anche la frazione di intensità) richiesta vale :

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{I_0/8}{I_0} = \frac{1}{8}$$

Alcune osservazioni conclusive :

- dopo il terzo polarizzatore la polarizzazione del fascio di luce è **ortogonale** a quella del fascio uscente dal primo polarizzatore
- questo risultato (rotazione di 90° del piano di polarizzazione) può essere ottenuto solo usando **almeno due polarizzatori** (non posso usare un unico polarizzatore per il quale $\theta = 90^\circ$, altrimenti $I = 0$ in quanto $\cos 90^\circ = 0$)

Dimostrare il fatto che in uscita dal primo polarizzatore l'intensità sia **dimezzata** richiede invece il calcolo di un integrale, infatti :

- come già ricordato essendo luce **non polarizzata** la direzione di oscillazione del campo elettrico cambia **casualmente** nel tempo
- essendo una situazione **casuale** si deve quindi calcolare il **valore medio dell'intensità**, quindi il valore medio della quantità $I_0 \cos^2 \theta$
- in definitiva quindi si deve calcolare il valore medio di $\cos^2 \theta$ sull'angolo giro che vale appunto $1/2$:

$$< \cos^2 \theta > = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2}$$

Onde sonore

Esercizio 2

Veramente semplice, per cominciare :

Un ultrasuono di frequenza 2.5 MHz viene utilizzato per fare un'ecografia ad un rene. Supponendo che il rene si trovi ad una profondità di 4 cm, calcolare :

- *la velocità degli ultrasuoni nei tessuti sapendo che l'onda sonora riflessa viene misurata dopo un'intervallo di tempo di 52* μ*s*
- *la lunghezza d'onda dell'ultrasuono*

- tra l'emissione e la ricezione dell'ultrasuono riflesso dal rene l'onda percorre due volte la distanza $d = 4$ cm in un tempo $t = 52\ \mu$s

- applichiamo quindi la definizione cinematica di velocità per determinare la **velocità** dell'onda :

$$v = \frac{2\,d}{t} = \frac{8 \times 10^{-2}\ \mathsf{m}}{52 \times 10^{-6}\ \mathsf{s}} = \boxed{1538\ \mathsf{m/s}}$$

- nota la frequenza e la velocità ricaviamo infine la **lunghezza d'onda** :

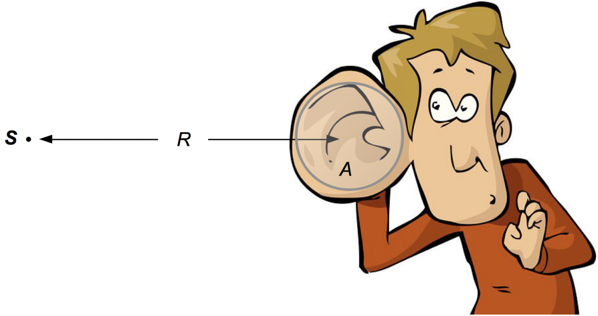
$$v = \lambda\,\nu \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1538\ \mathsf{m/s}}{2.5 \times 10^{6}\ \mathsf{1/s}} = \boxed{615 \times 10^{-6}\ \mathsf{m} = 615\ \mu\mathsf{m}}$$

Esercizio 3

Un semplice esercizio sull'utilizzo del **decibel** :

Un orecchio la cui superficie del padiglione auricolare è di 9 cm^2 riceve un'onda sonora di 60 dB proveniente da una sorgente posta ad una distanza di 1.2 m. Determinare :

- *l'intensità dell'onda sonora*
- *la potenza sonora che investe il padiglione auricolare*
- *l'intensità sonora se la sorgente viene posta a 2 m*



Cosa sappiamo dal testo del problema :

- l'onda sonora ha **intensità** (relativa) espressa in **decibel** pari a 60 dB
- la superficie del padiglione auricolare vale $A = 9$ cm$^2 = 9 \times 10^{-4}$ m^2
- la sorgente si trova inizialmente alla distanza $R_1 = 1.2$ m, poi viene allontanata a distanza $R_2 = 2$ m
- sicuramente essendo $R_2 > R_1$ ci dobbiamo già aspettare di trovare numericamente $I_2 < I_1$

