Esercitazioni per il Corso di Fisica

Cinematica del punto

Dr. Luca Pacher

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

27/10/2020

Esercizio 1

Un tipico problema di sicurezza stradale:

Il pilota di un automezzo che viaggia a 144 km/h vede un improvviso ostacolo in mezzo alla strada e frena. Sapendo che il tempo di reazione del pilota è di 0.2 s e che l'automezzo è in grado di produrre una **decelerazione costante** *di 10 m/s ^{2}, calcolare :*

a) in quanto tempo l'automezzo si ferma (tempo di arresto complessivo)

b) quale spazio ha percorso da quando il conducente ha visto l'ostacolo

- Riportiamo innanzitutto i dati iniziali nelle unità di misura del SI :

$$v_0 = 144 \text{ km/h} = 144 \ \cdot (10^3 \text{ m}/3600 \text{ s}) = 40 \text{ m/s}$$

- Cerchiamo di comprendere il testo e tradurre le richieste in linguaggio matematico :

$$\begin{array}{ll} t = t_0,\ x = x_0,\ v(t_0) = v_0 & \text{il pilota vede l'ostacolo} \\ t = t_1,\ x = x_1,\ v(t_1) = v_1 & \text{il pilota comincia a frenare} \\ t = t_2,\ x = x_2,\ v(t_2) = v_2 & \text{l'auto si ferma} \end{array}$$

- $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ è il tempo di reazione in cui percorro $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ con **velocità costante**
- $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ è il tempo di frenata in cui percorro $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ con **accelerazione costante**
- dal momento che **decelero**, **l'accelerazione è <u>negativa</u>**, $a = -10$ m/s^2

Cosa è richiesto nell'esercizio :

$$\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

$$\Delta x_{tot} = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

La scelta dell'**origine** del nostro sistema di riferimento (x, t) è **arbitraria**, mettiamoci nella condizione più semplice :

$$(x_0\,, t_0) = (0\,, 0)$$

Tenendo conto del tempo di reazione del pilota, l'automezzo percorre un certo spazio con **moto rettilineo uniforme** prima di iniziare la frenata :

$$t_1 = 0.2 \text{ s}, \quad v_0 = v_1 = 40 \text{ m/s}$$

$$x(t = t_1) = \cancel{x_0} + v_0(t_1 - \cancel{t_0}) = \left(40 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times 0.2 \text{ s} = 8 \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta t_1 = 0.2 \text{ s} \quad \Delta x_1 = 8 \text{ m}}$$

- Dopo il tempo di reazione del pilota, l'auto inizia a frenare con decelerazione costante 10 m/s^2... utilizzo le equazioni del **moto uniformemente accelerato** !
- dal momento che l'auto alla fine si ferma posso **imporre che la velocità finale sia nulla** :

$$v(t = t_2) = 0 \text{ m/s}$$

- applico la **legge oraria** che lega velocità-tempo nel moto uniformemente accelerato :

$$v(t_2) = v(t_1) + a(t_2 - t_1)$$

- ricavo il **tempo di frenata** del veicolo :

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{a} = \frac{-40 \text{ m/s}}{-10 \text{ m/s}^2} = 4 \text{ s}$$

In questo intervallo di tempo l'auto percorre una distanza :

$$\begin{aligned}\Delta x_2 = x(t_2) - x(t_1) &= v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2 \\ &= 40\ \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}} \cdot 4\ \mathsf{s} + \frac{1}{2}\left(-10\ \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}\right)(4\ \mathsf{s})^2 = 80\ \mathsf{m}\end{aligned}$$

Complessivamente quindi l'automezzo si ferma in un tempo

$$\boxed{\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 4.2\ \mathsf{s}}$$

dopo aver percorso una distanza

$$\boxed{\Delta x_{tot} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 88\ \mathsf{m}}$$

Esercizio 2

Sul moto verticale dei corpi :

Una palla è lanciata verso l'alto con una velocità iniziale di 30 m/s, calcolare il tempo impiegato per ricadere alla posizione iniziale e l'altezza massima raggiunta dalla palla.