Per prima cosa richiamiamo ovviamente la definizione di **<u>decibel</u>** usata per esprime l'**intensità <u>relativa</u>** di un'onda sonora :

$$\boxed{\beta = 10\ \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

- utilizzo un **logaritmo in base 10** perchè questo è molto comodo quando ho a che fare con valori di intensità sonora che variano su **molti ordini di grandezza** (ad esempio l'intervallo di udibilità dell'orecchio umano varia su ben 12 ordini di grandezza !)
- l'argomento del logaritmo deve essere una quantità **adimensionale**, quindi devo necessariamente dividere l'intensità I che voglio quotare in decibel su una certa **intensità di riferimento** I_0
- la scelta del valore I_0 ovviamente è del tutto arbitraria, quella fatta in acustica è di utilizzare la **soglia di udibilità dell'orecchio umano** per la quale

$$\boxed{I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} = 1\ \mathrm{pW/m^2}}$$

Possiamo allora ricavare immediatamente l'intensità dell'onda sonora invertendo la definizione di decibel :

$$\beta = 10\ \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow \quad \frac{\beta}{10} = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{I}{I_0} = 10^{\ \beta/10}$$

ovvero

$$\boxed{I = I_0 \times 10^{\ \beta/10}}$$

Numericamente :

$$\beta = 60 \quad \rightarrow \quad I = 10^{-12}\ \mathsf{W/m^2} \times 10^{60/10} = \boxed{10^{-6}\ \mathsf{W/m^2}}$$

IMPORTANTE !

Il "decibel" è un'unità di misura **ADIMENSIONALE** ! Come il "radiante" !

Ricordando poi la definizione di intensità come **potenza per unità di area**

$$I = \frac{P}{A}$$

e nota la superficie A del padiglione auricolare calcoliamo la potenza dell'onda sonora :

$$P = IA = (10^{-6}\ \mathsf{W/m^2}) \cdot (9 \times 10^{-4}\ \mathsf{m^2}) = \boxed{9 \times 10^{-10}\ \mathsf{W}}$$

Per capire infine come cambia l'intensità **allontanando la sorgente** dobbiamo ricordare che le onde sonore generate dalla sorgente si stanno propagando attraverso **superfici sferiche**, quindi

$$I(R) = \frac{P}{4\,\pi\,R^2} \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{P}{4\,\pi\,{R_1}^2} \quad , \quad I_2 = \frac{P}{4\,\pi\,{R_2}^2}$$

Le intensità quindi scalano con l'inverso del **quadrato della distanza** :

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_1\,\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

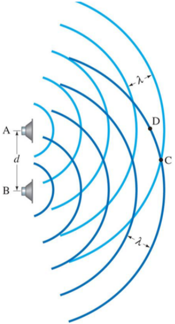
Numericamente :

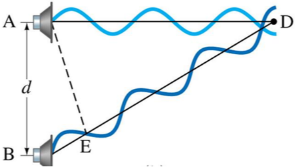
$$I_2 = (10^{-6}\ \mathsf{W/m^2}) \cdot \left(\frac{1.2\ \mathsf{m}}{2\ \mathsf{m}}\right)^2 = \boxed{0.36 \times 10^{-6}\ \mathsf{W/m^2}}$$

Esercizio 4

Un esercizio sull'**interferenza** tra onde sonore :

Due altoparlanti sono posti ad una certa distanza. Una persona si trova a 4 m da uno dei due altoparlanti. Determinare a quale distanza si deve trovare dal secondo altoparlante per poter rilevare <u>interferenza distruttiva</u> quando il suono emesso ha frequenza 1.15 kHz (assumere per la velocità del suono in aria 343 m/s).





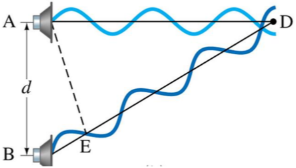
Considerando i due altoparlanti come sorgenti di onde circolari, abbiamo che :

- per avere **interferenza costruttiva** (si sommano due massimi) le differenze di cammino sono **multipli interi della lunghezza d'onda**

$$\lambda\ ,\ 2\,\lambda\ ,\ 3\,\lambda ... \quad \rightarrow \quad \boxed{n\,\lambda\ ,\ n = 0, 1, 2, ...}$$ **<u>interferenza costruttiva</u>**

- per avere **interferenza distruttiva** (si sommano un massimo e un minimo) le differenze di cammino sono **multipli DISPARI della semi-lunghezza d'onda**

$$\frac{\lambda}{2}\ ,\ 3\frac{\lambda}{2}\ ,\ 5\frac{\lambda}{2} ... \quad \rightarrow \quad \boxed{(2\,n+1)\,\frac{\lambda}{2}\ ,\ n = 0, 1, 2, ...}$$ **<u>interferenza distruttiva</u>**



Per prima cosa ricaviamo allora la lunghezza d'onda dell'onda sonora :

$$v = \lambda \nu \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{343 \text{ m/s}}{1150 \text{ 1/s}} = 0.3 \text{ m}$$

Fissata poi la distanza $\overline{AD} = 4$ m dal primo altoparlante dobbiamo imporre che sia

$$\overline{BD} - \overline{AD} = \pm \frac{\lambda}{2}$$

Abbiamo quindi due possibili soluzioni :

$$\overline{BD} = \overline{AD} \pm \frac{\lambda}{2} = 4 \text{ m} \pm 0.15 \text{ m}$$

Numericamente :

$$\overline{BD}_{+} = 4 \text{ m} + 0.15 \text{ m} = 4.15 \text{ m} \qquad \overline{BD}_{-} = 4 \text{ m} - 0.15 \text{ m} = 3.85 \text{ m}$$

Ottica geometrica

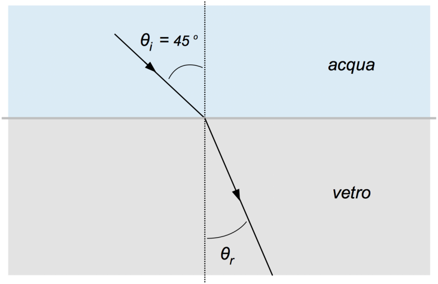
Esercizio 5

Un grande classico, sulla **rifrazione** della luce e la **legge di Snell** :

Un raggio di luce di lunghezza d'onda 590 nm viaggia in acqua (indice di rifrazione 1.333) e poi incide con un angolo di $45°$ *su una finestra di vetro (indice di rifrazione 1.5). Calcolare :*

$a)$ *il valore dell'angolo di rifrazione*

$b)$ *la frequenza della luce in acqua e nel vetro*



Si tratta di applicare la **legge di Snell** per la **rifrazione della luce** :

$$\boxed{n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r}$$

con

- θ_i angolo di incidenza, θ_r angolo di rifrazione
- n_i e n_r indici di rifrazione dei due messi

IMPORTANTE !

Tutti gli angoli sono misurati **rispetto alla normale** alla superficie !

Ricaviamo allora l'angolo di rifrazione come :

$$\sin\theta_r = \frac{n_i}{n_r}\sin\theta_i \quad \rightarrow \quad \theta_r = \arcsin\left(\frac{n_i}{n_r}\sin\theta_i\right)$$

Numericamente :

$$\begin{aligned} \theta_r = \arcsin\left(\frac{1.333}{1.5}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad &= \quad \arcsin 0.628 \\ &= \quad 0.68 \text{ rad} \cdot \frac{360^\circ}{2\,\pi \text{ rad}} \;=\; \boxed{39^\circ} \end{aligned}$$

Attenzione a lavorare correttamente con **radianti** e **gradi sessagesimali** usando la funzione **arcoseno** sulla calcolatrice !

Osserviamo che essendo $n_r > n_i$ (il vetro è più denso dell'acqua) abbiamo ottenuto correttamente $\theta_r < \theta_i$, ovvero il raggio di luce si avvicina alla normale.

Per il calcolo della **frequenza** nei due mezzi invece ...

NON FATEVI FREGARE !

Abbiamo infatti già ricordato che la frequenza di un'onda elettromagnetica è una **proprietà della sorgente** che emette l'onda, **NON del mezzo attraversato** !