- il moto avviene sotto l'effetto dell'**accelerazione di gravità**, il cui valore locale in prossimità della superficie terrestre vale circa :

$$\boxed{g = 9.81\ \text{m/s}^2}$$

- si tratta di un moto rettilineo (avviene lungo la verticale) **uniformente**
  - **decelerato** verso l'alto
  - **accelerato** verso il basso

- scegliamo **<u>a piacere</u> un verso per il nostro <u>sistema di riferimento</u>**, ad esempio $z > 0$ verso l'alto a partire da $z = 0$ in cui lancio la palla con velocità iniziale $v_0 = 30$ m/s

Con queste premesse possiamo scrivere che :

- **la velocità diminuisce** mano a mano che la palla sale di altezza, con legge oraria

$$\boxed{v(t) = v_0 - g\ t}$$

- la palla raggiunge **altezza massima** z_{max} al tempo t_{max} e **si ferma** :

$$v(t = t_{max}) = 0 \ \rightarrow \ \ t_{max} = \frac{v_0}{g} = \frac{30 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = \ 3.06 \text{ s}$$

- ovviamente il moto è poi simmetrico verso il basso, quindi il **tempo totale** impiegato per ricadere alla posizione iniziale è il doppio :

$$\Delta t_{tot} = 2\ t_{max} = 7.12 \text{ s}$$

L' **altezza massima** z_{max} raggiunta dalla palla può essere calcolata in diversi modi, alcuni più furbi degli altri :

- noto t_{max}, utilizzo la legge quadratica del moto... non conviene !

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \;\rightarrow\; z_{max} = v_0 t_{max} - \frac{1}{2}\, g\, t_{max}^2$$

- conosco velocità iniziale/finale e accelerazione :

$$v^2 - v_0^2 = -2g(z - z_0) \;\rightarrow\; z_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(30\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9.81\ \mathrm{m/s}^2} = \boxed{45.9\ \mathrm{m}}$$

- posso semplicemente **utilizzare la definizione di velocità media** :
(il modo più semplice e immediato ...)

$$v_m = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_{max}}{t_{max}} = \frac{v_0}{2} \;\rightarrow\; z_{max} = \frac{v_0}{2}\, t_{max} = (15\ \mathrm{m/s}) \cdot (3.06\ \mathrm{s}) = 45.9\ \mathrm{m}$$

Esercizio 3

Sulle *condizioni iniziali* nelle leggi orarie:

Due ciclisti iniziano una gara di 10 km. Se il primo ciclista viaggia con velocità costante 50 km/h e il secondo con velocità 30 km/h calcolare :

- *di quanto può ritardare la partenza il primo per poter ancora vincere la gara*
- *il vantaggio minimo (in termini di distanza) che può avere il secondo per poter vincere la gara*

Primo passo... formalizzare il problema in linguaggio matematico !

- chiamiamo A e B i due ciclisti
- abbiamo a che fare con **due moti rettilinei uniformi <u>indipendenti</u>** ...
- ... quindi scriviamo per i due ciclisti **<u>due leggi orarie del tutto generali</u>** :

$$x_a(t) = x_{0a} + v_a\ (t - t_{0a}) \quad \text{con } v_a = 50 \text{ km/h}$$

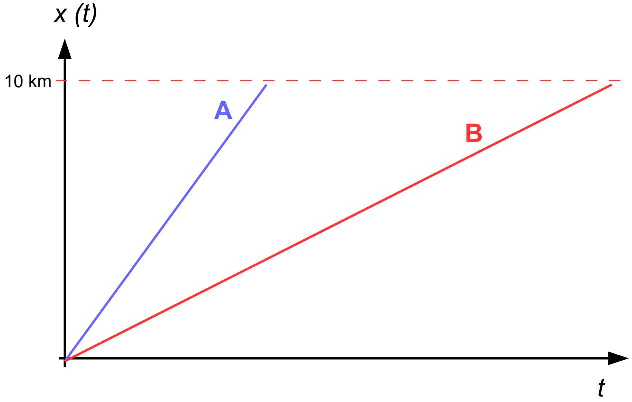
$$x_b(t) = x_{0b} + v_b\ (t - t_{0b}) \quad \text{con } v_b = 30 \text{ km/h}$$

- la distanza totale percorsa vale :

$$L = 10 \text{ km}$$

- *"partire dopo"* oppure *"avere un vantaggio"* significa **lavorare sulle <u>condizioni iniziali</u>**

Chiaramente essendo il ciclista A più veloce del ciclista B ...
senza ritardi o vantaggi è il ciclista A a vincere la gara.



Primo caso: quanto **tempo di ritardo** il ciclista più veloce può permettersi per vincere comunque la gara ?