Nel passaggio dall'acqua al vetro quindi **la frequenza della luce NON cambia**, cambia invece la lunghezza d'onda :

$$\nu_i = \nu_r = \nu \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_r$$

Dalla relazione tra velocità della luce in un mezzo, frequenza e lunghezza d'onda allora :

$$v_i = \frac{c}{n_i} = \lambda_i \, \nu \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{v_i}{\lambda_i} = \frac{c}{n_i \, \lambda_i}$$

Numericamente :

$$\nu = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{(1.333) \cdot (590 \times 10^{-9} \text{ m})} = \boxed{3.8 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

Per completezza calcoliamo ancora la lunghezza d'onda della luce nel vetro :

$$v_r = \frac{c}{n_r} = \lambda_r \, \nu \quad \rightarrow \quad \lambda_r \; = \; \frac{c/n_r}{\nu} \; = \; \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.5 \cdot (3.8 \times 10^{14} \text{ 1/s})} \; = \; 526 \text{ nm}$$

Raggi X e legge di attenuazione

Esercizio 6

Sulla **legge esponenziale di attenuazione** dei raggi X :

Un fascio monocromatico di raggi X usato per la radiodiagnostica ha energia 0.1 keV e attraversa uno strato di tessuto di 10 cm. Determinare :

- *frequenza e lunghezza d'onda dei fotoni*
- *il valore del coefficiente di attenuazione sapendo che il fascio è attenuato di un fattore* 4.5×10^{-5} *dopo aver attraversato lo strato di tessuto*

Alcuni richiami e definizioni sui raggi X :

- si tratta sempre di **radiazione elettromagnetica**, quindi **fotoni**
- vengono generati come **radiazione di frenamento** (*bremsstrahlung*) oppure come risultato di **transizioni di elettroni** tra **livelli energetici**, quindi hanno origine a livello atomico (all'opposto invece, i raggi γ sono originati da processi di diseccitazione o decadimenti a livello di nucleare)
- energie tipiche in ambito medico sono circa 100 eV per la **radiodiagnostica** fino a circa 108 eV per la **radioterapia**
- quando si parla di un **fascio monocromatico** significa che i fotoni hanno tutti **la stessa energia**

Per il calcolo dell'**energia dei fotoni** assumiamo indice di rifrazione $n = 1$ (in aria $n = 1.0002926$ per $\lambda = 589.3$ nm) e utilizziamo la **formula di Planck** :

$$E = h\,\nu = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda \text{ (nm)} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{E \text{ (eV)}}$$

Numericamente :

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV nm}}{100 \text{ eV}} = \boxed{124 \text{ nm}}$$

Per la frequenza invece :

$$c = \lambda\,\nu \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{124 \times 10^{-9} \text{ m}} = \boxed{2.4 \times 10^{16} \text{ Hz}}$$

Nell'attraversare uno spessore x di materiale (tessuto in questo caso) l'intensità del fascio subisce poi **attenuazione** secondo la **legge esponenziale dell'attenuazione** :

$$\boxed{I(x) = I_0 \, e^{-\mu \, x}}$$

legge di Lambert-Beer

dove

- x è lo **spessore** di materiale attraversato
- I_0 è l'intensità iniziale del fascio (prima di penetrare nel materiale)
- μ è il **coefficiente di attenuazione**, da determinare

Notare che in termini di fotoni **intensità** significa **numero di fotoni** per unità di tempo e unità di superficie !

Dal testo del problema sappiamo che dopo uno spessore $x = 10$ cm il fascio si è attenuato di un fattore 4.5×10^{-5}, questo significa che :

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu\, x} = 4.5 \times 10^{-5}$$

Passando al **logaritmo <u>naturale</u>** :

$$-\mu\, x = \ln\left(4.5 \times 10^{-5}\right) \quad \rightarrow \quad \mu = -\frac{1}{x} \ln\left(4.5 \times 10^{-5}\right)$$

Numericamente :

$$\mu = -\frac{1}{10\ \text{cm}} \cdot (-10) \ = \ \boxed{1\ \text{cm}^{-1}}$$

<u>ATTENZIONE !</u>

Sulla **calcolatrice** dovete utilizzare correttamente il logaritmo in base e (tasto **ln**), non il logaritmo in base 10 (tasto **log**) !