- i due ciclisti partono comunque dallo stesso punto, scegliamo $x = 0$:

$$x_{0a} = x_{0b} = 0$$

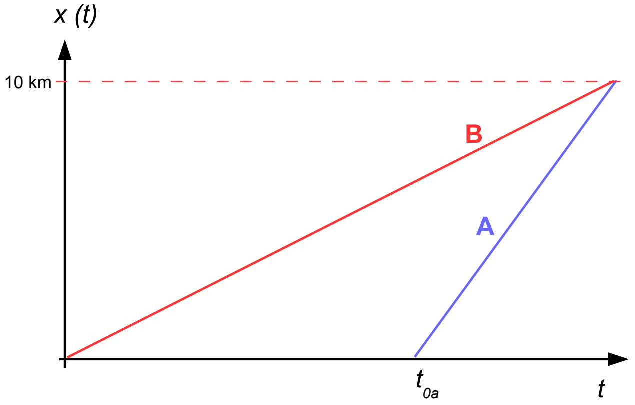
- MA ... il ciclista A parte DOPO :

$$t_{0b} = 0 \ , \ t_{0a} \neq 0$$

- le equazioni del moto sono quindi :

$$\begin{cases} x_a(t) = v_a \ (t - t_{0a}) \\ \\ x_b(t) = v_b \ t \end{cases}$$

Dal punto di vista **geometrico** avere $(t - t_{0a})$ nell'equazione di una retta significa ... **<u>traslare</u> la legge oraria** del ciclista A verso destra !



- il ciclista B percorre la distanza L in un tempo :

$$t_b = \frac{L}{v_b}$$

- il ciclista A percorre la stessa distanza L in un tempo :

$$t_a = t_{0a} + \frac{L}{v_a}$$

- per **vincere comunque la gara** devo chiedere che sia :

$$t_a < t_b \quad \rightarrow \quad t_{0a} + \frac{L}{v_a} < \frac{L}{v_b} \quad \rightarrow \quad t_{0a} < L\left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_a}\right)$$

Numericamente :

$$\rightarrow\; t_{0a} < L\left(\frac{v_a - v_b}{v_a\; v_b}\right) = 10\ \text{km}\left(\frac{50-30}{50\cdot 30}\right)\frac{\text{h}}{\text{km}} = 0.13\ \text{h}$$

$$0.13\ \text{h} = 0.13\ \text{h} \times \frac{60\ \text{min}}{\text{h}} = \boxed{\;7.8\ \text{min}\;}$$

Secondo caso : quanto **vantaggio in termini di distanza** il ciclista B deve prendersi per poter invece vincere la gara ?

- i due ciclisti partono questa volta allo stesso tempo, scegliamo $t = 0$:

$$t_{0a} = t_{0b} = 0$$

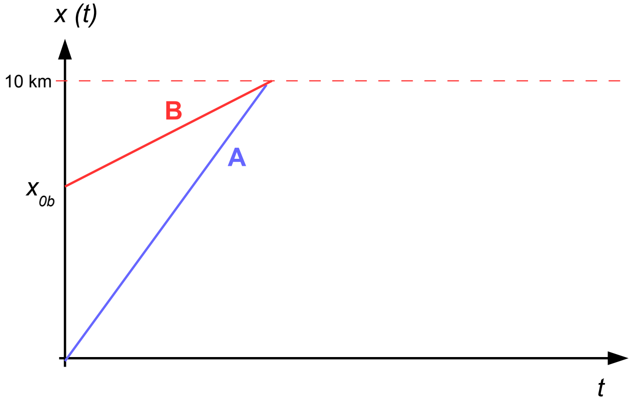
- MA ... il ciclista B parte PIÙ AVANTI !

$$x_{0a} = 0 \ , \ x_{0b} \neq 0$$

- le equazioni del moto sono quindi :

$$\begin{cases} x_a(t) = v_a \ t \\ \\ x_b(t) = x_{0b} + v_b \ t \end{cases}$$

Questa volta dal punto di vista **geometrico** avere un termine noto x_{0b} significa ... **traslare la legge oraria** del ciclista B verso l'alto !



– questa volta il ciclista B percorre una distanza $L - x_{0b}$ in un tempo :

$$t_b = \frac{L - x_{0b}}{v_b}$$

– mentre il ciclista A impiega un tempo :

$$t_a = \frac{L}{v_a}$$

– perchè il ciclista B più lento possa vincere la gara devo chiedere che sia :

$$t_b < t_a \quad \rightarrow \quad \frac{L - x_{0b}}{v_b} < \frac{L}{v_a} \quad \rightarrow \quad x_{0b} > L\left(1 - \frac{v_b}{v_a}\right)$$

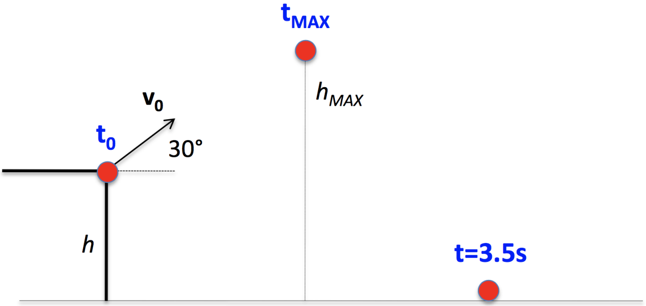
Numericamente :

$$\rightarrow \; x_{0b} > 10 \text{ km}\left(1 - \frac{30 \text{ km/h}}{50 \text{ km/h}}\right) = \boxed{4 \text{ km}}$$

Esercizio 4

Sul moto parabolico dei corpi :

Una pallina lanciata da un'altezza h con modulo di velocità $v_0 = 10$ m/s e angolo 30 gradi colpisce il suolo dopo 3.5 s. Determinare l'altezza h da cui è stata lanciata la pallina e l'altezza massima h_{max} da essa raggiunta.



- La traiettoria della pallina è di tipo **parabolico** ed è il risultato della **combinazione di 2 moti**

  – moto rettilineo uniforme lungo l'asse x :

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$

  – moto uniformemente accelerato lungo l'asse y :

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \;\; \rightarrow \;\; y_0 = h \text{ (prima incognita del problema)}$$

- La velocità iniziale è **un vettore di <u>componenti</u>** :

$$\boxed{v_{0x} = v_0 \;\cos\theta} \qquad \boxed{v_{0y} = v_0 \;\sin\theta}$$

$$\rightarrow \; v_{0x} = \; 10 \;\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}} \;\cos 30^\circ \quad v_{0y} = \; 10 \;\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}} \;\sin 30^\circ$$

Ricordiamo anche che :

$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

Dal testo del problema possiamo imporre che :

$$y(t = 3.5 \text{ s}) = 0 \text{ m}$$

$$\rightarrow \quad 0 \text{ m} = h + 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \ \sin 30^\circ \times 3.5 \text{ s} - \frac{9.81}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (3.5 \text{ s})^2 \ \rightarrow \ h = \ 42.5 \text{ m}$$

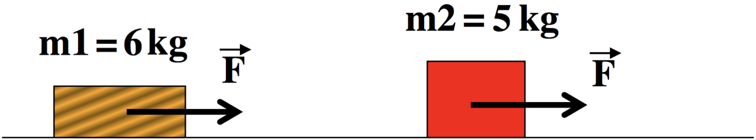
Quando la pallina raggiunge l'altezza massima la sua velocità sull'asse y è nulla, quindi :

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \ 0.51 \text{ s}$$

$$h_{max} = h + \frac{v_{0y}}{2} t_{max} = h + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} = \boxed{43.8 \text{ m}}$$

Un primo esempio di come sia la **dinamica** a determinare la **cinematica** :

Su due corpi di massa 6 kg e 5 kg inizialmente fermi agisce **una forza costante** *di 3 N. Dopo quanto tempo il corpo più leggero acquista la stessa velocità raggiunta da quello più pesante in un tempo di 10 s ?*



- chiamiamo le due masse m_1 e m_2
- per il **secondo principio della dinamica** :

$$\boxed{F = m\,a}$$ **legge di Newton**

- calcoliamo **le accelerazioni** sulle due masse :

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{3\ \mathrm{N}}{6\ \mathrm{kg}} = 0.5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{3\ \mathrm{N}}{5\ \mathrm{kg}} = 0.6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- l'accelerazione è costante, quindi ogni massa si muove di **moto uniformemente accelerato** :

$$v_1(t) = v_{01} + a_1\,t$$
$$v_2(t) = v_{02} + a_2\,t$$

– le due masse sono **inizialmente ferme**, quindi :

$$v_{01} = v_{02} = 0$$

– assumendo $t_1 = 10$ s, il problema chiede di trovare il tempo t_2 per il quale le due masse hanno la stessa velocità :

$$v_1\,(t_1) = v_2\,(t_2)$$

$$\rightarrow\ a_1\ t_1 = a_2\ t_2\ \rightarrow\ \ t_2 = t_1\,\frac{a_1}{a_2} = t_1\ \left(\frac{F/m_1}{F/m_2}\right) = t_1\,\frac{m_2}{m_1}$$

Numericamente :

$$t_2 = 10\ \text{s}\ \cdot\ \frac{5\ \text{kg}}{6\ \text{kg}} = \boxed{\ 8.3\ \text{s}\ }$$